# Komplexní čísla a funkce

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

# KOMPLEXNÍ ČÍSLA A FUNKCE

19

Vydal Matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JIŘÍ JARNÍK

# komplexní čísla a funkce

PRAHA 1967
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
A ÚV ČSM V NAKLADATELSTVÍ
MLADÁ FRONTA

*Recenzovali dr. Jaroslav Fuka a dr. Jaroslav Morávek*

# PŘEDMLUVA

Knížka, kterou berete do rukou, je věnována komplexním číslům. Protože jejich hlavní význam spočívá v teorii komplexních funkcí, pokusili jsme se aspoň naznačit, jakým způsobem se takové funkce vyšetřují. Hlavním cílem knížky je ovšem opakování a prohloubení znalostí algebry komplexních čísel.

Hodně místa je věnováno geometrickému znázornění komplexních čísel, které je významnou pomůckou i ve skutečně obtížných problémech. Používejte ho co nejvíce, neboť i když nemůže nahrazovat matematické metody důkazů, názorně ukazuje, že komplexní čísla jsou spjata se skutečností právě tak jako čísla reálná.

# ÚVOD

Definici a základní vlastnosti komplexních čísel jste poznali ve škole. Víte, že komplexní čísla nejsou o nic méně — a o nic více — „skutečná" než čísla reálná. S jejich pomocí se řeší úlohy v aplikované matematice, fyzice i technice, které by jinak bylo možno řešit jen s velkými obtížemi.

Než začneme řešit příklady, na nichž si ukážeme různé vlastnosti komplexních čísel, zopakujme si alespoň stručně jejich definici i definice základních operací.

Definice. *Jsou-li $a_1$, $a_2$ reálná čísla, pak uspořádaná dvojice $(a_1, a_2)$ se nazývá komplexní číslo. První číslo ve dvojici se nazývá reálná část, druhé číslo imaginární část komplexního čísla.*

*Dvě komplexní čísla jsou si rovna, rovnají-li se sobě navzájem jejich reálné části i jejich imaginární části:*

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$$

*znamená totéž jako dvě rovnosti reálných čísel $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.*

*Součtem komplexních čísel $(a_1, a_2)$ a $(b_1, b_2)$ nazýváme komplexní číslo $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.*

*Součinem komplexních čísel $(a_1, a_2)$ a $(b_1, b_2)$ nazýváme komplexní číslo $(a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$.*

*Prostou (absolutní) hodnotou komplexního čísla $(a_1, a_2)$ nazýváme reálné (nezáporné) číslo $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.*

Tyto definice tvoří základ algebry komplexních čísel.

Dosadíme-li za imaginární části všech komplexních čísel v našich definicích nulu, dostaneme definice, které se liší jen formou zápisu od definicí rovnosti a aritmetických operací pro reálná čísla. Můžeme proto ztotožnit komplexní číslo $(a, 0)$ s reálným číslem $a$. Tímto ztotožněním se množina reálných čísel stává částí množiny čísel komplexních, což je pro naše další úvahy důležité.

Pamatujete si jistě, že komplexní číslo $(0, 1)$ označujeme obvykle písmenem i. Podle definice sčítání a násobení komplexních čísel můžeme pak každé komplexní číslo $(a_1, a_2)$ psát ve tvaru $a_1 + a_2\mathrm{i}$, neboť $a_1 + a_2\mathrm{i} = (a_1, 0) + (a_2, 0) . (0, 1) = (a_1, 0) + (0, a_2) = (a_1, a_2)$.

Komplexní číslo můžeme znázornit vektorem v rovině. Jinými slovy, je-li dána v rovině pevně zvolená soustava souřadnic $Pxy$, můžeme každý vektor vyjádřit (uspořádanou) dvojicí reálných čísel $(a_1, a_2)$. Vektor $(a_1, a_2)$ přiřadíme komplexnímu číslu $a_1 + a_2\mathrm{i}$. Přesvědčili jste se ve škole, že pojmy rovnosti, součtu a prosté hodnoty komplexních čísel jsou při tomto přiřazení zachovány, tj., že dvěma komplexním číslům sobě rovným odpovídá týž vektor, součtu dvou komplexních čísel odpovídá vektor, vzniklý sečtením vektorů, odpovídajících daným komplexním číslům atd. Podobně jste viděli, že i násobení komplexních čísel lze snadno znázornit, a to tzv. symbolickým součinem vektorů. Tohoto přiřazení užíváme často k názornému zobrazení komplexních čísel.

V řadě úloh je výhodné použít tzv. goniometrického vyjádření komplexního čísla. Tento pojem znáte ze školy. Připomeňme tedy jen, že je-li komplexní číslo $a = a_1 + a_2\mathrm{i}$ vyjádřeno v goniometrickém tvaru např.

$$a = |a| (\cos\alpha + \mathrm{i} \sin\alpha),$$

pak $\alpha$ je tzv. argument (někdy říkáme též amplituda) čísla $a$. Srovnáním s algebraickým tvarem čísla $a$ dostaneme ovšem podle definice rovnosti komplexních čísel

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|a|}, \qquad \sin\alpha = \frac{a_2}{|a|}.$$

Při znázornění komplexních čísel vektory, o němž jsme hovořili výše, objeví se argument komplexního čísla jako úhel mezi reálnou osou (osou $x$) a vektorem, znázorňujícím číslo $a$. Pro nulu není ovšem argument definován.

1. kapitola

# POČÍTÁNÍ S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

**Příklad 1.** Vypočtěte: $(\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2})$!

*Řešení.* Daný výraz je rozdíl dvou členů, z nichž druhý je součinem dvou komplexních čísel: komplexní jednotky i a čísla $1 - i\sqrt{2}$. Víme, že násobení komplexních čísel splňuje distributivní zákon; je tedy

$$i(1 - i\sqrt{2}) = i - i(i\sqrt{2}).$$

Také asociativní zákon platí. Můžeme tedy psát

$$i - i(i\sqrt{2}) = i - (i.i)\sqrt{2}.$$

Písmenem i jsme označili komplexní jednotku (0, 1). Z definice násobení dostáváme, že

$$i.i = (0, 1).(0, 1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1.$$

Je tedy $i(1 - i\sqrt{2}) = i - (-1)\sqrt{2} = i + \sqrt{2}$. A nyní již můžeme napsat výsledek:

$$(\sqrt{2} - i) - i(1 - i\sqrt{2}) = (\sqrt{2} - i) - (i + \sqrt{2}) = -2i.$$

**Příklad 2.** Vypočtěte postupně $(1 - i)^2$, $(1 - i)^3$, $(1 - i)^4$.

*Řešení.* V našich definicích jsme se nezmínili o mocnině komplexního čísla. Je-li však mocnitel přirozené číslo jako v tomto případě, je význam mocniny jasný: je to součin stejných činitelů, jejichž počet je udán mocnitelem.

Jde tedy ve skutečnosti o násobení:

$$(1-i)^2 = (1-i)(1-i) = (1-1) + (-1-1)i = -2i,$$
$$(1-i)^3 = (1-i)(1-i)(1-i) = (1-i)^2(1-i) =$$
$$= -2i(1-i) = -2i - 2 = -2(1+i),$$
$$(1-i)^4 = (1-i)^3(1-i) = -2(1+i)(1-i) = -4.$$

Všimněte si, že poslední výsledek je reálné číslo $(1-i)^4 = -4$. Postupným umocňováním komplexního čísla (s nenulovou imaginární částí) můžeme tedy dostat i číslo reálné. Konečně nejjednodušším příkladem je číslo $i^2 = i \cdot i = -1$.

V obou předešlých příkladech jsme násobili komplexní čísla. Ale nezatěžujme si paměť definicí; komplexní čísla násobíme prostě jako dvojčleny, při čemž součin $i \cdot i = -1$. Ověřte si sami, že tento způsob násobení se shoduje s definicí!

V příkladě 2 jsme se setkali se součinem $(1+i)(1-i)$. Co je zajímavé na obou činitelích? Ano, liší se jen znaménkem u imaginární části. Jak víte, říkáme takovým dvěma komplexním číslům čísla komplexně sdružená. Jejich charakteristickou vlastností je, že jejich součin i součet je vždy reálné číslo.

**Příklad 3.** Nechť $z$, $\bar{z}$ jsou čísla komplexně sdružená, $a$ číslo reálné. Dokažte, že číslo $\bar{z} + ai$ je komplexně sdružené k číslu $z - ai$!

*Řešení.* Označíme-li $z_1$ reálnou část $z$, $z_2$ jeho imaginární část, je $z = z_1 + iz_2$, $\bar{z} = z_1 - iz_2$. Pak

$$\bar{z} + ai = z_1 - iz_2 + ai = z_1 + i(a - z_2).$$

Protože $z_1$, $z_2$, $a$ jsou vesměs reálná čísla, je číslo komplexně sdružené k $\bar{z} + ai$ rovno $z_1 - i(a - z_2)$ čili $z_1 + z_2 i - ai = z - ai$.

**Příklad 4.** Vyjádřete v algebraickém tvaru číslo

$$\frac{1}{(1-i)(2-i)(3-i)}.$$

(1, 0)

*Řešení.* Podle definice podílu dvou komplexních čísel je toto číslo řešením rovnice

$$(1-i)(2-i)(3-i)x = 1.$$

Jak víte ze školy, má taková rovnice vždy řešení, pokud koeficient při neznámé není nula. Mohli bychom tedy — po vynásobení komplexních čísel na levé straně rovnice — vypočítat reálnou a imaginární část $x$ ze soustavy rovnic o dvou neznámých s reálnými koeficienty. Je však jednodušší cesta. Vše, co potřebujeme, je zbavit se komplexních čísel ve jmenovateli zlomku (i za cenu toho, že se objeví komplexní číslo v čitateli). To není tak těžké. Stačí použít komplexně sdružených čísel. Jak jsme již uvedli, jejich součin je vždy číslo reálné. Stačí tedy násobit čitatel i jmenovatel zlomku číslem komplexně sdruženým s číslem ve jmenovateli. Nemusíme však proto ani násobit všechna tři čísla ve jmenovateli! Můžeme místo toho násobit zvlášť číslem komplexně sdruženým ke každému činiteli:

$$\frac{1}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{1}{(1-i)(2-i)(3-i)} \cdot$$

$$\cdot \frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{(1+i)(2+i)(3+i)} =$$

$$= \frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{(1+i)(1-i)(2+i)(2-i)(3+i)(3-i)}.$$

Nyní provedeme násobení ve jmenovateli podle pravidla o součtu čtverců: $(A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2$. Dostaneme

$$\frac{1}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{(1+i)(2+i)(3+i)}{2.5.10}.$$

V posledním zlomku se již vyskytuje jen násobení, nikoliv dělení komplexních čísel. Upravme tedy čitatel na algebraický tvar:

$$(1+i)(2+i)(3+i) = [(2-1) + i(2+1)](3+i) =$$
$$= (1+3i)(3+i) = (3-3) + i(9+1) = 10i.$$

Dosazením dostáváme konečný výsledek:

$$\frac{1}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{1}{10}\,i.$$

V minulém příkladu jsme násobili zlomkem, v jehož čitateli i jmenovateli byl součin týchž komplexních čísel. Můžeme si však být jisti, že jsme nenásobili výrazem 0/0, který nemá pro nás smysl? Ano, můžeme. A není tak nesnadné to dokázat.

**Příklad 5.** Ukažte, že součin dvou komplexních čísel je roven nule právě tehdy, je-li aspoň jeden z činitelů 0.

*Řešení.* Mějme dvě komplexní čísla $a = a_1 + a_2i$, $b = b_1 + b_2i$. Jejich součin je $ab = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$. Předpokládejme, že $a \neq 0$, ale $ab = 0$. To znamená, že reálná i imaginární část součinu $ab$ je nula, tj.

$$a_1b_1 - a_2b_2 = 0,$$
$$a_1b_2 + a_2b_1 = 0.$$

Protože $a \neq 0$, aspoň jedno z čísel $a_1$, $a_2$ není nula. Budiž to např. $a_1$. Z první rovnice pak plyne $b_1 = a_2b_2/a_1$, což dosazeno do druhé rovnice dá

$$a_1b_2 + \frac{a_2^2}{a_1}\,b_2 = 0$$

čili

$$\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1} b_2 = 0.$$

Ale z předpokladu $a_1 \neq 0$ plyne, že součet druhých mocnin je kladný a tedy různý od nuly. Máme tedy dvě (reálná) čísla, z nichž první není nula, ale jejichž součin je nula. Musí tedy být $b_2 = 0$. Protože $b_1 = a_2b_2/a_1$, je také $b_1 = 0$ čili $b = 0$.

Tím jsme dokázali naše tvrzení za předpokladu, že $a_1 \neq 0$. Je-li $a_1 = 0$, plyne z první rovnice $-a_2b_2 = 0$ a z druhé $a_2b_1 = 0$. Protože však $a$ je nenulové číslo a $a_1 = 0$, musí být $a_2 \neq 0$. Je tedy $b_2 = 0$, $b_1 = 0$.

Protože v opačném směru je naše tvrzení zřejmé (je-li aspoň jeden činitel nula, je ovšem i součin roven nule), je tím důkaz proveden. Vyjdeme-li z předpokladu $b \neq 0$, jde jen o záměnu v označení.*)

Jaký důsledek plyne z toho pro příklad 4? Protože žádný z činitelů součinu $(1 - \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})(3 - \mathrm{i})$ není nula, nemůže být ani součin nula a nemusíme tedy mít obavy o správnost našeho postupu.

**Příklad 6.** Dokažte, že rovnají-li se dvě komplexní čísla, rovnají se navzájem jejich prosté hodnoty a jejich argumenty se liší nejvýše o celistvý násobek $2\pi$. Obráceně, mají-li dvě čísla stejné prosté hodnoty a je-li rozdíl jejich argumentů $2n\pi$ ($n$ je celé číslo), jsou si tato čísla rovna.

*Řešení.* Můžeme se omezit na nenulová komplexní čísla, neboť pro nulu není argument definován. Napišme obě čísla v goniometrickém tvaru

---

*) Důkaz téhož tvrzení jste provedli ve škole (srov. Matematika II, str. 147—148) jiným způsobem. Všimněte si však, že rozdíl v metodě není tak velký, jak se zdá: v obou případech jsme podstatně užili poučky, že je-li $a \neq 0$, je $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \neq 0$.

$$a = |a| (\cos\alpha + i \sin\alpha),$$
$$b = |b| (\cos\beta + i \sin\beta).$$

Je-li $a = b$, musí se podle definice rovnosti komplexních čísel rovnat vzájemně reálné a imaginární části obou čísel. Avšak $\mathrm{Re}\, a = |a| \cos\alpha$, $\mathrm{Im}\, a = |a| \sin\alpha$, $\mathrm{Re}\, b = |b| \cos\beta$, $\mathrm{Im}\, b = |b| \sin\beta$, takže musí platit

$$|a| \cos\alpha = |b| \cos\beta,$$
$$|a| \sin\alpha = |b| \sin\beta.$$

Z těchto dvou rovnic okamžitě plyne $|a| = |b|$. Stačí např. umocnit obě rovnice (tj. jejich levé i pravé strany) na druhou a sečíst. Dostaneme

$$|a|^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = |b|^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta),$$

a to je podle známého vztahu z trigonometrie totéž jako $|a|^2 = |b|^2$. Protože obě prosté hodnoty jsou ovšem nezáporná čísla, plyne odtud $|a| = |b|$.

Protože jsme se od začátku omezili na nenulová čísla, můžeme obě rovnice vyjadřující rovnost reálných a imaginárních částí čísel $a$, $b$ dělit číslem $|a| = |b|$. Dostaneme

$$\cos\alpha = \cos\beta, \quad \sin\alpha = \sin\beta.$$

První rovnice je splněna, je-li $\alpha = \beta + 2n\pi$ nebo $\alpha = -\beta + 2n\pi$ ($n$ je číslo celé). Kdyby však platil vztah se znamením $-$, dostaneme dosazením do druhé rovnice $\sin(-\beta + 2n\pi) = \sin\beta$. Protože $\sin(-\beta + 2n\pi) = -\sin\beta$, plyne odtud $-\sin\beta = \sin\beta$. To však platí, jen je-li $\sin\beta = 0$ čili $\beta = k\pi$. Potom $\alpha = -k\pi + 2n\pi = k\pi + 2(n - k)\pi = \beta + 2n_1\pi$. Platí tedy i potom $\alpha = \beta + 2n_1\pi$ ($n_1$ je celé číslo).

