Stavba Lobačevského planimetrie

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

STAVBA LOBAČEVSKÉHO PLANIMETRIE

24

Vydal ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JÁN GATIAL - MILAN HEJNÝ

stavba Lobačevského planimetrie

VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali dr. Jaroslav Fuka, CSc.
a odb. as. Iva Rohlíčková

ÚVOD

Čitateľovi predkladáme knižku, ktorá sa svojim zameraním mierne líši od ostatných publikácií edície MO. Spracovaná látka — Lobačevského geometria — nezapadá vôbec do rámca stredoškolskej výuky. Situácie, s ktorými čitateľa oboznámime, budú sa niekedy pravdepodobne zdať až paradoxné. Práve v tejto paradoxnosti spočívala obtiaž pri odhaľovaní neeuklidovskej geometrie a dnes v nej nachádzame nielen estetickú krásu, ale aj skvelý cvičný materiál pre rozvitie abstraktného matematického myslenia. Aj spracovanie látky je svojrázne. Nevodíme čitateľa po hotovej budove, ale prizveme ho ako murára ku spolupráci na stavbe. Neservírujeme teda faktá, ale uvádzame problémy, z ktorých niektoré, hlavne v kapitole prvej neriešime vyčerpávajúcim spôsobom, nakoľko toto na stupni predpokladaných vedomostí čitateľa nie je možné. Ak sa čitateľ, po prečítání knižočky bude vracať k naznačeným problémom a v duchu s nami diskutovať (radšej nesúhlasiť ako súhlasiť), budeme považovať nami vytýčený cieľ za splnený.

Pri čítaní knižky je možné vypustiť druhú kapitolu, prípadne aj prvú. V tom prípade musí čitateľ pri čítaní vypustiť všetky poznámky, ktoré se vzťahujú k týmto kapitolám. Domnievame sa však, že najväčší úžitok prinesie knižočka vtedy, ak sa čitateľ oboznámi najprv s dodatkom A. a potom postupne knižku prečíta od prvej kapitoly tak, ako je napísaná. V prípade, že sa čitateľovi táto tématika zapáči, doporučujeme mu k ďalšiemu prehĺbeniu vedomostí študovať tieto knižky. K prvej kapitole knižku prof. Katětova: Jaká je logická stavba matematiky (Cesta k vědění 1952). K druhej a tretej kapitole J. B. Pavlíček: Neeuklidovská geometrie (Praha — 1953). Hlbšie vniknutie do problematiky vyžaduje znalosť tzv. projektívnej geometrie s ktorou sa čitateľ môže zoznámiť vo výbornej knižke Karla Havlíčka: Úvod do projektivní geometrie kuželoseček (SNTL, 1956).

Je nám milou povinnosťou poďakovať sa touto cestou pani Dr. I. Rohlíčkovej a pánu Dr. J. Fukovi, CSc, za veľmi svedomité prečítanie rukopisu a za mnohé cenné pripomienky, ktoré značne prispeli k zlepšeniu predkladanej publikácie.

Autori

Túto knižku venujeme nášmu učiteľovi profesorovi

JOSEFOVI FILIPOVI

k jeho životnému jubileu

---

1. kapitola

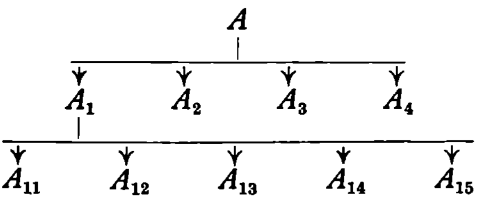
AXIOMATIZOVANÁ TEÓRIA A JEJ MODEL

1.1. Pojem základný a pojem odvodený

Začneme s príkladom zo života. Často se nám stane, že niekto nám, alebo my niekomu vysvetľujeme, či ozrejmujeme nejaký pojem. Napríklad pojem „aorta" vysvetlíme vetou „je to hlavná tepna vedúca priamo zo srdca". Tak sme neznámy pojem aorta (označme ho symbolom A) objasnili použitím štyroch ďalších pojmov: „hlavná tepna", „viesť", priamo" a „srdce" (označme ich v poradí symbolmi A_1, A_2, A_3, A_4). Schématický zápis takéhoto vysvetľovania vyzerá nasledovne

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\ A_1 & A_2 & & A_1 & A_2 \end{tikzcd} \tag{1}$$

Vysvetľovanie je ukončené, ak ten, ktorému sme pojem A ozrejmovali pozná význam pojmov A_1 — A_4. Ak náhodou dotyčný nevie čo je to „hlavná tepna = A_1", potom pokračujeme vo vysvetľovaní vetou „je to najväčšia cieva, ktorou prúdi okysličená krv". Nových päť pojmov: „najväčší = A_{11}", „cieva = A_{12}", „prúdiť = A_{13}", „krv = A_{14}" a „okysličený = A_{15}" rozšíri schemu (1) na tvar



(2)

Dajme tomu, že osoba, ktorej sme pojem „aorta“ vysvetľovali pozná už význam pojmov A_{11} — A_{15} ako aj A_2, A_3, A_4. Vysvetľovanie je ukončené.

Pri systematickom vyučovaní, napríklad v škole, postupujeme pri vysvetľovaní práve naopak. Začíname od jednoduchých, všeobecne známych pojmov a pomocou týchto zavádzame (učíme) pojmy čoraz zložitejšie. Zápis takéhoto postupu sa od schémy (2) odlišuje len zmenenou orientáciou šipiek. Presne určiť, či dokonca vymenovať všetky „všeobecne známe pojmy“ je však v oboroch ako sú história, medicína, právo atď. asi nemožné. No v exaktných disciplínach je možné postupovať tak, že začíname vymenovaním „všeobecne známych pojmov“ a na týchto postupne staviame celú teóriu. Miesto označenia „pojem všeobecne známy“ budeme užívať termín *pojem základný*; niekedy sa tiež hovorí *pojem primárny*. Pojem definovaný pomocou pojmov základných nazveme *pojmom odvodeným*; niekedy sa tiež hovorí *pojem sekundárny*. Okrem pojmov základných a odvodených vystupujú v reči exaktnej disciplíny ešte dva druhy slov. Sú to termíny prevzaté z inej exaktnej disciplíny, tieto nazveme *pojmy doplnkové* a konečne slová typu „nech“, „môžem nájsť“, „v tom prípade“, atď., ktoré spolu s gramatickou stavbou slovenčiny nazveme *prirodzeným jazykom*.

Každé slovo jazyka, ktorým hovorí presne budovaná exaktná disciplína patrí do jednej a len jednej zo skupín:

1.) pojmy základné,

2.) pojmy odvodené,
3.) pojmy doplnkové,
4.) prirodzený jazyk.
Ilustrujme túto klasifikáciu na príklade.

Príklad 1. Za základné pojmy planimetrie volíme tri termíny

$$\text{bod, priamka, ležať na.} \tag{3}$$

V tvrdení: „Nech *a*, *b* sú dve rovnobežné priamky a nech priamka *c* je rôznobežná s priamkou *a*, potom priamka *c* je rôznobežná aj s priamkou *b*" je 19 slov (symboly *a*, *b*, *c* nie sú slová). Tieto patria v poradí skupinám: 4, 4, 3, 2, 1, 4, 4, 1, 4, 2, 4, 1; 4, 1, 4, 2, 4, 4, 1. Pojmy „rovnobežné" a „rôznobežné" sa dajú definovať pomocou pojmov (3). Pojem „dve" patrí do aritmetiky, ktorá vystupuje ako doplnková disciplína ku planimetrii.

Úloha 1. Rovnako ako v príklade 1. preveďte slovný rozbor vety z planimetrie: Nech *A*, *B*, *C* sú tri body neležiace na priamke, potom existuje aspoň jedna priamka *a* rovnobežná s priamkou *BC* a obsahujúca bod *A*.

1.2. Axiomatizovaná teória

Hlbšie preskúmame termín „pojem základný". Je to asi taký pojem, o ktorom majú všetci ľudia rovnakú predstavu. Tento názor, bežný a oprávnený v humánnych vedách v matematike neobstojí.

Keď povieme, že pojem „srdce" je v medicíne všeobecne známy, máme na mysli fakt, že každý lekár pozná tvar, uloženie, funkciu a mnohé vlastnosti srdca. Presnejšie povedané, lekár pozná väzby medzi telom a srdcom. Pritom ani najväčší odborník nepozná tieto väzby všetky, lebo je to nemožné. V matematike úslovie „pojmy (3) sú všeobecne známe" precizujeme tak, že udáme *všetky* základné väzby medzi pojmami (3). Tieto väzby nazveme *axiomy*, niekedy tiež *postuláty*. Súhrn všetkých axiom menujeme *axiomatická sústava*. Súbor základných pojmov, odvodených pojmov, všetkých axiom a všetkých tvrdení z axiom vyplývajúcich nazveme *axiomatizovaná teória*.

Axiomy sú také výroky o základných pojmoch, ktoré prehlásime za pravdivé. Pritom nás okolnosť názornosti axiom vôbec nezaujíma. V tejto knižke sa čitateľ dozvie, že práve názornosť stála ako hlavná prekážka pri poznaní neeuklidovskej geometrie. Existuje mnoho príkladov v histórii matematiky a fyziky, kde naše vrodené predstavy brzdili hlbšie preniknutie k podstate veci. V nasledujúcom, hodne obšírnom príklade sa pokúsime oboznámiť čitateľa s jednoduchou, ale veľmi dôležitou axiomatizovanou teóriou.

Príklad 2. Axiomatizovaná teória $\mathfrak{S}$ nech je daná a.) troma základnými pojmami

$$\text{chlapec, dievča, páčiť sa} \tag{4}$$

a ďalej b.) skupinou piatich axiom:

S_1 Existuje aspoň jedno dievča.

S_2 Ak A, B sú dvaja chlapci, potom existuje aspoň jedno dievča c, ktoré sa páči aj chlapcovi A, aj chlapcovi B.

S_3 Ak A, B sú dvaja rôzni chlapci, potom existuje najviac jedno dievča c, ktoré sa páči aj chlapcovi A, aj chlapcovi B.

S_4 Ak a je dievča, potom existujú aspoň dvaja rôzni chlapci B, C, ktorým (obidvom) sa dievča a páči.

S_5 Ak a je dievča, potom existuje aspoň jeden chlapec B tak, že nie je pravda, že sa dievča a páči chlapcovi B.

Na základe pojmov (4) a axiom

$$\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \mathbf{S}_5 \qquad (5)$$

rozvinieme teóriu $\mathfrak{S}$. Čitateľovi doporučujeme, aby niektoré z axiom rozobral podľa vzoru príkladu 1 a úlohy 1.

Dohovor 1. S. Chlapcov budeme označovať veľkými latinskými písmenami A, B, C, X, aťď., dievčatá malými a, b, c, y, atď. Symbolom Ch označíme množinu chlapcov, symbolom D množinu dievčat. Základný pojem „páčiť sa" označíme symbolom ε v nasledovnom zmysle:

dievča y se páči chlapcovi X označíme $X \varepsilon y$.

Poznámka 1. S. Úslovie „dvaja chlapci A, B" nehovorí ešte, že chlapci A a B sú rôzni. Fakt, že A je chlapec môžeme zapísať tiež symbolicky $A \in$ Ch. Podobne a, b $\in$ D značí, že a, b sú dievčatá.

Veta 1.S. Ak A, B sú dvaja rôzni chlapci, potom existuje jedno a len jedno dievča c, ktoré sa obidvom chlapcom páči.

Dôkaz. Existencia dievčaťa c vyplýva z $\mathbf{S}_2$, jeho jednoznačnosť z $\mathbf{S}_3$.

Dohovor 2.S. Dievča c z vety 1. S označíme tiež AB resp. BA. Upozorňujeme, že symbol AB je zavedený len ak $A \neq B$.

Veta 2.S. Množina Ch má aspoň tri rôzne prvky.

Dôkaz. Podľa $\mathbf{S}_1$ existuje $a \in$ D, podľa $\mathbf{S}_4$ existujú potom B, $C \in$ Ch tak, že $B \neq C$ a $B \varepsilon a$, $C \varepsilon a$. Z axiomy $\mathbf{S}_5$ vyplýva existencia takého chlapca A, ktorému sa dievča a nepáči. Preto je $A \neq B$, $A \neq C$ a A, B, C sú tri rôzne prvky množiny Ch. Veta je dokázaná.

Úloha 2. V dôkaze vety 2. S je nezmyselný pojem. Nájdite ho a opravte dôkaz!

Definícia 1.S. Povieme, že dievča a se nepáči chlapcovi B práve vtedy, ak nie je pravda, že dievča a sa chlapcovi B páči. Značíme $B \not\varepsilon a$.

Veta 3.S. Nech a, $b \in D$ a symbolom $a \cap b$ označme množinu všetkých chlapcov X pre ktorých platí $X \varepsilon a$ a $X \varepsilon b$. Potom nastáva jeden a len jeden z prípadov

1.) $a \cap b \equiv \emptyset$,

2.) $a \cap b$ je jednoprvková,

3.) $a \equiv b$.

Dôkaz. Pretože prípady 1.), 2.) sa navzájom vylučujú, treba dokázať dve tvrdenia: $a \cap b$ je aspoň dvojprvková $\Rightarrow$ $\Rightarrow a \equiv b$; $a \equiv b \Rightarrow a \cap b$ je aspoň dvojprvková. Prvé tvrdenie vyplýva z $\mathbf{S}_3$, druhé z $\mathbf{S}_4$.

Definícia 2.S. Ak neexistuje chlapec, ktorému sa páčia dané dve rôzne dievčatá a, b, potom tieto dievčatá nazveme priateľkami. V opačnom prípade hovoríme, že a, b sú nepriateľky. Teda dievčatá $a \not\equiv b$ sú priateľkami (resp. nepriateľkami) práve keď pre ne nastáva prípad 1.) (resp. 2.) vety 3.S.

Dohovor 3.S. Budeme hovoriť tiež, že „dievča a je (ne)priateľkou dievčaťa b" namiesto úslovia „dievčatá a, b sú (ne)priateľky". Podobne budeme hovoriť „dievča x má (ne)priateľku namiesto „existuje dievča, ktoré je (ne)priateľkou dievčaťa x".

Veta 4.S. Každé dievča má aspoň dve rôzne nepriateľky.

Dôkaz. Nech a je dievča a A, B, C chlapci z dôkazu vety 2.S. Označme $b \equiv AB$, $c \equiv AC$. Zo vzťahov $A \notin a$, $A \varepsilon b$, $A \varepsilon c$ vyplýva $b \not\equiv a \not\equiv c$*). Sporom dokážeme vzťah $b \not\equiv c$. Z $b \equiv c$ vyplýva $C \varepsilon b$ a preto množina $a \cap b$ obsahuje aspoň dva prvky a to B a C, lebo $B \not\equiv C$. Pôdla vety 3.S je potom $a \equiv b$ čo je spor. Dievčatá $b \not\equiv c$ sú hľadané dve nepriateľky dievčaťa a. Dôkaz je prevedený.

Veta 5.S. Existujú tri rôzne dievčatá tak, že každé dve z nich sú nepriateľky.

Dôkaz. Existencia dievčaťa (označme ho a) vyplýva z $\mathbf{S}_1$.

---

*) Namiesto $a \not\equiv b$, $a \not\equiv c$ píšeme stručne $b \not\equiv a \not\equiv c$; podobne i ďalej.

Teraz stačí vziať dievčatá a, b, c z dôkazu predošlej vety.

Dôsledok. Množina D má aspoň tri rôzne prvky.

Veta 6.S. Ku každému chlapcovi X existuje aspoň jedno dievča x, ktoré sa mu nepáči.

Dôkaz. Podľa dôsledku existujú dve rôzne dievčatá a, b. Ak je $X \notin a$, alebo $X \notin b$, potom sme hotoví. Nech teda $X \in a$, $X \in b$. Podľa $\mathbf{S}_4$ existujú chlapci A, B tak, že $A \not\equiv X \not\equiv B$, $A \in a$, $B \in b$. Potom je $A \not\equiv B$, lebo inak by vzhľadom na vetu 3.S bolo $a \equiv b$. Dievča $x \equiv AB$ sa chlapcovi X nepáči, lebo inak by bolo podľa $\mathbf{S}_3$ $a \equiv x$ aj $b \equiv x$. Tým je dôkaz prevedený.

Veta 7.S. Každému chlapcovi X sa páčia aspoň dve rôzne dievčatá.

Dôkaz. Podľa vety 6.S existuje dievča x tak, že $X \notin x$. Podľa axiomy $\mathbf{S}_4$ existujú $B \not\equiv C$ ktorým sa x páči. Potom XB a XC sú hľadané rôzne dievčatá páčiace sa chlapcovi X.

Axiomatizovaná teória $\mathfrak{S}$ postavená na troch základných pojmoch a piatich axiomach v tomto štádiu obsahuje tri definované odvodené pojmy: nepáčiť sa, priateľky, nepriateľky a sedem tvrdení. Príklad 2. je skončený.

Úloha 3. Dokážte vetu 8.S: Existujú traja chlapci A, B, C tak, že pre každé dievča x platí $A \in x$, $B \in x \Rightarrow C \notin x$.

Úloha 4. Dokážte vetu 9.S: Ak existuje chlapec C, ktorému sa žiadna z nepriateliek a, b nepáči, potom existuje chlapec X, ktorému sa páčia aspoň tri rôzne dievčatá.

1.3. Modely axiomatizovanej teórie

Pri čítaní príkladu 2. sme si pod pojmami (4) mohli predstavovať to, čo oni označujú v skutočnosti. Rovnako dobre sme si ale pod uvedenými termínmi mohli predstavovať množstvo iných objektov, poprípade sme na pojmy (4) mohli nazerať len ako na symboly — ako by to boli slová z cudzieho, nám neznámeho jazyka. V takom prípade hovoríme, že sme s teóriou $\mathfrak{S}$ pracovali abstraktne. Ak však sme pri čítaní príkladu 2. mali pod pojmami (4) na mysli konkrétne objekty (napr. „body“, „priamky“, vzťah „leží na“ z planimetrie), potom hovoríme, že sme teóriu $\mathfrak{S}$ modelovali. Abstraktná teória aplikovaná na špeciálnu situáciu sa menuje *modelom*. Poslednú vetu budeme znovu ilustrovať na príklade: udáme päť modelov teórie $\mathfrak{S}$. Udať model teórie $\mathfrak{S}$ značí: Udať množiny Ch a D a udať vzťah „páčiť sa“ tak, aby boli splnené axiomy (5).

Príklad 3. Každý z nasledujúcich modelov S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 je modelom abstraktnej teórie $\mathfrak{S}$.
S_1 : Ch je trojprvková, skladá sa z mien Orfeus, Rómeo, Tristan, D je trojprvková, skladá sa z mien Euridika, Júlia, Izolda. Vzťah páčiť sa je definovaný takto: Euridika sa páči Rómeovi a Tristanovi, Júlia sa páči Orfeovi a Tristanovi, Izolda sa páči Orfeovi a Rómeovi. Iné vzťahy typu „páčiť sa“ neexistujú. Veľmi názorne je možné model S_1 popísať tabuľkou, ktorú nazveme *tabuľka incidencie* pre model S_1. Čítanie v tabuľke je očividné: dievča x sa páči chlapcovi Y, ak v štvorčeku, ktorý je v stĺpci x a riadku Y je číslo 1; ak v tomto štvorčeku je číslo 0, potom je $Y \notin x$. Poznamenajme, že spôsobom incidenčnej tabuľky môžeme popísať len tie modely pre ktoré Ch a D majú konečný počet prvkov.

Úloha 5. Overte, že model S_1 spĺňa axiomy (5.) V modeli S_1 neexistujú priateľky. Tento fakt platí v každom modeli, kde D je trojprvková. Dokážte!

S_2: Ch je šesťprvková, skladá sa z písmien: a, e, i, o, u, y; D je desaťprvková, skladá sa zo slov: Bolyai, Descartes, Dupin, Euler, Gauss, Klein, Ludolf, Newton, Study, Sylvester.

Vzťah páčiť sa je daný predpisom: slovo (= dievča) z D sa páči písmenu (= chlapcovi) z Ch práve vtedy, keď

		D		
		Izolda	Júlia	Buridika
Ch	Orfeus	0	1	1
	Rómeo	1	0	1
	Tristan	1	1	0

Tabulka incidencie pre model S_1

toto slovo obsahuje dané písmeno. Napríklad Newton sa páči písmenu *e* aj písmenu *o*, nie však písmenu *y*.

Model S_2 je popísaný. Overte preň platnosť aspoň niektorých z axiom (5).

Úloha 6. V reči modelu S_2 vyslovte vetu 7.S.

Úloha 7. Napíšte tabuľku incidencie pre model S_2. V reči tejto tabuľky vyslovte axiomy $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$ a $\mathbf{S}_5$.

S_3: Ch je (nekonečná) množina všetkých bodov v rovine α,
D je (nekonečná) množina všetkých priamok v rovine α.

Vzťah páčiť sa je daný predpisom: priamka (= dievča) $x \in$ D sa páči bodu (= chlapcovi) $Y \in$ Ch práve keď Y leží na x.

Model S_3 je popísaný. Overte preň platnosť všetkých axiom (5). Ukážte, že termín *priateľky* či *nepriateľky* sa v tomto modeli kryje s termínom *nesplývajúce rovnobežky* či *rôznobežky*.

S_4: Nech h je pevne daná kružnica. Položíme:
Ch je množina všetkých bodov ležiacich vnútri h,
D je množina všetkých tetív kružnice h.
Vzťah páčiť sa je rovnako ako v modeli S_3 totožný s incidenciou.

Model S_4 je popísaný. Overte platnosť všetkých axiom (5).

Úloha 8. Zistite či nasledujúci výrok **V** je pravdivý v modeli a.) S_1, b.) S_2, c.) S_3, d.) S_4.

V: Ak sa dievča p nepáči chlapcovi P, potom existuje najviac jedno dievča q, ktoré je priateľkou p a zároveň sa páči chlapcovi P.

S_5: Nech λ je otvorená polrovina vyťatá danou priamkou h^* v rovine.
Ch je množina všetkých bodov polroviny λ,
D je množina jednak všetkých otvorených polpriamok so začiatkom na h^*, ležiacich v λ a kolmých na h^* a jednak všetkých otvorených polkružníc so stredom na h^* ležiacich v λ.

Vzťah páčiť sa je znovu incidenciou, tj. ε je $\in$. Model S_5 je popísaný. Overte platnosť axiom (5) a ukážte, že výrok **V** z úlohy 8. je v modeli S_5 nepravdivý. Príklad 3. je ukončený.

Dalšie precvičenie modelov dáme do úloh. Prosíme čitateľa, aby všetky úlohy dôkladne rozriešil skôr, ako pristúpi k ďalšiemu textu.

Úloha 9. Dokážte, že existujú práve dva rôzne (čo do počtu prvkov množiny D) modely teórie $\mathfrak{S}$ pre ktoré je množina Ch štvorprvková. Pre tieto modely nájdite tabuľky incidencie.

Úloha 10. Nájdite model S_8 (teórie $\mathfrak{S}$) s čo najmenším počtom prvkov Ch tak, aby v ňom výrok **V** bol nepravdivý.

Úloha 11. Popíšeme model $\mathfrak{M}$ operujúci na pojmoch (4). Zistite či $\mathfrak{M}$ je modelom teórie $\mathfrak{S}$.

$\mathfrak{M}$: Nech je v rovine daný pevný bod S. Ch je množina všetkých bodov v rovine okrem bodu S. D je množina všetkých kružníc idúcich bodom S. Relácia páčiť sa je reláciou incidencie.

Úloha 12. V modeli $\mathfrak{M}$ pridajte ku množine D ďalšie prvky tak, aby vzniklý model S_{10} bol modelem teórie $\mathfrak{S}$.

V článku 1.3., ktorý práve končíme sme sa oboznámili s pojmom modelu abstraktnej teórie. Článok 1.4. bude venovaný historickej väzbe modelu a teórie; možno ho pri čítaní vypustiť.

1.4. Od modelu k axiomatizovanej teórii

Každá vedecká teória vzniká v dôsledku dlhodobého hromadenia poznatkov, ich porovnávania a triedenia. V procese tvorenia teórie nachádzame štyri významné obdobia:

I. Je známy jeden, či viacero modelov budúcej teórie, zatiaľ nie je známy súvis medzi modelmi.

II. Známy je súvis medzi modelmi a niektoré z nich sa stávajú univerzálnymi tj. situácie všetkých modelov sú riešené na univerzálnom modeli.

III. Od univerzálneho modelu sa abstrakciou dochádza ku abstraktnej teórii, zatiaľ intuitívnej tj. neaxiomatizovanej.

IV. Intuitívna teória sa stáva axiomatizovanou, keď sa nájde vhodný axiomatický systém.

Ako príklad uvedieme vývoj teórie prirodzených čísel.

Spôsob prvých počtových výkonov ľudstva je možné len tušiť, pretože spadá do doby, ktorá bola veľmi skúpa na suveníry pre potomstvo. Je veľmi dobre prijateľná téza, že človek sa najprv naučil sčítať malé čísla (povedzme do päť). Vedel, že dva kone a tri kone je päť koňov, dva prsty a tri prsty je päť prstov, dvaja synovia a tri dcéry je päť detí. Je to prvé obdobie vývoja — existujú oddelené modely (kone, prsty, členovia rodiny).