Obráceně, jsou-li rovny prosté hodnoty dvou komplexních čísel $a$, $b$ a liší-li se jejich argumenty jen o celistvý násobek $2\pi$, pak platí ovšem také $\cos\alpha = \cos\beta$, $\sin\alpha = \sin\beta$. Jestliže najdeme reálné a imaginární části daných čísel z jejich zápisu v goniometrickém tvaru, dostáváme ihned

$$\operatorname{Re} a = |a| \cos\alpha = |b| \cos\beta = \operatorname{Re} b,$$
$$\operatorname{Im} a = |a| \sin\alpha = |b| \sin\beta = \operatorname{Im} b.$$

Tyto vztahy znamenají ovšem $a = b$. Tím jsme naše tvrzení dokázali v obou směrech. Je-li $a = 0$, musí ovšem být i $b = 0$. Prosté hodnoty se tedy rovnají, o argumentu ovšem nemá smysl mluvit.

**Příklad 7.** Je dán pravidelný $n$-úhelník se středem v počátku, vepsaný do kružnice o poloměru $r$. Jeden jeho vrchol je bod $(r, 0)$. Napište v goniometrickém tvaru komplexní čísla, znázorněná vektory umístěnými v počátku, jejichž koncové body tvoří vrcholy daného $n$-úhelníka!

*Řešení.* Označte vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $A_1 = (r, 0)$. Pak první číslo, znázorněné vektorem $PA_1$, je reálné číslo $r$ čili

$$z_1 = r(\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0).$$

Také absolutní hodnota všech ostatních čísel je $r$, neboť koncové body vektorů leží na kružnici o poloměru $r$. Jaký bude obecně argument těchto čísel?

Protože jde o pravidelný $n$-úhelník, jsou úhly $\sphericalangle A_1PA_2$, $\sphericalangle A_2PA_3$ atd. stejné. Je jich celkem $n$ (poslední je $\sphericalangle A_nPA_1$) a jejich součet je ovšem $360°$; každý z nich je tedy roven $\frac{1}{n} 360°$. Argumenty čísel jsou ovšem určeny úhly $\sphericalangle A_1PA_2$, $\sphericalangle A_1PA_3, \ldots, \sphericalangle A_1PA_n$. Tyto úhly dostaneme sčítáním několika stejných úhlů, takže

$$\sphericalangle A_1PA_2 = \frac{1}{n} 360°,$$

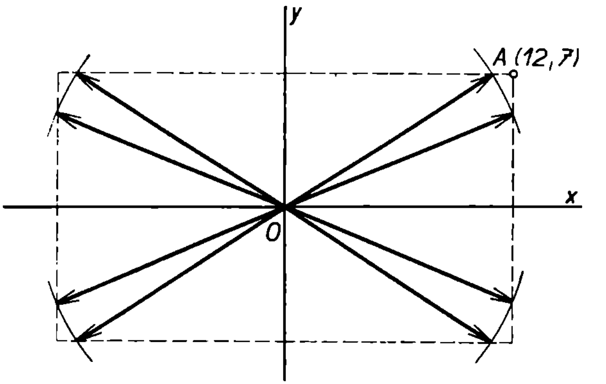
$$\sphericalangle A_1PA_3 = \sphericalangle A_1PA_2 + \sphericalangle A_2PA_3 = \frac{2}{n} 360°$$

atd., obecně $\sphericalangle A_1PA_k = \frac{k-1}{n} 360°$. Goniometrický tvar čísel, znázorněných vektory $PA_k$, je tedy

$$z_k = r\left(\cos \frac{k-1}{n} 360° + \mathrm{i} \sin \frac{k-1}{n} 360°\right).$$

Vzorec platí pro $k = 1, 2, \ldots, n-1, n$.

**Příklad 8.** Najděte všechna komplexní čísla, znázorněná vektorem velikosti 13, jestliže koncový bod vektoru leží na obvodu obdélníka se středem v počátku a jedním vrcholem v bodě $A(12, 7)$. Strany obdélníka jsou rovnoběžné s osami souřadnic.




Obr. 1

*Řešení.* Z obr. 1 je vidět, že koncový bod vektoru musí ležet buď na svislé, nebo na vodorovné straně obdélníka. Leží-li koncový bod vektoru na vodorovné úsečce, je jeho souřadnice $y$ rovna souřadnici bodu $A$, tj. sedmi, nebo souřadnici protějšího vrcholu (tj. $-7$). Označíme-li $c$ první souřadnici koncového bodu, je velikost vektoru v obou případech rovna $\sqrt{c^2 + 49}$. Podle požadavku úlohy má tato velikost být rovna třinácti, tj.

$$\begin{aligned} \sqrt{c^2 + 49} &= 13, \\ c^2 + 49 &= 169, \\ c^2 &= 120, \\ c &= \pm 2\sqrt{30}. \end{aligned}$$

Je tedy koncový bod vektoru $(\pm 2\sqrt{30}, \pm 7)$, přičemž je přípustná kterákoliv kombinace znamének. Protože víme, že první a druhá souřadnice koncového bodu vektoru je současně reálná a imaginární část komplexního čísla, znázorněného tímto vektorem, dostáváme tím čtyři řešení naší úlohy, komplexní čísla $2\sqrt{30} + 7i$, $-2\sqrt{30} + 7i$, $2\sqrt{30} - 7i$, $-2\sqrt{30} - 7i$.

Leží-li koncový bod vektoru na svislé úsečce, je jeho první souřadnice $\pm 12$. Pak jeho druhá souřadnice $d$ musí splňovat obdobnou podmínku jako prve:

$$\begin{aligned} \sqrt{d^2 + 144} &= 13, \\ d^2 + 144 &= 169, \\ d &= \pm 5. \end{aligned}$$

Číslo $d = \pm 5$ je zároveň imaginární částí komplexních čísel, která jsou (dalšími) řešeními naší úlohy. Kombinací znamének dostáváme další čtyři řešení, čísla $12 + 5i$, $-12 + 5i$, $12 - 5i$, $-12 - 5i$. Na obr. 1 jsou narýsovány všechny vektory, znázorňující řešení naší úlohy.

**Příklad 9.** Řešte rovnici

$$(3 + 4i)^2 - 2\bar{z} = z.$$

($\bar{z}$ znamená číslo komplexně sdružené k $z$.)

*Řešení.* Vypočtěme druhou mocninu komplexního čísla

$3 + 4i$ na levé straně a upravme rovnici na anulovaný tvar. Pišme přitom $z = x + iy$:

$$-7 + 24i - 2x + 2yi - x - yi = 0,$$
$$-3x - 7 + (y + 24)i = 0.$$

Máme tedy zdánlivě jen jednu rovnici pro dvě neznámé $x$ a $y$. Ve skutečnosti však jde o dvě podmínky. Je-li komplexní číslo rovno nule, pak jeho reálná i imaginární část musí být nula. Reálná část čísla na levé straně rovnice je $-3x - 7$, imaginární část je $y + 24$. Máme tedy dvě rovnice, každou z nich pro jednu neznámou:

$$-3x - 7 = 0,$$
$$y + 24 = 0.$$

Odtud dostaneme ihned $x = -7/3$, $y = -24$, takže řešení naší rovnice je komplexní číslo $z = \frac{-7}{3} - 24i$. Zkoušku provede čtenář snadno sám.

**Příklad 10.** Řešte rovnici

$$\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2 + \frac{1}{z} = 1 + i.$$

*Řešení.* Nejprve upravme zlomek na levé straně rovnice:

$$\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2 = \frac{(1 + i)^4}{(1 - i)^2 (1 + i)^2} = \frac{(2i)^2}{4} = -1.$$

Tím se naše rovnice zjednodušila na tvar

$$-1 + \frac{1}{z} = 1 + i.$$

Neznámá $z$ je ve jmenovateli. Zde však nebudeme násobit číslem komplexně sdruženým; dostali bychom $\bar{z}/|z|^2$, což je výraz spíše složitější, protože neznámá se v něm vyskytuje jak v čitateli, tak i ve jmenovateli. Nejjednodušší je přičíst nejprve k oběma stranám rovnice jedničku:

$$\frac{1}{z} = 2 + \mathrm{i}.$$

Nyní znásobíme obě strany rovnice číslem $z$. Tím odstraníme zlomek, musíme si však zapamatovat podmínku, že $z \neq 0$. Rovnice

$$1 = (2 + \mathrm{i})z$$

má ovšem jediný kořen (zřejmě nenulový)

$$z = \frac{1}{2 + \mathrm{i}}.$$

Abychom dostali řešení rovnice v algebraickém tvaru, vynásobíme čitatel i jmenovatel zlomku číslem komplexně sdruženým $2 - \mathrm{i}$:

$$z = \frac{2 - \mathrm{i}}{(2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})} = \frac{2 - \mathrm{i}}{5}.$$

Toto číslo je různé od nuly, takže je řešením (a to zřejmě jediným) dané rovnice.

**Příklad 11.** Řešte rovnici

$$(z - 3)^2 + (\bar{z} + \mathrm{i})^2 = 4.$$

*Řešení.* Nejprve rovnici upravíme. Na levé straně umocníme a podle možnosti sloučíme:

$$z^2 - 6z + \bar{z}^2 + 2\mathrm{i}\bar{z} + 4 = 0.$$

V rovnici se vyskytuje jak neznámá $z$, tak i číslo k ní komplexně sdružené $\bar{z}$. Proto je lépe rozdělit $z$ na reálnou a imaginární část: $z = x + yi$, takže $\bar{z} = x - yi$. Dosaďme!

$(x + yi)^2 - 6(x + yi) + (x - yi)^2 + 2i(x - yi) + 4 = 0,$

$x^2 - y^2 + 2xyi - 6x - 6yi + x^2 - y^2 - 2xyi + 2xi +$
$+ 2y + 4 = 0,$

$(2x^2 - 2y^2 - 6x + 2y + 4) + i(-6y + 2x) = 0.$

Reálná i imaginární část čísla na levé straně rovnice musí se tedy rovnat nule:

$$2x^2 - 2y^2 - 6x - 2y + 4 = 0,$$
$$2x - 6y = 0.$$

Z druhé rovnice vyjádříme $x = 3y$ a dosadíme do první. Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$4y^2 - 4y + 1 = 0.$$

To je kvadratická rovnice pro $y$; hledáme její reálné kořeny, protože $y$ je imaginární část komplexního čísla $z$ a tedy číslo reálné. Podle vzorce je

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{1}{2}.$$

Existuje tedy jediné řešení původní rovnice, $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ čili $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. Zkoušku lze provést dosazením a přímým výpočtem.

## Cvičení

**1.** Napište v algebraickém tvaru komplexní čísla

(a) $\frac{5-3i}{i} + (1 + 2i)^2$; (b) $\frac{1 + 2i}{3 - 4i} - \frac{2 - i}{5i^3}$.

[(a) $-6 - i$; (b) $-2/5$.]

**2.** Napište následující čísla v goniometrickém tvaru:
(a) $-\sqrt{3} + i$; (b) $-7i$; (c) $4 + 3i$.
[(a) $2(\cos 150° + i \sin 150°)$; (b) $7(\cos 270° + i \sin 270°)$;
(c) $5(\cos 37° + i \sin 37°)$ — tento výsledek je přibližný, protože jsme použili tabulek.]

**3.** Je-li $\bar{z}$ číslo komplexně sdružené k $z$, dokažte, že platí

$$\frac{\overline{(2 + i)^2}}{3 - 4i} = 1.$$

**4.** Řešte rovnice

(a) $(5 - 1/i)\bar{z} + 2z = 22i$; (b) $7i - \dfrac{1}{z + 2} = 3(i + 1)^2$.

[(a) $1 - 7i$; (b) $-(2 + i)$.]

**5.** Buď dán rovnostranný trojúhelník o straně délky $a$, jehož jeden vrchol je v počátku, druhý na ose $x$ a třetí v prvním kvadrantu (tj. obě jeho souřadnice jsou kladná čísla). Napište v goniometrickém a algebraickém tvaru komplexní čísla, znázorněná vektory s koncovými body ve středech stran trojúhelníka.

$$\left[\frac{a}{2}(\cos 0 + i \sin 0) = \frac{a}{2}, \frac{a}{2}(\cos 60° + i \sin 60°) = \right.$$
$$\left. = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{3}\, i), \frac{a\sqrt{3}}{2}(\cos 30° + i \sin 30°) = \frac{a}{4}(3 + \sqrt{3}\, i).\right]$$

# KVADRATICKÁ ROVNICE A ODMOCNINA Z KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

Ve škole jste se zabývali podrobně tzv. kvadratickou rovnicí. Je to rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Předpokládali jste, že koeficienty rovnice $a$, $b$, $c$ jsou reálná čísla. Ukázalo se, že důležitou veličinou pro zkoumání takové rovnice je tzv. diskriminant, tj. číslo $b^2 - 4ac$.

Výsledky se daly shrnout takto: Je-li diskriminant kvadratické rovnice kladný, má rovnice dva různé kořeny; oba tyto kořeny jsou reálná čísla. Je-li diskriminant nula, má rovnice jediný kořen, který je opět reálný. (Říkáme mu někdy kořen dvojnásobný — proč?) Je-li diskriminant záporný, existují opět dva kořeny rovnice a jsou to čísla komplexně sdružená (s nenulovou imaginární částí).

Ukážeme, že i kvadratická rovnice, jejíž koeficienty jsou čísla komplexní, má vždy řešení. Její kořeny jsou obecně komplexní čísla, nemusí však být navzájem komplexně sdružená. Začneme však s nejjednoduššími případy.

**Příklad 12.** Ověřte, že rovnice $x^2 = -5 + 12i$ má kořeny $x_1 = 2 + 3i$ a $x_2 = -(2 + 3i)$.

*Řešení.* Mocnina komplexního čísla s přirozeným mocnitelem je ovšem definována stejně jako mocnina čísla reálného. Výraz $x^2$ znamená tedy součin $x \,.\, x$. Zřejmě tedy
$x_1^2 = (2 + 3i)(2 + 3i) = 4 - 9 + 2.6i = -5 + 12i.$

Tentýž výsledek dostaneme ovšem i pro $x_2$, neboť $x_2^2 = (-x_1)^2 = x_1^2 = -5 + 12i$.

**Příklad 13.** Najděte komplexní číslo $x$, pro něž platí $x^2 = -2i$.

*Řešení.* Existuje-li takové číslo $x$, lze je napsat v algebraickém tvaru jako $x = x_1 + x_2 i$. Pak naše rovnice má tvar

$$(x_1 + x_2 i)^2 = -2i$$

čili

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 x_2 i = -2i.$$

Z definice rovnosti komplexních čísel vyplývá, že reálná část čísla na levé straně této rovnice je nula, imaginární je $-2$:

$$x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad 2x_1 x_2 = -2.$$

Levou stranu první rovnice rozložíme na součin podle vzorce pro rozdíl čtverců: $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$. Tím se zbavíme druhých mocnin. Víme, že rovná-li se součin dvou čísel nule, musí aspoň jeden z činitelů být nula. (V tomto případě jde o reálná čísla, neboť $x_1$, $x_2$ jsou reálnou a imaginární částí komplexního čísla $x$, ale v př. 5 jsme toto tvrzení dokázali i pro komplexní čísla.) Je tedy buď $x_1 + x_2 = 0$, nebo $x_1 - x_2 = 0$. V prvním případě je $x_2 = -x_1$, v druhém $x_1 = x_2$.

Dosud jsme však vůbec nepoužili druhé rovnice. Dosadíme-li do ní $x_2 = -x_1$, dostaneme $-2x_1^2 = -2$ čili $x_1^2 = 1$. Tato rovnice má dva reálné kořeny 1 a $-1$. Pro první kořen dostáváme $x = x_1 + x_2 i = 1 - i$, pro druhý $x = -1 + i$. Jak snadno ověříme, jsou obě tato čísla kořeny dané rovnice.

Předpokládáme-li, že $x_1 = x_2$, dostaneme dosazením do druhé rovnice $2x_1^2 = -2$. Tato rovnice však nemá reálné kořeny! Protože $x_1$ je reálná část komplexního čísla, je pro ně přípustná jen reálná hodnota. Nedává tedy podmínka $x_1 = x_2$ ve spojení s rovnicí $2x_1x_2 = -2$ žádné řešení, vyhovující podmínkám úlohy.

Existují tedy dvě komplexní čísla, která jsou kořeny dané rovnice: číslo $1 - i$ a číslo $-1 + i$. Tato dvě čísla se liší pouze znaménkem: $1 - i = -(-1 + i)$ a nejsou tedy komplexně sdružená.

Předešlé dva příklady nás vedou k otázce, zda vždy existuje druhá odmocnina z komplexního čísla. Pokusme se dokázat, že ano.

**Příklad 14.** Je dáno komplexní číslo $a$. Najděte (v algebraickém nebo v goniometrickém tvaru) číslo $x$ (resp. všechna čísla $x$) pro něž platí $x^2 = a$.

*Řešení.* Napíšeme-li obě čísla v algebraickém tvaru, je

$$x = x_1 + x_2\mathrm{i},\; a = a_1 + a_2\mathrm{i}.$$

Existuje-li číslo $x$, vyhovující podmínkám úlohy, musí platit

$$(x_1 + x_2\mathrm{i})^2 = a_1 + a_2\mathrm{i}$$

čili

$$(x_1^2 - x_2^2) + 2x_1x_2\mathrm{i} = a_1 + a_2\mathrm{i}.$$

Aby rovnice byla splněna, musí se navzájem rovnat reálné části a imaginární části čísel na levé a pravé straně rovnice:

$$x_1^2 - x_2^2 = a_1,\quad 2x_1x_2 = a_2.$$

To jsou však poměrně složité rovnice (jde o soustavu dvou kvadratických rovnic o dvou neznámých). Protože $a_1$ není obecně nula, nemůžeme použít výhodného rozkladu jako minule. Nebylo by lépe použít goniometrického vyjádření komplexních čísel? Víme, že Moivrova věta dává poměrně jednoduchou formuli pro druhou mocninu komplexního čísla. Zkusme to:

$$x = \varrho\,(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$a = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Podle Moivrovy věty je

$$x^2 = \varrho^2\,(\cos 2\theta + i\sin 2\theta).$$

Protože číslo $x$ je předpokládaným kořenem rovnice $x^2 = a$, musí se podle př. 6 rovnat jak prosté hodnoty, tak i argumenty čísel $x^2$, $a$. Argument se ovšem může lišit o celistvý násobek $2\pi$. To znamená $\varrho^2 = r$, $2\theta = \alpha + 2n\pi$.

Protože $\varrho$ i $r$ jsou prosté hodnoty komplexních čísel, jsou nezáporná a tedy $\varrho = \sqrt{r}$. Z druhé rovnice dostáváme $\theta = \frac{1}{2}\alpha + n\pi$. Tato rovnice dává dvě podstatně různé hodnoty pro $\theta$. Buď je $\theta = \frac{1}{2}\alpha$, nebo $\theta = \frac{1}{2}\alpha + \pi$. (V obou případech můžeme ovšem přičíst ještě násobek $2\pi$.)

Řešením rovnice $x^2 = a$ jsou tedy dvě čísla

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{1}{2}\alpha + i\sin\frac{1}{2}\alpha\right), \quad \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\alpha + \pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\alpha + \pi\right)\right].$$

Když si uvědomíme, že $\cos\left(\frac{1}{2}\alpha + \pi\right) = -\cos\frac{1}{2}\alpha$ a stejně $\sin\left(\frac{1}{2}\alpha + \pi\right) = -\sin\frac{1}{2}\alpha$, vidíme, že stejně jako v případě reálného kladného čísla $a$ se oba kořeny liší jen znamením.

V některých případech je však přece jen výhodnější užít algebraického tvaru pro odmocninu komplexního čísla. Vraťme se proto ještě k našim rovnicím

$$x_1^2 - x_2^2 = a_1, \quad 2x_1x_2 = a_2$$

a zkusme je řešit.

Je-li $x_1 \neq 0$, plyne z druhé rovnice $x_2 = a_2/2x_1$, což dosazeno do první rovnice dá

$$x_1^2 - \frac{a_2^2}{4x_1^2} = a_1.$$

Protože předpokládáme $x_1 \neq 0$, má tato rovnice tytéž kořeny jako

$$x_1^4 - a_1x_1^2 - \frac{1}{4}a_2^2 = 0.$$

To je bikvadratická rovnice, z níž vypočteme

$$x_1^2 = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{2};$$

znamení minus před odmocninou musíme však vyloučit. (Proč? Číslo $x_1 \neq 0$ má být reálné a proto $x_1^2 > 0$; ale $a_1 \leqq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |a|$.)

Odtud již snadno dostaneme $x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a_1 + |a|)}$.

Dosazením do první rovnice vypočteme $x_2$:

$$x_2^2 = x_1^2 - a_1 = \frac{1}{2}(a_1 + |a|) - a_1 = \frac{1}{2}(|a| - a_1),$$

takže

$$x_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|a| - a_1)}.$$

Znamení u odmocnin je třeba volit tak, aby byla splněna druhá rovnice. To znamená, je-li $a_2$ kladné, musí být obě znamení + nebo obě —. Je-li $a_2$ záporné, musíme zvolit znamení opačná. Případ $a_2 = 0$ vede ovšem podle znamení $a_1$ buď k výsledku $x_1 = 0$, nebo $x_2 = 0$. Podrobnou diskusi těchto případů přenecháváme čtenáři. (Použijte odvozených vzorců k řešení cvičení 2 a porovnejte obě metody — algebraickou a goniometrickou!)

Naučili jsme se řešit ryze kvadratickou rovnici s komplexním koeficientem. Obraťme se nyní k obecnému případu.

**Příklad 15.** Dokažte, že kvadratická rovnice

$$az^2 + bz + c = 0,$$

v níž koeficienty $a$, $b$, $c$ jsou komplexní čísla, $a \neq 0$, má v oboru komplexních čísel vždy řešení.

*Řešení.* Použijeme v podstatě téže metody jako pro rovnici s reálnými koeficienty: převedeme úlohu na řešení ryze kvadratické rovnice (ovšem s komplexním číslem na pravé straně). Především budeme rovnici, jak někdy říkáme, „normovat", tj. budeme dělit obě strany rovnice číslem $a$ (jež je podle předpokladu různé od nuly). Nevadí, že $a$ je komplexní číslo. Dostaneme rovnici

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0,$$

která má přesně tytéž kořeny jako rovnice původní. Označme $b/a = p$, $c/a = q$ ($p$, $q$ jsou komplexní čísla, která ovšem dovedeme napsat v algebraickém tvaru). Pak v rovnici

$$z^2 + pz + q = 0$$

můžeme doplnit dvojčlen $z^2 + pz$ tak, abychom dostali druhou mocninu lineárního dvojčlenu; aby se rovnice nezměnila, musíme stejné číslo zase odečíst:

$$z^2 + pz + \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{4}p^2 + q = 0.$$

Nyní můžeme rovnici napsat ve tvaru

$$\left(z + \frac{1}{2}p\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$$

a výraz v závorce na levé straně můžeme pokládat za novou neznámou; označme ji třeba $u$:

$$u = z + \frac{1}{2}p.$$

Ale rovnici $u^2 = d$, kde $d$ je libovolné komplexní číslo, již umíme řešit! V př. 14 jsme dokázali, že má řešení (a to dva různé kořeny, lišící se znaménkem, je-li $d \neq 0$). Vypočteme-li její kořeny, můžeme použít rovnici

$$z = u - \frac{1}{2}p$$

a vypočítat opět dvě hodnoty neznámé $z$.

**Příklad 16.** Řešte rovnici

$$iz^2 - (7 + 3i)z + 10{,}5 - 9i = 0.$$

*Řešení.* Budeme postupovat jako v obecném případě. Nejprve budeme dělit obě strany rovnice koeficientem při $z^2$, tj. imaginární jednotkou i. Protože $1/i = -i$, znamená to násobit obě strany rovnice číslem $-i$:

$$z^2 - (3 - 7i)z - 9 - 10{,}5i = 0.$$

K doplnění prvních dvou členů potřebujeme číslo $\left(\frac{3 - 7i}{2}\right)^2$.

Dostáváme

$$z^2 - (3 - 7i)z + \left(\frac{3 - 7i}{2}\right)^2 = 9 + 10{,}5i + \left(\frac{3 - 7i}{2}\right)^2,$$

$$\left[z - \frac{1}{2}(3 - 7i)\right]^2 = 9 + 10{,}5i + \frac{1}{4}(9 - 49 - 42i),$$

$$\left[z - \frac{1}{2}(3 - 7i)\right]^2 = -1.$$

Zbývá řešit ryze kvadratickou rovnici $u^2 = -1$. Kořeny této rovnice jsou ovšem čísla i, —i. Pro neznámou $z$ musí tedy platit vztah

$$z - \frac{1}{2}(3 - 7i) = i$$

nebo

$$z - \frac{1}{2}(3 - 7i) = -i,$$

což dává dva kořeny původní rovnice: $z = \frac{1}{2}(3 - 5i)$ a $z = \frac{1}{2}(3 - 9i)$.

Ověřte dosazením a výpočtem, že jde skutečně o kořeny původní rovnice!

Z př. 15 plyne, že vzorec pro řešení kvadratické rovnice platí i pro rovnici s komplexními koeficienty. Musíme však správně chápat význam odmocniny.

Je přirozené označit v tomto případě $\sqrt{d}$ ($d$ je komplexní číslo) libovolné číslo $u$, jež je řešením rovnice $u^2 = d$. Pak zpětným postupem dostáváme

$$z = -\frac{1}{2}p + \sqrt{d},$$

$$z = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$$

a dosadíme-li $p = b/a$, $q = c/a$, vyjde po jednoduchých úpravách

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Protože obě čísla vyhovující rovnici $u^2 = b^2 - 4ac$ se liší navzájem jen znamením, můžeme tento vzorec psát opět ve tvaru

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Znamení $\pm$ u odmocniny má následující význam: Najdeme-li jedno řešení rovnice $u^2 = b^2 - 4ac$, můžeme je označit $\sqrt{b^2 + 4ac}$. Pak další řešení je prostě $-\sqrt{b^2 - 4ac}$.

**Příklad 17.** Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny (a) 3, $-1/2$; (b) $2 + \mathrm{i}$, $2 - \mathrm{i}$; (c) i, 1; (d) $1 + 2\mathrm{i}$.

*Řešení.* Kvadratická rovnice, která má kořeny $u$, $v$, se dá napsat ve tvaru součinu kořenových činitelů $(x - u)(x - v) = 0$. To jste poznali ve škole a je zřejmé, že to platí i v případě, kdy výsledná rovnice nemá reálné koeficienty.

Máme tedy

(a) $(x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$ čili $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ nebo $2x^2 - 5x - 3 = 0$;

(b) $[x - (2 + \mathrm{i})][x - (2 - \mathrm{i})] = 0$,
$x^2 - 4x + 5 = 0$,

(c) $(x - \mathrm{i})(x - 1) = 0$,
$x^2 - (1 + \mathrm{i})x + \mathrm{i} = 0$,

(d) $[x - (1 + 2\mathrm{i})]^2 = 0$,
$x^2 - (2 + 4\mathrm{i})x + (-3 + 4\mathrm{i}) = 0$.

V prvních dvou případech jsou koeficienty rovnic reálná čísla, v případě (c) nikoliv. Je to proto, že čísla i, 1 nejsou komplexně sdružená. Také v případě (d) jsou koeficienty komplexní čísla. Zde máme jediný dvojnásobný kořen nebo, jak někdy říkáme, dva splývající kořeny $1 + 2i$, $1 + 2i$. Tato čísla také nejsou komplexně sdružená (jen reálné číslo je komplexně sdružené samo k sobě!). To je důvod, proč koeficienty výsledné rovnice nejsou reálná čísla (srov. dále př. 18).

Přesvědčme se nyní, že tento výsledek je mnohem obecnější, než jsme zatím ukázali.

**Příklad 18.** Je-li komplexní číslo $u$ kořenem algebraické rovnice s reálnými koeficienty, je kořenem téže rovnice i číslo $\bar{u}$ komplexně sdružené k $u$. Dokažte toto tvrzení!

*Řešení.* Algebraická rovnice se dá psát ve tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

kde $n$ je přirozené číslo, $a_0 \neq 0$. Podle našeho předpokladu jsou všechny koeficienty této rovnice $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reálná čísla. Dosadíme-li do levé strany rovnice číslo komplexně sdružené ke kořenu $u$, dostaneme $a_0\bar{u}^n + a_1\bar{u}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\bar{u} + a_n$. Víme však, že číslo komplexně sdružené k součinu (součtu) komplexních čísel je součin (součet) čísel komplexně sdružených k činitelům (sčítancům). Totéž platí ovšem i o mocnině, neboť umocňování (s přirozeným mocnitelem) je definováno pomocí násobení. Vzhledem k tomu, že koeficienty rovnice jsou reálná čísla, je $\bar{a}_k = a_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n - 1, n)$. Dostáváme tedy ihned

$$a_0\bar{u}^n + a_1\bar{u}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\bar{u} + a_n =$$
$$= \overline{a_0u^n + a_1u^{n-1} + \ldots + a_{n-1}u + a_n}.$$

Protože však číslo $u$ je podle předpokladu kořenem rovnice, je číslo na pravé straně číslem komplexně sdruženým k nule a tedy samo je rovno nule. Tím jsme dokázali, že také $\bar{u}$ je kořenem rovnice.

Zdůrazněme ještě jednou, že předpoklad reálnosti koeficientů jsme podstatně použili v tvrzení, že jejich komplexně sdružené hodnoty jsou táž čísla.

Nakonec ještě poznamenejme, že tohoto výsledku se užívá v důkazu tvrzení, že každá algebraická rovnice lichého stupně s reálnými koeficienty má aspoň jeden reálný kořen.

Na závěr této kapitoly si všimneme ještě odmocnin z komplexního čísla vyšších řádů.

**Příklad 19.** Co tvoří koncové body vektorů, znázorňující všechny hodnoty „třetí odmocniny z jedné", tj. všechna řešení rovnice $z^3 = 1$?

*Řešení.* Víme, že v reálném oboru má tato rovnice jediný kořen, číslo jedna. Známe totiž vzorec

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

(neznáte-li ho, snadno ho ověříte násobením a sloučením na pravé straně). Aby pravá strana byla rovna nule, musí být buď $z = 1$, nebo $z^2 + z + 1 = 0$. Tato kvadratická rovnice má však diskriminant $1 - 4 = -3$, což je záporné číslo. Nemá proto žádné řešení v množině reálných čísel. Jak snadno zjistíme, jsou její kořeny komplexní čísla $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ a $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$. (Ověřte si znovu výpočtem, že obě tato čísla umocněna na třetí dají skutečně jednotku!)

Máme tedy tři kořeny rovnice $z^3 = 1$ a mohli bychom z nich odvodit i podmínku pro vektory, které jsou jejich geometrickým znázorněním. Jednodušší však je použít od počátku Moivrovy věty. Vyjádříme-li $z$ v goniometrickém tvaru $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, je podle Moivrovy věty

$$z^3 = r^3(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha),$$

takže naši rovnici lze psát ve tvaru

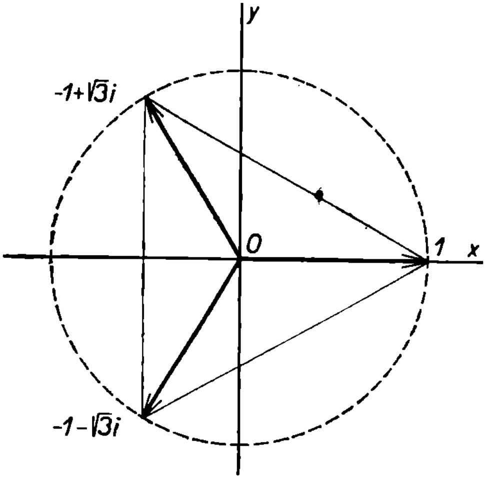
$$r^3(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) = 1$$

nebo jednodušeji $\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha = 1$, protože $r^3 = |z^3| = 1$. (Samozřejmě je potom také $r = 1$, takže prostá hodnota všech tří řešení dané rovnice je rovna jedné.) Je tedy

$$\cos 3\alpha = 1, \sin 3\alpha = 0,$$

což nastane pro $3\alpha$ rovné násobku $2\pi$ (tj. $3\alpha = 0°, 360°, 720°, \ldots$). Je-li $3\alpha = 2n\pi$, je $\alpha = \frac{2n\pi}{3}$. Pro $n = 0$ je $\alpha = 0°$, $n = 1$ dává $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ čili $\alpha = 120°$, $n = 2$ dává $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ čili $\alpha = 240°$. Další hodnoty čísla $n$ (i záporné) dávají některou z těchto hodnot zvětšenou (či zmenšenou) o násobek $2\pi$. Taková hodnota argumentu dává ovšem totéž komplexní číslo (i tentýž vektor) jako hodnota původní. Máme tedy tři kořeny. Prostá hodnota všech tří je 1 (tj. všechny koncové body příslušných vektorů leží na jednotkové kružnici se středem v počátku), argumenty se liší navzájem o $120° = \frac{1}{3}\,360°$. Jsou tedy tato tři čísla znázorněna vektory, jejichž koncové body jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka (viz obr. 2).