Neskôr si ľudia všimli, že spočítať dva kone a tri kone môžeme pomocou prstov na rukách bez toho, že by bolo treba vidieť skutočné kone. Prsty sa stávajú jedným z hlavných univerzálnych modelov — sme v období II.

Trvalo to isto nejaké tisícročie, pokiaľ si ľudia uvedomili, že ku sčítaniu dvoch a troch koňov netreba ani prsty, že stačí vedieť: „dve a tri je päť" a tento fakt platí bez ohľadu na predmet (model) na ktorý ho aplikujeme. Abstrakciou vzniká nový pojem, pojem mnohosti, prirodzené číslo — budúci primitívny pojem celej teórie prirodzených čísiel. No vzniklá teória je a dlho ostáva teóriou intuitívnou. Fakty ako: $2 + 3 = 5$, $a + b = b + a$, ... sú považované za samozrejmé, prirodzené à priorné. Samozrejmosť komutatívnosti $a + b = b + a$ však netkvie v „podstate aritmetiky" (veď existujú aj nekomutatívne operácie: rozdiel, podiel, mocnenie), ale v ľudskom vedomí, ktoré po dlhé tisícročia navyknuté brať komutatívnosť sčítania za pravdivú, zdogmatizovalo si túto do „samozrejmosti". Dokonca ešte v polovici minulého storočia, keď už axiomatika geometrie absolvovala dvetisícročnú púť a matematické myslenie dosiahlo vysoký stupeň abstrakcie, žiaden z matematikov necítil potrebu axiomatizovať aritmetiku — tak silná bola ľudská viera v „à priornosť" zákonov aritmetiky.

Až druhá polovica minulého storočia mení intuitívnu teóriu na axiomatizovanú. Hlavnú zásluhu na tomto čine majú traja matematici: H. Grassmann (1861), R. Dedekind (1888) a G. Peano (1891). Axiomatickú stavbu teórie prirodzených čísiel tu uvádzať nemôžeme. Záujemcov odkazujeme na literatúru: K. Hruša: Elem. aritmetika (PV Praha, 1953).

Ukázali sme na historický vzťah modelu a axiomatizovanej teórie. Logickým závislostiam medzi teóriou a modelmi venujeme článok 1.6.

1.5. Sústava axiom axiomatizovanej teórie

Vrátime sa k axiomatizovanej teórii popísanej v článku 1.2. Nech je daná sústava základných pojmov $a_1, \ldots, a_m$ a sústava axiom $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ istej axiomatizovanej teórie $\mathfrak{A}$. Počet základných pojmov je m, počet axiom n. V prípade teórie $\mathfrak{S}$ (príklad 2) je $m = 3$, $n = 5$. Vysvetlíme si tri najdôležitejšie vlastnosti sústavy axiom: *bezospornosť*, *nezávislosť* a *úplnosť*.

Hovoríme, že skupina výrokov $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ je *sporná*, ak je z nej možné logickou cestou vyvodiť dve navzájom si odporujúce tvrdenia. V opačnom prípade danú skupinu výrokov menujeme *bezospornou*.

Príklad 4. Ak k výrokom (5) pridáme doleuvedený výrok $\mathbf{S}_6$, dostaneme spornú skupinu výrokov.

$\mathbf{S}_6$: Existujú chlapci $A \not\equiv B$ tak, že pre každé dievča x platí $A \varepsilon x \Rightarrow B \varepsilon x$.

Z $\mathbf{S}_3$ a $\mathbf{S}_6$ vyplýva, že existuje jediné dievča pre ktoré $A \varepsilon x$ a to dievča $x \equiv AB$. Z výrokov (5) vyplýva veta 7.S., ktorá je v spore s práve dokázaným tvrdením. Teda skupina výrokov $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_6$ je sporná.

Hovoríme, že skupina výrokov $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ je *závislá*, ak niektorý z nich je logickým dôsledkom ostatných. V opačnom prípade danú skupinu výrokov menujeme *nezávislou.*

Príklad 5. Ak k výrokom (5) pridáme doleuvedený výrok $\mathbf{S}_7$, dostaneme závislú skupinu výrokov.

$\mathbf{S}_7$: Ku každým dvom rôznym chlapcom A, B existuje dievča x tak, že $A \varepsilon x$ a $B \not\varepsilon x$.

Skutočne z (5) vyplýva veta 7.S. podľa ktorej existujú dve rôzne dievčatá a, b tak, že $A \varepsilon a$, $A \varepsilon b$. Pretože $a \neq b$, môže sa chlapcovi B páčiť najviac jedno z dievčat a, b a teda existuje $x \in \mathsf{D}$ tak, že $A \varepsilon x$ a $B \not\varepsilon x$. Dokázali sme, že výrok $\mathbf{S}_7$ je dôsledkom výrokov (5) a preto skupina výrokov $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5, \mathbf{S}_7$ je závislá.

Hovoríme, že sústava axiom $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ je *úplná* vzhľadom na sústavu základných pojmov $a_1, \ldots, a_m$, ak každý výrok X vypovedajúci len o týchto pojmoch, prípadne pojmoch skupín 2, 3, 4 klasifikácie v 1.1. strana 4., sa alebo dá na základe $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ dokázať, alebo vyvrátiť. V opačnom prípade sústavu axiom $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ menujeme *neúplnou* vzhľadom na sústavu základných pojmov $a_1, \ldots, a_m$.

Príklad 6. Sústava axiom (5) je neúplnou vzhľadom na sústavu základných pojmov (4), pretože výrok $\mathbf{V}$ (úloha 8. článok 1.3.) sa na základe axiom (5) nedá ani dokázať, ani vyvrátiť. Ku dôkazu posledného tvrdenia použijeme modelov.

Predpokladajme, že platí

$$\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5 \Rightarrow \mathbf{V}. \tag{6}$$

Ak (6) platí v abstraktnej teórii, platí nutne aj v každom jej modeli, špeciálne v modeli S_4, čo však nie je pravda.

Výrok $\mathbf{V}$ teda nie je možné dokázať z axiom $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5$. Rovnako výrok $\mathbf{V}$ sa z axiom $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5$ nedá ani vyvrátiť, pretože v modeli S_3 je ako $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5$ tak aj $\mathbf{V}$ pravdivý. Pretože výrok $\mathbf{V}$ sa z axiom $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5$ nedá ani dokázať, ani vyvrátiť, hovoríme, že $\mathbf{V}$ *je nezávislý na sústave axiom* (5). Tento príklad si dobre premyslite, lebo je dôležitý.

Poukázali sme na tri základné vlastnosti sústavy axiom: bezospornosť, nezávislosť a úplnosť. Bezospornosť je najdôležitejšia vlastnosť axiomatickej sústavy vôbec. Zatiaľ čo štúdium závislej, či neúplnej sústavy axiom zmysel má, je sporná axiomatická sústava bez zmyslu a jediné čo s ňou možno múdreho urobiť je: zahodiť ju.

Najmenej dôležitou z horeuvedených vlastností sústavy axiom je nazávislosť. Zo sústavy axiom, ktorá je závislá môžeme vytvoriť sústavu nezávislú spôsobom veľmi jednoduchým: postupne vypúšťame tie axiomy, ktoré sú dôsledkom tých, čo v sústave ostali. Požiadavka nezávislosti axiom je požiadavkou estetiky a nezasahuje podstatu budovanej teórie. Z povedaného vyplýva, že každú axiomatickú sústavu môžeme predpokladať nezávislou.

Konečne pár slov o úplnosti sústavy axiom. Fakt, či daná sústava axiom $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ je, alebo nie je úplnou je podstatný, no má zmysel študovať teóriu postavenú ako na úplnom, tak aj na neúplnom axiomatickom systéme. V tejto súvislosti povieme niečo o príbuzných teóriách a o stupňovom budovaní teórie.

Predstavme si, že $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ sú dve rôzne teórie, majúce spoločné niektoré (poprípade aj všetky) základné pojmy $c_1, \ldots, c_k$ a niektoré axiomy $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_r$. Také teórie budeme menovať príbuzné. Nech $\mathfrak{C}$ je teória určená systémom základných pojmov $c_1, \ldots, c_k$ a sústavou axiom $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_r$. Potom každé tvrdenie teórie $\mathfrak{C}$ je pravdivé aj v teórii $\mathfrak{A}$, aj v teórii $\mathfrak{B}$. Teóriu $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ získame z teórie $\mathfrak{C}$ pridaním zvyšných základných pojmov a axiom. Popísané stupňovité budovanie teórií má veľký význam v praxi pri konkrétnom rozpracovávaní príbuzných teórií.

1.6. Axiomatizovaná teória a jej modely

V tomto článku ukážeme na dôležitosť modelov. V predchádzajúcom článku sme zaviedli pojmy bezospornosť, nezávislosť a úplnosť sústavy axiom a na príkladoch sme ilustrovali, ako na konkrétnej sústave možno poznať jej spornosť (príklad 4.), závislosť (príklad 5.) a neúplnosť (príklad 6.). Otázka znie: *Ako na konkrétnej sústave určíme jej a.) bezospornosť, b.) nezávislosť?* Kritérium úplnosti je obtiažne a preto ho vypustíme z úvah. Je zrejmé, že dokázať spornosť, či závislosť nejakej sústavy výrokov je jednoduchšie, ako dokázať jej bezospornosť, či nezávislosť. Čitateľ sa môže sám pokúsiť o riešenie problému skôr, ako bude ďalej čítať.

Kritérium bezospornosti sústavy výrokov. *Sústava výrokov je bezosporná, ak existuje aspoň jeden jej model.*

Úskalie posledného tvrdenia spočíva v slove „model", ktorým tu operujeme intuitívne. Precízne vyjadrovanie však možné nie je, lebo tento pojem siaha veľmi hlboko do logiky. Mierne upresnenie horného kritéria bezospornosti dáva nasledujúce tvrdenie.

Nech $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ je sústava výrokov a $\mathfrak{B}$ axiomatizovaná teória, ktorej bezospornosť je dokázaná. Ak existuje model sústavy výrokov $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ v rámci teórie $\mathfrak{B}$, potom je táto sústava výrokov bezosporná.

Príklad 7. Máme dokázať bezospornosť sústavy axiom (5). Podľa uvedeného kritéria stačí nájsť model teórie $\mathfrak{S}$. V článku 1.3. bolo podaných modelov päť. Uvážme napr. model S_3. Je to príklad modelovania teórie $\mathfrak{S}$ v rámci rovinnej euklidovskej geometrie. Existenciu poslednej teórie dokázal Hilbert.

Kritérium nezávislosti sústavy výrokov. *Sústava výrokov* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *je nezávislá, ak pre každé* $i = 1, \ldots, n$ *existuje aspoň jeden model* $\mathfrak{A}_i$ *splňujúci výroky* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *okrem výroku* $\mathbf{A}_i$, *pričom pre* $\mathbf{A}_i$ *platí* $\neg\, \mathbf{A}_i$. (Pozri dodatok A.)

Príklad 8. Máme dokázať nezávislosť sústavy axiom (5). Podľa uvedeného kritéria treba udať päť modelov, ktoré označíme $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$, $\mathfrak{Q}_4$, $\mathfrak{Q}_5$. V modeli $\mathfrak{Q}_1$ budú pravdivé výroky $\neg\, \mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$; v modeli $\mathfrak{Q}_2$ budú pravdivé výroky $\mathbf{S}_1$, $\neg\, \mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$;... Tu udáme modely $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_4$ a modely $\mathfrak{Q}_3$ a $\mathfrak{Q}_5$ prenecháme čitateľovi (pozri úlohu 13.).

$\mathfrak{Q}_1$: Nech $\mathsf{Ch} \equiv \mathsf{D} \equiv \emptyset$. Potom zrejme platí $\neg\, \mathbf{S}_1$ a platnosť $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$ je zrejmá, lebo predpoklady sú nepravdivé. (Dodatok A.)

$\mathfrak{Q}_2$: Z modelu S_1 vypustíme prvok množiny D „Júlia". Platí $\neg\, \mathbf{S}_2$, lebo chlapcom Orfeus a Tristan neexistuje dievča, ktoré sa obidvom páči. Pravdivosť axiom $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$ a $\mathbf{S}_5$ je očividná.

$\mathfrak{Q}_4$: K modelu S_2 do množiny D pridáme prvok „Čech" a ostatné prvky, ako aj reláciu ε necháme bezo zmeny. Platí $\neg\, \mathbf{S}_4$, lebo dievča „Čech" sa páči jedinému chlapcovi, chlapcovi „*e*". Pravdivosť zvyšných axiom sa overí jednoducho.

Úloha 13. Podľa príkladu 8. udajte modely $\mathfrak{Q}_3$ a $\mathfrak{Q}_5$. Riešení je samozrejme nekonečne mnoho.

Úloha 14. Ak ku axiomam $\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_5$ pridáme axiomu $\mathbf{S}_8$: Existuje dievča x majúce najviac jednu nepriateľku, potom sústava výrokov $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, $\mathbf{S}_8$ je sporná. Dokážte!

Úloha 15. Dokážte, že sústava výrokov $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, $\mathbf{V}$ je bezosporná. To isté dokážte pre sústavu výrokov $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, $\neg\, \mathbf{V}$.

Úloha 16. Napíšte výrok $\neg$ **W**, ak **W** je výrok: Ak sa dievča p nepáči chlapcovi P, potom existuje aspoň jedno dievča q tak, že q sa páči chlapcovi P a je priateľkou dievčaťa p. Podobne napíšte aj výrok $\neg$ **V** a snažte sa o maximálnu stručnosť zápisu.

Úloha 17. Posúďte bezospornosť sústavy výrokov a.) $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, **W**; b.) $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, $\neg$ **W**; c.) $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, $\neg$ **V**, **W**; d.) $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, **V**, **W**.

Úloha 18. Dokážte nasledovné implikácie: $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\neg\neg$ $\mathbf{S}_5 \Rightarrow$ D je jednoprvková $\Rightarrow$ **V**, **W**.

Úloha 19. Posúďte, či sústava axiom $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$, **V**, **W** je nezávislá.

2. kapitola

HISTORICKÉ POZNÁMKY

Celá druhá kapitola môže byť pri čítaní vypustená. Máloktorá vedecká problematika má tak dramatickú a poučnú históriu, ako práve objav neeuklidovskej geometrie. Podľa toho, čo bolo povedané v článku 1. 4. budeme sledovať vývoj geometrie od obdobia II. Prvá veľká technická revolúcia tj. obdobie VI.—IV. tisícročia pr. n. l. dala spolu s mnohými inými poznatkami ľudstvu aj množstvo znalostí geometrických. V povodí troch veľkých riek Eufratu, Hindu a Nílu vznikli mnohé geometrické objavy vyvolané potrebami ovládať prírodu. Tieto poznatky netvoria ešte systém, sú len súhrnom pravidiel o meraní, zdeľovaných medzi generáciami často mystickým spôsobom. Obdobie III. tj. obdobie tvorenia abstraktnej teórie patrí helénskej kultúre. Od Tálesa Milétskeho (VI. stor. pr. n. l.) cez Pytagora až po Euklida (III. stor. pr. n. l.) urobila helénska geometria ohromný pokrok. Jej hlavná zásluha nespočíva v tom, že zhrnula a vylepšila všetky dovtedy známe fakty, ale predovšetkým v tom, že ich utriedila do systému, ktorého korunou sú Euklidove „Základy". Sú spracované v 13. knihách. Spôsob, ktorým boli Základy napísané bol na vtedajšiu dobu vysoko pokrokový. Je to prvá učebnica vôbec, kde sa matéria vysvetľuje deduktívnym spôsobom od axiom. Je to prvý pokus o axiomatickú stavbu vedeckej disciplíny. Celé dve tisícročia stála táto kniha v strede záujmu matematikov a to nielen ako učebnica, ale aj ako živý stimulátor nových myšlienok. Z nej študovali takí matematici a fyzici, ako Koperník, Galilei, Descartes, Pascal, Newton, Leibnitz, Lobačevskij a iní. Na veľkosti tohto diela nič neuberá fakt, že bolo (z dnešného hľadiska) dosť nepresné a intuitívne. Princípy deduktívnej stavby axiomatizovanej teórie, tak ako sme ju poznali v kapitole I., sú do dnešnej doby platné a užívané v mnohých exaktných disciplínach.

Jedným z vážnych nedostatkov „Základov“ je snaha definovať všetky pojmy včítane tých, ktoré sú pre danú teóriu základné. Tak napr. prvé dve definície z prvej knihy „Základov“ sú:

1. Bod je to, čo nemá častí,
2. čiara je dĺžka bez šírky.

Dnes už vieme, že sa tu nejedná o definície, ale prinajlepšom o akési objasnenie. Vada „definícií“ je v tom, že slová „časť, dĺžka, šírka“ nie sú termíny. Nielen nedostatok základných pojmov je chybou „Základov“. Aj axiomatický systém je nedokonalý, hlavne neúplný.

Euklides uvádza nasledujúcich päť axiomov (menuje ich postuláty):

1. Každý bod je možné spojiť s každým bodom priamkou.
2. Každú časť priamky je možné neobmedzene predĺžiť.
3. Z ľubovoľného stredu je možné opísať kružnicu ľubovoľného polomeru.
4. Všetky pravé uhly sú navzájom rovné.
5. Ak priamka, pretínajúca dve ďalšie priamky tvori s nimi po jednej strane vnútorné priľahlé uhly o súčte menšom ako $2R$, potom sa vždy obidve druhé priamky pretínajú na tejto strane.

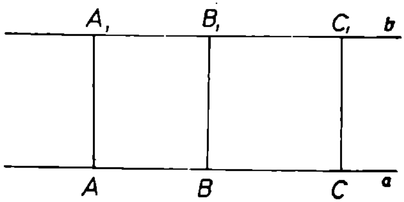
(Pozri príklad 2. v článku 1.2.). Na základe týchto axiom nie je možné napr. dokázať, že kružnica pretína priamku idúcu jej vnútorným bodom. No Euklides takéto tvrdenie dokazuje, pričom v dôkaze použije tvrdenie známe dnes pod pojmom *axioma spojitosti*. Euklidov omyl spočíva v tom, že tvrdenie axiomy spojitosti považoval za samozrejmé.

„Základy" našli v ďalších dvoch tisícročiach mnoho komentátorov a opravovateľov. Ústredným bodom týchto snáh bolo: dokázať piatu euklidovu axiomu. Jej jasnejšia formulácia je: Bodom A neležiacom na priamke a možno viesť s ňou jedinú rovnobežku. (Pozri úlohu 8. čl. 1.3. výrok **V**.) Uvedená axioma pútala pozornosť hlavne tým, že sa pomerne komplikovanou formuláciou odlišovala od predošlých. Z množstva „dôkazov" piatej axiomy uveďme aspoň niektorých autorov: Wallis, Bertrand, Cantor, Clavius, Legendre, Lambert a mnoho iných. Mnohé z týchto „dôkazov" boli veľmi vtipné a často trvalo dosť dlho, pokiaľ sa v nich našla chyba. V podstate každý z autorov použil pri „dôkaze" tvrdenie ekvivalentné s piatou euklidovou axiomou.*) Jedno zo základných tvrdení ekvivalentných s piatou euklidovou axiomou je: Súčet uhlov v trojuholníku je rovný π. Dokázať toto tvrdenie znamená dokázať piatu euklidovu axiomu. Pomerne rýchlo sa podarilo dokázať, že súčet uhlov v trojuholníku nemôže byť väčší, ako π. Odtiaľ okamžite vyplýva, že súčet uhlov v štvoruholníku nemôže byť väčší ako 2π. Tohoto faktu použili mnohí geometri, aby dokázali, že súčet uhlov v trojúholníku nemôže byť ani menší ako π, čo už implikuje piatu euklidovu axiomu. Kvôli ilustrácii uvedieme chybný dôkaz, ktorý podal Clavius. (Obr. 1.)

Nech A, B, C sú tri rôzne body priamky a a A_1, B_1, C_1 tri body ležiace v jednej polrovine vyťatej priamkou a tak, že $AA_1 = BB_1 = CC_1$, $AA_1 \perp a$, $BB_1 \perp a$, $CC_1 \perp a$. Nech b je priamka idúca bodmi A_1, B_1, C_1. Štvoruholník

*) Výroky A, B menujeme ekvivalentné, ak $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$. (Pozri dodatok A.)

ABB_1A_1 (tzv. Saccheriho štvoruholník) má os súmernosti prechádzajúcu stredom úsečky AB (bude dokázané v ďalšom texte). Platí teda $\sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle BB_1A_1$. Podobne $\sphericalangle BB_1C_1 = \sphericalangle CC_1B_1$. Je teda súčet uhlov v štvoruhol-

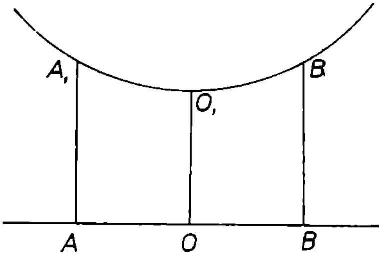


Obr. 1

níku ACC_1A_1 rovný 2π, lebo $\sphericalangle A_1AC + \sphericalangle ACC_1 + \sphericalangle CC_1A_1 + \sphericalangle C_1A_1A = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \sphericalangle C_1B_1B + \sphericalangle A_1B_1B = 2\pi$.

Claviusov omyl je v tom, že predpokladal za samozrejmé existenciu priamky b. Fakt, že body A_1, B_1, C_1 ležia na priamke je ekvivalentný s piatou euklidovou axiomou.

Prvý veľký krok ku riešeniu problému podal taliansky jezuita Saccheri, keď v snahe o vyvrátenie hypotézy ostrého uhla (tj. že súčet úhlov v trojuholníku je menší ako π) vybudoval dosť obsiahlu teóriu založenú na nasledovnej myšlienke. Uvažujeme štvoruholník ABB_1A_1 (obr. 2.), pričom $\sphericalangle A_1AB = \sphericalangle AB\,B_1 = \frac{\pi}{2}$ a $AA_1 = BB_1$. Nech O je stred úsečky AB a nech o je priamka idúca bodom O, $o \perp AB$. Označme $O_1 \equiv o \cap A_1B_1$. Útvary OAA_1O_1 a OBB_1O_1 sú symetrické podľa o, teda $\sphericalangle AA_1O_1 = \sphericalangle BB_1O_1$. Z horného predpokladu vyplýva ostrosť uhlov $\sphericalangle AA_1B_1$, $\sphericalangle BB_1A_1$ a po dosť dlhých úvahách dochádza autor k „absurdným“ tvrdeniam napr. dve nepretínajúce sa priamky ležiace v rovine, alebo majú jedinú spoločnú kolmicu od ktorej na obidve strany sa neobmedzene



Obr. 2

rozchádzajú, alebo nemajú spoločnú kolmicu a v jednom smere sa asymptoticky približujú. Geometrická stavba vybudovaná na uvedenej hypotéze Saccherim je presná, až na konečný výsledok, ktorému pravdepodobne ani sám neveril. Tvrdí: asymptoticky približujúce sa priamky majú v nevlastnom bode spoločnú kolmicu, teda hypotéza ostrého uhla je nesprávna a tým je piaty euklidov postulát dokázaný.

Úvahy Lamberta publikované pod názvom „Teória rovnobežných priamok“ v r. 1766 sú veľmi blízke úvahám Saccheriho, no na rozdiel od neho pri svojich úvahách v súvislosti s hypotézou ostrého uhla nedochádza k „protirečeniu“ a nikde vo svojich prácach netvrdí, že „dokázal“ piaty euklidov postulát. Jeho práce majú nesmiernu zásluhu na konečnom vyriešení pochybnosti o piatom euklidovom postuláte.

Legendre, ktorý sa mimoriadne zaslúžil o rozvoj mechaniky má tiež veľký podiel pri výskume geometrie. Dlhý čas sa venoval piatemu euklidovmu postulátu a publikoval niekoľko variantov jeho „dôkazu".

Márne pokusy riešiť problém rovnobežiek siahajú až na prelom 18. a 19. storočia. Úpenlivosť snahy špičkových svetových matematikov krásne dokumentuje list maďarského matematika prof. Bolyaia svojmu synovi. Keď sa prof. Bolyai dozvedel, že jeho syn, mladý talentovaný matematik sa venuje problému rovnobežiek, až zúfalo ho vystríhal, aby zanechal túto myšlienku na ktorej on „bezvýsledne" strávil veľkú časť svojho života. Syn neposlúchol otcovej rady a vďaka tomu stal sa jedným z troch objaviteľov neeuklidovskej geometrie. Neriedko je problém, ktorý po mnoho rokov odoláva úsiliu vedcov celého sveta, riešený súčasne viacerými vedcami. Tak aj dramatický súboj geometrov s rovnobežkami je riešený nezávisle troma matematikmi: nemcom Gaussom, rusom Lobačevským a maďarom Bolyaiom.

Gauss problém piateho postulátu vyriešil už koncom 18. storočia, no do konca svojho života riešenie nepublikoval. Riešenie sa neodvážil zverejniť a zdelil ho len súkromne v listoch priateľom.