Obdobnou metodou můžeme řešit i obecný případ.




Obr. 2

**Příklad 20.** Dokažte, že je-li $a$ komplexní číslo různé od nuly, existuje právě $n$ různých komplexních čísel takových, že $x^n = a$. Je-li $a = 0$, je ovšem také $x = 0$.

*Řešení.* Případ $a = 0$ je zřejmý. Budiž tedy $a \neq 0$ a nechť goniometrický tvar čísla $a$ je $a = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$. Existuje-li číslo $x$ tak, že $x^n = a$, je možno je psát také v goniometrickém tvaru jako $x = \varrho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ a má platit

$$\varrho^n\,(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Aby se tato dvě komplexní čísla rovnala, musí být $\varrho^n = r$ a číslo $n\theta$ musí být argumentem čísla $a$, čili $n\theta = \alpha + 2k\pi$, kde $k$ je celé číslo.

Protože $r > 0$, existuje $\sqrt[n]{r} > 0$, takže $\varrho = \sqrt[n]{r}$ ($\varrho$ je prostá hodnota čísla $x$, takže záporná hodnota odmocniny pro sudé $n$ není přípustná). Pro argument $\theta$ dostáváme $n$ podstatně různých hodnot: $\frac{a}{n}, \frac{a+2\pi}{n}, \frac{a+4\pi}{n}, \ldots, \frac{a+(n-1)\,2\pi}{n}$. Další hodnoty už nedávají nová řešení rovnice, protože se liší od některého z uvedených řešení o násobek $2\,\pi$. Naproti tomu uvedené hodnoty dávají skutečně podstatně různé hodnoty argumentu, takže existuje opravdu právě $n$ různých řešení rovnice $x^n = a$. V obecném zápisu jsou to čísla

$$x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{a+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{a+2k\pi}{n}\right),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

## Cvičení

1. Napište kvadratickou rovnici, která má kořeny
(a) $2 - 3\mathrm{i}, 1$; (b) $2 - 3\mathrm{i}, \mathrm{i}$; (c) $\mathrm{i}, 0$; (d) jediný kořen $2 - 3\mathrm{i}$.

[(a) $z^2 + 3(\mathrm{i} - 1)z + 2 - 3\mathrm{i} = 0$;
(b) $z^2 + 2(\mathrm{i} - 1)z + 3 + 2\mathrm{i} = 0$; (c) $z^2 - \mathrm{i}z = 0$;
(d) $z^2 - 2.(2 - 3\mathrm{i})z - (5 + 12\mathrm{i}) = 0$.]

2. Řešte rovnici
(a) $\mathrm{i}z^2 + (3 - 2\mathrm{i})z - 6 = 0$; (b) $z^2 - 2\mathrm{i}z - 1 = 0$.

[(a) 2, 3i; (b) i.]

3. Najděte všechny kořeny rovnice
(a) $z^4 = 1$; (b) $z^4 = -1$ a napište je v algebraickém tvaru.

$$\left[\text{(a) } 1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}; \text{ (b) } \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i}), \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \mathrm{i}.)\right]$$

4. Znázorněte řešení minulého cvičení graficky! Co tvoří koncové body vektorů, znázorňujících kořeny rovnic?
[V obou případech vrcholy čtverce o úhlopříčce délky 2; (a) jsou vrcholy na osách souřadnic, (b) jsou vrcholy na přímkách

$$y = x, y = -x.]$$

5. Napište rovnici, která má všech osm kořenů ze cvičení 3 za řešení!

$$[z^8 = 1.]$$

# GEOMETRICKÉ ZNÁZORNĚNÍ MNOŽIN KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Připomněli jsme již, že komplexní čísla lze znázornit vektory v rovině. Číslu $a_1 + a_2$i je přiřazen vektor $PA$ $(a_1, a_2)$. Poznali jste ve škole, že aritmetickým operacím s komplexními čísly odpovídají příslušné operace s vektory. Zejména je třeba si uvědomit, že prostá hodnota komplexního čísla odpovídá velikosti příslušného vektoru, tj. vzdálenosti koncového a počátečního bodu vektoru. Argument komplexního čísla pak odpovídá úhlu mezi vektorem a kladnou částí osy $x$.

Jestliže v tomto znázornění uvažujeme jen umístění vektorů s počátečním bodem v počátku soustavy souřadnic, jsou čísla $a_1$, $a_2$ současně souřadnicemi koncového bodu vektoru $PA$, znázorňujícího číslo $a = a_1 + a_2$i. To nám umožňuje přiřadit každému komplexnímu číslu $a = a_1 + a_2$i bod $A$ $(a_1, a_2)$. Protože jedním z prvních matematiků, který používal tohoto znázornění, byl K. F. Gauss (1777—1855), mluvíme často o zobrazení komplexních čísel v Gaussově rovině. Jak uvidíme, je tento způsob velmi výhodný a názorný zejména při znázorňování množin komplexních čísel, i když neumožňuje tak snadno grafické provádění aritmetických operací s komplexními čísly jako znázornění vektory.

**Příklad 21.** Znázorněte geometricky množinu komplexních čísel, pro něž platí (a) $|z| = 1$; (b) $|z| < 1$; (c) $|z| > 1$.

*Řešení.* (a) Daná podmínka znamená, že vzdálenost bodu znázorňujícího číslo $z$ od počátku je rovna jedné. Je tedy znázorněním čísel $z$ geometrické místo bodů, jejichž vzdálenost od počátku je jedna. Tyto body vytvoří jednotkovou kružnici se středem v počátku. Body uvnitř této kružnice mají ovšem vzdálenost od počátku menší než jedna, body vně kružnice větší než jedna. Platí tedy pro komplexní čísla $z$, znázorněná body uvnitř jednotkové kružnice, nerovnost $|z| < 1$, zatímco pro komplexní čísla znázorněná body vně kružnice platí nerovnost obrácená, $|z| > 1$. Tím jsme zodpověděli zároveň otázku (b) a (c).

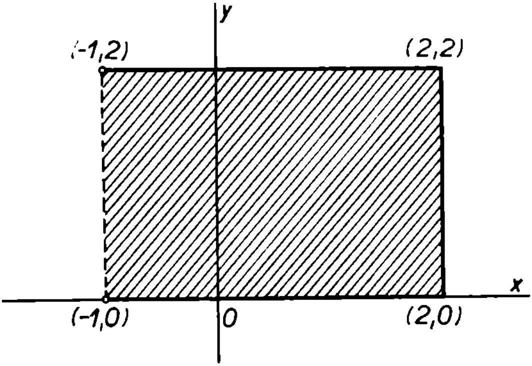
**Příklad 22.** Znázorněte geometricky množinu komplexních čísel, splňujících současně nerovnosti

$$-1 < \operatorname{Re} z \leqq 2, 0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq 2.$$

*Řešení.* Reálná část komplexního čísla $z$ je znázorněna souřadnicí $x$ příslušného bodu. Nerovnost $-1 < \operatorname{Re} z \leqq 2$ tedy znamená totéž jako $-1 < x \leqq 2$. Body, které splňují tuto podmínku, leží v pásu mezi přímkami $x = -1$, $x = 2$, přičemž přímka $x = -1$ je vyloučena (levá nerovnost je ostrá!), zatímco přímka $x = 2$ je do pásu zahrnuta (pravá nerovnost připouští i rovnost). Podobně nerovnost (či správněji nerovnosti) $0 \leqq \operatorname{Im} z \leqq 2$ znamená, že souřadnice $y$ musí splňovat podmínku $0 \leqq y \leqq 2$; obě hraniční přímky tohoto pásu jsou přípustné.

Mají-li čísla $z$ splňovat současně obě nerovnosti, musí ležet v části roviny, společné oběma pásům. To je obdélník o vrcholech $(-1, 0)$, $(-1, 2)$ $(2, 2)$, $(2, 0)$. Jeho obvod je částí přípustné množiny bodů až na svislou úsečku mezi vrcholy $(-1, 0)$, $(-1, 2)$ včetně těchto krajních bodů. (Viz obr. 3.)

*Poznámka.* Všimněte si, že často říkáme např. „komplexní čísla leží v obdélníku..." apod. místo přesnějšího „body, znázorňující komplexní čísla, leží v obdélníku...". Podobně můžete číst také naopak např. „body na jednotkové




Obr. 3

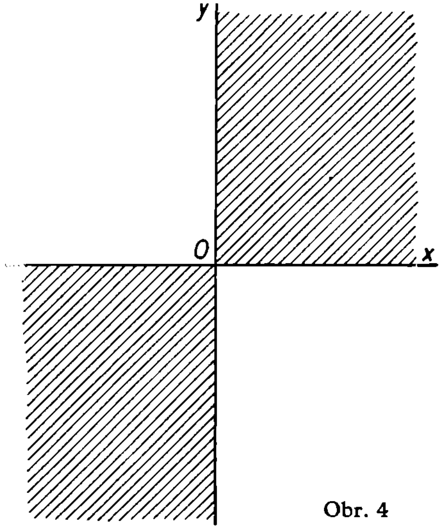
kružnici mají prostou hodnotu rovnu 1" místo „čísla, znázorněná body na jednotkové kružnici, mají prostou hodnotu rovnu 1".

**Příklad 23.** Znázorněte v Gaussově rovině množiny komplexních čísel, pro něž platí (a) Im $z^2 > 0$, (b) Re $z^2 \geqq 0$.

*Řešení.* Nejdříve musíme napsat $z^2$ v algebraickém tvaru, abychom viděli, jaké podmínky platí pro souřadnice $x$ a $y$. Je-li $z = x + y\mathrm{i}$, je $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$. První podmínku můžeme tedy psát ve tvaru $2xy > 0$, druhou $x^2 - y^2 \geqq 0$.

(a) Nerovnost $2xy > 0$ znamená, že souřadnice $x$ i $y$ mají totéž znamení, tj. jsou buď obě kladné, nebo obě záporné. První možnost nastává pro body v prvním kvadrantu, druhá pro body v třetím kvadrantu. Množina čísel, pro něž

Im $z^2 > 0$, je tedy znázorněna prvním a třetím kvadrantem, osy souřadnic jsou vyloučeny (proč?). (Viz obr. 4.)




Obr. 4

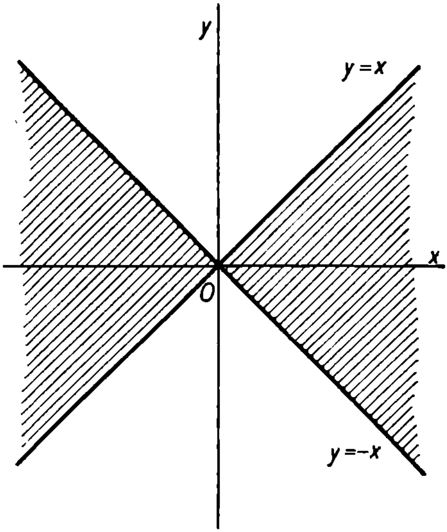
(b) Nerovnost $x^2 - y^2 \geqq 0$ znamená $y^2 \leqq x^2$ čili $|y| \leqq \leqq |x|$. Tuto nerovnost můžeme napsat ve tvaru $-x \leqq y \leqq \leqq x$, je-li $x$ nezáporné, nebo $x \leqq y \leqq -x$, je-li $x$ záporné (neboť pak $x < -x$!). Pro jakoukoliv hodnotu $x$ můžeme tuto nerovnost napsat s použitím $|x|$ ve tvaru $-|x| \leqq \leqq y \leqq |x|$.

Zvolíme-li libovolnou přímku rovnoběžnou s osou $y$, pak body splňující tyto nerovnosti vyplní na ní úsečku mezi body $y = -x$, $y = x$. Přímky $y = -x$, $y = x$ jsou proto hranicí hledané množiny bodů, která je na obr. 5 vyznačena šrafováním. Obě hraniční přímky, které půlí úhel mezi osami souřadnic, zahrnujeme ovšem do naší množiny, neboť ve všech našich vztazích je rovnost přípustná.

Úlohu (b) můžeme řešit také jiným způsobem, použijeme-li goniometrického vyjádření komplexního čísla. Je-li

$$z = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha),$$

je ovšem $x = |z| \cos\alpha$, $y = |z| \sin\alpha$. Naše podmínka se dá napsat ve tvaru $|x| \geqq |y|$ čili $|\cos\alpha| \geqq |\sin\alpha|$, tj. $|\mathrm{tg}\alpha| \leqq 1$. Jak víte, platí tato nerovnost pro úhly z intervalů $\langle -45°, 45° \rangle$ a $\langle 135°, 225° \rangle$. Jak si snadno ověříte, odpovídají těmto hodnotám argumentu právě všechny body z množiny vyznačené na obr. 5.




Obr. 5

**Příklad 24.** Jaké podmínky splňují komplexní čísla, znázorněná body uvnitř mezikruží o středu (0, 1), vnitřním poloměru $r_1 = 1$ a vnějším $r_2 = 3$?

*Řešení.* Z definice kružnice plyne, že každý bod uvnitř mezikruží je vzdálen od středu o více než je hodnota vnitřního poloměru, ale o méně, než je hodnota vnějšího poloměru. Poznali jsme však, že vzdálenost dvou bodů odpovídá prosté hodnotě rozdílu komplexních čísel, znázorněných těmito body.*)

Bod (0, 1), který je středem mezikruží, znázorňuje komplexní jednotku i. Algebraická podmínka, charakterizující body uvnitř daného mezikruží (přesněji čísla těmito body znázorněná) je

$$1 < |z - \mathrm{i}| < 3.$$

**Příklad 25.** Znázorněte geometricky množinu komplexních čísel $z$, pro něž platí $|z - 4| > |z|$.

*Řešení.* Je-li $z = x + y\mathrm{i}$, je

$$|z - 4| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Protože jde o nezáporná čísla, můžeme obě strany dané nerovnosti umocnit na druhou a napsat ji ve tvaru

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 > x^2 + y^2,$$
$$-8x + 16 > 0,$$
$$2 > x.$$

Daná podmínka tedy znamená, že reálná část čísla $z$ je menší než dvě. Tuto nerovnost splňují komplexní čísla, znázorněná body v polorovině vlevo od přímky $x = 2$, rovnoběžné s osou $y$.

Stejný výsledek dostaneme ovšem i geometrickou úvahou: Nerovnost $|z - 4| > |z|$ splňují právě ty body

*) Přesněji řečeno, hovořili jsme zatím o velikosti vektoru. Velikost vektoru je ovšem rovna vzdálenosti počátečního a koncového bodu. Vzorec pro vzdálenost dvou bodů $A$ $(x_1, y_1)$ a $B$ $(x_2, y_2)$ je, jak víte, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Body $A$, $B$ znázorňují komplexní čísla $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ a $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$; je tedy podle definice $|z_2 - z_1| = d$.

v Gaussově rovině, jejichž vzdálenost od bodu 4 je větší než vzdálenost od bodu 0 (tj. od počátku). Body, mající stejnou vzdálenost od obou těchto bodů, leží na jejich symetrále, tj. na přímce $x = 2$. Body, splňující danou nerovnost, musí tedy ležet vlevo od symetrály.

**Příklad 26.** Pro komplexní číslo $z$ platí $\operatorname{Im} z/\operatorname{Re} z > \sqrt{3}$. Je možné, aby toto číslo bylo znázorněno bodem uvnitř kružnice procházející počátkem, jejíž střed leží na ose $x$ a jejíž poloměr je $r$?