Lobačevskij začal výskum teórie rovnobežných priamok s pokusmi dokázať piaty euklidov postulát v r. 1817 no už v roku 1826 dáva k dispozícii verejnosti svoju prácu o neeuklidovskej geometrii. Publikoval ju pod názvom „O základoch geometrie" v r. 1829. Lobačevskij bol astronóm a preto je pochopiteľné, že sa snažil overiť, či v *reálnom svete*, v svete v ktorom žijeme, platí geometria euklidovská, alebo neeuklidovská. Meral súčet uhlov v trojuholníku, ktorého vrcholy tvorili nebeské telesá (napr. Zem, Slnko, Sírius). Akokoľvek presné boli jeho merania bola odchylka (defekt) súčtu uhlov v meranom trojuholníku od π menšia, ako tolerancia prístrojov. Pre myšlienky, ich aplikácie a popularizovanie, ktoré Lobačevskij odvážne konal menujeme neeuklidovskú geometriu niekedy tiež jeho menom.

Aké je teda riešenie problému rovnobežiek. Existujú dve abstraktné teórie postavené na tých istých základných pojmoch a axiomach, pričom v jednej z nich (označíme ju $\mathfrak{E}$) platí axioma **E**, zatiaľ čo v druhej (označíme ju $\mathfrak{L}$) platí axioma **L** (pozri článok 3.1.). Axiomatizovaná teória opierajúca sa o axiomy nehovoriace nič o rovnobežkách sa menuje absolutnou geometriou. Vzhľadom na to čo bolo povedané v článku 1.5. sú teda teórie $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{L}$ príbuzné. Pri axiomatickom štúdiu elementárnej geometrie postupujeme teda nasledovne: Vybudujeme geometriu absolutnú (v nej platí napr. tvrdenie: súčet uhlov v trojuholníku nie je väčší ako π) a až potom budujeme teóriu $\mathfrak{L}$, alebo $\mathfrak{E}$. Ostáva dodať, že definitívnu stavbu elementárnej geometrie s precíznou sústavou axiom podal nemecký matematik Hilbert a že dnes je táto disciplina uzavretá. To však neznamená, že geometria je mŕtva disciplina. Práve naopak, vďaka Kleinovi, Cartanovi a mnohým ďalším matematikom sa geometria vyvinula dnes do takého štádia, že, zdá sa, znovu nadobúda to vedúce postavenie v celej matematike, ktoré jej dal Euklides v „Základoch". Uveďme mená aspoň dvoch vynikajúcich českých geometrov, ktorí podstatne obohatili naše geometrické poznatky. Sú to Eduard Čech a Václav Hlavatý.

My sa však v ďalšom texte vrátime do začiatku XIX. storočia a pokúsime sa čitateľa oboznámiť hlbšie s myšlenkami neeuklidovskej geometrie.

3. kapitola

MODELY LOBAČEVSKÉHO PLANIMETRIE

3.1. Spôsob štúdia Lobačevského planimetrie

V tejto kapitole začneme vlastné štúdium Lobačevského planimetrie. Posledným termínom označujeme abstraktnú geometrickú teóriu obdobnú tej s ktorou sa čitateľ oboznámil na strednej škole pod názvom rovinná geometria, či planimetria. Aby sme predišli nedorozumeniu, budeme tej planimetrii, ktorá sa učí na strednej škole odteraz hovoriť Euklidovská planimetria. Hlavný rozdiel medzi oboma abstraktnými teóriami — Lobačevského planimetriou, ktorú označíme $\mathfrak{L}$ a Euklidovskou planimetriou, ktorú označíme $\mathfrak{E}$ je v tom, že v teórii $\mathfrak{L}$ platí výrok **L** a v teórii $\mathfrak{E}$ platí výrok **E**.

L: Ak P je bod neležiaci na priamke q, potom existujú aspoň dve rôzne priamky p_1 a p_2 idúce bodom P a nepretínajúce priamku q.

E: Ak P je bod neležiaci na priamke q, potom existuje jedna a len jedna priamka p idúca bodom P a nepretínajúca priamku q.

Podľa toho čo sme povedali v prvej kapitole, mal by náš postup budovania teórie $\mathfrak{L}$ začať vymenovaním základných pojmov a úplnej sústavy axiom. Potom by sme logickými úvahami tj. deduktívne mali vyvodzovať stále zložitejšie tvrdenia teórie $\mathfrak{L}$.

Existujú dva vážne dôvody, pre ktoré nebudeme postupovať uvedeným spôsobom. Axiomatická stavba vyžaduje jednak ďaleko viac miesta, ako dáva tenká brožúrka a ďalej (z hľadiska metodického) nutne predpokladá, že čitateľ bol už aspoň čiastočne oboznámený s axiomatickou stavbou teórie $\mathfrak{E}$. Nakoľko však axiomatizácia teórie $\mathfrak{E}$ sa, kvôli náročnosti látky, na strednej škole neučí môžeme predpokladať, že čitateľova znalosť teórie $\mathfrak{E}$ je len intuitívna. To znamená, že čitateľ pozná všetky základné vzťahy teórie $\mathfrak{E}$, no nepozná jej systém axiom. Pri intuitívnom štúdiu (akejkoľvek) abstraktnej teórie, úlohu sústavy axiom preberá nie celkom jasne vymedzený súbor faktov, ktoré príjmame za „evidentné“ „à priorné“, čiže „samozrejmé“. Tak napríklad v prípade teórie $\mathfrak{E}$ za takéto evidentne pravdivé tvrdenia považujeme výroky:

$\mathbf{U}_1$: Dvoma rôznymi bodmi prechádza jedna a len jedna priamka.

$\mathbf{U}_2$: Existuje štvoruholník majúci všetky štyri uhly pravé (napr. štvorec).

Na základe takýchto evidentných (avšak výslovne nevymenovaných) tvrdení odvodzujeme ďalšie, menej zrejmé tvrdenia teórie $\mathfrak{E}$ — vetu Talesovu, Pytagorovu, sinovu,...

Opísané intuitívne budovanie teórie $\mathfrak{E}$ sa silno opiera o názornosť (skúsenosť) a preto sa nám zdá prirodzeným. Základné tvrdenie $\mathbf{L}$ teórie $\mathfrak{L}$ nielen že nie je názorné, ale našim geometrickým skúsenostiam priam odporuje. Preto je nemožné budovať teóriu $\mathfrak{L}$ intuitívne. Nevedeli by sme totiž, ktoré fakty považovať za evidentné. Napríklad z horeuvedených výrokov $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ evidentne pravdivých v teórii $\mathfrak{E}$ je v teórii $\mathfrak{L}$ pravdivý výrok $\mathbf{U}_1$ a výrok $\mathbf{U}_2$ je nepravdivý. Vidíme, že v tejto brožúrke teóriu $\mathfrak{L}$ nemôžeme budovať ani axiomaticky, ani intuitívne. Ostáva jediná možnosť — použiť modelov. Tento spôsob nám síce nedá abstraktnú teóriu $\mathfrak{L}$, ale aj model teórie $\mathfrak{L}$ nám poskytne veľmi dobrý obraz tejto teórie. Aby naše nové skúsenosti boli bohatšie, oboznámime čitateľa dokonca s dvoma modelmi o ktorých sme sa zmienili už v kapitole prvej. Obidva modely budú realizované v rámci teórie $\mathfrak{E}$ tj. v euklidovskej rovine. Prvý z modelov označíme $\mathcal{B}$, jeho autormi sú Klein a Beltrami, druhý označíme $\mathcal{P}$, jeho autorom je Poincaré. $\mathcal{B}$ a $\mathcal{P}$ sú najznámejšie modely teórie $\mathfrak{L}$. Model $\mathcal{B}$ je názornejší, ale na modeli $\mathcal{P}$ je možné lepšie ilustrovať meranie uhlov a úsečiek.

Úloha 1. Napíšte výroky $\neg\, \mathbf{E}$, $\neg\, \mathbf{L}$ a $\neg\, \mathbf{U}_2$.

Úloha 2. Overte platnosť tvrdenia a) $\mathbf{E} \Rightarrow \neg\, \mathbf{L}$, b) $\neg\, \mathbf{L} \Rightarrow \mathbf{E}$.

Úloha 3. V axiomach $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \mathbf{S}_5$ teórie $\mathfrak{S}$ z príkladu 2. kapitoly 1. nahradíme všetky termíny podľa slovníka

$$\begin{array}{c|llll|c} & \text{chlapec} & \text{dievča} & \text{priateľky} & \text{nepriateľky} & \\ \downarrow & \text{bod} & \text{priamka} & \text{rovnobežky} & \text{rôznobežky} & \downarrow \end{array} \quad (\mathrm{s})$$

a novoutvorené axiomy označíme $\mathbf{S}'_1, \mathbf{S}'_2, \mathbf{S}'_3, \mathbf{S}'_4, \mathbf{S}'_5$, vzniklú teóriu $\mathfrak{S}'$. Podobne z výrokov $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ (úloha 1.8. a úloha 1.16.) vzniknú výroky $\mathbf{V}'$ a $\mathbf{W}'$. Aký je vzťah medzi teóriami $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{S}'$? Aký je vzťah medzi výrokmi $\mathbf{E}$, $\mathbf{V}'$ a $\mathbf{W}'$?

Úloha 4. Nájdite závislosť medzi výrokmi a) $\mathbf{L}$ a $\mathbf{V}'$, b) $\mathbf{L}$ a $\mathbf{W}'$.

Úloha 5. Zistite, ktorý z výrokov $\mathbf{E}, \mathbf{L}$ je pravdivý v ktorom z modelov: $\mathcal{S}'_1, \mathcal{S}'_2, \mathcal{S}'_3, \mathcal{S}'_6, \mathcal{S}'_7, \mathcal{S}'_8$ a $\mathcal{S}'_9$. Čiarka má význam popísaný v úlohe 3.

Úloha 6. Dokážte, že v modeloch $\mathcal{S}'_4$ a $\mathcal{S}'_5$ platí $\mathbf{L}$ a $\neg\, \mathbf{E}$.

3.2. Model $\mathcal{B}$ (Beltrami — Klein)

V ďalšom texte budeme pracovať v euklidovskej rovine tj. v teórii $\mathfrak{E}$ a budeme tu modelovať teóriu $\mathfrak{L}$. Tak väčšina geometrických pojmov nadobudne dva rôzne významy, pretože sa vyskytnú ako v teórii $\mathfrak{E}$, tak aj v modeli teórie $\mathfrak{L}$. Napríklad body v zmysle $\mathfrak{L}$ budú len niektoré z bodov v zmysle $\mathfrak{E}$. Bolo by zdĺhavé písať „bod v zmysle $\mathfrak{L}$“, „kolmica v zmysle $\mathfrak{E}$“ a pod., preto budeme písať stručne „l-bod“, „e-kolmica“ a pod. Termín, ktorého význam je ten istý v zmysle $\mathfrak{L}$, ako v zmysle $\mathfrak{E}$ budeme písať ako doteraz bez predsymbolu l-, či e-. Napríklad „l-medzi“ a „e-medzi“ je to isté, preto píšeme proste „medzi“.

Podáme popis modelu B (pozri model S_2 z príkladu 1.2.). Všetky úvahy sú prevádzané v e-rovine.

Dohovor 1. Nech je v e-rovine daná e-kružnica h. Označme symbolom λ množinu všetkých vnútorných a symbolom μ množinu všetkých jej vonkajších e-bodov. Táto symbolika je záväzná pre celý článok 3.2., 3.3. a 3.4.

Definícia 1. e-Bod X nazveme

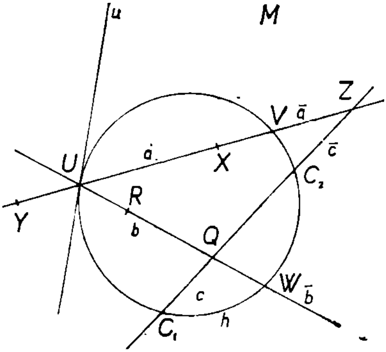
$$\left.\begin{matrix} \text{l-}\textit{bodom} \\ \text{a-}\textit{bodom} \\ \text{i-}\textit{bodom} \end{matrix}\right\} \text{ práve keď je } \left\{\begin{matrix} X \in \lambda \\ X \in h \\ X \in \mu. \end{matrix}\right.$$

Množinu λ všetkých l-bodov nazveme l-*rovinou*, množinu všetkých a-bodov resp. i-bodov nazveme *absolutom* resp. *ideálom* l-*roviny* λ.

Poznámka 1. V definícii 1. sme zaviedli 6 pojmov. Ku pojmom l-bod a l-rovina, ktoré majú analogické pojmy v $\mathfrak{E}$ teórii pristupujú pojmy a-bod, i-bod, absolut a ideál l-roviny. Posledné štyri pojmy v $\mathfrak{E}$ teórii nemajú obdobu a aj my by sme sa bez nich vedeli zaobísť. Zavedenie uvedených pojmov nám značne uľahčí vyjadrovanie.

Definícia 2. Nech $U \neq V$ sú dva ľubovoľné a-body. Potom otvorenú e-úsečku UV nazveme l-priamkou. Okrem l-priamok takto popísaných žiadne iné neexistujú.

Dohovor 2. l-Priamky budeme označovať dvojakým spôsobom a to alebo malým latinským písmenom a, b, c, x, ... (tak značíme aj e-priamky), alebo dvojicou veľkých latinských písmien AB, UX, YZ, ... pokiaľ tieto písmená označujú dva rôzne e-body, ktorých e-spojnica pretína e-kružnicu h. Napríklad podľa obrázku 3. je otvorená e-úsečka UV zároveň l-priamkou a jej zápis je UV,



Obr. 3

alebo XU, alebo XY, alebo ZV, alebo a a pod. Ak x je l-priamka, potom symbolom $\bar{x}$ označíme e-priamku, pre ktorú $x \subset \bar{x}$ a symbolom x' množinu $\bar{x} \cap h$.

Úloha 7. Pozrite na obrázok 3. a napíšte všetky tam nakreslené a) l-body, b) e-body, ktoré nie sú a-bodmi, c) i-body, d) l-priamky, e) e-priamky.

Úloha 8. Dajte aspoň štyri rôzne zápisy l-priamky $\bar{c} \cap \lambda$ z obrázku 3.

Úloha 9. Nech $X \not\equiv Y$ sú e-body. Aký je rozdiel medzi symbolom „e-priamka XY“ a „XY“? Majú obidva symboly vždy zmysel?

Úloha 10. Zapíšte stručnejšie výrazy z obrázku 3.: a) $\overline{XU} \cap \bar{c}$, b) $\{U, V\}$, c) $\overline{MZ}$, d) $\bar{a} \cap QR$.

Úloha 11. Dokážte, že v modeli $\mathcal{B}$ je výrok L z 3.1. pravdivý.

V teórii $\mathfrak{E}$ sú dve rôzne priamky buď rovnoběžné, alebo rôznobežné. Ukážeme, že v teórii $\mathfrak{L}$ sa rovnobežnosť dá ešte ďalej klasifikovať.

Veta 1. Nech x, y sú dve rôzne l-priamky. Potom nastáva jeden a len jeden z nasledujúcich troch prípadov:

1. $x \cap y \not\equiv \emptyset$, 2. $x \cap y \equiv \emptyset$ a $x' \cap y' \not\equiv \emptyset$,
3. $x \cap y \equiv \emptyset$ a $x' \cap y' \equiv \emptyset$.

Dôkaz. Namiesto l- priamok x, y uvažujme e-priamky $\bar{x}$, $\bar{y}$. Ak $\bar{x}$, $\bar{y}$ sú e-rovnobežné, alebo ak $\bar{x} \cap \bar{y}$ je i-bod, potom nastáva prípad 3. Prípad 1. resp. 2. nastáva práve keď $\bar{x} \cap \bar{y}$ je l-bod resp. a-bod. Poznamenajme, že pre $x \not\equiv y$ je množina $x' \cap y'$ buď prázdna, alebo jednoprvková.

Definícia 3. l-Priamky sa nazývajú: l-*rôznobežné*, či l-*rôznobežky* práve keď $x \cap y \not\equiv \emptyset$, l-*rovnobežné*, či l- *rovnobežky* práve keď $x \cap y \not\equiv \emptyset$. l-Rovnobežky x, y sa nazývajú *rozbežky* resp. *súbežky* práve keď $x' \cap y' \equiv \emptyset$ resp. $x' \cap y' \not\equiv \emptyset$.

Poznámka 2. Pretože termín e-rozbežky neexistuje, stačí písať rozbežky namiesto l-rozbežky. Rovnako pre súbežky. Symbol $\|$ bude značiť výlučne e-rovnobežnosť.

Nasledujúce úlohy 12 až 15 sú venované niektorým faktom platným v teórii $\mathfrak{L}$, nie však v teórii $\mathfrak{E}$.

Úloha 12. Nech je daných n navzájom rôznych l-priamok $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Potom vždy existuje l-priamka x-rovnobežná s každou z priamok $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Úloha 13. Nech a, b sú l-rovnobežky. Potom vždy existuje l-priamka p l-rovnobežná s a a l-rovnobežná s b.

Úloha 14. Existujú tri l-rovnobežky a, b, c tak, že žiadna l-priamka nepretína všetky tri.

Úloha 15. Nech a, b sú l-rovnobežky. Určite množinu M l-bodov X, ktorými možno viesť l-priamku x l-rovnobežnú s b a l-rôznobežnú s a.

Úloha 16. (Konštrukčná.) Nech A, B, C sú rôzne l-body, pričom A je e-stred e-kružnice h. Konštruujte l-priamky a, b, c tak, aby každé dve z nich boli súbežky a naviac $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$. Preveďte diskusiu. Riešenie je založené na istom vtipe.

Zavedieme ďalšie pojmy modelu B: polpriamka, polrovina, úsečka, uhol, trojuholník. Pripomeňme, že v teórii $\mathfrak{E}$ sa pod pojmom „polpriamka" rozumie „uzavretá polpriamka" tj. polpriamka včítane jej začiatku. Rovnako aj polrovina, úsečka a uhol sa v teórii $\mathfrak{E}$ berú uzavreté.

Definícia 4. Nech A, B sú dva rôzne l-body l-priamky p pre ktorú $p' \equiv \{U, V\}$. Nech l-bod B leží medzi A a U. Množinu, ktorá sa skladá z l-bodu A a všetkých l-bodov X ležiacich medzi A a U nazveme l-*polpriamkou* AU, alebo AB. Prienik l-polpriamok AB a BA nazveme l-*úsečkou* AB. Ak naviac l-bod $C \notin p$, potom množinu všetkých bodov X pre ktoré platí: vnútro l-úsečky XC nemá s l-priamkou p žiaden spoločný l-bod sa nazýva l-*polrovinou* ABC, alebo pC. Prienik l-polrovín ABC a ACB nazveme l-*uhlom* a označíme $\sphericalangle BAC$ či $\sphericalangle CAB$. l-Polpriamku MP nazývame tiež *nulový* l-*uhol*, l-polrovinu tiež l-*priamy uhol*. Pojmy *vnútrajšok*, *otvorenosť* či *uzavretosť* l-polpriamky, l-úsečky, l-polroviny a l-uhla sú použité ako v teórii $\mathfrak{E}$. Tieto útvary sa predpokladajú uzavreté, pokiaľ nie je výslovne povedaný opak.

Dohovor 3. O l-polpriamke AB budeme hovoriť aj vtedy, keď je B a-bodom, prípadne i-bodom. e-Bod A musí nutne byť l-bodom. Podobne o l-polrovine ABC hovoríme aj v prípade, že A, B, C sú ľubovoľné e-body neležiace na e-priamke, ak len e-priamka AB pretne h. O l-uhle BAC hovoríme aj v prípade, že B, C sú ľubovoľné e-body rôzne od l-bodu A. Dokonca e-body B, C môžu s l-bodom A ležať na e-priamke — potom je l-uhol BAC buď nulový, alebo priamy. Pojem *opačnej* l-*polroviny* používame, ako v teórii $\mathfrak{E}$.

O l-úsečke AB budeme hovoriť aj v prípade $A \equiv B$ — nazveme ju nulovou.

Znovu pár úloh na precvičenie látky.

Úloha 17. Koľkoraká je vzájomná poloha dvoch rôznych l-polpriamok AB a CD? Nájdite aspoň 10 prípadov.

Úloha 18. Nech p, q sú dve l-rôznobežky a $q_1 \subset q$ l-polpriamka nepretínajúca l-priamku p. Narysujte množinu M tých l-bodov X pre ktoré platí: každá l-priamka x idúca l-bodom X a nepretínajúca l-priamku p nutne pretne l-polpriamku q_1.

3.3. Kolmosť v modeli B

Odteraz až do odvolania predpokladáme, že všetky objekty sú euklidovské a preto upúšťame od písania predsymbolov e- či l-; symboly S resp. r v ďalšom značia stred resp. polomer kružnice h.

Trochu neobvyklým spôsobom budeme definovať množinu s, ktorej prvky značíme veľkými latinskými písmenami — ako body. Symbolmi $\bar{\pi}$ resp. $\dot{\pi}$ označíme množinu všetkých priamok resp. bodov. O zobrazení hovoríme v dodatku A.

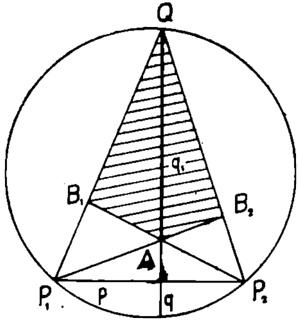
Definícia 5. Nech s je množina daná zobrazením $\sigma : \bar{\pi} \to$ s s nasledujúcimi dvoma vlastnosťami:

(a) ku každému $X \in$ s existuje aspoň jedna priamka $y \in \bar{\pi}$ tak, že $\sigma(y) = X$,

(b) pre ľubovoľné priamky $x \not\equiv y$ platí $\sigma(x) \equiv \sigma(y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \parallel y$. Potom množinu s nazývame *množina smerov* a jej prvky nazývame *smery*. Smer $\sigma(x)$ pre $x \in \bar{\pi}$ nazývame *smerom priamky* x, alebo *smerom incidentným s priamkou* x.

Nepresne, ale názorne sa pod pojmom smer rozumie „nekonečný bod priamky" či „priesečník dvoch rôznych rovnobežiek".

Dohovor 4. Nech je $x \in \bar{\pi}$; namiesto $\sigma(x)$ píšeme tiež $x \cap$ s, namiesto vzťahu $X = \sigma(x)$ píšeme vzťah $X \in x$. Pre $A \in \dot{\pi}$ a $X \neq Y \in$ s označíme symbolom AX tú priamku $p \in \bar{\pi}$, pre ktorú $A \in p$ aj $X \in p$ a symbolom XY označí-



Obr. 4

me množinu s. Pre každý $A \in \dot{\pi}$ definitoricky prehlásime $A \notin$ s. Konečne vzdialenosť (tj. e-vzdialenosť) bodov A, B značíme $\varepsilon(AB)$.

Podáme definíciu dvoch zobrazení polarity:

$$\mathrm{p}: \dot{\pi} \cup \mathrm{s} \to \bar{\pi} \cup \{\mathrm{s}\} \text{ a } \mathrm{P}: \bar{\pi} \cup \{\mathrm{s}\} \to \dot{\pi} \cup \mathrm{s}.$$

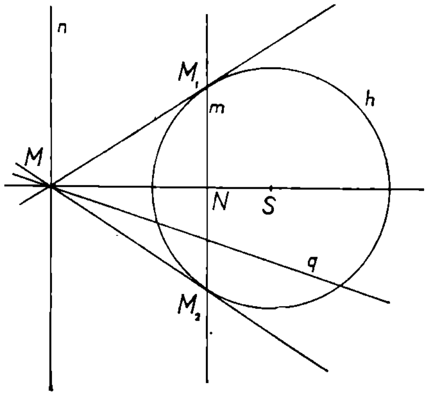
Uvedomíme si, že medzi symbolmi s a {s} je rozdiel — pozri dodatok A.

Definícia 6a. Zobrazenie $\mathrm{p}: \dot{\pi} \cup \mathrm{s} \to \bar{\pi} \cup \{\mathrm{s}\}$, ktoré každému prvku $X \in \dot{\pi} \cup$ s priradí prvok $\mathrm{p}(X) \in \bar{\pi} \cup \{\mathrm{s}\}$ nazveme *polárnym zobrazením bodov ak*

1. pre $X \in$ s je $\mathrm{p}(X)$ priamka idúca bodom S kolmo na X,
2. $\mathrm{p}(S) = \{\mathrm{s}\}$,
3. pre $X \in \dot{\pi}$, $X \neq S$ je $\mathrm{p}(X)$ priamka kolmá na SX idúca tým bodom Y polpriamky SX, pre ktorý

$$\varepsilon(SY).\varepsilon(SX) = r^2. \qquad (7)$$

Úloha 19. Dokážte, že zobrazenie p je bijektívne tj. že každému prvku X množiny $\dot{\pi} \cup s$ priradí jediný prvok p(X) množiny $\bar{\pi} \subset \{s\}$ a ku každému prvku x množiny



Obr. 5

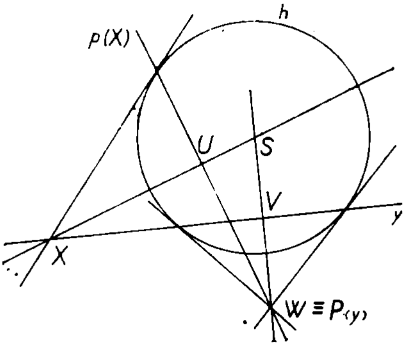
$\bar{\pi} \cup \{s\}$ existuje a pritom jediný prvok $X \in \dot{\pi} \cup s$ tak, že p(X) $\equiv x$.