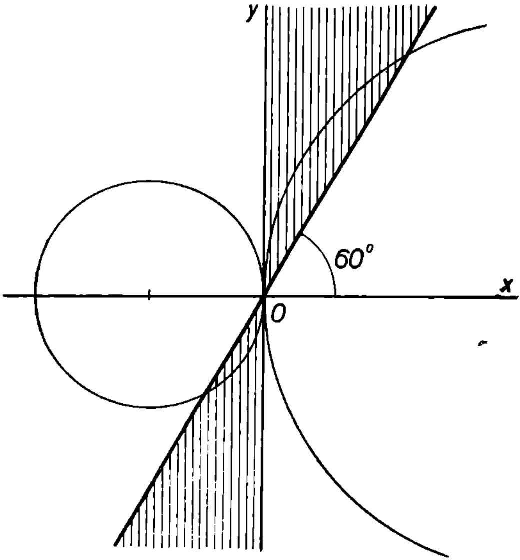
*Řešení.* Napíšeme-li $z$ v goniometrickém tvaru, je

$$z = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha).$$

Potom ovšem $\operatorname{Im} z/\operatorname{Re} z = \operatorname{tg}\alpha$. Daná podmínka tedy znamená, že argument čísla $z$ leží buď v intervalu $(60°, 90°)$, nebo v intervalu $(240°, 270°)$. Geometricky je tato množina znázorněna částí roviny mezi přímkou, procházející počátkem a svírající úhel $60°$ s kladnou částí osy $x$, a imaginární osou. (Rovnice první přímky je $y = \sqrt{3}x$.) Na obr. 6 je tato množina svisle šrafována. Přímka $y = \sqrt{3}x$ je nutně sečnou kružnice procházející počátkem, jejíž střed je na ose $x$ (nezávisle na jejím poloměru), protože tečna této kružnice v počátku je svislá. Daný kruh (bez ohledu na souřadnici středu) zasahuje tedy svou částí (kruhovou úsečí) do množiny znázorňující komplexní čísla, která splňují první podmínku úlohy.

Odpověď tedy zní: Ano, je možné splnit obě podmínky současně. Množina takových komplexních čísel je znázorněna kruhovou úsečí. Je-li střed kružnice na kladné části osy $x$, leží tato úseč v prvním kvadrantu; má-li střed kružnice zápornou první souřadnici, leží úseč ve třetím kvadrantu. (Srovn. obr. 6, na němž jsou vyznačeny dvě kružnice: se středem $(5, 0)$ a $(-2, 0)$.)

Dovedete stručně odůvodnit, proč odpověď nezávisí na hodnotě souřadnice středu kružnice? Ano, protože zároveň se změnou souřadnice se změní i poloměr kružnice (musí procházet počátkem!), takže kružnice vždy protne přímku $y = \sqrt{3}x$, která je hranicí oblasti $\text{Im}\, z/\text{Re}\, z > \sqrt{3}$.




Obr. 6

# Cvičení

**1.** Popište geometricky a načrtněte množiny komplexních čísel $z$, vyhovujících následujícím podmínkám:

(a) $|z| \leqq 2$, $0° \leqq \arg z \leqq 30°$; (b) $\operatorname{Re} z > 1$, $|z| < 2$;

(c) $\operatorname{Im} z \leqq 2$, $\frac{1}{4}\pi < \arg z < \frac{3}{4}\pi$.

[(a) Kruhová výseč „uzavřená", tj. včetně hraničních úseček a oblouku; (b) kruhová úseč „otevřená", tj. bez hraniční úsečky a oblouku; (c) rovnoramenný trojúhelník včetně podstavy, ramena nejsou zahrnuta.]

**2.** Znázorněte množinu komplexních čísel, pro něž platí $-45° \leqq \arg z \leqq 45°$. Vyjádřete tutéž množinu pomocí podmínky kladené na reálnou a imaginární část čísla $z$!

[Část roviny mezi přímkami $y = -x$, $y = x$, ležící vpravo od počátku. Táž množina je dána podmínkami $|\operatorname{Im} z/\operatorname{Re} z| \leqq 1$, $\operatorname{Re} z \geqq 0$.]

**3.** Jakou podmínku splňují komplexní čísla, znázorněná geometricky body ležícími

(a) uvnitř kružnice o středu (3, 1) a poloměru 2;

(b) v pásu mezi přímkami $x = -1$, $x = 3$;

(c) na úsečce spojující body $(-1, -1)$ a $(1, 1)$?

[(a) $|z - (3 + i)| < 2$; (b) $-1 < \operatorname{Re} z < 3$;

(c) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, $|z| \leqq \sqrt{2}$.]

4. kapitola

# KOMPLEXNÍ FUNKCE

Pamatujete se ze školy, že v definici pojmu funkce vystupovaly dvě množiny: množina hodnot proměnné (obor funkce) a množina hodnot funkce. Obě tyto množiny byly dosud množiny reálných čísel. Není však žádný závažný důvod, proč bychom nemohli svoje úvahy zobecnit na čísla komplexní. Jsou vlastně dvě možnosti takového zobecnění. Pojednejme nejprve o jednodušší možnosti. Předpokládejme, že množina hodnot funkce je množina komplexních čísel, zatímco proměnná zůstává v oboru čísel reálných. Hovoříme pak o komplexní funkci reálné proměnné.

Definice komplexní funkce reálné proměnné se nijak podstatně neliší od definice reálné funkce. Jedinou změnou je, jak už jsme uvedli, že hodnoty funkce smějí být čísla komplexní. Zdůrazněme však znovu, že hodnotami proměnné zůstávají prozatím čísla reálná.

Takto definovaná funkce má vlastnosti velmi podobné vlastnostem reálné funkce. Můžeme dokonce říci, že jakoukoliv úlohu o komplexní funkci reálné proměnné můžeme převést na úlohu o funkcích reálných. Platí totiž:

*Je-li dána komplexní funkce reálné proměnné rovnicí $z = F(t)$, pak rovnice $x = \operatorname{Re} F(t)$ a $y = \operatorname{Im} F(t)$ definují reálné funkce reálné proměnné, přičemž obor proměnné zůstává nezměněn.*

Důkaz tohoto tvrzení je velmi snadný. Pro každou hodnotu proměnné $t$ z oboru funkce $F$ je $F(t)$ komplexní číslo. Můžeme je tedy psát ve tvaru $F(t) = \text{Re } F(t) + \text{i Im } F(t)$. Reálná i imaginární část $F(t)$ je ovšem reálné číslo. Každá z rovnic $x = \text{Re } F(t)$, $y = \text{Im } F(t)$ přiřazuje tedy libovolnému reálnému $t$ z oboru funkce $F$ právě jedno reálné číslo. (Jinak by totiž přiřazení $z = F(t)$ nebylo jednoznačné.) A to ovšem znamená, že rovnice $x = \text{Re } F(t)$, $y = \text{Im } F(t)$ definují reálné funkce, jejichž obor je roven oboru funkce $F(t)$.

**Příklad 27.** Definujme funkci $f$ předpisem: Reálnému číslu $x$ je přiřazeno komplexní číslo, jehož reálná i imaginární část je rovna $x$. Jaký je obor a množina hodnot funkce? Jak lze znázornit množinu hodnot funkce geometricky?

*Řešení.* Oborem funkce je zřejmě celá množina reálných čísel. Protože $f(x) = x + x\text{i}$, je $f(x)$ znázorněna vektorem, jehož koncový bod (při umístění v počátku) má obě souřadnice stejné. To znamená, že leží na přímce, která půlí úhel mezi osami souřadnic. Množinu hodnot funkce lze tedy znázornit geometricky přímkou s rovnicí $y = x$.

Tato přímka není však „grafem funkce“ v tom smyslu, jak jej známe z teorie reálných funkcí. Je jen znázorněním množiny funkčních hodnot bez jejich vztahu k proměnné. Uvědomte si například, že geometrickým znázorněním množiny hodnot funkce $g(x) = 2x + 2x\text{i}$ nebo dokonce $h(x) = \text{tg } x + \text{i tg } x$ je táž přímka, i když tyto funkce přiřazují téže hodnotě proměnné naprosto různá čísla.

**Příklad 28.** Vztah $f(x) = (x + a\text{i})^3$, kde $a$ je reálné číslo, definuje komplexní funkci reálné proměnné. Stanovte její reálnou a imaginární část a určete, pro které hodnoty proměnné je $f(x)$ číslo reálné nebo číslo ryze imaginární!

*Řešení.* Platí

$$(x + ai)^3 = x^3 + 3x^2 ai + 3xa^2i^2 + a^3i^3 =$$
$$= x^3 - 3a^2x + (3ax^2 - a^3)i.$$

Je tedy

$$\mathrm{Re} f(x) = x^3 - 3a^2x, \quad \mathrm{Im} f(x) = 3ax^2 - a^3.$$

Reálná část je rovna nule, platí-li $x = 0$, nebo $x^2 = 3a^2$ čili $x = \pm\sqrt{3}a$. Imaginární část je rovna nule, je-li $3ax^2 - a^3 = 0$. Vyloučíme-li případ $a = 0$, kdy jde o reálnou funkci, dostáváme z této rovnice $3x^2 = a^2$ čili $x = \pm a/\sqrt{3}$.

Daná funkce nabývá tedy reálné hodnoty pro $x = \pm a/\sqrt{3}$ a ryze imaginární hodnoty pro $x = 0$ nebo $x = \pm\sqrt{3}a$. Je-li ovšem $a = 0$, jde o reálnou funkci, takže všechny její hodnoty jsou reálné.

**Příklad 29.** Popište geometricky množinu hodnot komplexní funkce reálné proměnné $f(t) = ut$, kde $u$ je komplexní číslo. Jak se změní tato množina, přičteme-li komplexní číslo $v$, tj. definujeme-li funkci $f_1(t)$ vztahem $f_1(t) = ut + v$?

*Řešení.* Číslo $f(t)$ má reálnou část $t$ Re $u$, imaginární $t$ Im $u$. Píšeme-li $u = u_1 + u_2i$, je znázorněním hodnoty funkce $f(t)$ bod $(u_1t, u_2t)$, takže

$$x = u_1t, y = u_2t.$$

To jsou tzv. parametrické rovnice ($t$ se nazývá parametr). Vyloučíme-li z těchto rovnic $t$, dostaneme vztah mezi $x$ a $y$. Vyjádřeme např. $t$ z první rovnice a dosaďme do druhé:

$$t = x/u_1, \quad y = \frac{u_2}{u_1} x.$$

Poslední rovnice je rovnicí přímky procházející počátkem, jejíž směrnice je $u_2/u_1$ (je-li $u_1 = 0$, je rovnice přímky prostě $x = 0$; je-li zároveň i $u_2 = 0$, jde o konstantní funkci $f(t) = 0$). Množina hodnot funkce je tedy znázorněna přímkou.

Funkce $f_1(t) = ut + v$ přiřazuje číslu $t$ hodnotu funkce $f$ zvětšenou o komplexní číslo $v = v_1 + v_2 i$. Geometricky to znamená, že bod, který znázorňuje funkční hodnotu $f(t)$, je třeba posunout o vektor $v(v_1, v_2)$.

Rozdělíme-li $f_1(t)$ na reálnou a imaginární část, je

$$\operatorname{Re} f_1(t) = u_1 t + v_1, \quad \operatorname{Im} f_1(t) = u_2 t + v_2.$$

Souřadnice odpovídajícího bodu jsou tedy

$$x = u_1 t + v_1, \quad y = u_2 t + v_2.$$

Vyloučíme-li z těchto rovnic parametr $t$, dostaneme opět rovnici přímky

$$y = \frac{u_2}{u_1}(x - v_1) + v_2.$$

Směrnice přímky se nezměnila (jsou tedy obě přímky rovnoběžné), ale každý bod přímky je posunut ve směru osy $y$ o $v_2 - u_2 v_1/u_1$.

**Příklad 30.** Pro které hodnoty komplexního čísla $w$ je prostá hodnota funkce $h(x) = \dfrac{w - x}{w + x}$ rovna jedné pro všechna reálné čísla $x$?

*Řešení.* Je-li $w = u + vi$, je

$$|h(x)| = \left|\frac{w - x}{w + x}\right| = \sqrt{\frac{(u - x)^2 + v^2}{(u + x)^2 + v^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + x^2 - 2ux}{u^2 + v^2 + x^2 + 2ux}}.$$

Pokud $u \neq 0$, je zřejmě $|h(x)| = 1$ jen pro $x = 0$. Je-li $u = 0$, je $|h(x)| = 1$, nezávisle na hodnotě imaginární části $v$.

Číslo $w$ musí tedy být ryze imaginární. Je-li $w \neq 0$, je množina hodnot funkce $h$ znázorněna jednotkovou kružnicí o středu v počátku bez bodu $z = -1$*); je-li $w = 0$, je $h(x) = -1$ pro všechna $x \neq 0$.

**Příklad 31.** Znázorněte graficky množinu hodnot funkce

$$f(x) = \cos x + \mathrm{i} \sin x.$$

Jak se změní množina hodnot, definujeme-li $g(x) = [f(x)]^n$?

*Řešení.* Protože $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, jsou všechny funkční hodnoty $f(x)$ znázorněny body na jednotkové kružnici se středem v počátku. Obráceně, souřadnice libovolného bodu na této kružnici lze psát ve tvaru $\cos x$, $\sin x$ pro nějakou hodnotu $x$ z intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Množina funkčních hodnot je tedy znázorněna jednotkovou kružnicí. Každý bod této kružnice znázorňuje funkční hodnotu nekonečně mnoha hodnot proměnné, které se vzájemně liší o celistvý násobek $2\pi$.

Funkce $g(x) = f^n(x)$ je definována vztahem

$$g(x) = (\cos x + \mathrm{i} \sin x)^n,$$

což podle Moivrovy věty je totéž jako

$$g(x) = \cos nx + \mathrm{i} \sin nx.$$

Množina hodnot této funkce je znázorněna toutéž jednotkovou kružnicí, neboť také $\cos^2 nx + \sin^2 nx = 1$. Samo-

*) Rovnice $-1 = \dfrac{w - x}{w - x}$ má řešení jen pro $w = 0$.

zřejmě i obráceně je možné každý bod na této kružnici vyjádřit jako $(\cos nx, \sin nx)$; hodnotu $x$ stačí zde vzít dokonce z intervalu $\langle 0, \frac{1}{n} 2\pi)$.

## Cvičení

**1.** Vypočtěte reálnou a imaginární část funkce reálné proměnné

$$f(x) = \frac{x - (1 + i)}{x + (1 - i)}.$$

$$\left[\operatorname{Re} f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2}, \operatorname{Im} f(x) = \frac{-2}{x^2 + 2x + 2}.\right]$$

**2.** Napište lineární funkci reálné proměnné, která nule přiřazuje číslo $2 - 5i$ a číslu 3 komplexní jednotku $-i$.

$$\left[\text{Funkce } \frac{1}{3}(-2 + 4i)\, x + 2 - 5i.\right]$$

**3.** Znázorněte geometricky množinu hodnot funkce

$$g(t) = t + \sqrt{1 - t^2}\, i,$$

je-li $t$ reálná proměnná. Co je oborem této funkce?
[Půlkružnice o středu v počátku a poloměru 1, ležící nad osou $x$. Oborem funkce je interval $\langle -1, 1 \rangle$.]

## 5. kapitola

# FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

V minulé kapitole jsme hovořili o funkcích, jejichž hodnoty jsou komplexní čísla. Viděli jsme, že pokud hodnoty proměnné zůstanou v oboru čísel reálných, nejde vcelku o nic nového. Rozdělíme-li takovou funkci na její reálnou a imaginární část, dostaneme prostě dvě reálné funkce.

Zajímavější případ však nastane, jestliže obě množiny v definici funkce jsou množiny komplexních čísel. Hovoříme pak o komplexních funkcích komplexní proměnné nebo stručněji o funkcích komplexní proměnné.

Definice. *Jsou-li $M$, $K$ množiny komplexních čísel a je-li každému číslu z množiny $M$ přiřazeno určitým předpisem právě jedno číslo z množiny $K$, říkáme, že je určena funkce (komplexní funkce komplexní proměnné) na množině $M$.*

Ostatní názvy užíváme stejně jako pro reálné funkce (obor, proměnná, hodnota funkce atd.). Přiřazení čísel obou množin nazýváme často zobrazením množiny $M$ do množiny $K$.

**Příklad 32.** Rovnice $f(z) = |z|$ definuje funkci, která každému komplexnímu číslu $z$ přiřazuje jeho prostou hodnotu. Co je oborem a množinou hodnot této funkce? Popište množinu hodnot funkce geometricky! Kolik existuje komplexních čísel $z$ takových, že $f(z) = m$ ($m$ je komplexní číslo)?