Tvrdenie dokázané v úlohe 19. nás oprávňuje hovoriť o zobrazení inverznom ku p tj. o takom zobrazení P: $\bar{\pi} \cup \{s\} \to \dot{\pi} \cup s$, pre ktoré p[P($x$)] $\equiv x$ pre všetky $x \in \bar{\pi} \cup \{s\}$ a P[p(X)] $\equiv X$ pre všetky $X \in \dot{\pi} \cup s$. Podáme presnú definíciu.

Definícia 6b. Zobrazenie P: $\bar{\pi} \cup \{s\} \to \dot{\pi} \cup s$ dané predpisom P(x) $\equiv X \Leftrightarrow$ p(X) $\equiv x$ pre všetky $x \in \bar{\pi} \cup \{s\}$ nazveme *polárnym zobrazením priamok.*

Zobrazenia P a p majú dosť negeometrickú formu, pretože sú popísané predovšetkým rovnicou (7). Nájdeme ich geometrickejšie vyjadrenie.

Úloha 20. Pre každý bod $X \not\equiv S$ je p(X) $\perp$ XS. Dokážte. $X \in h$ práve keď $X \in$ p(X). Dokážte.



Obr. 6

Úloha 21. Nech $X \in h$, potom p(X) je dotyčnica ku h v bode X. Nech x je dotyčnica ku h, potom P(x) je dotykový bod x a h. Dokážte.

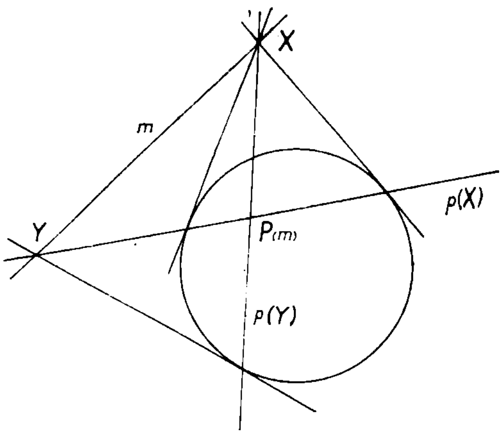
Úloha 22. Nech M je vonkajší bod kružnice h a nech M_1, M_2 sú dotykové body dotyčníc vedených z bodu M ku h. Potom p(M) $= M_1M_2$. Dokážte.

Konštrukčne vieme už veľmi dobre nájsť p(X) resp. P(x) pre X neležiace vo vnútri h resp. pre x majúce s h aspoň jeden bod spoločný. Úlohu doriešime úplne, najprv však dokážeme dôležitú vetu.

Veta 2. *(Základná vlastnosť polarity).* Nech X je bod resp. smer a y priamka. Potom platí

$$X \in y \Leftrightarrow \mathrm{P}(y) \in \mathrm{p}(X).$$

Dôkaz. Nech napred $S \not\equiv X \notin h$, $S \notin y$, $X \notin s$ (obr. 6.). Označme $U \equiv XS \cap p(X)$, V resp. W priesečník kolmice vedenej z bodu S na y s y resp. $p(X)$. Existencia týchto bodov vyplýva z úlohy 20. a horných predpokladov. Pretože



Obr. 7

$X \notin h$, je tiež (úloha 20.) $X \notin p(X)$ a preto $X \not\equiv W$. Z Tálesovej vety vyplýva, že body U, V ležia na kružnici k opísanej nad úsečkou XW ako priemerom. Podľa vety o mocnosti bodu ku kružnici (dodatok D) a definície 6a. je $r^2 = \varepsilon(SU).\varepsilon(SX) = \varepsilon(SV).\varepsilon(SW)$, tiež $y \perp SW$. Preto je $p(W) \equiv y$, teda $W \equiv P(y)$, čiže $P(y) \in p(X)$. Implikáciu $X \in y \Rightarrow P(y) \in p(x)$ sme dokázali pre „všeobecný“ prípad. „Špeciálne“ prípady prenecháme čitateľovi — nasledujúca úloha. Dokážeme ešte opačnú implikáciu. Ak totiž platí $X \in y \Rightarrow P(y) \in p(X)$, potom je tiež $P(y) \in p(X) \Rightarrow P[p(X)] \in p[P(y)]$ tj. $X \in y$.

Úloha 23. Dokončite dôkaz vety 2.

Úloha 24. Pomocou vety 2. je možné podať konštrukciu poláry p(M) aj v prípade, že M leží vo vnútri h a konštrukciu pólu P(m) priamky m pre ktorú $h \cap m \equiv \emptyset$. Nájdite túto konštrukciu.

Dokončili sme prípravné práce. Odteraz budeme písať zase predsymboly e- a l-. Symbol $\perp$ značí výlučne e-kolmosť.

Definícia 7. l-Priamky m, n nazveme l-*kolmé* práve keď $P(\bar{m}) \in \bar{n}$, alebo (čo je s týmto vzťahom ekvivalentné) $P(\bar{n}) \in \bar{m}$. Značíme $m \top n$. Povieme že veľkosť l-uhla l-priamok m, n je $\frac{\pi}{2}$.

Úloha 25. Nech $m \top n$ sú l-priamky. Potom, m n sú rôznobežky. Dokážte.

Úloha 26. Koľko spoločných l-kolmíc majú dve l-priamky $m \not\equiv n$?

Úloha 27. Dokážte, že neexistuje l-štvoruholník, ktorého všetky štyri l-uhly majú veľkosť $\frac{\pi}{2}$. (Pozri výrok $\mathbf{U}_2$ z článku 3.1.).

Príklad 1. Pre l-priamky $p \top q$ platí $p \perp q$ práve keď aspoň jedna z nich prechádza l-bodom S. Dokážte.

Riešenie. Nech p je l-priamka neidúca l-bodom S. Z podmienky $p \top q$ vyplýva $P(\bar{p}) \in \bar{q}$. Zo všetkých e-priamok x idúcich bodom $P(\bar{p})$ jedine jedna je e-kolmá na p a to tá, ktorá prechádza S, teda z $p \perp q$, $S \notin p$ vyplýva $S \in q$. Nech naopak $S \in q$ potom $P(q) \in p$ tj. $p \perp q$.

Úloha 28. Čo vieme povedať z euklidovského hľadiska o l-priamkách p, q, ak ich jediná spoločná l-kolmica prechádza bodom S.

Úloha 29. Nech m, n sú súbežky, pričom každá z nich je rozbežná s l-priamkou q. Zistite vzájomnú polohu l-priamok a, b definovaných vzťahmi $m \top a \top q \top b \top n$.

3.4. Miera úsečky v modeli B

l-Mieru (l-dĺžku) l-úsečky AB budeme definovať spôsobom s ktorým sa čitateľ doteraz pravdepodobne nestretol. Táto definícia však nie je vymyslená, ale zákonite odvodená spôsobom s ktorým čitateľa oboznámiť nemôžeme. Vyžaduje hlbšie vedomosti z geometrie. Začneme definíciou.

Definícia 8. Nech AB je l-úsečka a U, V a-body l-priamky AB. Číslo

$$\lambda (AB) = \left| \log_2 \frac{\varepsilon(AV).\varepsilon(BU)}{\varepsilon(AU).\varepsilon(BV)} \right| \tag{8}$$

kde $\varepsilon(XY)$ je e-miera (e-dĺžka) e-úsečky XY, nazveme l-*mierou* (l-*dĺžkou*) l-*úsečka* AB.

Poznámka 3. Pretože A je l-bod a V je a-bod je nutne $A \not\equiv V$, teda $\varepsilon(AV)$ je kladné. Rovnako čísla $\varepsilon(BU)$, $\varepsilon(AU)$, $\varepsilon(BV)$ sú kladné, preto výraz (8) má zmysel. Fakt, že použitý logaritmus má základ 2 je nepodstatný. Tento základ volíme hlavne kvôli zjednodušeniu niktorých konštrukcií. Vo väčšine literatúry sa vo vzorci (8) berie tzv. prirodzený logaritmus, ktorého základ je číslo e = 2,71. ... Význam tejto voľby vystúpi pri hlbšom, hlavne analytickom štúdiu l-geometrie.

Dohovor 5. V ďalšom texte symbol log značí vždy $\log_2$.

Veta 3. Nech A, B, C sú l-body ležiace na l-priamke p, potom platí:

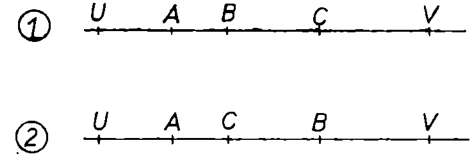
I. $\lambda(AB) \geqq 0$ pričom $\lambda(AB) = 0 \Leftrightarrow A \equiv B$,

II. $\lambda(AB) = \lambda(BA)$,

III. $\lambda(AB) + \lambda(BC) \geqq \lambda(AC)$, pričom rovnosť nastáva práve keď l-bod B patrí l-úsečke AC. (Obr. 8.)

Dôkaz. Prvá časť tvrdenia I. je evidentná. Rovnosť $\lambda(AB) = 0$ platí práve vtedy, ak výraz v (8) z ktorého sa berie logaritmus je rovný 1 tj.

$$\varepsilon(AV).\varepsilon(BU) = \varepsilon(AU).\varepsilon(BV).$$



Obr. 8

Je zrejmé, že posledná rovnosť je splnená práve keď $A \equiv B$. Tým je dokázané tvrdenie I. Zámenou l-bodov A, B v (8) zmení sa výraz stojaci v absolutnej hodnote len čo do znamienka, teda II. platí. K dôkazu III. vyšetríme dva prípady: 1. l-Bod B leží medzi l-bodmi A a C, 2. l-Bod C leží medzi l-bodmi A a B. Prípad splynutia ktorýchkoľvek z l-bodov A, B, C je triviálny. V oboch prípadoch môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že l-bod A leží medzi U a B. V prípade 1. je

$$\lambda(AB) + \lambda(BC) = \log \frac{\varepsilon(AV).\varepsilon(BU)}{\varepsilon(AU).\varepsilon(BV)} +$$

$$+ \log \frac{\varepsilon(BV).\varepsilon(CU)}{\varepsilon(BU).\varepsilon(CV)} = \log \frac{\varepsilon(AV).\varepsilon(BU).\varepsilon(BV).\varepsilon(CU)}{\varepsilon(AU).\varepsilon(BV).\varepsilon(BU).\varepsilon(CV)} =$$

$$= \log \frac{\varepsilon(AV).\varepsilon(CU)}{\varepsilon(AU).\varepsilon(CV)} = \lambda(AC).$$

(Boli sme oprávnení vypustiť absolutné hodnoty?)
V prípade 2. použijeme už dokázaného vzťahu pri vymene-

ných l-bodoch B, C, teda $\lambda(AC) + \lambda(CB) = \lambda(AB)$, odkiaľ $\lambda(AB) + \lambda(BC) = \lambda(AC) + \lambda(CB) + \lambda(BC) < \lambda(AC)$, lebo $\lambda(CB) = \lambda(BC) > 0$ podľa I., II.

Úloha 30. Určite množinu l-bodov X, pre ktoré platí $\lambda(SX) = a$. Ako treba voliť číslo a, aby do tejto množiny patril aspoň jeden l-bod M pre ktorý $2\,\varepsilon(SM) = r$; r je l-polomer e-kružnice h.

Úloha 31. Nech A je l-bod, U je a-bod. Na l-polpriamke AU nájdite l-bod X tak, aby $\lambda(AX) = 1$. Dokážte existenciu a jednoznačnosť l-bodu X a popíšte jeho euklidovskú konštrukciu.

Úloha 32. Nech $A \neq B$ sú l-body a U, V a-body l-priamky AB volené tak, že A leží medzi U a B. Označme $\varepsilon(AU) = a$, $\varepsilon(BV) = b$, $\varepsilon(AV) = v$, $\varepsilon(BU) = u$. Nech $u \neq v$ a M je l-bod l-úsečky AB pre ktorý $x = \varepsilon(AM) = \frac{\sqrt{a\,v}}{v-u} \cdot (\sqrt{ub} - \sqrt{av})$. Dokážte, že M existuje.

Úloha 33. Dokážte, že l-bod M z úlohy 32. je l-stred l-úsečky AB tj. $\lambda(AM) = \lambda(BM)$.

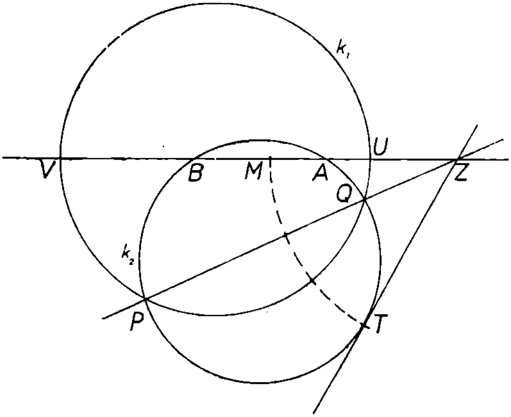
Veta 4. Nech $A \neq B$ sú l-body a U, V a-body l-priamky AB. l-Stred l-úsečky AB nájdeme touto konštrukciou:

1. Ak je $\varepsilon(UA) = \varepsilon(BV)$ potom M zostrojíme ako e-stred e-úsečky AB.

2. Ak je $\varepsilon(UA) \neq \varepsilon(BV)$ potom volíme pomocné e-kružnice k_1 a k_2 tak, že UV je e-priemer k_1, $A \in k_2$, $B \in k_2$ a k_1 pretne k_2 v e-bodoch P, Q.

Nech Z je e-priesečník e-priamok AB a PQ. Nech T je dotykový e-bod e-dotyčnice vedenej e-bodom Z ku k_2 (resp. ku k_1), potom hľadaný l-stred M leží na e-kružnici z e-stredu Z idúcej e-bodom T. (Obr. 9.)

Dôkaz. Nech symboly: a, b, d, u, v značia to čo v úlohách 32. a 33. Prípad 1. je zrejmý z e-súmernosti obrázku podľa e-priamky idúcej l-bodom S e-kolmo na AB. V prípade 2. si najprv uvedomíme, že spojnica e-stredov e-kružníc k_1, k_2 nie je e-kolmá na e-priamku AB, preto e-bod Z existuje. Mocnosť e-bodu Z ku k_1 a k_2 je tá istá, teda $\varepsilon(ZA).\varepsilon(ZB) = \varepsilon(ZU).\varepsilon(ZV)$. Označme (za predpo-



Obr. 9

kladu, že U leží medzi A a Z) $\varepsilon(UZ) = z$, potom horná rovnosť sa dá písať v tvare $(z + a)\cdot(z + u) = z\cdot(z + a + v)$ odkiaľ

$$z = \frac{au}{v - u} \text{ (podľa predpokladu } u \neq v).$$

Z vety o mocnosti e-bodu ku e-kružnici vyplýva

$$\varepsilon^2(ZT) = \left(z + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = z.(z + d).$$

Tvrdenie vety bude dokázané, ak ukážeme, že pre l-bod M popísaný v texte vety platí $\varepsilon(AM) = x$, kde x bolo zadané v úlohe 32. Treba teda dokázať, že

$$\sqrt{z\cdot(z + d)} - (a + z) = x.$$

Výraz na ľavej strane upravíme. Za z dosadíme $\dfrac{au}{v - u}$, za d dosadíme $a + v$. Po úprave dostaneme

$$\frac{1}{v - u}\cdot(\sqrt{auv}\cdot\sqrt{a + v - u} - av) = \frac{\sqrt{av}}{v - u}\cdot(\sqrt{ub} - \sqrt{av}).$$

Poznámka 4. Z úlohy 31. vyplýva zaujímavý fakt, ktorý v e-rovine neplatí. V l-rovine je à priori daná jednotková dĺžka. Tento zdanlivo pozitívny fakt nesie množstvo obtiaží. Napr. delenie l-úsečky na n zhodných častí je úloha v e-rovine jednoduchá, zatiaľ čo v l-rovine značne obtiažna. Tým pádom je obtiažne napr. zostrojiť „l-meritko“; konštruovať meritko s vyznačením napr. desatín ešte nevieme. Čitateľa ešte naučíme prenášať l-úsečky v l-rovine.

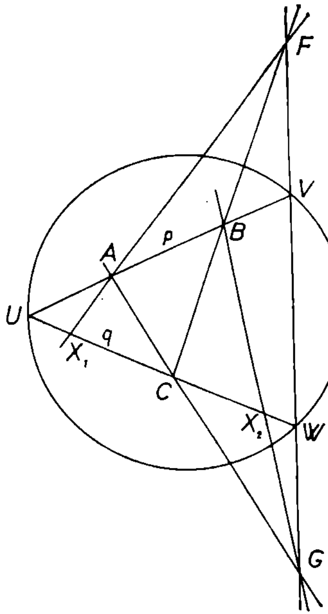
Úloha 34. Nech p, q sú l-priamky pre ktoré $S \in p$, $\bar{p} \parallel \bar{q}$. Nech Z je e-priesečník e-priamok $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, kde $p' = \{P_1, P_2\}$, $q' = \{Q_1, Q_2\}$. Nech $R \not\equiv S$ je l-bod l-priamky p a M, N l- body na q také, že $Z \in \overline{SM}$, $Z \in \overline{RN}$, potom $\lambda(SR) = \lambda(MN)$. Dokážte.

Dohovor 6. Nech A je l-bod, p l-priamka, q l-kolmica z A ku p a $p \cap q \equiv P$. l-Bod P nazveme l-*priemetom* l-*bodu* A do l-*priamky* p, číslo $\lambda(AP)$ nazveme l-*vzdialenosťou* l-*bodu* A od l-*priamky* p a označíme tiež $\lambda(Ap)$.

Úloha 35. (Pozri dôkaz Claviusa v kap. 2.) Dokážte, že v modeli B nasledujúce tvrdenie neplatí: Nech A, B, C sú l-body ležiace v jednej l-polrovine vyťatej l-priamkou p.

Nech $\lambda(Ap) = \lambda(Bp) = \lambda(Cp)$, potom C leží na l-priamke AB.

Prenášať l-úsečky naučíme čitateľa v nasledujúcich úlohách. Ich zvládnutie predpokladá znalosť Pappovej vety, ktorú si čitateľ môže naštudovať v dodatku F.



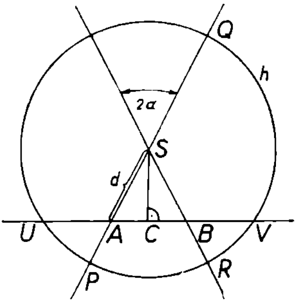
Obr. 10

Úloha 36. Nech p, q sú súbežky a U ich spoločný a-bod. Nech A, $B \in p$ a $C \in q$. Nájdite všetky l-body $X \in q$ tak, že $\lambda(AB) = \lambda(CX)$.

Úloha 37. Nech p, q sú rôzne l-priamky, A, $B \in p$,

$C \in q$. Nájdite všetky l-body $X \in q$ tak, že $\lambda(AB) = \lambda(CX)$.

Úloha 38. Na l-priamke p sú dané tri l-body A, B, C, $A \neq C$. Nájdite l-bod X ležiaci na l-polpriamke CA tak, že $\lambda(AB) = \lambda(CX)$.



Obr. 11

Úloha 39. Nech $P \neq R$ sú a-body, S e-stred e-kružnice h. Nech $2\,\alpha$ je euklidovská miera e-uhla $\sphericalangle\, PSR$. Nájdite l-body A, B na l-polpriamkach SP, SR tak, aby l-trojuholník ABS bol l-rovnostranný. Určite riešiteľnosť. Riešte výpočtom. (Obr. 11.)

Úloha 40. Overte výpočtom nasledovnú konštrukciu l-bodu A $\left(\text{za predpokladu } 0 < 2\,\alpha < \frac{\pi}{3}\right)$ z predošlej úlohy. (Označenie volíme ako v predošlej úlohe – pozri obr. 11.) e-Rovnobežka s $\overline{SR}$ vedená a-bodom Q pretne h v a-bode $Q' \neq Q$; e-úsečku QQ' prenesieme na e-polpriamku QS. Označme L ten e-bod e-polpriamky QS pre ktorý $\varepsilon(QQ') = \varepsilon(QL)$. Z podmienky $0 < 2\,\alpha < \frac{\pi}{3}$ vyplýva, že L leží medzi P a S. e-Bod K zostrojíme ako vrchol e-pravouhlého trojuholníka KQL s preponou QL a výškou SK. Na e-polpriamke SB nájdeme e-bod M pre ktorý $\varepsilon(SK) = \varepsilon(SM)$. Potom $AM \perp BS$.

3.5. Model $\mathfrak{p}$ (Poincaré)

Symbolické predpony l- a e- používame rovnako ako v prípade modelu $\mathfrak{B}$ na ktorý sa budeme odvolávať. Čitateľovi doporučujeme pozrieť model S_5 z príkladu 1.3. Znovu pracujeme v pevnej e-rovine.

Dohovor 7. Nech je v e-rovine daná pevná priamka h^* vytínajúca v e-rovine dve otvorené e-polroviny, ktoré (uvažované ako množiny e-bodov) označíme λ a μ. Nech H je bod neležiaci v uvažovanej e-rovine. Označme $h \equiv h^* \cup \{H\}$. Bod H budeme definitoricky považovať za a-bod. Pre každú e-priamku p položíme definitoricky $p \perp h^* \Leftrightarrow H \in p$. Táto symbolika je záväzná pre celý článok 3.5. až 3.7.

Definícia 9. Pojmy l-*bod*, a-*bod*, i-*bod*, l-*rovina*, *abolut* a *ideál* l-*roviny* λ sú dané definíciou 1.

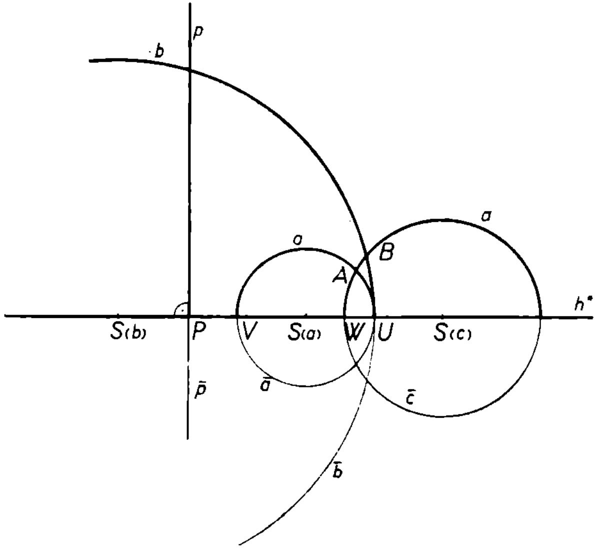
Definícia 10. Nech p je e-kružnica resp. e-priamka e-kolmá na e-priamku h^*. Potom množinu l-bodov $\lambda \cap p$ nazveme l-*priamkou (prvého resp. druhého druhu)*.*)

Dohovor 8. Podobne ako v modeli $\mathfrak{B}$ aj tu budeme l-priamky označovať buď malými latinskými písmenami, alebo dvojicou veľkých latinských písmien, pokiaľ oni značia dva e-body nie súmerné podľa h^*. Pruh aj čiarka majú význam ako v dohovore 2. čl. 3.2. Podľa obrázku 12. je teda $\bar{p}$ e-priamka obsahujúca naviac e-bod H, p otvorená e-pol-

*) Hovoríme, že e-kružnica k so stredom S je e-kolmá na e-priamku p, ak $S \in p$.

priamka, $p' \equiv \{H, P\}$, $\bar{a}$ je e-kružnica, $a \subset \bar{a}$, a je otvorená e-polkružnica, $a' \equiv \{V, U\}$. Ak a je l-priamka prvého druhu, potom e-stred e-kružnice $\bar{a}$ označíme $S(a)$.

Úloha 41. Nech X, Y sú dva rôzne e-body. Potom exi-



Obr. 12

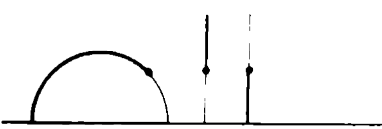
stuje l-priamka x tak, že $X \in \bar{x}$ a $Y \in \bar{x}$. Dokážte. Existuje jediná x? Platí obdobné tvrdenie v modeli B?

Úloha 42. Pri označení obrázku 12. určite čo značí a) $b \cap \bar{c}$, b) $\bar{b} \cap \bar{c}$, c) $S(p)$, d) $S(a)S(c)$.

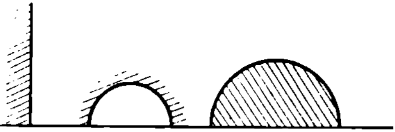
Úloha 43. Koľkoprvková je množina p', ak p je l-priamka? Čo značí tvrdenie $H \in p'$?

Úloha 44. Platí tvrdenie vety 1. z článku 3. 2. aj pre model p? Platí výrok **L** z 3. 1. aj pre model p?

Definícia 11. Pojmy l-*rôznobežky*, l-*rovnobežky*, *rozbežky* a *súbežky* (a gramatické obmeny týchto termínov) sú dané definíciou 3. článku 3. 2. Symbol || označuje, ako aj v modeli B výlučne e-rovnobežnosť.