*Řešení.* Prostá hodnota je definována pro každé komplexní číslo. Je tedy oborem funkce celá množina komplexních čísel. Hodnotou funkce může však být jen nezáporné (reálné) číslo. Můžeme tedy říci, že funkcí $f(z) = |z|$ je celá rovina zobrazena na kladnou poloosu $x$ (včetně počátku).

Je-li $m$ komplexní číslo s nenulovou imaginární částí nebo číslo záporné, neexistuje žádné číslo $z$ takové, že $f(z) = m$; je-li $m = 0$, existuje právě jedno takové číslo, $z = 0$. Je-li $m$ kladné, je $f(z) = m$ pro všechna komplexní čísla, pro něž $|z| = m$; takových čísel je nekonečně mnoho. Všechna jsou znázorněna vektory o stejné velikosti, tj. vektory, jejichž koncový bod (při umístění v počátku) leží na kružnici o středu v počátku a poloměru $m$.

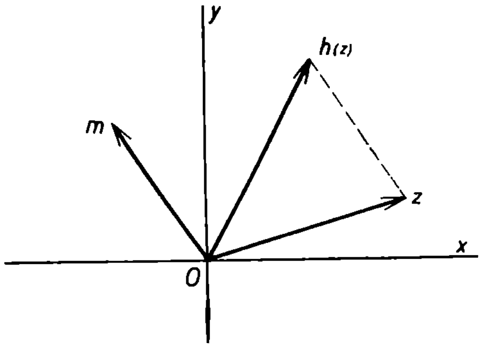
**Příklad 33.** Rovnice $g(z) = z + i$ definuje funkci, jejímž oborem je celá množina komplexních čísel.
(a) Pro která čísla $z$ je $g(z)$ reálné číslo?
(b) Pro které hodnoty proměnné je $g(z)$ ryze imaginární?
(c) Jak je zobrazena reálná a imaginární osa?

*Řešení.* (a) Je-li $z = x + yi$, je $g(z) = x + (y + 1)i$. Číslo $g(z)$ je reálné právě tehdy, je-li $\mathrm{Im}\, g(z) = 0$ čili $y = -1$. Funkce $g(z)$ nabývá tedy reálných hodnot pro všecka komplexní čísla, jejichž imaginární část je rovna $-1$.

(b) Má-li být $g(z)$ ryze imaginární číslo, musí být podle předešlého $x = 0$. Obrazem ryze imaginárního čísla je opět číslo ryze imaginární.

(c) Čísla na reálné ose mají nulovou imaginární část. Odpovídající funkční hodnoty mají tedy imaginární část rovnou jedné. Jsou zobrazeny vektory, které mají druhou složku rovnu jedné. Koncové body takových vektorů vyplní přímku $y = 1$. Čísla na imaginární ose mají reálnou část rovnu nule. Přičtením imaginární jednotky se jejich reálná část nezmění, takže funkční hodnota je opět ryze imaginární číslo. Říkáme, že funkcí $g$ se zobrazuje imaginární osa na sebe.

**Příklad 34.** Jaké geometrické transformaci odpovídá funkce $h(z) = z + m$, je-li $m$ dané komplexní číslo?




Obr. 7

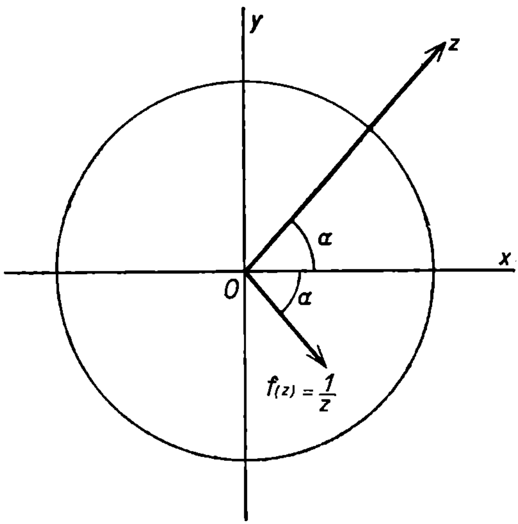
*Řešení.* Znázorníme-li $m$ a $z$ vektory umístěnými v počátku, je $h(z)$ znázorněno součtem těchto vektorů (viz obr. 7). To znamená, že koncový bod vektoru $z$ je posunut ve směru vektoru $m$ o vzdálenost rovnou velikosti tohoto vektoru. Funkce $h(z)$ odpovídá tedy posunutí o $|m|$ ve směru vektoru, znázorňujícího číslo $m$. (Srovnej s předešlým příkladem: Tam šlo o posunutí o jednotku délky ve směru imaginární osy.)

**Příklad 35.** Funkce $f(z)$ je definována vztahem $f(z) = 1/z$. Jaký je obor funkce a množina jejích hodnot? Je-li $z$ znázorněno vektorem velikosti $v$, který svírá úhel $\alpha$ s kladným směrem reálné osy, jaký vektor znázorňuje číslo $f(z)$?

*Řešení.* Číslo $f(z)$ je řešením rovnice $zx = 1$, v níž za neznámou považujeme $x$. Jak víme, má tato rovnice řešení s výjimkou případu $z = 0$. Oborem funkce $f(z)$ je tedy množina komplexních čísel $z \neq 0$. Naopak, je-li dáno komplexní číslo $m \neq 0$, existuje číslo $z$ tak, že $1/z = m$ čili $f(z) = m$. Jinými slovy, funkce $f(z)$ nabývá všech hodnot s výjimkou nuly.

Abychom mohli blíže zkoumat hodnotu $f(z)$, napíšeme je v algebraickém tvaru. K tomu stačí vynásobit je číslem komplexně sdruženým k $z$. Dostáváme

$$f(z) = 1/z = \frac{\bar{z}}{z \, . \, \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \, .$$




Obr. 8

Tento výsledek říká, že prostá hodnota $f(z)$ je převrácenou prostou hodnotou proměnné $z$ a že směr vektoru znázorňujícího $f(z)$ je dán argumentem čísla $\bar{z}$. Víme, že vektory znázorňující komplexně sdružená čísla jsou souměrné podle reálné osy. Číslo $f(z)$ je tedy znázorněno vektorem velikosti $1/|z|$, který svírá s kladným směrem reálné osy úhel $360° - \alpha$. (Viz obr. 8.)

Z toho, co jsme odvodili, vyplývá tento obecnější závěr: Funkce $f(z) = 1/z$ zobrazuje kružnici se středem v počátku a o poloměru $r$ na kružnici se středem v počátku a poloměrem $1/r$; kružnice s jednotkovým poloměrem se ovšem zobrazuje sama na sebe.

**Příklad 36.** Definujte funkci $G(z)$, která každému komplexnímu číslu přiřazuje číslo s dvojnásobnou prostou hodnotou a s argumentem větším o 45°.

*Řešení.* Pamatujete se na násobení komplexních čísel vyjádřených v goniometrickém tvaru? Poznali jste, že součin dvou komplexních čísel má argument rovný součtu argumentů obou činitelů. Toho zde můžeme použít! Vynásobíme-li číslo $z$ číslem $\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$, zvětšíme tím jeho argument o úhel $\alpha$.

V našem případě požadujeme $\alpha = 45°$, tedy $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{2}$. Budeme tedy násobit číslem $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$.

Definujme tedy funkci $G_1(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) z$. To však nestačí! Snadno si ověříte, že $|G_1(z)| = |z|$. My však chceme prostou hodnotu zdvojnásobit. Prostá hodnota součinu se rovná součinu prostých hodnot. Vynásobíme-li

$G_1(z)$ reálným číslem 2, nezměníme jeho argument, ale $|2G_1(z)| = 2|G_1(z)| = 2|z|$.

Naše funkce je tedy definována předpisem

$$G(z) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{i}\right) z$$

nebo

$$G(z) = \sqrt{2}\,(1 + \mathrm{i})z.$$

V geometrii říkáme, že jsme provedli rotaci (otočení) o 45° a dilataci („roztažení“) v poměru 2 : 1.

**Příklad 37.** Stanovte obor funkce $f(z) = \dfrac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}$. Je-li $\operatorname{Im} z > 0$, dokažte, že $|f(z)| < 1$. Je-li $z$ reálné, je $|f(z)| = 1$.

*Řešení.* Výraz $\dfrac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}$ má smysl pro všechna komplexní čísla $z$ s výjimkou $z = -\mathrm{i}$, kdy jmenovatel je nula. Oborem funkce je tedy množina všech komplexních čísel s výjimkou $z = -\mathrm{i}$.

Vypočtěme nyní $|f(z)|$, jestliže $z = x + \mathrm{i}y$:

$$|f(z)| = \left|\frac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}\right| = \left|\frac{\mathrm{i} - x - y\mathrm{i}}{\mathrm{i} + x + y\mathrm{i}}\right| = \frac{|-x + (1 - y)\mathrm{i}|}{|\ \ x + (1 + y)\mathrm{i}|} =$$

$$= \left[\frac{x^2 + (1 - y)^2}{x^2 + (1 + y)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{x^2 + 1 + y^2 - 2y}{x^2 + 1 + y^2 + 2y}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Je-li $z$ číslo reálné, je ovšem $y = 0$ a tedy $|f(z)| = 1$. Je-li $\operatorname{Im} z = y > 0$, je čitatel zlomku zřejmě menší než

jmenovatel. Ve jmenovateli přičítáme totiž kladné číslo $2y$, zatímco v čitateli totéž kladné číslo odčítáme.*)
Celý zlomek je tedy menší než jedna (je-li $y$ kladné), což jsme měli dokázat.

Podrobnou diskusí bychom zjistili, že funkce $f(z) = \frac{i - z}{i + z}$ zobrazuje reálnou osu na jednotkovou kružnici se středem v počátku bez bodu $z = -1$**). Horní polovina Gaussovy roviny je touto funkcí zobrazena na vnitřek této kružnice. Obdobným způsobem se můžeme přesvědčit, že dolní polorovina je zobrazena body vně jednotkové kružnice.

**Příklad 38.** Funkce $g(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ je definována pro všechna komplexní čísla různá od nuly. Dokažte:
(a) Je-li $g(z_1) = g(z_2)$, je buď $z_1 = z_2$, nebo $z_1 = 1/z_2$.
(b) Je-li $|z| = 1$, je $g(z)$ reálné číslo z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.
(c) Pro reálnou hodnotu proměnné je $g(z)$ opět reálné číslo a platí $|g(z)| \geqq 1$.

*Řešení.* (a) Rovnost $g(z_1) = g(z_2)$ znamená

$$\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right),$$

což převedeme ekvivalentními úpravami postupně na tvar

$$z_1 - z_2 = \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1},$$

---

*) Proveďme tento postup přesně podle pravidel o počítání s nerovnostmi: Protože $y > 0$, je $0 > -2y$. Přičteme-li na obou stranách nerovnosti totéž číslo $x^2 + 1 + y^2$, dostaneme $x^2 + 1 + y^2 > x^2 + 1 + y^2 - 2y$. Stejným způsobem z nerovnosti $2y > 0$ dostaneme $x^2 + 1 + y^2 + 2y > x^2 + 1 + y^2$. Transitivní zákon dává pak nerovnost $x^2 + 1 + y^2 + 2y > x^2 + 1 + y^2 - 2y$.

**) Srov. pozn. k př. 30 na str. 48.

$$z_1 - z_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2},$$

$$(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0.$$

Aby součin na levé straně rovnice byl nula, musí být buď $z_1 = z_2$, nebo $1/(z_1 z_2) = 1$. Druhá rovnost ovšem znamená totéž jako $z_1 = 1/z_2$. (Připomeňme, že obor funkce neobsahuje nulu, takže $z_1$ i $z_2$ jsou čísla různá od nuly.)

(b) Je-li $z = x + y\mathrm{i}$, je

$$g(z) = \frac{1}{2}\left(x + y\mathrm{i} + \frac{1}{x + y\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2}\left(x + y\mathrm{i} + \frac{x - y\mathrm{i}}{x^2 + y^2}\right).$$

Je-li nyní $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$,

je $g(z) = \frac{1}{2}(x + y\mathrm{i} + x - y\mathrm{i}) = x$ čili $g(z) = \operatorname{Re} z$. Protože $x^2 + y^2 = 1$, je zřejmé, že $|x| \leqq 1$, takže hodnota funkce $g(z)$ je z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

(c) Je-li $a$ reálné číslo, je $g(a) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ také reálné. Jak ale dokázat, že $|g(a)| \geqq 1$?

Použijeme známé věty, že druhá mocnina reálného čísla je nezáporná. Pro kladné $a$ platí tedy například také

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geqq 0.$$

Umocníme-li, dostaneme $a - 2 + \frac{1}{a} \geqq 0$ čili $a + \frac{1}{a} \geqq 2$. Tím je nerovnost $|g(a)| \geqq 1$ dokázána pro kladná čísla $a$ (použili jsme odmocniny z čísla $a$!). Avšak zřejmě platí $g(-a) = -g(a)$, takže $|g(-a)| = |g(a)|$. Tím je tvrzení (c) dokázáno v celé obecnosti.

V některých příkladech této kapitoly jsme se zabývali úlohami, které se týkaly geometrických vlastností funkcí komplexní proměnné, nebo přesněji vlastností zobrazení Gaussovy roviny, určeného takovou funkcí. Odtud je již jen krok k otázce, zda funkci komplexní proměnné můžeme graficky znázornit obdobně jako funkci reálné proměnné. Odpověď bohužel zní, že nikoliv. Již tehdy, když zkoumáme komplexní funkci reálné proměnné, máme se znázorněním funkce potíže (srov. př. 27).

Snažíme se proto získat názornější představu o průběhu funkce komplexní proměnné tím, že zkoumáme, jak daná funkce zobrazuje (mohli bychom říci „zkresluje") určité systémy čar, které jsou pro nás z nějakého hlediska důležité. Nejčastěji to bývá např. systém přímek rovnoběžných s některou souřadnou osou, systém soustředných kružnic se středem v počátku, systém paprsků procházejících počátkem apod. Někdy také naopak zkoumáme, jaké jsou vzory některých jednoduchých čar. Vraťme se z tohoto hlediska ještě k funkci z př. 38 (tzv. funkce Žukovského). Dokážeme, že obrazem systému soustředných kružnic se středem v počátku a poloměru $r \neq 1$ je systém konfokálních elips. Ohniska elips jsou body $(-1, 0)$ a $(1, 0)$. Kružnicím o poloměru $r$ a $1/r$ odpovídá v tomto zobrazení táž elipsa.

*Řešení.* Kružnice o poloměru $r > 0$ se středem v počátku znázorňuje právě všechna komplexní čísla, jejichž prostá hodnota je $r$. Taková čísla můžeme psát v goniometrickém tvaru

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Jak víme, je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} (\cos \alpha - i \sin \alpha).$$

Dosadíme-li tyto výrazy do vztahu, definujícího funkci $g(z)$, dostaneme

$$g(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha + \right.$$
$$\left. + \mathrm{i}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha\right].$$

Bod Gaussovy roviny, znázorňující číslo $g(z)$, má tedy souřadnice

$$x = \operatorname{Re} g(z) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha,$$

$$y = \operatorname{Im} g(z) = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha.$$

Je-li $r = 1$, dostáváme ihned $y = 0$, což se shoduje s výsledkem př. 38 (b). Je-li $r > 1$, je

$$\cos\alpha = 2x/\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad \sin\alpha = 2y/\left(r - \frac{1}{r}\right).$$

Dosadíme-li z těchto vztahů do známé rovnosti

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

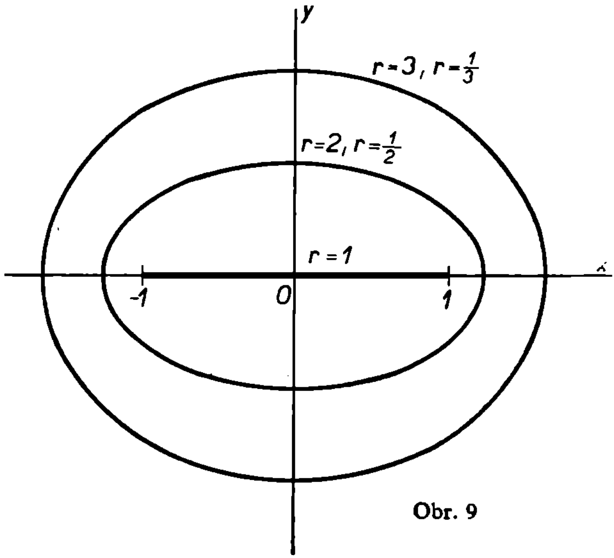
dostáváme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde $a = \left(r + \frac{1}{r}\right)/2$, $b = \left(r - \frac{1}{r}\right)/2$. Jak víte, je tato rovnice rovnicí elipsy se středem v počátku a s poloosami $a$, $b$. Použijeme-li ještě vztah $c^2 = a^2 - b^2$, kde $c$ znamená vzdálenost ohniska elipsy od jejího středu, dostaneme snadno, že $c^2 = 1$.

Ohniska elipsy nezávisí tedy na volbě poloměru $r$; jsou to vždy body $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

Pro $r < 1$ je úvaha zcela obdobná, stačí zaměnit čísla $r$ a $1/r$. Číslo $r - \frac{1}{r}$ je ovšem v tom případě záporné, takže poloosy elips jsou $a = \left(r + \frac{1}{r}\right)/2$, $b = -\left(r - \frac{1}{r}\right)/2$. (Viz obr. 9.)




Obr. 9

Podobně se může čtenář sám přesvědčit, že každá přímka procházející počátkem a svírající s kladným směrem reálné osy úhel $\alpha$ ($\alpha \neq k\pi/2$) se zobrazuje na hyperbolu

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} = 1.$$

Ohniska těchto hyperbol jsou opět body $(-1, 0)$ a $(1, 0)$.

Reálná osa se zobrazuje na dvě polopřímky ležící na ose $x$, jejichž počáteční body jsou opět $(-1, 0)$, $(1, 0)$. Imaginární osa se zobrazuje sama na sebe. (Funkce $g(z)$ není ovšem definována pro $z = 0$. Můžeme však za obraz počátku považovat nevlastní bod.)

## Cvičení

**1.** Určete obor funkce $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$. Pro které hodnoty proměnné platí $f(z) = z$?

[$z \neq -1$; $z = \mathrm{i}$ a $z = -\mathrm{i}$.]

**2.** Funkce $g(z) = z^2$ je definována pro všechna komplexní čísla. Je-li argument čísla $z$ roven $\alpha$, jaký je argument čísla $g(z)$? Co platí o hodnotách funkce $g(z)$, je-li proměnná ryze imaginární číslo?
[Argument je $2\alpha$; hodnota funkce je reálná.]

**3.** Definujte funkci, přiřazující každému komplexnímu číslu $z$ číslo, jehož reálná část je dvojnásobkem prosté hodnoty proměnné, imaginární část je rovna jedné.

[$f(z) = 2|z| + \mathrm{i}$.]

**4.** Funkce $f_1(z), f_2(z)$ jsou definovány předpisy $f_1(z) = |z|$, $f_2(z) = \operatorname{Re} z$. Vysvětlete, jak dostanete graficky funkční hodnoty těchto funkcí pro libovolnou danou hodnotu proměnné!
[Pro $f_1$ otočením bodu $z$ okolo počátku na kladnou část reálné osy; pro $f_2$ kolmým promítnutím bodu $z$ na reálnou osu.]

6. kapitola

# EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE A LOGARITMUS

Mezi funkcemi, o nichž jste hovořili ve škole, byla i tzv. exponenciální funkce $e^x$. Tato funkce je zvláštním případem obecné exponenciální funkce $a^x$ (o základu $a$).

Definice čísla e vyžaduje jisté znalosti o posloupnostech či řadách*). Číslo e je totiž limitou posloupnosti, jejíž obecný ($n$-tý) člen je $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Jinak se dá číslo e definovat jako součet nekonečné řady

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2.1} + \frac{1}{4.3.2.1} + \ldots$$

Tyto vzorce nám umožňují vypočítat s libovolnou předem danou přesností hodnotu čísla e, která je e = 2,71828...

Tato zdánlivě náhodná a umělá definice má hluboký význam. Umožňuje nám např. sestavit tabulky přirozených logaritmů (tj. logaritmů o základu e). Z nich pak lze podle známého vzorce $\log_a x = \lg x / \lg a$ vypočítat logaritmy o libovolném (kladném) základu, tedy také např. desetinné logaritmy. Těmito otázkami se ovšem nemůžeme zde zabývat.

Funkce $e^x$ se vyskytuje v řadě fyzikálních a technických aplikací. Tak např. křivka, vytvořená provazem nebo řetězem, zavěšeným volně (tj. tak, že může klouzat) ve dvou

*) Čtenář, který tyto znalosti nemá, může však bez obav pokračovat v četbě této kapitoly!

bodech, má rovnici $y = e^x + e^{-x}$ čili $y = e^x + 1/e^x$. Tato křivka se tradičně nazývá řetězovka.

Rovnice popisující kmitání hmotného bodu je $x = \cos t$ ($t$ označuje čas). V praxi jsou však mnohem obvyklejší tzv. tlumené kmity. Tlumení je vyjádřeno exponenciální funkcí $e^{-t}$, takže rovnice tlumených kmitů je $x = e^{-t} \cos t$. Zatímco v prvním případě kmitá hmotný bod stále mezi body $x = -1$ a $x = 1$, v druhém případě se výchylka stále zmenšuje, neboť funkce $e^{-t}$ je klesající.*)

Exponenciální funkce se objevuje také ve vzorcích pro rozpad radioaktivní látky, při výpočtech v teorii pravděpodobnosti (Poissonův zákon) atd.

Mnohé z těchto aplikací — např. v elektrotechnice — vedly k myšlence rozšířit exponenciální funkci na funkci komplexní proměnné, a to tak, aby její podstatné vlastnosti zůstaly zachovány. Pokusíme se nyní naznačit tuto cestu.

Definujme funkci komplexní proměnné $E(z)$ vztahem: Je-li $z = x + yi$, pak

$$E(z) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Je-li $z$ reálné číslo, je takto definovaná funkce totožná s exponenciální funkcí $e^x$, neboť v tom případě je $z = x$, $y = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Společně s některými dalšími vlastnostmi, které jsou obdobné vlastnostem exponenciální funkce v reálném oboru, nás to vede k tomu, že funkci $E(z)$ nazýváme také exponenciální funkcí v komplexním oboru. Často se pro ni používá i stejné označení $e^z$ nebo $\exp z$.

Exponenciální funkce je jedna z tzv. elementárních funkcí komplexní proměnné. Nemůžeme v této knížce rozebírat její význam příliš do hloubky; přesto nám však dává příle-

*) V uvedených příkladech jsme pro jednoduchost vynechali fyzikální konstanty.

žitost ukázat blíže způsob, jak se zkoumají vlastnosti komplexních funkcí, a procvičit znovu naše znalosti algebry komplexních čísel.

**Příklad 39.** Z definice funkce $E(z)$ odvoďte její následující vlastnosti:
(a) $|E(z)| = e^{\mathrm{Re}\, z}$; je-li $z$ ryze imaginární, je $|E(z)| = 1$.
(b) $E(z) \neq 0$ pro každé komplexní číslo $z$.
(c) $E(z + 2\pi i) = E(z)$, $E(z + \pi i) = -E(z)$.

*Řešení.* (a) Pro libovolné reálné číslo $y$ platí

$$|\cos y + i \sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1.$$

Protože prostá hodnota součinu se rovná součinu prostých hodnot činitelů, je

$$|E(z)| = e^x |\cos y + i \sin y| = e^{\mathrm{Re}\, z}.$$

(Připomeňme, že hodnota exponenciální funkce reálné proměnné je vždy kladné číslo!) Je-li $z$ ryze imaginární, je $\mathrm{Re}\, z = 0$ a tedy $|E(z)| = e^0 = 1$.

(b) Kdyby bylo $E(z) = 0$, muselo by platit také $|E(z)| = 0$ (srov. př. 6). To však není možné, protože $|E(z)| = e^{\mathrm{Re}\, z}$ a víme, že exponenciální funkce reálné proměnné je různá od nuly pro všechny hodnoty proměnné.

(c) Tyto vlastnosti ověříme snadno přímým výpočtem:

$$\begin{aligned} E(z + 2\pi i) &= E[x + i(y + 2\pi)] = \\ &= e^x[\cos (y + 2\pi) + i \sin (y + 2\pi)] = \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) = E(z), \\ E(z) + \pi i) &= E[x + i(y + \pi)] = \\ &= e^x[\cos (y + \pi) + i \sin (y + \pi)] = \\ &= e^x(-\cos y - i \sin y) = -E(z). \end{aligned}$$

**Příklad 40.** Dokažte, že následující vlastnosti, známé pro exponenciální funkci reálné proměnné, platí obdobně i pro $E(z)$:

(a) $e^{p+q} = e^p e^q$;
(b) $e^{-p} = 1/e^p$;
(c) je-li $n$ přirozené číslo, je $(e^p)^n = e^{np}$.

*Řešení.* (a) Jsou-li $u$, $v$ komplexní čísla, $u = u_1 + u_2 i$, $v = v_1 + v_2 i$, pak podle definice je

$$E(u + v) = e^{\mathrm{Re}(u+v)} [\cos \mathrm{Im}(u + v) + i \sin \mathrm{Im}(u + v)] = \\ = e^{u_1 + v_1} [\cos(u_2 + v_2) + i \sin(u_2 + v_2)],$$
$$E(u).E(v) = e^{u_1} (\cos u_2 + i \sin u_2).\, e^{v_1} (\cos v_2 + \\ + i \sin v_2).$$

Čísla $u_1$, $v_1$ jsou reálná, takže $e^{u_1} e^{v_1} = e^{u_1 + v_1}$. Podle definice násobení komplexních čísel dostáváme

$$E(u).E(v) = e^{u_1 + v_1} [\cos u_2 \cos v_2 - \sin u_2 \sin v_2 + \\ + i(\sin u_2 \cos v_2 + \cos u_2 \sin v_2)] = \\ = e^{u_1 + v_1} [\cos(u_2 + v_2) + i \sin(u_2 + v_2)].$$

Porovnáme-li poslední výraz s vyjádřením hodnoty $E(u + v)$, dostáváme vztah $E(u + v) = E(u)E(v)$, platný pro libovolná komplexní čísla $u$, $v$. Tento vztah je analogií vztahu (a).

Abychom dokázali (b), vyjádříme komplexní číslo $1/E(u)$ v goniometrickém tvaru:

$$\frac{1}{e^{u_1} (\cos u_2 + i \sin u_2)} =$$
$$= e^{-u_1} \frac{\cos u_2 - i \sin u_2}{(\cos u_2 + i \sin u_2)(\cos u_2 - i \sin u_2)} =$$
$$= e^{-u_1} \frac{\cos u_2 - i \sin u_2}{\cos^2 u_2 + \sin^2 u_2} =$$
$$= e^{-u_1} (\cos u_2 - i \sin u_2) = E(-u).$$

Je tedy skutečně $E(-u) = 1/E(u)$ pro každé komplexní číslo $u$.

K důkazu (c) můžeme výhodně použít Moivrovy věty, protože funkční hodnota $E(u)$ je vyjádřena vlastně v goniometrickém tvaru. Podle Moivrovy věty platí

$$[E(u)]^n = [e^{u_1} (\cos u_2 + i \sin u_2)]^n =$$
$$= e^{nu_1} (\cos nu_2 + i \sin nu_2), \text{ takže } [E(u)]^n = E(nu).$$

**Příklad 41.** Najděte všechna komplexní čísla, pro něž je prostá hodnota funkce $E(z)$ větší (menší) než jedna!

*Řešení.* Je-li $z = z_1 + z_2 i$, víme z př. 39, že $|E(z)| = e^{z_1}$. Je-li $z_1 > 0$, je $e^{z_1} > 1$, je-li $z_1 < 0$, je $e^{z_1} < 1$, a konečně pro $z_1 = 0$ je $e^{z_1} = 1$. Protože $z_1$ je reálná část čísla $z$, můžeme odpovědět na náš problém takto:

Prostá hodnota $E(z)$ je větší (rovna, menší) než jedna právě tehdy, je-li reálná část čísla $z$ kladná (rovna nule, záporná). Čísla, pro něž je prostá hodnota $E(z)$ větší (menší) než jedna, jsou znázorněna body v pravé (levé) polorovině (tj. vpravo či vlevo od imaginární osy). Body na imaginární ose, znázorňující ryze imaginární čísla, mají funkční hodnoty, jejichž prostá hodnota je rovna jedné.

**Příklad 42.** Funkce $E(z)$ je podle definice zobrazením množiny komplexních čísel do sebe. Zjistěte, co je obrazem imaginární osy v tomto zobrazení. Co je obrazem úsečky na imaginární ose mezi počátkem a bodem, znázorňujícím číslo $2\pi i$? Na základě tohoto výsledku usuzujte, zda funkce $E(z)$ je prostá*).

*Řešení.* Na imaginární ose leží čísla ryze imaginární, tj. taková, jejichž reálná část je nula. Můžeme je tedy psát ve tvaru $yi$. Hodnota funkce $E(yi)$ je potom rovna číslu $\cos y + i \sin y$, takže $|E(yi)| = 1$. Funkční hodnota ryze

*) Prostou nazýváme funkci, která různým hodnotám proměnné přiřazuje různá čísla. Např. funkce $f(x) = 1/x$ je prostá, funkce $g(x) = x^2$ není prostá, neboť číslům $x$, $-x$ je přiřazeno totéž číslo.

imaginárního čísla leží tedy na jednotkové kružnici se středem v počátku. Naopak, je-li dán bod na této kružnici, je jím znázorněno komplexní číslo, které můžeme psát ve tvaru $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$. Podle definice je však

$$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = E(\mathrm{i}\theta),$$

takže daný bod je znázorněním hodnoty funkce $E$ pro argument $\mathrm{i}\theta$. Tím jsme ukázali, že každý bod na jednotkové kružnici má svůj vzor, jímž je ryze imaginární číslo.*) Obrazem imaginární osy v zobrazení, daném funkcí $E(z)$, je tedy celá jednotková kružnice se středem v počátku.

Uvažujeme-li nyní místo celé imaginární osy jen úsečku mezi počátkem a bodem $2\pi\mathrm{i}$, je výsledek stejný. Obrazem je zase celá jednotková kružnice, protože každý její bod zobrazuje komplexní číslo, které lze napsat ve tvaru $\cos\theta +$ $+ \mathrm{i}\sin\theta$, kde navíc platí $0 \leqq \theta < 2\pi$. Stejný výsledek dostaneme také, vezmeme-li libovolnou úsečku délky $2\pi$ na imaginární ose.

Vyjádřeno jinak: Jestliže ryze imaginární číslo $\mathrm{i}\theta$ je zobrazeno funkcí $E(z)$ na jistý bod jednotkové kružnice, pak tentýž bod je znázorněním funkční hodnoty pro všechny hodnoty proměnné tvaru $(\theta + 2n\pi)\mathrm{i}$, kde $n$ je celé číslo. Zobrazení, definované funkcí $E$, není tedy prosté. (Srov. př. 39 c.)

Všimněme si ještě nakonec, že hodnota komplexní funkce $E(z)$, $z = x + y\mathrm{i}$, je v definici vyjádřena v goniometrickém tvaru. Je tu součin reálného (kladného) čísla $\mathrm{e}^x$, které je prostou hodnotou čísla $E(z)$, a komplexní jednotky $\cos y +$ $+ \mathrm{i}\sin y$, jejímž úkolem je — názorně řečeno — „otočit" reálné číslo $\mathrm{e}^x$ do směru daného argumentem $y$ (měřeným v obloukové míře).

---

*) Je-li dána funkce $f(x)$, pak vzorem čísla $y$ nazýváme hodnotu proměnné $x_0$, pro kterou platí $f(x_0) = y$.

Víme, že každé reálné kladné číslo $p$ se dá napsat jako mocnina $e^q$, kde $q$ je tzv. přirozený logaritmus čísla $p$, značený obvykle $\lg p$. Můžeme tedy říci, že přirozený logaritmus čísla $p$ je (reálné) číslo, na něž musíme umocnit základ e, abychom dostali číslo $p$. Nemohli bychom obdobně definovat i logaritmus komplexního čísla? Ano, je to možné. Máme k tomu již všechny potřebné znalosti. Nejdůležitější je, že jsme definovali exponenciální funkci komplexní proměnné a že známe její základní vlastnosti.