Obr. 13a



Obr. 13b

Úloha 45. Vyriešte úlohy 12.—14. článku 3. 2. v rámci modelu p.

Dohovor 9. Povieme, že l-bod A leží medzi l-bodmi B a C ak

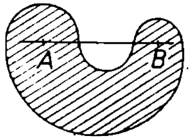
1. l-body A, B, C ležia na jednej l-priamke m a
2. e-bod A leží medzi e-bodmi B a C v zmysle $\mathfrak{E}$ v prípade, že m je druhého druhu; e-úsečka $AS(m)$ pretne e-priamku BC v prípade, že m je prvého druhu.

Dodajme ešte, že dohovor platí aj vtedy, ak náhodou $B \in h^*$, prípadne $C \in h^*$. Pre a-bod H dodefinujme: Ak AB je l-priamka druhého druhu ($A \not\equiv B$ l-body) a $(AB)' \equiv \equiv \{H, P\}$, potom povieme, že l-bod A leží medzi a-bodmi H a P a naviac l-bod A leží medzi l-bodom B a a-bodom H práve vtedy, keď A neleží medzi B a P. Netreba písať „l-medzi" a „e-medzi", lebo z textu bude vždy jasné či ide o l-body, alebo e-body. Obtiaže s pojmom „medzi" v modeli B neboli.

Definícia 12. Pojmy l-*polpriamka*, l-*úsečka*, l-*polrovina*, l-*uhol*, *nulový a priamy* l-*uhol*, ako aj *vnútrajšok*, *otvorenosť a uzavretosť* týchto útvarov sú dané definíciou 4. článku 3.2.

Úloha 46. Nech a, b sú dve rôzne l-priamky. Určite počet n l-priamok súbežných s a aj b.

Úloha 47. Koľko rôznych (z hľadiska e-roviny) a) l-polpriamok, b) l-polrovín existuje v modeli $\mathfrak{p}$? Načrtnite obrázky.



Obr. 14

Veľmi dôležitým geometrickým pojmom je konvexnosť. Pripomenieme čitateľovi, že množina M sa nazýva konvexná, ak spolu s každými dvoma bodmi A, B obsahuje celú úsečku AB. Na obrázku 14. je nakreslená nekonvexná množina v euklidovskej rovine. Kruh, vnútrajšok štvorca, či polpriamka sú príklady konvexnej množiny.

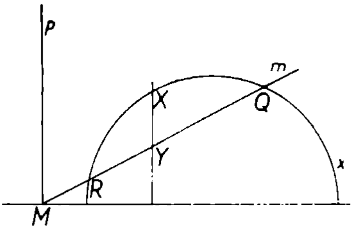
Skôr ako budete čítať ďalej, pokúste sa zistiť, či aj l-polpriamka v modeli $\mathfrak{p}$ je konvexná množina.

Odpoveď na poslednú otázku je problematická, pretože pojem „konvexná množina" bol hore zavedený nie dosť presne. Ku zavedeniu pojmu konvexity je totiž nevyhnutné určiť pojem úsečka a z horného textu nijako nevyplýva či sa jedná o e-úsečku, alebo l-úsečku. Podľa toho ktorý z týchto termínov v hornej definícii použijeme, budeme hovoriť o e-*konvexite* (tomu vyhovuje napríklad obr. 14.) a l-*konvexite*. Teda l-priamka prvého druhu je l-konvexná, ale nie je e-konvexná.

Definícia 13. Povieme, že množina M e-bodov je e-*konvexná*, ak z faktu $A \in$ M, $B \in$ M vyplýva, že e-úsečka AB patrí do M. Analogicky definujeme l-*konvexitu*, ak v hornej definícii všetky predsymboly e- nahradíme predsymbolmi l-.

Veta 5. l-Polrovina, l-polpriamka, l-uhol a l-úsečka, ako aj vnútrajšky týchto útvarov sú l-konvexné. Prienik dvoch l-konvexných množín je množina l-konvexná.

Dôkaz. Nech p je l-priamka a $Q \notin p$ l-bod. Nech $X \not\equiv Y$



Obr. 15

sú l-body l-polroviny pQ a q l-priamka XY. Bez ohľadu na to či e-útvary p, q sú e-priamky, e-kružnice, platí, že v prípade keď sa p a q pretnú, nemôžu byť e-body X, Y e-útvarom p oddelené. l-Konvexita l-polpriamky a l-úsečky je triviálna.

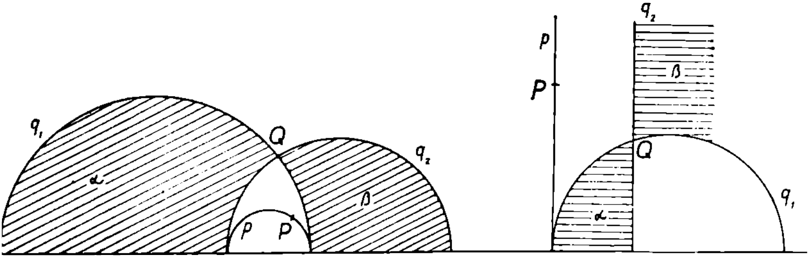
Nech sú ďalej M a N konvexné množiny a nech l-body $X \not\equiv Y$ náležia množine $\mathsf{M} \cap \mathsf{N}$. Pretože l-úsečka XY podľa definície l-konvexity náleží do M aj N, náleží celá tiež do $\mathsf{M} \cap \mathsf{N}$.

Z l-konvexity l-polroviny vyplýva podľa posledného aj l-konvexita l-uhla a veta je dokázaná.

Úloha 48. V modeli $\mathfrak{p}$ nájdite príklad množiny M, ktorá a) je aj l-konvexná, aj e-konvexná, b) je l-konvexná a nie je e-konvexná, c) je e-konvexná a nie je l-konvexná, d) nie je ani e-konvexná ani l-konvexná.

Úloha 49. l-Konvexnú množinu $\mathsf{N} \subset \lambda$ nazývame l-*konvexným obalom danej množiny* $\mathsf{M} \subset \lambda$ ak 1. $\mathsf{M} \subset \mathsf{N}$ a 2. pre každú l-konvexnú množinu N_1 platí $\mathsf{M} \subset \mathsf{N}_1 \Rightarrow \mathsf{N} \subset \mathsf{N}_1$.

l-Konvexný obal množiny M značíme l-K(M). Určite l-konvexný obal l-K(M) množiny M skladajúcej sa z l-polpriamok AB a AC, pričom A, B, C sú tri l-body neležiace na l-priamke.



Obr. 16

Úloha 50. Nech m je e-priamka majúca neprázdny prienik s λ. Určite l-konvexný obal množiny $m \cap \lambda$. Preveďte diskusiu.

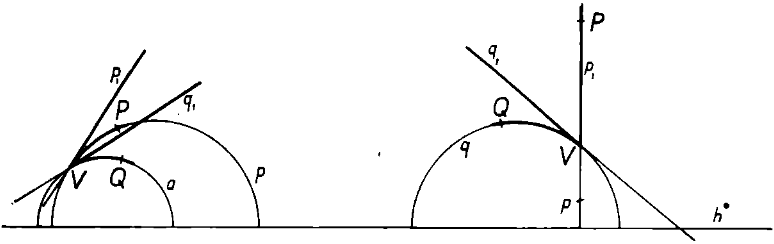
Úloha 51. Nech p je l-priamka a $Q \notin p$ l-bod. Pomocou l-uhla popíšte množinu M tých l-bodov X, pre ktoré sú l-priamky QX a p l-rovnobežkami. Je M l-konvexná?

3.6. Miera uhla v modeli $\mathfrak{p}$

V modeli $\mathfrak{B}$ sme síce poznali kolmosť, ale inak l-mieru (veľkosť) l-uhla sme vedeli určiť len v tom veľmi špeciálnom prípade, keď jeho l-vrchol splynul s e-stredom e-kružnice h.V modeli $\mathfrak{p}$ budeme vedieť určiť l-mieru ľubovoľného l-uhla. Čitateľ si prečíta teraz časť B z dodatku, kde je definovaný pojem e-*polodotyčnice* e-*kruhového oblúka.*

Definícia 14. Nech je daný l-uhol $\sphericalangle\, PVQ$. Symbolom

p_1 resp. q_1 označíme e-polpriamku, ktorá je: 1. e-polodotyčnicou v e-bode V e-kruhového oblúka VP resp. VQ, ak je l-priamka VP resp. VQ prvého druhu, 2. totožná s e-polpriamkou VP resp. VQ, ak je l-priamka VP resp. VQ



Obr. 17.

druhého druhu. l-Mieru l-uhla $\sphericalangle PVQ$ označíme $\lambda(\sphericalangle PVQ)$ a definujeme predpisom

$$\lambda(\sphericalangle PVQ) = \varepsilon(\sphericalangle p_1, q_1)$$

pričom toto číslo (písané v stupňovej miere) volíme vždy v intervale [0°, 180°]. Obr. 17.

Poznámka 5. Zatiaľ čo v e-rovine môžeme definovať aj mieru e-uhla dvoch e-rovnobežiek (ako nulu), nie je toto v l-rovine vôbec možné. V l-rovine sa o miere dvoch l-priamok dá hovoriť iba vtedy, ak sú tieto buď totožné, alebo l-rôznobežné.

Dohovor 10. Nech a, b sú dve l-priamky pretínajúce sa v l-bode V. Nech a_1, b_1 sú e-dotyčnice v bode V e-kružníc v poradí $\bar{a}$, $\bar{b}$ — prípadne $a_1 \equiv \bar{a}$, alebo $b_1 \equiv \bar{b}$, ak sú a, alebo b e-polpriamky. l-*Mierou* l- *uhla* l-*priamok* a, b rozumieme menšie z čísiel $\varepsilon(\sphericalangle a'_1, b'_1)$, $\varepsilon(\sphericalangle a'_1, b''_1)$, po prípade číslo $\frac{1}{2}\pi$, ak $\varepsilon(\sphericalangle a'_1, b'_1) = \varepsilon(\sphericalangle a'_1, b''_1)$. Pritom a'_1 je jedna (ktorákoľvek) z e-polpriamok so začiatkom vo V a ležiaca v a_1 a b'_1, b''_1 sú opačné e-polpriamky na ktoré e-bod V delí e-priamku b_1. Ačkoľvek pojem „l-uhol l-priamok a, b“ zavedený nebol a je teda bez zmyslu, je „l-miera l-uhla l-rôznobežiek a, b“ pojem majúci zmysel. Posledný termín označuje číslo, ktoré značíme $\lambda(\sphericalangle a, b)$. Konečne položíme $\lambda(\sphericalangle a, a) = 0°$.

Príklad 2. Nech a je l-priamka a M l-bod. Potom existuje a to jediná l- priamka m l-kolmá na a idúca l-bodom M. l-Priamky a, m sú l-rôznobežky. Dokážte.

Riešenie. Nech najprv je a prvého druhu, $M \notin a$. Existuje jediný e-bod N ležiaci na e-polpriamke $S(a)M$ tak, že číslo $\varepsilon[S(a)M] \cdot \varepsilon[S(a)N]$ je rovné druhej mocnine e-polomeru e-kružnice a. Pretože e-body $M \not\equiv N$ sú l-bodmi, nemôžu byť e-súmerné ku h^* a teda existuje jediná l-priamka $m \equiv MN$. Bez ohľadu na to, či m je prvého, alebo druhého druhu je táto jedinou hľadanou l-kolmicou na a. V prípade, že a je druhého druhu, $a' = \{A, H\}$ je m daná podmienkou $S(m) \equiv A$ znovu jedinou l-kolmicou na a. Prípad $M \in a$, ktorý sme doteraz neuvažovali je zrejmý.

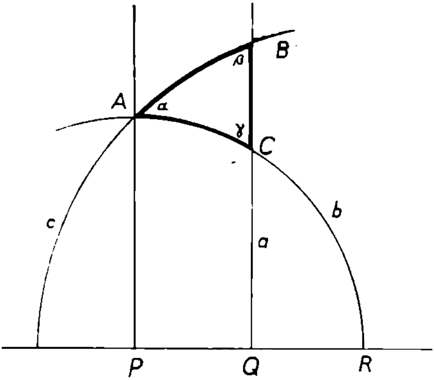
Poznámka 6. Pojmy l-*priemet* l-*bodu* A *do* l-*priamky* p, ako aj l-*vzdialenosť* l-*bodu* A *od* l-*priamky* p zavádzame rovnako ako v dohovore 6. čl. 3.4.

Úloha 52. Pokúste sa definovať pojmy „l-os l-uhla“ a „l-os dvoch l-rôznobežiek“. Definície v ďalšom texte užívame.

Úloha 53. Ak o_1, o_2 sú l-osi l-rôznobežiek a, b, čo možno povedať o $\lambda(\sphericalangle o_1, o_2)$?

Úloha 54. Nech l-body A, B, C neležia na l-priamke. Prienik l-polrovín ABC, BCA a CAB nazývame l-*troj-*

uholníkom ABC a l-uhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ l-*uhlami* l-*trojuholníka* ABC. Značíme ich ako v e-geometrii $\sphericalangle \alpha$, $\sphericalangle \beta$, $\sphericalangle \gamma$. Narysujte l-trojuholník ABC a uhlomerom zistite číslo $\lambda(\sphericalangle \alpha) + \lambda(\sphericalangle \beta) + \lambda(\sphericalangle \gamma)$ v oblúkovej miere.



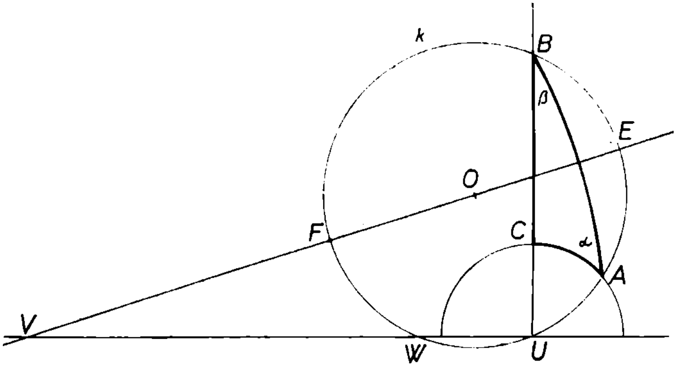
Obr. 18

Úloha 55. Na obrázku 18. je nakreslený l-trojuholník ABC, pričom $S(b) \equiv P$, $S(c) \equiv R$ a AP aj BC sú l-priamky druhého druhu. Ďalej je Q e-stred e-úsečky PR. S presnosťou na $1'$ určite l-súčet uhlov l-trojuholníka tj. číslo $\lambda(\sphericalangle \alpha) + \lambda(\sphericalangle \beta) + \lambda(\sphericalangle \gamma)$.

Úloha 56. Na obrázku 19. je daný l-trojuholník, pričom BC je l-priamka druhého druhu a $\lambda(\sphericalangle BCA) = 90°$. Dokážte, že potom $\lambda(\sphericalangle \alpha) + \lambda(\sphericalangle \beta) < 90°$. Ku dôkazu použite pomocnú e-kružnicu k idúcu e-bodmi A, B, U, kde $U \in (BC)'$.

Veta 6. Neexistuje l-trojuholník ABC tak, aby $\lambda(\sphericalangle \alpha) = \lambda(\sphericalangle \beta) = \lambda(\sphericalangle \gamma) = 60°$.

Dôkaz. Predpokladajme, že ABC je l-trojuholník, ktorého všetky tri l-uhly majú l-mieru rovnú 60°. Nech a, b, c sú l-priamky v poradí BC, AC, AB a predpokladajme najprv, že všetky tri sú prvého druhu. Označme ešte U, V, W e-stredy a u, v, w e-veľkosti e-polomerov e-kružníc v po-



Obr. 19

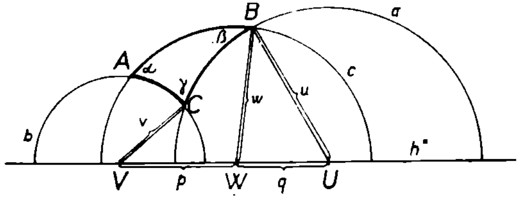
radí $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Pretože e-body U, V, W sú rôzne, leží nutne jeden z nich medzi ostatnými dvoma. Nech (pozri obrázok 20.) napríklad W leží medzi U a V. Potom je $\varepsilon(\sphericalangle VAW) = \lambda(\sphericalangle \alpha) = 60°$, $\varepsilon(\sphericalangle UBW) = \lambda(\sphericalangle \beta) = 60°$, $\varepsilon(\sphericalangle VCU) = 180° - \lambda(\sphericalangle ACB) = 120°$. Posledná relácia vyplýva tiež z opačnej orientácie trojíc VCA a UCB (pozri dodatok C). Na každý z e-trojuholníkov VAW, WBU a UCV použijeme kosínovu vetu. Pri označení $\varepsilon(UV) = r$, $\varepsilon(UW) = q$, $\varepsilon(VW) = p$ platí

$$\begin{aligned} r^2 &= u^2 + v^2 + uv \\ p^2 &= v^2 + w^2 - vw \\ q^2 &= u^2 + w^2 - uw \end{aligned} \qquad (9)$$

a zrejme tiež $r = p + q$. Ak od prvej z uvedených rovníc odčítame druhú a tretiu, obdržíme

$$2pq = r^2 - p^2 - q^2 = uv + uw + vw - 2w^2.$$

Štvorec pravej strany poslednej rovnice je teda rovný štvornásobku súčinu čísiel p^2 a q^2 tj. číslu $4(v^2 + w^2 -$



Obr. 20

$- vw).(u^2 + w^2 - uw)$. Táto relácia sa dá upraviť na tvar

$$3(uv - uw - vw)^2 = 0$$

odkiaľ

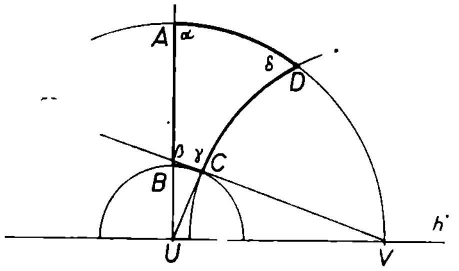
$$w = \frac{uv}{u+v}. \tag{10}$$

Po dosadení zo vzťahu (10) do druhej a tretej rovnice sústavy (9) obdržíme rovnosti

$$p = \frac{v}{u+v}r, \quad q = \frac{u}{u+v}r. \tag{11}$$

Ukázali sme, že ak l-trojuholník ABC, ktorého všetky uhly majú l-mieru rovnú 60° existuje, pričom jeho l-strany sú e-kružnice, potom platia vzťahy (9), (10) a (11). Teraz ukážeme, že zo vzťahov (9), (10) a (11) vyplýva, že popísaný l-trojuholník neexistuje. Stačí teda ukázať $\varepsilon(WC) = w$. Označme $\varepsilon(WC) = x$ a $\varepsilon(\sphericalangle CVU) = \varphi$. Podľa kosínovej vety je

$x^2 = v^2 + p^2 - 2vp\cos\varphi$ pre e-trojuholník CVW' a
$u^2 = v^2 + r^2 - 2vr\cos\varphi$ pre e-trojuholník CVU.



Obr. 21

Po vylúčení člena $\cos\varphi$ z obidvoch rovníc dostaneme po úprave rovnicu

$$x^2 = v^2 \frac{q}{r} + u^2 \frac{p}{r} - pq.$$

Poslednú rovnicu upravíme postupne pomocou (11), (9) a (10):

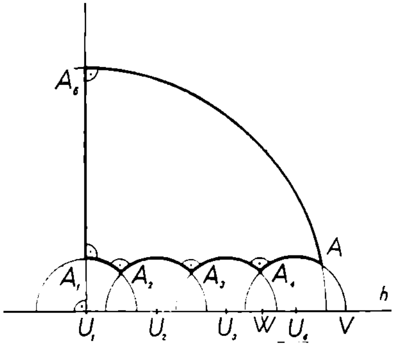
$$x^2 = \frac{uv^2}{u+v} + \frac{vu^2}{u+v} - \frac{uv}{(u+v)^2} r^2 = uv -$$

$$- \frac{uv}{(u+v)^2} (u^2 + v^2 + uv) = uv - \frac{uv}{(u+v)^2} [(u +$$

$$+ v)^2 - uv] = \left(\frac{uv}{u+v}\right)^2 = w^2.$$

Tým je dôkaz prevedený pre prípad, že a, b, c sú l-priamky prvého druhu. Ostáva vyšetriť ešte prípad, keď jedna a len jedna z týchto l-priamok je druhého druhu. To prenechávame čitateľovi (úloha 57).

Úloha 57. Nech pre l-trojuholník ABC, keď l-priamka AC je druhého druhu, platí $\lambda(\sphericalangle \alpha) = \lambda(\sphericalangle \beta) = \lambda(\sphericalangle \gamma) = \varphi$. Potom nutne $\varphi < 60°$. Poznamenajme, že úloha tvrdí viac, ako bolo požadované v dôkaze poslednej vety.



Obr. 22

Úloha 58. Výpočtom znovu dokážte platnosť tvrdenia vysloveného v úlohe 56.

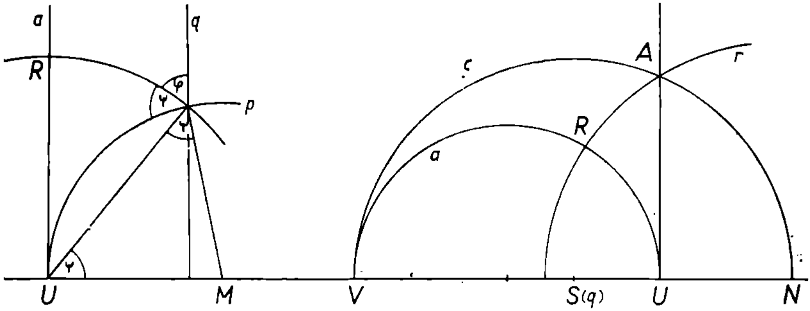
Úloha 59. Na obrázku 21. je nakreslený l-štvoruholník $ABCD$, pričom l-miery l-uhlov $\sphericalangle \alpha, \sphericalangle \beta, \sphericalangle \gamma$ sú $\frac{\pi}{2}$. (Taký l-štvoruholník menujeme l-trojpravouholník). Ďalej je AB l-priamka druhého druhu s absolutným bodom $U \in h^*$ a $S(AD) \equiv S(BC) \equiv U$, $S(CD) \equiv V$ je a-bod l-priamky AD. Dokážte $\lambda(\sphericalangle \delta) < \frac{\pi}{2}$!

Úloha 60. Je daný l-šesťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ nasledovných vlastností:

1. Všetky jeho l-strany A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6,

A_6A_1 sú l-priamky prvého druhu, pričom l-miera l-uhlov pri l-vrcholoch A_2, A_3, A_4 a A_5 je 120°.

2. Ak označíme $S(A_i\, A_{i+1}) \equiv U_i$ pre $i = 1, 2, 3, 4, 5$, potom je $\varepsilon\,(U_i\, A_i) = u$ pre $i = 1, \ldots, 5$.



Obr. 23

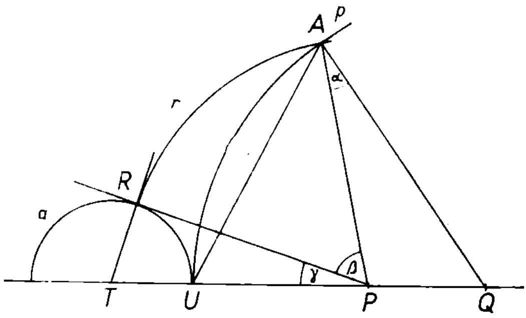
3. $\lambda\,(\sphericalangle\, A_2A_1A_6) = \lambda\,(\sphericalangle\, A_5A_6A_1) = \varphi$.
Určite množinu hodnôt, ktoré môže číslo φ nadobúdať (v uhlovej miere).

Úloha 61. Na obrázku 22. je nakreslený l-šesťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, ktorého 5 l-uhlov je pravých (tj. ich miery sú 90°). Pri označení obrázku je $U_i \equiv S(A_i\, A_{i+1})$, $\varepsilon(U_iA_i) = u$ pre $i = 1, 2, 3, 4$ a A_1A_6 je l-priamka druhého druhu s a-bodom $U_1 \in h^*$. Označme ešte $\varepsilon\,(U_1A_6) = v$. Určite množinu hodnôt, ktoré nadobúda číslo $\lambda\,(\sphericalangle\,\varphi)$, kde $\sphericalangle\,\varphi = \sphericalangle\, A_4A_5A_6$. Ako by podobná situácia vyzerala v e-rovine? Je nakreslený l-šesťuholník l-konvexný?

Úloha 62. Nech p, q sú l-rôznobežky z ktorých každá je súbežná s l-priamkou a. Označme $U \equiv p' \cap a'$, $V \equiv$ $\equiv q' \cap a'$, $A \equiv p \cap q$, $R \equiv a \cap r$, kde r je l-kolmica vedená l-bodom A ku a. Ak aspoň jedna z l-priamok p, q, a

je druhého druhu, potom $\lambda(\sphericalangle UAR) = \lambda(\sphericalangle VAR)$. Dokážte!

Veta 7. Nech l-bod A neleží na l-priamke a. Nech $p \not\equiv q$ sú súbežky s l-priamkou a vedené l-bodom A.



Obr. 24

Označme $a' \cap p' \equiv U$, $a' \cap q' \equiv V$. Nech R je päta l-kolmice r vedenej l-bodom A ku a. Potom $\lambda(\sphericalangle UAR) =$ $= \lambda(\sphericalangle VAR)$. (Obr. 24.)

Dôkaz. Pre špeciálne prípady — kedy niektorá z l-priamok a, p, q je druhého druhu, bolo tvrdenie vety dokázané v úlohe 62. V prípade, že l-kolmica r je l-priamkou druhého druhu vyplýva tvrdenie vety okamžite z e-súmernosti voči r. Nech a, p, q, r sú všetko l-priamky prvého druhu a označme: $M \equiv S(p)$, $L \equiv S(r)$, $N \equiv S(q)$, $T \equiv S(a)$, W e-kolmý priemet e-bodu A na h^*, $u = \varepsilon(TU) =$ $= \varepsilon(TV) = \varepsilon(TR)$, $m = \varepsilon(TM)$, $1 = \varepsilon(TL)$, $n = \varepsilon(TN)$, $w = \varepsilon(TW)$, $v = \varepsilon(AW)$. Nech A leží zvonka e-kružnice $\bar{a}$. Aplikujme Pytagorovu vetu na e-trojuholník MWA. $\varepsilon^2(MW) + \varepsilon^2(AW) = \varepsilon^2(MU)$ tj. $[\varepsilon(TW) - \varepsilon(TM)]^2 + v^2 =$ $= \varepsilon^2(MU)$ čiže $(w - m)^2 + v^2 = (m + u)^2$. Podobne z e-trojuholníkov LWA a NWA získame $(w - l)^2 + v^2 = \varepsilon^2(LA) = \varepsilon^2(LR) = \varepsilon^2(TL) - \varepsilon^2(TR) = l^2 - u^2$ a $(w - n)^2 + v^2 = (n - u)^2$. Ak vylúčime z posledných troch rovníc v, dostaneme rovnice $(m + u)^2 - (w - m)^2 = l^2 - u^2 - (w - l)^2 = (n - u)^2 - (w - n)^2$ čiže $2wm + 2mu + u^2 = 2wl - u^2 = 2wn + u^2 - 2nu$; ďalej z týchto rovníc vylúčime w a dostaneme rovnosť

$$2mn + nu - lm - ln - mu = 0,$$

ktorej je možné dať tvar

$$\frac{(l + u)m}{m + u} = \frac{(l - u)n}{n - u}.$$

Poslednú rovnosť možno upraviť na tvar

$$\frac{-(l - m)^2 + (m + u)^2 + (l^2 - u^2)}{m + u} = \frac{-(n - l)^2 + (n - u)^2 + (l^2 - u^2)}{n - u} \qquad (*)$$

Na e-trojuholníky MAL a NAL aplikujeme kosínovu vetu, pričom označíme $\sqrt{l^2 - u^2}\, cos\,\varepsilon(\sphericalangle MAL) = x$ a $\sqrt{l^2 - u^2}$ $cos\,\varepsilon(\sphericalangle NAL) = y$:

$$(m + u)^2 + (l^2 - u^2) - 2(m + u)x = (l - m)^2,$$
$$(n - u)^2 + (l^2 - u^2) - 2(n - u)y = (n - l)^2.$$

Porovnaním posledných dvoch vzťahov s rovnosťou (*) dostaneme

$$x = y$$

teda $\qquad \varepsilon(\sphericalangle MAL) = \varepsilon(\sphericalangle NAL),$

alebo $\qquad \lambda(\sphericalangle UAR) = \lambda(\sphericalangle VAR)$

čo sme chceli dokázať. Poznamenajme, že v prípade, keď A leží vo vnútri e-kružnice $\bar{a}$ bude poradie a-bodov iné, napríklad U, M, T, W, N, V, L. Na celom dôkaze sa zmenia len niektoré znamienka a preto toto prenechávame čitateľovi. Takýchto prípadov je viac.

3.7. Miera úsečky v modeli $\mathfrak{p}$

Začneme definíciou l-miery (dĺžky) l-úsečky, ktorá je časťou l-priamky druhého druhu. Ukážeme niekoľko jej základných vlastností a pomocou týchto podáme definíciu l-miery ľubovoľnej l-úsečky.

Definícia 15a. Nech A, B sú l-body ležiace na l-priamke druhého druhu p. Označme P ten a-bod l-priamky p, ktorý leží na h^*. l-*Mieru (dĺžku)* l-*úsečky* AB definujeme predpisom

$$\lambda(AB) = |log\varepsilon(AP) - log\varepsilon(BP)| = \left| log \frac{\varepsilon(AP)}{\varepsilon(BP)} \right|. \quad (12)$$

Veta 8. Nech A, B, C sú l-body ležiace na l-priamke druhého druhu p. Potom platí

I. $\lambda(AB) \geqq 0$ a $\lambda(AB) = 0 \Leftrightarrow A \equiv B$,

II. $\lambda(AB) = \lambda(BA)$,

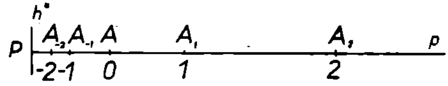
III. $\lambda(AB) + \lambda(BC) \geqq \lambda(AC)$, pričom rovnosť nastáva práve keď l-bod B patrí l-úsečke AC.

Dôkaz. Tvrdenia I. a II. sú zrejmé. Dokážeme tvrdenie III. Do známeho vzťahu $|u + v| \leqq |u| + |v|$ dosadíme $u = log\varepsilon(AP) - log\varepsilon(BP)$, $v = log\varepsilon(BP) - log\varepsilon(CP)$ a získame žiadanú nerovnosť. Rovnosť $|u + v| = |u| + |v|$ nastane práve vtedy, keď je buď $u \geqq 0$ a $v \geqq 0$ tj. $\varepsilon(AP) \geqq \geqq \varepsilon(BP) \geqq \varepsilon(CP)$, alebo $u \leqq 0$ a $v \leqq 0$ tj. $\varepsilon(AP) \leqq \varepsilon(BP) \leqq \leqq \varepsilon(CP)$, čo sme chceli dokázať.

Úloha 63. Daná je l-polpriamka druhého druhu AM

a nezáporné číslo c. Určite koľko navzájom rôznych l-bodov X hovie rovnici $\lambda(AX) = c$.

Úloha 64. Na l-priamke druhého druhu p je daný l-bod A. Určite množinu všetkých l-bodov $X \in p$ pre ktoré $\lambda(AX) = 1$.



Obr. 25

Poznámka 7. Dĺžka 1 je na rozdiel od $\mathfrak{E}$ pevne daná — nedá sa voliť.

Úloha 65. Na l-priamke druhého druhu p je daný l-bod A. Od tohoto bodu ako začiatku vyneste na p l-mierku celočíselných hodnôt.

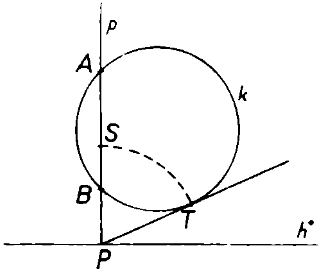
Zatiaľ vieme (euklidovskou konštrukciou = pravítkom a kružítkom) vyniesť na l-priamku prvého druhu celočíselnú l-mierku. Teraz sa naučíme vynášať do takejto l-mierky hodnoty polovičné, štvrtinové, osminové, ...

Príklad 3. Nech $A \not\equiv B$ sú l-body náležiace l-priamke druhého druhu p. Nájdite l-stred S l-úsečky AB, tj. l-bod $S \in p$ pre ktorý $\lambda(AS) = \lambda(BS)$. (Obr. 26.)

Riešenie. Predovšetkým je nutné ukázať, že l-bod S leží medzi l-bodmi A a B. Predpokladajme opak. Nech napríklad l-bod A leží medzi S a B. Potom podľa vety 8. (vlastnosť III.) je $\lambda(AS) + \lambda(AB) = \lambda(SB)$ odkiaľ vzhľadom na rovnosť $\lambda(AS) = \lambda(BS)$ je $\lambda(AB) = 0$ tj. $A \equiv B$ čo je spor s predpokladom. Rovnako dokážeme, že nie je možné, aby B ležal medzi S a A. Preto nutne S leží medzi A a B. (Prípady $A \equiv S$ či $B \equiv S$ sú zrejme nemožné.) Pre l-bod S potom platí

$$\left| log \frac{\varepsilon(AP)}{\varepsilon(SP)} \right| = \left| log \frac{\varepsilon(SP)}{\varepsilon(BP)} \right| .$$

Z dôkazu vety 8. vzhľadom na to, že S leží medzi A a B vyplýva, že čísla v horných absolutných hodnotách sú



Obr. 26

obidve súčasne buď kladné, alebo záporné. Každopádne je možné absolutné hodnoty v hornej rovnici vypustiť. Potom je horná rovnica ekvivalentná s rovnicou

$$\frac{\varepsilon(AP)}{\varepsilon(SP)} = \frac{\varepsilon(SP)}{\varepsilon(BP)} \text{ tj. } \varepsilon(AP)\cdot\varepsilon(BP) = \varepsilon^2(SP). \quad (13)$$

Z posledného vzťahu vyplýva jednak jednoznačnosť l-stredu S a s prihliadnutím ku mocnosti bodu (pozri dodatok D) ku kružnici tiež konštrukcia:

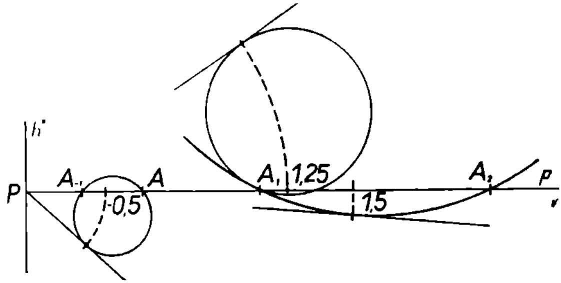
Nech k je ľubovoľná e-kružnica idúca l-bodmi A a B, T je dotykový e-bod e-dotyčnice vedenej a-bodom P ($P \in p'$, $P \not\equiv H$) ku k. Potom z vety o mocnosti bodu ku kružnici je

$$\varepsilon(AP)\cdot\varepsilon(BP) = \varepsilon^2(TP)$$

odkiaľ okamžite plynie (13).

Úloha 66. Do l-mierky z úlohy 65 dokreslite l-body odpovedajúce hodnotám — 0,5 a 1,25. (Obr. 27.)

Úloha 67. Nech p, q sú dve rôzne l-priamky druhého druhu a $A \neq B$ l-body na p a C je l-bod na q. a) Popíšte



Obr. 27

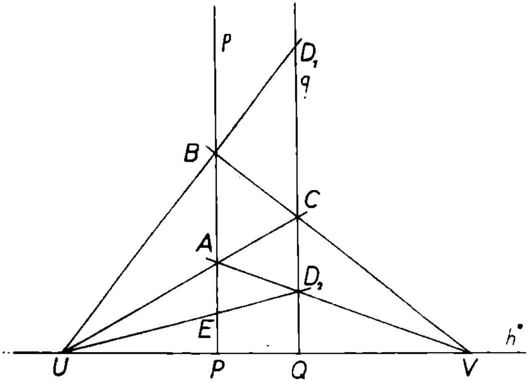
konštrukcie všetkých l-bodov $D \in q$ pre ktoré je $\lambda(AB) = \lambda(CD)$. b) Popíšte konštrukcie všetkých l-bodov $E \in p$ pre ktoré $B \neq E$ a $\lambda(AB) = \lambda(AE)$.

Definícia 15b. Nech A, B sú l-body ležiace na l-priamke prvého druhu p. Nech $Z \neq S(p)$ je a-bod a označme $\varepsilon(\sphericalangle AS(p)Z) = \varphi$, $\varepsilon(\sphericalangle BS(p)Z) = \psi$. l-*Mieru* (l-*dĺžku*) l-*úsečky* AB definujeme predpisom

$$\lambda(AB) = \left| \log tg \frac{\varphi}{2} - \log tg \frac{\psi}{2} \right| = \left| \log \frac{tg \frac{\varphi}{2}}{tg \frac{\psi}{2}} \right|. \quad (14)$$

Poznámka 8. Definícia 15b používa a-bod Z, pričom nie je okamžite zrejmé či vzťah (14) nezávisí od jeho polohy. Keby (14) od polohy bodu Z závisel bola by táto definícia zlá. Prenechávame čitateľovi, aby sa presvedčil, že zmenou a-bodu Z sa číslo $\lambda(AB)$ nemení.

Príklad 4. Nech A, B sú l-body ležiace na l-priamke prvého druhu p a C je l-bod ležiaci na l-priamke druhého druhu q. Popíšte konštrukciu všetkých takých l-bodov $D \in q$, pre ktoré $\lambda(AB) = \lambda(CD)$.



Obr. 28

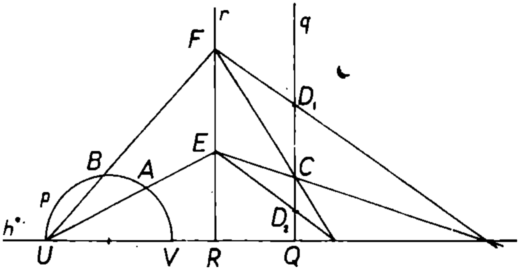
Riešenie. (Obr. 29.) Označme $p' = \{U, V\}$. Nech $r \neq q$ je taká l-priamka druhého druhu, ktorej a-bod $R \neq H$ náleží vnútrajšku e-polpriamky UV. Ukážeme najprv, že pre priesečníky e-priamok UA a UB s r, ktoré označíme v poradí E a F platí

$$\lambda(AB) = \lambda(EF).$$

Z vety o stredovom a obvodovom e-uhle vyplýva $\varepsilon(\sphericalangle$ $\sphericalangle AUV) = \frac{1}{2}\varepsilon(\sphericalangle AS(p)V) = \frac{\varphi}{2}$ (ak v definícii 15b vystupujúci a-bod Z volíme napríklad totožný s V) a rovnako je $\varepsilon(\sphericalangle BUV) = \frac{\psi}{2}$. Podľa (14) a (12) je potom

$$\lambda(AB) = \left| \log \frac{tg \frac{\varphi}{2}}{tg \frac{\psi}{2}} \right| = \left| \log \frac{\varepsilon(ER) : \varepsilon(UR)}{\varepsilon(FR) : \varepsilon(UR)} \right| =$$

$$= \left| \log \frac{\varepsilon(ER)}{\varepsilon(FR)} \right| = \lambda(EF).$$



Obr. 29

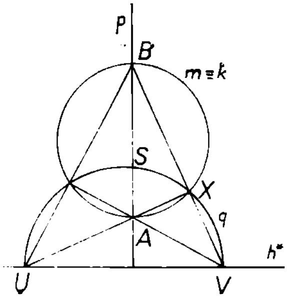
Zvyšok konštrukcie je zrejmý podľa obrázku 29; je opakovaním úlohy 67.

Úloha 68. Nech $A \not\equiv B$ sú l-body l-priamky prvého druhu p. Popíšte konštrukciu oboch l-bodov $X \in p$ pre ktoré je $2\lambda(XA) = \lambda(AB)$.

Úloha 69. Dokážte nasledovnú konštrukciu l-stredu S l-úsečky AB, ak AB je l-priamka prvého druhu, označená p. Nech $p' = \{U, V\}$ a nech M je priesečník e-priamok UA, VB. S je priesečník l-priamky p a e-kolmice vedenej l-bodom M ku e-priamke h^*.

Naučili sme sa l-dĺžky prenášať z l-priamky prvého druhu na l-priamku druhého druhu a naopak. Tým pádom všetko, čo sme vedeli doteraz previesť pre l-priamku druhého druhu, vieme vykonať už aj pre l-priamku prvého druhu.

Doteraz sme o l-kružnici nehovorili. V rámci modelu $\mathfrak{B}$



Obr. 30

by bola úloha hodne obtiažna. V modeli $\mathfrak{P}$ l-kružnicu zavedieme a podáme aj jej konštrukciu.

Definícia 16. Nech S je l-bod a r kladné číslo. Množinu všetkých l-bodov X pre ktoré $\lambda(XS) = r$ nazveme l-*kružnicou* a označíme $k(S, r)$; l-bod S nazveme l-*stredom* a číslo r l-*polomerom* l-kružnice $k(S, r)$.

Veta 9. Každá l-kružnica je e-kružnicou, ktorej všetky e-body sú l-bodmi. Každá e-kružnica, ležiaca celá v l-rovine λ je aj l-kružnicou.

Dôkaz. Obrázok 30. Nech je daná l-kružnica $k(S, r)$ a nech $A \neq B$ sú jej l-body ležiace na l-priamke $p \equiv SH$. Nech m je e-kružnica zostrojená nad AB ako e-priemerom. Ak $X \in k(S, r)$ je l-bod rôzny od A aj B, potom l-priamka $q \equiv SX$ je prvého druhu, pretože jediná l-priamka druhého druhu idúca l-bodom S je p a $X \in p$. Označme $q' =$

$= \{U, V\}$. Podľa príkladu 4. e-priamka AX prechádza buď a-bodom U, alebo a-bodom V, pretože podľa definície 16. je $\lambda(SX) = \lambda(SA) = \lambda(SB)$. e-Priamka BX potom prechádza druhým z a-bodov U, V. Podľa Táletovej vety (vzhľadom ku e-kružnici q) je $\varepsilon(\sphericalangle AXB) = \frac{\pi}{2}$ a teda $X \in m$. Ak naopak $X \in m$, $A \not\equiv X \not\equiv B$, potom konštruujeme a-body U, V ako priesečníky h^* s e-priamkami v poradí AX, BX a l-priamku q z podmienky $q' = \{U, V\}$. Označme S' priesečník l-priamky q a $p \equiv AB$. Potom podľa príkladu 4. je $\lambda(AS') = \lambda(XS') = \lambda(BS')$. Pretože S' aj S sú l-stredy l-úsečky AB, je $S \equiv S'$ a teda $X \in k(S, r)$. Z dokázaných vzťahov $X \in k \Rightarrow X \in m$ a $X \in m \Rightarrow X \in k$ vyplýva $m \subset k$ a $k \subset m$, čiže $k \equiv m$. Tak sme ukázali, že každá l-kružnica je e-kružnicou.

Nech ďalej je m e-kružnica ležiaca celá v λ. Z predošlého vyplýva, že $m \equiv k(S, r)$, kde $k(S, r)$ je l-kružnica, pričom určenie l-objektov S, r je patrné z obrázku 30.

Poznámka 9. Vzhľadom na tvrdenie vety 9. nie je príliš nutné rozlišovať medzi pojmami l-kružnica a e-kružnica. Ak napíšeme len „kružnica k“ (a z kontextu je zrejmé, že $k \subset \lambda$), potom je naša reč jasná. Ak však napíšeme „kružnica $k(S, r)$“, potom vôbec nie je jasné, či S a r sú e-objekty, alebo l-objekty. e-Stred a l-stred tej istej „kružnice“ sú vždy dva rôzne l-body.

Úloha 70. Udajte konštrukciu l-kružnice $k(S, r)$, ak poznáte: a) tri jej l-body, b) jeden jej l-bod, a jej l-stred S.

Úloha 71. Ukážte, že v l-rovine neplatí Talesova veta.

Úloha 72. Dokážte, že v l-rovine neplatí Pytagorova veta. Dôkaz preveďte pre l-trojuholník nakreslený na obrázku 32. Obrázok je e-súmerný podľa e-priamky CW, e-priamky AU, h^* sú e-kolmé a $\varepsilon(\sphericalangle UCV) = 90°$.

V l-rovine existujú dve súbežky vedené l-bodom ku danej l-priamke. Vzniká prirodzená otázka: aká je miera ich l- uhla, alebo presnejšie, na čom toto číslo závisí. Riešeniu tejto otázky venujeme úlohy 74., 75. a vetu 10., ktorá podáva vyčerpávajúcu odpoveď na položenú otázku.

Úloha 73. Nech A je l-bod ležiaci mimo l-priamky a, R päta l-kolmice r vedenej z A ku a, $U \in a'$. Číslo $d = \lambda(AR)$ vyjadrite pomocou čísla $\varphi = \lambda(\sphericalangle UAR)$ v prípade, že r je druhého druhu.

Úloha 74. Predošlú úlohu riešte v prípade, že r je prvého, ale a druhého druhu.

Úloha 75. Úlohu 73. riešte v prípade, že a aj r sú prvého druhu a l-priamka $p \equiv AU$ je druhého druhu.

Veta 10. Nech R je l-kolmý priemet l-bodu A na l-priamku a neprechádzajúcu l-bodom A. Nech $U \in a'$, potom pre čísla $d = \lambda(AR)$ a $\varphi = \lambda(\sphericalangle UAR)$ platí vzťah

$$d = log\, cotg \frac{\varphi}{2}. \tag{15}$$

Dôkaz. Predpokladajme, že l-priamky a, $r \equiv AR$, $p \equiv AU$ sú prvého druhu, pričom U leží medzi $T \equiv S(a)$ a $P \equiv S(r)$. Z vety 7. je zrejmé, že uvedená voľba nie je na ujmu všeobecnosti. Označme ešte $Q \equiv S(p)$, $\varepsilon(\sphericalangle PAQ) = \alpha$, $\varepsilon(\sphericalangle RPA) = \beta$, $\varepsilon(\sphericalangle TPR) = \gamma$. Pomocou čísiel α, β, γ vyjadrime postupne skoro všetky e-miery e-uhlov z obrázku 35. Z $\varepsilon(PA) = \varepsilon(PR)$ vyplýva $\varepsilon(\sphericalangle RAP) = \varepsilon(\sphericalangle ARP) = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$; z $\varepsilon(\sphericalangle TRP) = \frac{\pi}{2}$ vyplýva $\varepsilon(\sphericalangle RTU) = \frac{\pi}{2} - \gamma$ a odtiaľ zase $\varepsilon(\sphericalangle TRU) = \varepsilon(\sphericalangle TUR) = \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}$. Preto je $\varepsilon(\sphericalangle RUP) = \frac{3}{4}\pi - \frac{\gamma}{2}$ a $\varepsilon(\sphericalangle URP) = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}$. Pretože je $\varepsilon(\sphericalangle APQ) = \pi -$

$-(\beta+\gamma)$, je $\varepsilon(\sphericalangle PQA)=\beta+\gamma-\alpha$ a teda $\varepsilon(\sphericalangle UAQ)=$ $=\varepsilon(\sphericalangle AUQ)=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}$. Konečne teda $\varepsilon(\sphericalangle$ $\sphericalangle UAP)=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ a $\varepsilon(\sphericalangle RAU)=\frac{\alpha+\gamma}{2}$.

Použijeme sinovú vetu na e-trojuholníky AUR a AUP a dostaneme

$$\frac{sin\varepsilon(\sphericalangle URA)}{\varepsilon(AU)}=\frac{sin\varepsilon(\sphericalangle RAU)}{\varepsilon(RU)}$$

a

$$\frac{sin\varepsilon(\sphericalangle UPA)}{\varepsilon(AU)}=\frac{sin\varepsilon(\sphericalangle UAP)}{\varepsilon(PU)}$$

odkiaľ

$$\varepsilon(RU)\frac{sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}=\varepsilon(AU)=$$

$$=\varepsilon(PU)\frac{sin(\beta+\gamma)}{sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)}.$$

V e-trojuholníku RUP podľa sinovej vety platí

$$\frac{\varepsilon(RU)}{sin\,\gamma}=\frac{\varepsilon(PU)}{sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)},$$

čo po porovnaní horných vzťahov dá reláciu medzi α, β, γ:

$$\frac{sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}=$$

$$= \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)} \; \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\gamma}.$$

Pri označení $\alpha = 2\,\sigma$, $\beta + \gamma = 2\,\varrho$, $\gamma = 2\,\psi$ môžeme horný vzťah upraviť takto (overte zmysel nasledujúcich zlomkov)

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varrho + \sin\varrho)}{\sin(\psi+\sigma)} = \frac{\sin 2\,\varrho}{\sin 2\,\psi} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\psi - \sin\psi)}{\cos(\varrho+\sigma)},$$

alebo

$$\frac{\cos\varrho\cos\sigma - \sin\varrho\sin\sigma}{\sin\psi\cos\sigma + \cos\psi\sin\sigma} =$$

$$= \frac{\sin\varrho\cos\varrho}{\sin\psi\cos\psi} \cdot \frac{\cos\psi - \sin\psi}{\cos\varrho + \sin\varrho},$$

alebo

$$\frac{1 - tg\,\varrho\, tg\,\sigma}{tg\,\psi + tg\,\sigma} = \frac{tg\,\varrho}{tg\,\psi} \cdot \frac{1 - tg\,\psi}{1 + tg\,\varrho},$$

odkiaľ

$$tg\,\sigma = \frac{tg\,\psi}{tg\,\varrho}.$$

Je teda

$$d = \log \frac{tg\,\frac{\beta+\gamma}{2}}{tg\,\frac{\gamma}{2}} = \log \frac{tg\,\varrho}{tg\,\psi} = \log\, cotg\,\sigma = \log\, cotg\,\alpha.$$

Ak uvážime, že $\varphi = \lambda\,(\sphericalangle\, UAR) = \varepsilon\,(\sphericalangle\, PAQ) = \alpha$, je (15) dokázané pre ten prípad, že a, r, p sú prvého druhu. Ostávajúce prípady sú dokázané v úlohách 73., 74., 75.