**Příklad 43.** Je-li $z$ komplexní číslo různé od nuly, napište v algebraické formě číslo $u$, jež je řešením rovnice

$$E(u) = z.$$

*Řešení.* Nechť goniometrický tvar čísla $z$ je

$$z = r(\cos \alpha + \mathrm{i} \sin \alpha).$$

Jestliže existuje číslo $u = u_1 + u_2\mathrm{i}$ takové, že $E(u) = z$, je podle definice

$$E(u) = \mathrm{e}^{u_1} (\cos u_2 + \mathrm{i} \sin u_2).$$

Porovnáme-li toto číslo s číslem $z$, je zřejmé, že musí platit

$$\mathrm{e}^{u_1} = r, \quad \cos u_2 = \cos \alpha, \quad \sin u_2 = \sin \alpha.$$

(Srov. př. 6.)

Číslo $r$ je kladné číslo, takže existuje jeho přirozený logaritmus a je určen jednoznačně. Položíme-li $u_1 = \lg r$, je první podmínka splněna. Abychom splnili druhou podmínku, stačí položit $u_2 = \alpha$; podmínka je ovšem splněna i tehdy, zvětšíme-li $u_2$ (nebo zmenšíme-li je) o celistvý násobek $2\pi$. Každé číslo $u = \lg r + \mathrm{i}(\alpha + 2n\pi)$, kde $n$ je celé číslo, je tedy řešením dané rovnice.

Poznali jsme, že číslo $u = \lg |z| + i \arg z$*) má vzhledem k číslu $z$ vlastnost, obdobnou základní vlastnosti přirozeného logaritmu kladného čísla. Použijeme-li označení $E(u) = e^u$, které je v teorii funkcí komplexní proměnné běžné, můžeme říci: Umocníme-li základ e na (komplexní) číslo $u$, dostaneme $z$. Každé číslo $u$, které má tuto vlastnost, budeme proto nazývat logaritmem komplexního čísla $z$ a budeme je značit $\lg z$. Uvedenou vlastnost má ovšem, jak jsme se už zmínili, nekonečně mnoho čísel; liší se ve své imaginární části, a to o násobek čísla $2\pi$.

**Příklad 44.** Odvoďte následující vlastnosti logaritmu komplexního čísla:
(a) $\lg (uv) = \lg u + \lg v$;
(b) $\lg (u/v) = \lg u - \lg v$;
(c) $\lg (u^n) = n \lg u$.
(Čísla $u$, $v$ jsou komplexní, $n$ je přirozené.)

*Řešení.* Všechny tyto vlastnosti plynou z odpovídajících vztahů pro exponenciální funkci $E(z)$. Tak např.

$$E(\lg u + \lg v) = E(\lg u)\, E(\lg v) = uv;$$

skutečně tedy číslo $\lg u + \lg v = w$ je logaritmem součinu $uv$, neboť $E(w) = uv$. Obdobně platí

$$E(\lg u - \lg v) = E(\lg u)\, E(-\lg v) = E(\lg u)/E(\lg v) = \\ = u/v,$$

$$E(n \lg u) = [E(\lg u)]^n = u^n.$$

Je však důležité správně chápat náš výsledek. Nejde totiž v pravém smyslu slova o rovnost komplexních čísel! Např. vztah (a) znamená: Sečteme-li některý z logaritmů čísla $u$ (uvědomte si znovu, že je jich nekonečně mnoho!) a některý z logaritmů čísla $v$, je výsledek jednou z hodnot lo-

*) arg $z$ znamená ovšem argument (přesněji kteroukoliv hodnotu argumentu) čísla $z$.

garitmu součinu $uv$. Jinak řečeno: dosadíme-li do levé strany rovnosti zvolené hodnoty logaritmů $u$ a $v$, bude výsledek logaritmem $uv$; nemůžeme však dosadit libovolně zvolené hodnoty logaritmů na obě strany rovnosti a očekávat správný výsledek. Snad nejlépe si to osvětlíme na příkladu.

**Příklad 45.** Jsou dána komplexní čísla $u = \sqrt{3} - i$, $v = \frac{7}{2}(1 + \sqrt{3}\,i)$, $w = 7(\sqrt{3} + i)$. Ověřte, že $uv = w$, najděte logaritmy $L_1$, $L_2$, $L_3$ komplexních čísel $u$, $v$, $w$ (použijte hodnot argumentů mezi 0° a 360°) a vysvětlete, proč neplatí $L_1 + L_2 = L_3$.

*Řešení.* Vypočtěte nejprve součin $uv$:

$$uv = (\sqrt{3} - i) \cdot \frac{7}{2}(1 + \sqrt{3}\,i) =$$

$$= \frac{7}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{3} - i + 3i) =$$

$$= \frac{7}{2}(2\sqrt{3} + 2i) = 7(\sqrt{3} + i) = w.$$

Abychom našli logaritmy daných čísel, převedeme je nejdřív na goniometrický tvar: $|u| = \sqrt{3 + 1} = 2$, takže $u = 2\left(\sqrt{3}/2 - \frac{1}{2}\,i\right)$; označíme-li $\alpha$ argument čísla $u$, je $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$, $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$. Je tedy $\alpha = 330°$ (kosinus je kladný, sinus záporný), neboli $\alpha = \frac{11}{6}\pi$. Goniometrický tvar čísla $u$ je

$$u = 2\left(\cos \frac{11}{6}\pi + \mathrm{i} \sin \frac{11}{6}\pi\right).$$

Podobně je $|v| = 7$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = \sqrt{3}/2$, takže $\beta = \frac{\pi}{3}$,

$$v = 7\left(\cos \frac{\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

a konečně

$$w = 14\left(\cos \frac{\pi}{6} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{6}\right).$$

Podle definice logaritmu komplexního čísla je jeho reálná část logaritmus prosté hodnoty a jeho imaginární část argument daného čísla. Je tedy

$$L_1 = \lg 2 + \frac{11}{6}\pi \mathrm{i},$$

$$L_2 = \lg 7 + \frac{1}{3}\pi \mathrm{i},$$

$$L_3 = \lg 14 + \frac{1}{6}\pi \mathrm{i}.$$

To však znamená, že $L_1 + L_2 = \lg 2 + \lg 7 + \mathrm{i}\left(\frac{11}{6}\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = \lg 14 + \frac{13}{6}\pi \mathrm{i}$. Je tedy $L_3 \neq \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$.

To však není ve sporu s výsledkem předešlého příkladu. Skutečně, $L_3 - (L_1 + L_2) = -\frac{12}{6}\pi \mathrm{i} = (-1) \,.\, 2\pi \,\mathrm{i}$. Rozdíl obou čísel je tedy násobkem $2\pi\,\mathrm{i}$. To znamená, že jak číslo $L_1 - L_2$, tak ovšem i číslo $L_3$ je logaritmem čísla $\omega$ — a to plně souhlasí s našimi výsledky.

**Příklad 46.** Řešte rovnici $E(z) = -5$.

*Řešení.* Číslo $z$ musí být logaritmem čísla $-5$, tj.

$$z = \lg|-5| + i \arg(-5),$$

kde arg $(-5)$ znamené kteroukoliv hodnotu argumentu. Z toho dostáváme

$$z = \lg 5 + \pi i + 2n\pi i,$$
$$z = \lg 5 + (2n + 1)\pi i.$$

Daná rovnice má tedy nekonečně mnoho řešení, jejichž imaginární části se liší o násobek $2\pi$.

**Příklad 47.** Řešte rovnici $\lg z = 1 + \frac{1}{2}\pi i$!

*Řešení.* Napsaná rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$E\left(1 + \frac{1}{2}\pi i\right) = z.$$

(Dvě rovnice jsou ekvivalentní, mají-li přesně táž řešení.) Zbývá tedy převést levou stranu rovnice na algebraický tvar. Podle definice funkce $E(z)$ je

$$E\left(1 + \frac{1}{2}\pi i\right) = e^1\left(\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi\right) = ei.$$

Jediným kořenem rovnice je tedy číslo $z = ei$.

Z předchozích úvah je zřejmé, že není možné použít rovnice $u = \lg z$ k definici funkce komplexní proměnné; tento předpis není totiž jednoznačný, nedává nám možnost jednoznačně stanovit hodnotu funkce k dané hodnotě proměnné.

Takové vztahy se často vyskytují i v teorii reálných funkcí. Pamatujete se například, že předpis „číslu $x$ přiřaď číslo $y$ tak, že $y^2 = x$" nedefinuje funkci, protože ke každému kladnému $x$ existují dvě taková čísla, $\sqrt{x}$ a $-\sqrt{x}$. Proto jsme tento předpis doplnili podmínkou, že číslo $y$ má být nezáporné. Tím jsme dostali (jednoznačnou) funkci $y = \sqrt{x}$.

Jestliže však pracujeme s komplexními čísly, jsou vztahy tohoto typu jednak častější, jednak není tak snadné ani výhodné vyloučit všechny možnosti až na jednu, jak jsme to udělali v případě odmocniny z kladného čísla. Zavádíme proto pojem víceznačné (říkáme též mnohoznačné) funkce. Taková funkce může být i nekonečně značná, jako např. právě logaritmus. O funkcích, které jsou definovány týmž předpisem, ale jednoznačně, hovoříme pak jako o větvích víceznačné funkce.

Příkladem víceznačné funkce, která má konečný počet hodnot, může být odmocnina z komplexního čísla.

Odmocninou z čísla $z$ jsme nazvali číslo, pro něž platí $u^2 = z$. Tento vztah definuje dvojznačnou funkci, neboť víme, že pro každé $z \neq 0$ existují právě dvě taková čísla, lišící se znamením. Musíme si však uvědomit, že takto definovaná funkce se podstatně liší od funkce reálné proměnné $f(x) = \sqrt{x}$, definované vztahy $y^2 = x, y \geqq 0$ $(y = f(x))$! Zanedbání rozdílů v definici může vést k velmi zajímavým výsledkům. Příkladem, se kterým jste se možná již setkali, může být následující postup:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{i}.\mathrm{i} = \sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Víme však, že $\mathrm{i}^2 = -1$ (to je definice čísla i), takže $1 = -1$!?

Tento zdánlivý paradox však snadno vysvětlíme. Vzorec $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$, který jsme použili, musíme chápat obdobně jako vzorce z př. 44. Znak $\sqrt{x}$ označuje zde nikoliv jediné číslo, ale vlastně množinu dvou čísel, lišících se znamením. Je-li $x = y = -1$, můžeme na levé straně dosadit za každou odmocninu buď i, nebo $-$i; výsledek bude buď 1, nebo —1. A obě tato čísla jsou skutečně hodnoty odmocniny z jedné (ovšem ve smyslu definice víceznačné funkce). Víc však tvrdit nemůžeme.

V naší zmínce o víceznačných funkcích jsme si všimli vlastně jen jediného faktu: že totiž je možné přiřadit jedinému číslu více funkčních hodnot. V geometrické teorii funkcí komplexní proměnné jde však také — a především – o to, jak jsou tyto hodnoty spolu svázány, jak od jedné z nich přejít k druhé pomocí některé spojité větve. Tyto otázky souvisí s teorií analytických funkcí, Riemannových ploch atd. To však už nespadá do rámce naší knížky.

## Cvičení

**1.** Najděte všechny hodnoty logaritmu čísla
(a) 1; (b) $-1$; (c) i; (d) $1 + \mathrm{i}$.

$$\left[\text{(a) } 2n\pi\mathrm{i};\quad \text{(b) } (2n+1)\pi\mathrm{i};\ \text{(c) } \frac{4n+1}{2}\pi\mathrm{i};\quad \text{(d) } \frac{1}{2}\lg 2 + \frac{1}{4}\pi\mathrm{i} + 2n\pi\mathrm{i}.\right]$$

**2.** Napište v algebraickém tvaru číslo

$$E(-\pi\mathrm{i})(3-\mathrm{i}^3) + E\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\right)(2+\mathrm{i})^2.$$

$[-7 + 2\mathrm{i}.]$

**3.** Řešte rovnici

$$\lg z = 2 + \frac{1}{4}\pi\mathrm{i}.$$

$$[z = \mathrm{e}^2(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}.]$$

**4.** Najděte všechny kořeny rovnice
(a) $E(z) = 1$; (b) $E(z) = -1$; (c) $E(z) = \mathrm{i}$; (d) $E(z) = -\mathrm{i}$.

$$\Big[\text{(a) } z = 2n\pi\,\mathrm{i}; \quad \text{(b) } z = (2n+1)\pi\mathrm{i};$$

$$\text{(c) } z = \frac{1}{2}(4n+1)\pi\,\mathrm{i}; \quad \text{(d) } z = \frac{1}{2}(4n-1)\pi\,\mathrm{i}; \quad \text{celé číslo.}\Big]$$

**5.** S použitím př. 40 dokažte

$$E(u - v) = E(u)/E(v)!$$

**6.** Je-li $u = \lg z$ kterákoliv hodnota logaritmu komplexního čísla $z$, je $E(u) = z$. Platí za stejných předpokladů také $\lg[E(u)] = u$?
[Ne; rozdíl mezi levou a pravou stranou může být $2n\pi$ i.]

**7.** Z definice funkce $E(z)$ dokažte tzv. Eulerovy vzorce (místo $E(z)$ píšeme $e^z$):

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

kde $\theta$ je reálné číslo. Tyto vzorce můžeme použít k rozšíření trigonometrických funkcí sinus a kosinus na komplexní obor proměnné, pokládáme-li $\theta$ za číslo komplexní.

# OBSAH

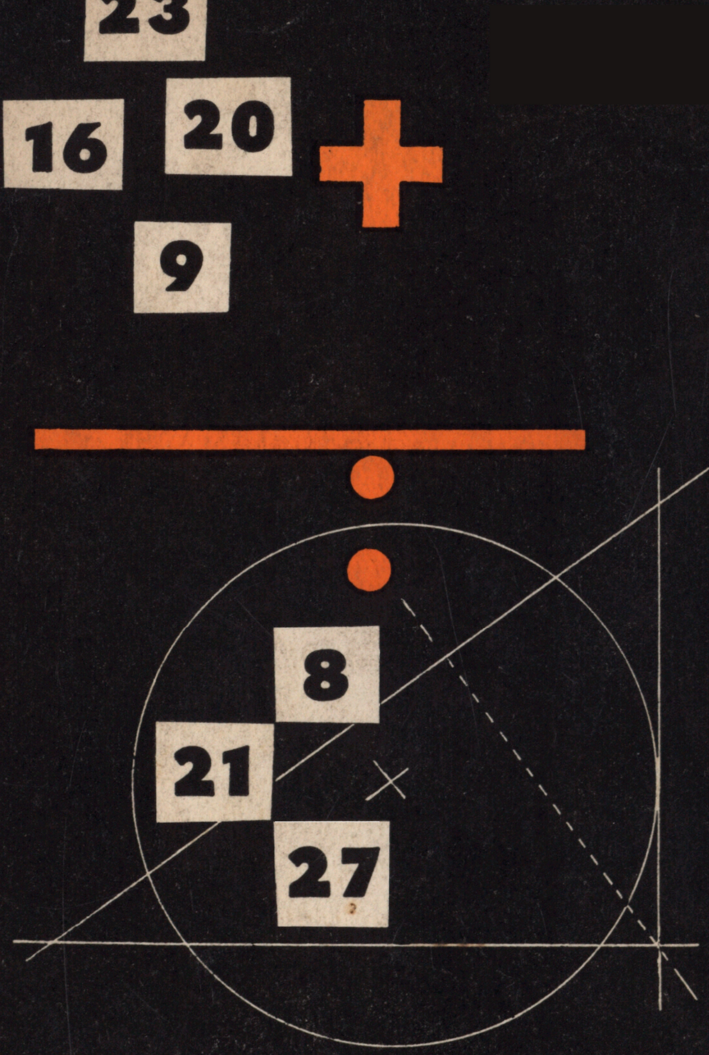
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JIŘÍ JARNÍK

# komplexní čísla a funkce

Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Publikace číslo 2603
Edice Škola mladých matematiků, svazek 19
Vytiskl Mír, n. p. závod 2, provoz 22,
Praha 2, Legerova 22
3,09 AA, 3,21 VA. D-12*70419
Náklad 6900 výtisků. 1. vydání
80 stran. Praha 1967. 507/21/8.5
23-157-67 03/2 Cena brož. výtisku Kčs 3,50

[redacted]




23-157-67
03-2
Cena brož.
Kčs 3,50