Definícia 17. Nech l-bod A neleží na l-priamke a, pre ktorú $a' = \{U, V\}$. Potom l-mieru l-uhla UAV, tj. číslo $\lambda\,(\sphericalangle\, UAV)$ menujeme *veľkosťou uhla* l-*rovnobežnosti* l-*bodu* A *a* l-*priamky* a. Stručne, ale nepresne sa hovorí o *uhle rovnobežnosti*.

Poznámka 10. Veta 10. hovorí, že „uhol rovnobežnosti závisí len od dĺžky $d = \lambda\,(AR)$ a to podľa (15)". Toto význačné tvrdenie nesie názov Lobačevského. Miesto $\lambda(AR)$ píše sa často, podľa Lobačevského $\Pi\,(A, R)$.

RIEŠENIA ÚLOH

Kapitola 1.

1. 4, 4, 3, 1, 2, 1, 4, 4, 4, 3, 1, 2, 4, 1, 4, 2, 1. Pojem „neležať na“ nie je základný, ale definovaný, rovnako ako „obsahovať“.

2. Termín „nepáčiť sa“ nebol zavedený a preto nemá zmysel. Kvôli stručnosti ďalšieho vyjadrovania je vhodné ho zaviesť, pozri definíciu 1.S. V dôkaze treba slová „ktorému sa dievča a nepáči“ nahradiť slovami „že nie je pravda, že dievča a se chlapcovi A páči“.

3. Nech A, B, C sú chlapci popísaní v dôkaze vety 2.S. Nech existuje dievča x tak, že v úlohe uvedená implikácia nie je pravdivá, tz. $A \varepsilon x$, $B \varepsilon x$, $C \varepsilon x$. Potom zo vzťahov $a \equiv BC$, $x \equiv BC$ vyplýva podľa $\mathbf{S}_3$ $a \equiv x$. Vzťah $A \varepsilon x$ implikuje potom reláciu $A \varepsilon a$ čo je spor s faktom dokázaným v dôkaze vety 2.S.

4. Hľadaný X definujeme predpisom $\{X\} \equiv a \cap b$. Dievčatá a, b, XC sú navzájom rôzne a každé sa páči chlapcovi X.

5. Prvá časť úlohy je jednoduchá, druhá je dôsledkom vety 5.S.

6. Každé z písmien množiny Ch sa nachádza aspoň vo dvoch rôznych slovách množiny D.

7. V reči uvedenej tabuľky incidencie majú axiomy $\mathbf{S}_2$ — — $\mathbf{S}_5$ tento tvar:

$\mathbf{S}_2$: Ku každým dvom riadkom existuje aspoň jeden stĺpec tak, že oba riadky vo štvorčeku tohoto stĺpca majú 1.

S$_3$: Ku každým dvom riadkom existuje najviac jeden stĺpec tak, že obidva riadky vo štvorčeku tohoto stĺpca majú 1.

S$_4$: V každom stĺpci sú aspoň dve rôzne čísla 1.

S$_5$: V každom stĺpci existuje aspoň jedno číslo 0.

		D									
		Bolyai	Descartes	Dupin	Euler	Gauss	Klein	Ludolf	Newton	Study	Sylvester
Ch	*a*	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
	e	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	i	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
	o	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
	u	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
	y	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabuľka incidencie modelu S$_2$.

8. Výrok **V** je a) pravdivý, b) nepravdivý — pre $p =$ $=$ Descartec a $P =$ písmeno u sú $q_1 =$ Study, $q_2 =$ Ludolf, $q_3 =$ Dupin, c) pravdivý, d) nepravdivý.

9. Nech Ch $= \{A, B, C, D\}$. Potom množina D podľa **S**$_2$ obsahuje 6 prvkov a to: AB, AC, AD, BC, BD, CD;

podľa S_4 D iné prvky obsahovať nemôže. Množina D je teda maximálne 6 prvková, no môže obsahovať aj menej prvkov, ak niektoré z dievčat hore uvedených budú totožné. Pretože podľa dôsledku vety 5.S je D aspoň trojprvková neexistuje dievča páčiace sa všetkým štyrom chlapcom. Uvážime dva ostávajúce prípady.

I. Nech existuje dievča a páčiace sa trom rôznym z chlapcov A, B, C, D. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že sú to B, C, D. Potom dievčence $b \equiv AB$, $c \equiv AC$, $d \equiv AD$ sú navzájom rôzne, pretože z $b \equiv c$ by vyplývalo $A \in BC \equiv a$, čo je spor s horeuvedeným faktom existencie troch rôznych dievčat.

II. Nech neexistuje dievča x páčiace sa trom rôznym z chlapcov A, B, C, D. Potom dievčence $p \equiv AB$, $q \equiv AC$, $r \equiv AD$, $s \equiv BC$, $t \equiv BD$, $u \equiv CD$ sú popár rôzne.

Existujú dva modely hľadaných vlastností. Označme ich S_6 a S_7. Ich incidenčné tabuľky pri hornom značení sú

		D			
		a	b	c	d
Ch	A	0	1	1	1
	B	1	1	0	0
	C	1	0	1	0
	D	1	0	0	1

Tabuľka incidencie modelu S_6.

		D					
		p	q	r	s	t	u
Ch	A	1	1	1	0	0	0
	B	1	0	0	1	1	0
	C	0	1	0	1	0	1
	D	0	0	1	0	1	1

Tabuľka incidencie modelu S_7.

10. Nech b, c sú dve rôzne priateľky dievčaťa a pre ktoré $A \varepsilon b$ aj $A \varepsilon c$ a $A \not\varepsilon a$. Podľa axiomy $\mathbf{S}_4$ existujú chlapci B, C, D, E tak, že $B \varepsilon b$, $C \varepsilon c$, $D \varepsilon a$, $E \varepsilon a$, pričom $B \not\equiv A \not\equiv C$ a $D \not\equiv C$. Sú teda A, B, C, D, E navzájom rôzne body a preto model teórie S v ktorom je výrok **V** nepravdivý má minimálne 5 bodov. Nech teda $\mathrm{Ch} = \{A, B, C, D, E\}$. Potom D obsahuje okrem $a \equiv DE$, $b \equiv AB$, $c \equiv AC$ ešte dievčence AD, AE, BC, BD, BE, CD a CE. Spomedzi týchto desiatich dievčat môžu niektoré splynúť. Ľahko sa presvedčíme, že s dievčaťom a nemôže splynúť žiadne iné dievča; podobne s dievčatmi b, c, AD aj AE nemôže žiadne iné dievča splynúť. Môže teda byť $BC \equiv BD$ ($\equiv CD$), alebo $BC \equiv BE$ ($\equiv CE$), pričom zrejme môže nastať len jeden z prípadov. Oba prípady sa odlišujú len označením a preto ich možno počítať za jeden. Existujú preto dva modely, ktoré označíme S_8 a S_9 a zadáme tabuľkou

		D									
		a	*b*	*c*	*AD*	*AE*	*BC*	*BD*	*CE*	*BE*	*CD*
Ch	*A*	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
	B	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
	C	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
	D	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
	E	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0

Tabuľka incidencie modelu $\mathfrak{S}_8$.

		D							
		a	*b*	*c*	*AD*	*AE*	*BC*	*CE*	*BE*
Ch	*A*	0	1	1	1	1	0	0	0
	B	0	1	0	0	0	1	0	1
	C	0	0	1	0	0	1	1	0
	D	1	0	0	1	0	1	0	0
	E	1	0	0	0	1	0	1	1

Tabuľka incidencie modelu $\mathfrak{S}_9$.

11. Model $\mathfrak{M}$ nie je modelom teórie $\mathfrak{S}$, lebo nespĺňa axiomu $\mathbf{S}_2$ pre body $A \not\equiv B$, pre ktoré $S \in AB$.

12. Množinu D rozšírime o všetky priamky idúce bodom S a obdržíme model S_{10}. Toto nie je jednoznačné. Mohli sme získať iný požadovaný model, keby sme ku D z $\mathfrak{M}$ pridali všetky dvojice (A, B) bodov z roviny takých, že $A \not\equiv B$ a AB je priamka idúca bodom S.

13. Napríklad: $\mathfrak{Q}_3$: Ch množina všetkých bodov na priamke p, D množina všetkých polpriamok na p, ε je $\in$; alebo: K modelu S_2 do množiny D pridáme prvok „Lie“; $\mathfrak{Q}_5$: Ch je množina všetkých bodov na kružnici k, D obsahuje jediný prvok a to kružnicu k.

14. Z $\mathbf{S}_8$ vyplýva $\mathbf{S}_1$, teda z $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_5$ a $\mathbf{S}_8$ vyplýva veta 4.S, ktorá je v spore s $\mathbf{S}_8$.

15. Prvé tvrdenie vyplýva z existencie modelu S_1 či S_3, druhé z existencie modelu S_2 či S_4, alebo S_5.

16. Výrok $\neg$ **W** znie: Existujú aspoň jeden $P \in$ Ch a aspoň jedna $p \in$ D tak, že $P \not\varepsilon\, p$ a pritom pre každé $x \in$ D platí $P \varepsilon x \Rightarrow x$ je nepriateľkou p. Výrok $\neg$ **V** znie: Existujú $P \in$ Ch, $p \in$ D, $q_1 \in$ D a $q_2 \in$ D tak, že $P \not\varepsilon\, p$, $P \varepsilon q_1$, $P \varepsilon q_2$, $q_1 \not\equiv q_2$ a q_1 aj q_2 sú priateľkami p.

17. Všetky štyri sústavy sú bezosporné, pretože existujú ich modely. a) S_3, alebo S_4; b) S_1, alebo S_6 (pozri úlohu 9); c) S_4, alebo S_5; d) S_3, alebo S_7 (pozri úlohu 9).

18. Podľa $\neg$ $\mathbf{S}_5$ existuje $p \in$ D tak, že pre každého chlapca X platí $X \varepsilon p$. Nech $q \in$ D. Podľa $\mathbf{S}_4$ existujú chlapci $A \not\equiv B$ tak, že $A \varepsilon q$, $B \varepsilon q$. Podľa $\mathbf{S}_3$ je potom $q \equiv AB \equiv$ $\equiv p$ tz. D $\equiv \{p\}$. Dokázaná je prvá implikácia. Druhá implikácia vyplýva z logického rozboru výrokov **V** a **W** (pozri dodatok A). Obidva uvedené výroky majú štruktúru **P** $\Rightarrow$ **Q**, pričom časť **P** $=$ „dievča p sa nepáči chlapcovi P“ je spoločná pre **V** aj **W**. Pretože D je jednoprvková, platí $P \varepsilon p$ pre každé $P \in$ Ch a každé (totiž ono jediné) $p \in$ D, teda **P** je nepravdivý a preto výrok **P** $\Rightarrow$ **Q** je pravdivý.

19. V úlohe 17d) bolo dokázané, že uvedená sústava výrokov je bezosporná, teda môžeme hovoriť o sústave axiom. Podáme modely $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$, $\mathfrak{R}_5$, $\mathfrak{R}_6$, $\mathfrak{R}_7$ také, že $\mathfrak{R}$

(i = 1, ..., 7) vyhovuje všetkým axiomom $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_5$, **V**, *W* s nasledujúcimi výnimkami: v modeli $\mathfrak{K}_i$, namiesto $\mathbf{S}_i$ platí výrok $\neg\, \mathbf{S}_i$ pre i = 1, ..., 5, v modeli $\mathfrak{K}_6$ namiesto **V** platí $\neg$ **V**, v modeli $\mathfrak{K}_7$ namiesto **W** platí $\neg$ **W**. Modely sú napríklad tieto (riešení je mnoho): $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{Q}_1$ (pozri príklad 8. článku 1.6.). $\mathfrak{K}_2$: D je dvojprvková, skladá sa z dvoch rovnobežných rôznych priamok a, b a Ch je množina všetkých bodov na a, aj b; ε je $\in$. $\mathfrak{K}_3$: Ku množine D v modeli S_3 pridáme ešte jeden prvok a to množinu všetkých bodov roviny okrem jedného, pevne zvoleného; ε je $\in$. $\mathfrak{K}_4$: Model popíšeme tabuľkou incidencie

		D					
		a	*b*	*c*	*u*	*v*	*w*
Ch	*A*	1	0	0	0	1	1
	B	0	1	0	1	0	1
	C	0	0	1	1	1	0

Tabulka incidencie modelu $\mathfrak{K}_4$.

$\mathfrak{K}_5$: Množina D je jednoprvková a Ch dvojprvková, teda D $\equiv \{a\}$, Ch $\equiv \{B, C\}$, pričom $B \varepsilon a$ aj $C \varepsilon a$. $\mathfrak{K}_6 \equiv$ $\equiv S_4$. $\mathfrak{K}_7 \equiv S_1$.

Kapitola 3

1. $\neg$ **E**: Existuje aspoň jeden bod P a aspoň jedna priamka p tak, že $P \notin p$ a množina priamok x nepretínajúcich p

a prechádzajúcich bodom P je buď prázdna, alebo aspoň dvojprvková.

$\neg$ **L**: Existuje aspoň jeden bod P a aspoň jedna priamka p tak, že $P \notin p$ a horeuvedená množina priamok x je buď prázdna, alebo jednoprvková.

$\neg$ **U**$_2$: Žiadny štvoruholník nemá všetky štyri uhly pravé.

2. Tvrdenie a) je pravdivé, tvrdenie b) nie je pravdivé, pretože v prípade existencie bodu P a priamky p tak, že $P \notin p$ a množina priamok x (z úlohy 1) je prázdna, je $\neg$ **L** pravdivý a **E** nepravdivý.

3. Obidve teórie $\mathfrak{S}$ a $\mathfrak{S}'$ sú ekvivalentné. Odlišujú sa len v jazyku, ktorým hovoria; každé tvrdenie **T** teórie $\mathfrak{S}$ sa dá preložiť podľa (s) do tvrdenia **T**$'$ teórie $\mathfrak{S}'$, a pritom **T**$'$ je pravdivé práve vtedy, keď aj **T** je pravdivé. Medzi výrokmi **E**, **V**$'$ a **W**$'$ platí ekvivalencia: **E** $\Leftrightarrow$ (**V**$'$ a **W**$'$).

4. a) **V**$' \Rightarrow \neg$ **L** tz. **L** $\Rightarrow \neg$ **V**$'$; b) $\neg$ **W**$' \Rightarrow \neg$ **L** tz. **L** $\Rightarrow$ **W**$'$.

5. Výrok **E** je pravdivý len v modeloch S'_3, S'_7. Výrok **L** je pravdivý len v modeli S'_8.

6. Pravdivosť **L** overíme ľahko, ostatok podľa úlohy 2.

7. a) R, Q, X; b) M, R, Q, X, Y, Z; c) M, Y, Z; d) a, b, c; e) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, u.

8. C_1C_2, QZ, ZQ, C_1Z, c.

9. Symbol „XY" značí „l-priamka XY". Symbol „e-priamka XY" má zmysel vždy, lebo podľa predpokladu je $X \not\equiv Y$. Symbol „XY" má zmysel práve vtedy, ak e-priamka XY je sečnicou e-kružnice h.

10. a) Z; b) a'; c) symbol nemá zmysel, lebo ani symbol MZ nemá zmysel; d) $\emptyset$ tj. množina prázdna.

11. Označme $q' \equiv \{Q_1, Q_2\}$. Potom hľadané l-priamky sú $p_1 \equiv PQ_1$ a $p_2 \equiv PQ_2$.

12. Množina $\{a'_1, \ldots, a'_n\}$ má naviac $2n$ prvkov. Nech U, V sú také dva jej prvky tz. a-body, že jeden z oblúkov

$\widehat{UV}$ e-kružnice h neobsahuje žiadne iné a-body množiny $\{a'_1, \ldots, a'_n\}$. Potom napríklad $x \equiv UV$.

13. Nech $A \in a'$ a $B \in b'$ sú rôzne; potom napríklad $p \equiv AB$.

14. Nech A, B, C, sú tri navzájom rôzne a-body. Potom napríklad $a \equiv BC$, $b \equiv AC$, $c \equiv AB$. Dôkaz ďalej pomocou vety Paschovej.

15. Označme $a' = \{A_1, A_2\}$, $b' = \{B_1, B_2\}$. Budeme uvažovať dva prípady. Nech najprv a, b sú súbežky a nech napríklad $A_1 \equiv B_1$. Potom M je množina l-bodov ležiacich vnútri e- polroviny $B_1B_2A_2$. Za l-priamku x možno voliť buď XB_2, alebo takú l-priamku, pre ktorú $\bar{x}$ je e-rovnobežné s b. Ak naopak $X \in x$, kde x je l-rôznobežka s a a l-rovnobežka s b, potom e-úsečka x leží vnútri e-polroviny $B_1B_2A_2$ a teda aj l-bod X tu leží. Nech sú ďalej a, b rozbežky, tz. a-body A_1, A_2, B_1, B_2 sú navzájom rôzne. Vhodnou voľbou indexov dosiahneme, aby A_1B_2 a A_2B_1 boli l-rôznobežky a spoločný l-bod označíme Q. Potom M je zjednotenie množín vnútorných l-bodov e-polroviny B_1QA_1 a vnútorných l-bodov e-polroviny B_2QA_2. Dôkaz sa dá previesť podobne ako v predchádzajúcom prípade.

16. Nad e-úsečkou BC ako priemerom zostrojíme e-kružnicu k. Nech $U \in k \cap h$. Potom e-uhol BUC je pravý a preto a-body V a W, $V \not\equiv U \not\equiv W$ v ktorých e-priamky UC a UB pretnú e-kružnicu h sú diametrálne v h. Teda $a \equiv VW$, $b \equiv UW$, $c \equiv UV$. Riešenia sú dve, jedno, žiadne práve keď množina $k \cap h$ je dvojprvková, jednoprvková, prázdna.

17. Vzájomná poloha je devätnástoraká, ak neprizeráme ku symetrii. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme B a D považovať za a-body. Nech je p l-priamka AB a q l-priamka CD a p_1 resp. q_1 l-polpriamka AB resp. CD. Uvážime štyri prípady:

1. $p \equiv q$. Nastáva týchto päť prípadov pre vzájomnú polo-

hu l-polpriamok AB, CD: 1. $AB \subset CD$, 2. $CD \subset AB$, 3. $B \not\equiv D$, $A \equiv C$, tz. $AB \cap CD \equiv \{A\}$, 4. $AB \cap CD$ je l-úsečka AC, $A \not\equiv C$, 5. $AB \cap CD$ je prázdna množina.
2. p, q sú súbežky so spoločným a-bodom U. Potom nastávajú štyri prípady: 1. $B \equiv D \equiv U$, 2. $B \equiv U \not\equiv D$, 3. $B \not\equiv U \equiv D$, 4. $B \not\equiv U \not\equiv D$.
3. p, q sú rozbežky. Potom nastáva jediný prípad.
4. p, q sú rôznobežky. Potom nastáva deväť prípadov: 1. $p_1 \cap q \equiv q_1 \cap p \equiv \emptyset$, 2. $p_1 \cap q \equiv \emptyset$, $q_1 \cap p \equiv \{C\}$. 3. $q_1 \cap p \equiv \emptyset$, $p_1 \cap q \equiv \{A\}$, 4. $p_1 \cap q \equiv \emptyset$, $C \notin q_1 \cap p \not\equiv \emptyset$, 5. $q_1 \cap p \equiv \emptyset$, $A \notin p_1 \cap q \not\equiv \emptyset$, 6. $p_1 \cap q_1 \equiv \{A\} \not\equiv \{C\}$, 7. $p_1 \cap q_1 \equiv \{C\} \not\equiv \{A\}$, 8. $A \equiv C$, 9. $p_1 \cap q_1 \not\equiv \emptyset$, $A \notin p_1 \cap q_1$, $C \notin p_1 \cap q_1$. Prípady symetrické sú, podľa našeho číslovania: 1.1 a 1.2, 2.2 a 2.3, 4.2 a 4.3, 4.4 a 4.5, 4.6 a 4.7. Po odčítaní symetrických prípadov ostáva 14 rôznych vzájomných polôh dvoch rôznych l-polpriamok.

18. Pozri obrázok 4. na ktorom je M vyšrafovaná. Do M patria otvorené l-úsečky AB_1 a AB_2 aj l-bod A, nie však l-polpriamky B_1Q a B_2Q. Pre $X \notin$ M je buď XP_1, alebo XP_2 l-priamka nepretínajúca ani p, ani l-polpriamku $q_1 \equiv AQ$. Ak naopak $X \in$ M a napríklad X je l-bod l-polroviny AQB_1, potom každá e-priamka x idúca l-bodom X a nepretínajúca l-polpriamku q_1 pretne, podľa Paschovej vety aj e-úsečku QB_1, aj l-úsečku B_1A, túto však nie v bode A. Preto e-priamka x pretne aj e-úsečku P_1P_2 v jej vnútornom bode.

19. Jednoznačnosť zobrazenia p je zrejmá. Nech $x \in \bar{\pi} \cup \{s\}$. Potom 1. pre $x \not\equiv \{s\}$ idúcu bodom S existuje jediný smer $X \in$ s kolmý na x, 2. pre $x \equiv \{s\}$ existuje v $\dot{\pi} \cup$ s jediný prvok X (a to bod S) pre ktorý p$(X) \equiv x$, 3. pre $x \not\equiv \{s\}$ neidúcu bodom S označme Y pätu kolmice vedenej z S ku x. Na polpriamke SY existuje jediný bod X spĺňajúci rovnicu $\varepsilon(SX)\ \varepsilon(SY) = r^2$.

20. Prvé tvrdenie vyplýva zo súmernosti podľa priamky XS (aj v tom prípade keď X je smer). Druhé tvrdenie je zrejmé, ak uvážime tri prípady podľa definície 5.

21. Pretože $X \in h \Leftrightarrow \varepsilon^2(XS) = r^2$, je prvé tvrdenie zrejmé. Druhé tvrdenie je dôsledkom predchádzajúceho tvrdenia.

22. Označme $N \equiv M_1M_2 \cap SM$ (obrázok 5). Z pravouhlého trojuholníka SM_1M podľa euklidovej vety vyplýva $\varepsilon(SN).\varepsilon(SM) = \varepsilon^2(SM_1) = r^2$, lebo $M_1N \perp SM$.

23. Diskutujme jednotlivé prípady. Ak $X \equiv S$, potom $S \in y \Rightarrow \mathrm{P}(y) \in \mathrm{s} \in \mathrm{p}(S)$. Ak $X \not\equiv S$ a $y \equiv XS$, potom $\mathrm{P}(y)$ je smer kolmý na y a $\mathrm{p}(X)$ priamka (podľa úlohy 20) kolmá na y. Teda $\mathrm{P}(y) \in \mathrm{p}(X)$. Ak konečne je $S \not\equiv X \in h$, $S \in y$, potom pre body V a W (definované, ako v dôkaze vety 2) platí $\varepsilon(SV).\varepsilon(SW) = \varepsilon^2(SX) = r^2$, lebo buď je $X \equiv V \equiv W$, alebo je SXW pravouhlý trojuholník, v ktorom sme užili euklidovu vetu.

24. Nech M leží vnútri h. Nech $x \not\equiv y$ sú priamky idúce bodom M. Potom x, y pretínajú h a vieme konštruovať body $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{P}(y)$. Z vety 2. vyplýva $\mathrm{p}(M) \equiv \mathrm{P}(x)\mathrm{P}(y)$. Obdobne (obr. 7) ak m je priamka pre ktorú $m \cap h \equiv \emptyset$, zvolíme $X \not\equiv Y$ na m. Znovu podľa úlohy 22. zostrojíme priamky $\mathrm{p}(X)$ a $\mathrm{p}(Y)$, potom z vety 2. vyplýva $\mathrm{P}(m) \equiv$ $\equiv \mathrm{p}(X) \cap \mathrm{p}(Y)$. Na obrázku 7 je volené Y na $\mathrm{p}(X)$, kvôli stručnosti konštrukcie.

25. Z $m \top n$ je podľa definície $\mathrm{P}(\bar{n}) \in \bar{m}$, $\mathrm{P}(\bar{n})$ je i-bod a preto existujú e-dotyčnice z $\mathrm{P}(\bar{n})$ ku h; dotykové a-body U, V ležia v opačných polrovinách vyťatých e-priamkou $\bar{m}$, preto m a n sa pretnú v l-bode.

26. Jedinú, ak m je rozbežné s n, inak žiadnu. Z požiadavky $m \top x \top n$ totiž vyplýva $x \equiv \mathrm{P}(m)\mathrm{P}(n)$, ak toto má zmysel.

27. Dokážeme sporom. Ak $ABCD$ je l-štvoruholník pre ktorý $AB \top BC \top CD \top DA \top AB$, potom rozbežky

AB a CD majú dve spoločné rôzne l-kolmice a to AD a BC, čo je v spore s tvrdením predchádzajúcej úlohy.

28. e-Tetivy p, q sú e-rovnobežné, pretože podľa predchádzajúceho príkladu z $S \in m$, $p \top m \top q$ vyplýva $p \perp m \perp q$, teda $p \parallel q$.

29. a, b sú rozbežky, lebo a, b majú spoločný i-bod resp. smer $P(q)$.

30. Nech U je a-bod. Na l-polpriamke SU nájdeme všetky l-body X hľadanej množiny. Označme $x = \varepsilon(SX)$, potom $\varepsilon(SU) = \varepsilon(SV) = r$ a $\varepsilon(XU) = r - x$, $\varepsilon(XV) = r + x$, kde $V \not\equiv U$ je a-bod l-priamky SU. Podľa (8) je

$$a = \lambda(SX) = log \frac{r(r+x)}{r(r-x)},$$

odkiaľ

$$2^a = \frac{r+x}{r-x}, \text{ tj. } x = r\,\frac{2^a-1}{2^a+1} < r.$$

Na l-polpriamke SU existuje a to jediný l-bod X hľadanej množiny. Ak teda U prebehne celé h, potom X prebehne všetky body e-kružnice so stredom S a polomerom x. Hľadaná množina je teda e-kružnicou.

l-Bod M pre ktorý $2\,\varepsilon(SM) = r$ leží na horepopísanej e-kružnici práve vtedy, keď je $x = \frac{r}{2}$ tj. keď platí

$$\frac{2^a-1}{2^a+1} = \frac{1}{2}, \text{ čiže } 2^a = 3, \text{ čiže } a = log\,3.$$

31. Označme $V \not\equiv U$ a-bod l-priamky AU a $\varepsilon(AU) = u$, $\varepsilon(AV) = v$, $\varepsilon(AX) = x$, potom

$$1 = \lambda(AX) = log \frac{u(v+x)}{v(u-x)}, \; 2 = \frac{u(v+x)}{v(u-x)}$$

teda

$$0 < x = \frac{uv}{u + 2v} < u.$$

Odtiaľ vyplýva existencia a jednoznačnosť l-bodu X.

Konštrukciu l-bodu X prevedieme napr. pomocou vety o mocnosti bodu ku kružnici — pozri dodatok D. Zostrojíme pomocný e-bod W neležiaci na e-priamke AU tak, aby $\varepsilon(AW) = u + 2v$. Nech Y je e-priesečník e-priamky AW s e-kružnicou k opísanou e-trojuholníku UVW. Z mocnosti A ku k je

$$\varepsilon(AU) . \varepsilon(AV) = \varepsilon(AW) . \varepsilon(AY), \text{ čiže } \varepsilon(AY) = \frac{uv}{u + 2v}.$$

e-Dĺžku $\varepsilon(AY)$ prenesieme na l-polpriamku AU. Poznamenajme, že vo vhodnom prípade môžeme e-kružnicu h použiť v úlohe e-kružnice k.

32. Existenciu l-bodu M dokážeme, ak dokážeme platnosť vzťahov

$$0 < \frac{\sqrt{av}}{v - u} (\sqrt{ub} - \sqrt{av}) < u - a.$$

Označme $\varepsilon(UV) = d$ tj. $d = a + v = b + u$. Zo zrejmej nerovnosti $d < u + v$ za predpokladu $u - v > 0$ vyplýva $d(u - v) < u^2 - v^2$, čiže $ub = u(d - u) < v(d - v) = va$, alebo $\sqrt{ub} - \sqrt{av} < 0$. Podobne zo vzťahu $u - v < 0$ dokážeme $\sqrt{ub} - \sqrt{av} > 0$, teda prvá z požadovaných nerovností je dokázaná. Z dokázaného vzťahu $\sqrt{bu} < \sqrt{av}$ (stále za predpokladu $v < u$) dostávame postupne

$$d - u < \sqrt{ab} \sqrt{\frac{v}{u}}$$

$$v + a < u + \sqrt{ab}\sqrt{\frac{v}{u}}$$
$$uv + au < \sqrt{abuv} + u^2$$

z čoho vyplýva aj druhá z požadovaných nerovností. Analogicky pre prípad $u < v$.

33. Rovnosť $x = \sqrt{av}\,\dfrac{\sqrt{bu} - \sqrt{av}}{v - u}$ budeme postupne upravovať. Rozšírime zlomok číslom d. Čitateľa môžeme upraviť nasledovne

$$d\,(\sqrt{bu} - \sqrt{av}) = \sqrt{bu}\,(a + v) - \sqrt{av}\,(u + b) =$$
$$= (\sqrt{uv} - \sqrt{ab})\,(\sqrt{bv} - \sqrt{au}).$$

Menovateľa upravíme takto

$$d\,(v - u) = (\sqrt{bv} + \sqrt{au})\,(\sqrt{bv} - \sqrt{au}).$$

Potom takto upravenej rovnosti možno dať tvar (ak $\sqrt{au} \neq \neq \sqrt{bv}$)

$$x\,(\sqrt{bv} + \sqrt{au}) = v\sqrt{au} - a\sqrt{bv}$$

a ďalej

$$(a + x)\sqrt{bv} = (v - x)\sqrt{au}.$$

Po umocnení poslednej rovnosti prídeme ku vzťahu

$$\frac{v\,(a + x)}{a\,(v - x)} = \frac{u\,(v - x)}{b\,(a + x)}.$$

Logaritmovaním poslednej rovnosti dôjdeme konečne ku vzťahu

$$\lambda\,(AM) = \lambda\,(BM).$$

34. Nech $\varepsilon\,(ZS) : \varepsilon\,(ZM) = c$. Z e-rovnoľahlosti podľa stredu Z a koeficientu c vyplýva $\varepsilon\,(SP_1) = \varepsilon\,(SP_2) =$

$= c . \varepsilon(MQ_1) = c . \varepsilon(MQ_2)$, $\varepsilon(RP_1) = c . \varepsilon(NQ_1)$, $\varepsilon(RP_2) = c . \varepsilon(NQ_2)$. Vyjadríme $\lambda(SR)$ a $\lambda(MN)$ podľa (8) a použijeme horných vzťahov.

35. Stačí nájsť jediný konkrétny prípad pre ktorý uvedená veta neplatí. Volíme preto p prechádzajúcu l-bodom S a l-priemety A', B', C' l-bodov v poradí A, B, C do p tak, aby $S \equiv B'$ a tento l-bod bol l-stredom l-úsečky $A'C'$. Podľa predošlej úlohy je $\varepsilon(AA') = \varepsilon(CC') - \varepsilon(BB')$, no podľa príkladu 1. je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \perp p$, teda l-body A, B, C neležia na l-priamke. Poznamenajme, že uvedená veta je nepravdivá pre ľubovoľnú voľbu objektov p, A, B, C.

36. Nech V resp. W je a-bod l-priamky p resp. q rôzny od U (pozri obr. 10). Ak $A \equiv B$ potom $X \equiv C$ je jediné riešenie. Nech $A \not\equiv B$. Označme $G \equiv \overline{AC} \cap \overline{VW}$, $F \equiv \overline{BC} \cap \overline{VW}$, potom podľa Pappovej vety sú $X_1 \equiv q \cap AF$, $X_2 \equiv q \cap BG$ hľadané l-body. V prípade, že $AC \parallel VW$ bude e-bod G nahradený e-smerom VW, čiže AC. Podobne, pre $BC \parallel VW$.

37. Ak p, q sú súbežky je to úloha 36. V opačnom prípade zostrojíme pomocnú l-priamku r súbežnú s p a q a na nej ľubovoľný l-bod R. Dvojnásobným použitím úlohy 36 dostaneme najprv l-body Y_1, Y_2 na r a konečne X_1, X_2 na q tak, že $\lambda(AB) = \lambda(RY_1) = \lambda(RY_2) = \lambda(CX_1) = \lambda(CX_2)$.

38. l-Úsečku AB prenesieme na pomocnú súbežku q s l-priamkou p a použijeme úlohy 36.

39. Nech $U \not\equiv V$ sú a-body hľadanej l-priamky AB, C je l-stred l-úsečky AB, $Q \not\equiv P$ je a-bod l-priamky PS. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať e-polomer r e-kružnice h rovný 1. Nech $\varepsilon(SA) = d$, $0 < d < 1$. Pretože zrejme $\varepsilon(SB) = d$ je C e-stred e-úsečky AB, tiež $\varepsilon(AU) = \varepsilon(BV)$, $\varepsilon(AV) = \varepsilon(BU)$. Podľa vzťahu (8) je teda

$$\lambda(SA) = log \frac{\varepsilon(PS).\varepsilon(AQ)}{\varepsilon(AP).\varepsilon(SQ)} = log \frac{1+d}{1-d},$$

$$\lambda(AB) = log \frac{\varepsilon(BU).\varepsilon(AV)}{\varepsilon(AU).\varepsilon(BV)} = log \left(\frac{a + d \sin a}{a - d \sin a}\right)^2,$$

kde

$$a = \varepsilon(UC) = \sqrt{\varepsilon^2(US) - \varepsilon^2(CS)} = \sqrt{1 - d^2 \cos^2 a}.$$

Po dosadení horných výrazov do žiadanej rovnosti $\lambda(SA) = \lambda(AB)$ dostaneme

$$\frac{1+d}{1-d} = \frac{1 - d^2 \cos 2a + 2 ad \sin a}{1 - d^2 \cos 2a - 2 ad \sin a},$$

čo možno upraviť na tvar

$$d^4 \cos^2 2a + 2 d^2 (1 - 2 \cos^4 a) - 3 + 4 \cos^2 a = 0. \quad (*)$$

V tejto kvadratickej — vzhľadom na d^2 rovnici, určíme najprv diskriminant

$$\frac{1}{4} D = (2 \cos^4 a - 1)^2 - \cos^2 2a.(4 \cos^2 a - 3) =$$
$$= 4(\cos^8 a - 4 \cos^6 a + 6 \cos^4 a - 4 \cos^2 a + 1) =$$
$$= 4(\cos^2 a - 1)^4 = 4 \sin^8 a.$$

Potom je (predpokladáme $\cos 2a \neq 0$)

$$(d^2)_{1,2} = \frac{2 \cos^4 a - 1 - 2 \sin^4 a}{\cos^2 2a}.$$

Ukážeme, že znamienko $+$ v uvedenom zlomku nemôže byť. Je totiž

$$\frac{2 \cos^4 a - 1 + 2 \sin^4 a}{\cos^2 2a} =$$

$$= \frac{2\,(cos^2 a + sin^2 a) - 4\,cos^2 a\, sin^2 a - 1}{cos^2 2\,a} =$$

$$= \frac{1 - sin^2 2\,a}{cos^2 2\,a} = 1,$$

čo odporuje predpokladu $0 < d < 1$ tj. $d^2 < 1$. Je preto nutne

$$d^2 = \frac{2\,(cos^4 a - sin^4 a) - 1}{cos^2 2\,a} = \frac{2\,cos\,2\,a - 1}{cos^2 2\,a}.$$

Ostáva určiť podmienky riešiteľnosti, tj. zistiť pre ktoré a je $0 < d^2 < 1$, čiže

$$0 < \frac{2\,cos\,2\,a - 1}{cos^2 2\,a} < 1.$$

Ekvivalentnou úpravou poslednej relácie nachádzame

$$1 < 2\,cos\,2\,a < cos^2 2\,a + 1.$$

Ľavá nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{1}{2} < cos\,2\,a \text{ tj. } 2\,a < \frac{\pi}{3},$$

pravá nerovnosť zase s nerovnosťou

$0 < cos^2 2\,a - 2\,cos\,2\,a + 1 = (cos\,2\,a - 1)^2$ tj. $2\,a \neq 0$. K úplnému riešeniu treba ešte vyšetriť prípad $cos\,2\,a = 0$. Vtedy $2\,a = \frac{\pi}{2}$, $a = \frac{\pi}{4}$ a rovnica (*), z ktorej určujeme d má tvar $d^2 - 1 = 0$, čo je v spore s predpokladom $0 < d < 1$.

Odpoveď. Úloha má riešenie a to jediné práve keď je

$$0 < 2\,a < \frac{\pi}{3}.$$

l-Body A, B sú dané vzťahmi

$$\lambda(SA) = \lambda(SB) = log\frac{1+d}{1-d}, \quad d = \frac{\sqrt{2\cos 2a - 1}}{\cos 2a}.$$

40. Z konštrukcie a-bodu Q' vyplýva, že e-uhol $\sphericalangle PQQ'$ má mieru $2a$ a preto $\varepsilon(QQ') = \varepsilon(QP)\cos 2a = 2r\cos 2a = 2\cos 2a$. Podľa Euklidovej vety je $\varepsilon^2(SK) = \varepsilon(SL).\varepsilon(SQ) = [\varepsilon(QQ') - r]\, r = 2\cos 2a - 1$ a teda $\varepsilon(SM) = \sqrt{2\cos 2a - 1}$. Konečne z e-trojuholníka AMS vyplýva $\varepsilon(SM) = \varepsilon(AS)\cos 2a$ tj. $\sqrt{2\cos 2a - 1} = d\cos 2a$, čiže

$$d = \frac{\sqrt{2\cos 2a - 1}}{\cos 2a},$$

čo sme mali dokázať.

41. Nech o je e-os e-úsečky XY. Ak je $o \parallel h^*$, $o \not\equiv h^*$, potom $x \equiv XY$ je l-priamka druhého druhu a to jediná; ak je $o \cap h^*$ jediný bod, potom je to $S(x)$ a x je znovu jediná. Ak $o \equiv h^*$, potom existuje nekonečne mnoho hľadaných l-priamok x. V B modeli x nemusí existovať.

42. a) $\{B\}$, b) $\{B, B_1\}$, kde B_1 je e-bod súmerne združený s B podľa h^*; c) nemá zmysel; d) l-priamku prvého druhu, ktorá je časťou e-kružnice o e-priemere $S(a)S(c)$.

43. Dvojprvková. $H \in p'$ práve keď p je druhého druhu tj. $\bar{p}$ je e-priamka.

44. Platí. Platí.

45. 12. Nech RS je uzavretá e-úsečka na h^* neobsahujúca žiaden z a-bodov $a'_1 \cup \ldots \cup a'_n$. Potom l-priamka x je daná napr. reláciou $x' = \{R, S\}$. 13. a 14. riešime rovnako ako v modeli B.

46. Ak sú a, b súbežky, potom n je nekonečne veľké, inak je $n = 4$.

47. a) Tri druhy l-polpriamok.
b) Tri druhy l-polrovín.

48. a) l-Polrovina na pravom, či ľavom obrázku 13b; b) l-polrovina na strednom obrázku 13b; c) e-obdĺžnik ležiaci celý v λ; d) dvojica rôznych l-bodov.

49. Je to l-uhol $\sphericalangle BAC$.

50. Ak je m e-kolmá na h^*, potom $m \cap \lambda$ je l-priamka druhého druhu a tá je l-konvexná. Teda l-K$(m \cap \lambda) \equiv$ $\equiv m \cap \lambda$. Ak je $m \parallel h^*$ tj. $m \cap \lambda$, potom l-K$(m \cap \lambda) \equiv$ $\equiv$ l-K(m) je tá uzavretá e-polrovina vyťatá e-priamkou m, ktorá celá náleží do λ. Nech konečne $m \cap h^* \equiv \{M\}$ a l-priamka $p \equiv MH$ nie je časťou m, tj. m nie je e-kolmé na h^* (obrázok). Potom l-K$(m \cap \lambda)$ je množina obsahujúca všetky vnútorné l-body e-uhla s vrcholom M a ramenami p, $m \cap \lambda$ a tiež všetky l-body $m \cap \lambda$. Posledné tvrdenie dokážeme. Nech X je l-bod ležiaci vnútri e-uhla s ramenami p, $m \cap \lambda$. Nech $Y \in m$ je l-bod v ktorom l-priamka XH pretne m. Nech $R \in m$ je l-bod vnútrajšku e-úsečky YM. Potom l-priamka $x \equiv RX$ pretína m okrem l-bodu R ešte v istom l-bode Q a X je l-bod l-úsečky RQ. Zvyšok je zrejmý. Obrázok 15.

51. Nech $q_1 \nparallel q_2$ sú súbežky vedené l-bodom Q ku p. Potom M sa skladá z dvoch l-uhlov α, β takto definovaných: Ak $P \in p$ je l-bod, potom α je prienikom l-polrovín q_1P a opačnej ku q_2P a β je prienikom l-polrovín q_2P a opačnej ku $q_1 P$. Dôkaz ľahko prevedieme v reči geometrie $\mathfrak{E}$. Poznamenajme, že l-uhly α, β budeme aj v modeli $\mathfrak{p}$ menovať vrcholovými. Množina M zrejme nie je l-konvexná v žiadnom prípade. Obrázok 16.

52. Nech je daný l-uhol $\sphericalangle AVB$. l-Polpriamku VM nazveme l-*osou* l-*uhla* $\sphericalangle AVB$ práve keď $\lambda(\sphericalangle AVM) =$ $= \lambda(\sphericalangle MVB)$. Nech a, b sú l-rôznobežky s priesečníkom V. l-Priamku $o \equiv VM$ nazveme l-*osou* l-*rôznobežiek* a, b

práve keď $\lambda(\sphericalangle a, o) = \lambda(\sphericalangle b, o)$. Z euklidovskej planimetrie tak vieme, že oba termíny existujú, že prvý je jednoznačný, druhý dvojznačný.

53. Z e-geometrie vyplýva, že $\lambda(\sphericalangle o_1, o_2) = \frac{\pi}{2}$, podobne ako v teórii $\mathfrak{E}$.

54. Číslo musí byť menšie ako 180^0.

55. $174°, 18'$; $\lambda(\sphericalangle \alpha) = 45°$, $\lambda(\sphericalangle \beta) = 69°,18'$, $\lambda(\sphericalangle \sphericalangle \gamma) = 60°$.

56. e-Stred e-kružnice označme O a označme ďalej $V \equiv S(AB)$ a W ten priesečník $k \cap h^*$, ktorý je rôzny od U. Pretože VB je kolmé na dotyčnicu v B ku $\widehat{BA}$, je $\lambda(\sphericalangle \beta) = \varepsilon(\sphericalangle BVU)$. Podobne ukážeme, že $\lambda(\sphericalangle \alpha) = \varepsilon(\sphericalangle VAU)$. Pri označení obrázku 19. je E e-stred toho e-kruhového oblúka $\widehat{AB}$ na k, ktorý neobsahuje e-bod U. e-Body E a F e-diametrálne voči k ležia v rôznych e-polrovinách vyťatých e-priamkou BW. Pretože e-body U a E ležia v tej istej e-polrovine a $O \in BW$, je otvorená e-polpriamka OF celá zvonku e-polroviny BWE a teda e-bod V, ležiaci na e-polpriamke OF neleží v e-polrovine BWU a teda neleží ani na e-úsečke WU. Preto je e-bod V vonkajším e-bodom e-kružnice k. e-Body U, V a F ležia v tej istej e-polrovine ABO a preto je $\varepsilon(\sphericalangle BUA) = \varepsilon(\sphericalangle \sphericalangle BFA) > \varepsilon(\sphericalangle BVA)$. Z e-trojuholníka VAU vyplýva $90° = \varepsilon(\sphericalangle VAU) + \varepsilon(\sphericalangle AVU) + \varepsilon(\sphericalangle AUB) > \varepsilon(\sphericalangle \sphericalangle \alpha) + \varepsilon(\sphericalangle AVU) + \varepsilon(\sphericalangle AVB) = \varepsilon(\sphericalangle \alpha) + \varepsilon(\sphericalangle \beta)$.

57. Nech W je a-bod e-priamky $\overline{AC} \equiv \bar{b}$ a U resp. V e-stredy kružníc $\overline{BC} \equiv \bar{a}$, $\overline{AB} \equiv \bar{c}$ a u, v ich e-polomery. a-Body U, V, W sú očividne navzájom rôzne a naviac W leží medzi U a V. Keby ležal napríklad a-bod U medzi W a V, bolo by nutne $\lambda(\sphericalangle \gamma) > 90° > \lambda(\sphericalangle \alpha)$ a teda

$\lambda(\sphericalangle \alpha) \neq \lambda(\sphericalangle \gamma)$ v spore s predpokladom. Uvážme teraz reláciu

$$\varepsilon(UV) = \varepsilon(UW) + \varepsilon(VW) = u \cos\varphi + v \cos\varphi = \\ = (u + v) \cos\varphi.$$

Kosinova veta v e-trojuholníku UBV dá vzťah

$$(u + v)^2 \cos^2 \varphi = u^2 + v^2 - 2\,uv \cos\varphi,$$

odkiaľ

$$(\cos\varphi)_{1,2} = \frac{-uv \pm (u^2 + uv + v^2)}{(u + v)^2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{u^2 + v^2}{(u + v)^2} \\ -1 \end{array} \right. .$$

Druhý prípad, $\cos\varphi = -1$, vedie k evidentne nemožnému faktu $\varphi = 180°$ a ostáva preto

$$\cos\varphi = \frac{u^2 + v^2}{(u + v)^2} = \frac{1}{2} + \frac{(u - v)^2}{2(u + v)^2} \geqq \frac{1}{2},$$

čiže $\varphi \leqq 60°$.

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $u = v$ tj. $A \equiv C$, lebo $\varepsilon(AW) = v \sin\varphi$ a $\varepsilon(CW) = u \sin\varphi$. Pretože je tento prípad nemožný, je $\varphi < 60°$, čo sme chceli dokázať.

58. Pri značení obrázku 19. označme ešte $u = \varepsilon(AU)$, $v = \varepsilon(AV) = \varepsilon(BV)$, $w = \varepsilon(UV)$. Z e-trojuholníka VUB vyplýva $\cos\lambda(\sphericalangle \beta) = \cos\varepsilon(\sphericalangle BVU) = \dfrac{w}{v}$ tj. $\sin^2 \lambda(\sphericalangle \beta) = \dfrac{v^2 - w^2}{v^2}$. Podľa kosínovej vety aplikovanej na e-trojuholník VAU obdržíme $\cos\lambda(\sphericalangle \alpha) = \cos\varepsilon(\sphericalangle VAU) = \dfrac{u^2 + v^2 - w^2}{2\,uv}$ tj. $\sin^2 \lambda(\sphericalangle \alpha) =$

$= \dfrac{4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2}{4u^2v^2}$. Pretože $\lambda(\sphericalangle \alpha) + \lambda(\sphericalangle \beta) < 90^\circ \Leftrightarrow \cos[\lambda(\sphericalangle \alpha) + \lambda(\sphericalangle \beta)] > 0 \Leftrightarrow \cos\lambda(\sphericalangle \alpha)\cos\lambda(\sphericalangle \beta) - \sin(\sphericalangle \alpha)\sin(\sphericalangle \beta) > 0$, stačí dokázať posledný z uvedených výrokov. Zo vzťahu $A \not\equiv C$ vyplýva $v^2 \neq u^2 + w^2$ tj. $(u^2 - v^2 + w^2)^2 > 0$, odkiaľ postupne obdržíme: $u^4 - 2u^2(v^2 - w^2) + (v^2 - w^2)^2 > 0$, $u^4 + 2u^2(v^2 - w^2) + (v^2 - w^2)^2 > 4u^2(v^2 - w^2)$, $0 > 4u^2v^2 - 4u^2w^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2$, $w^2 (u^2 + v^2 - w^2)^2 > (v^2 - w^2)[4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2]$, $\left(\dfrac{w}{v}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{u^2 + v^2 - w^2}{2uv}\right)^2 > \dfrac{v^2 - w^2}{v^2} \cdot \dfrac{4u^2v^2 - (u^2 + v^2 - w^2)^2}{4u^2v^2}$, $\cos^2\lambda(\sphericalangle \beta)\cos^2\lambda(\sphericalangle \alpha) > \sin^2\lambda(\sphericalangle \beta)\sin^2\lambda(\sphericalangle \alpha)$. Pretože je $\cos\lambda(\sphericalangle \alpha) > 0$ aj $\cos\lambda(\sphericalangle \beta) > 0$, môžeme rovnicu odmocniť a tým je dôkaz prevedený.

59. Pri označení obrázku budeme druhý a-bod e-kružnice $\overline{AD}$ označovať W. Teda VW sú e-diametrálne e-body v e-kružnici $\overline{AD}$ a preto $\varepsilon(\sphericalangle VDW) = 90^\circ$. Zrejme je $\lambda(\sphericalangle \delta) = \varepsilon(\sphericalangle UDV) < \varepsilon(\sphericalangle VDW) = 90^\circ$, čo sme chceli dokázať.

60. Pretože zo zadania vyplýva, že e-trojuholníky $U_iA_{i+1}U_{i+1}$ pre $i = 1, 2, 3, 4$, sú rovnostranné a $S(A_1A_6) \equiv U_3$, môžeme pre trojuholník $U_3A_6U_5$ písať

$$(2u)^2 = v^2 + u^2 - 2uv\cos\varphi,$$

kde $v = \varepsilon(U_3A_6)$. Pre v platí $\varepsilon(U_3A_5) < v < \varepsilon(U_3U_5) + u$ tj. $u\sqrt{3} - v < 3u$, lebo $\varepsilon(\sphericalangle U_3A_5U_5) = 90^\circ$ a teda $\varepsilon^2(U_3A_5) = \varepsilon^2(U_3U_5) - \varepsilon^2(U_5A_5)$.
Dostávame

$$\cos\varphi = \frac{v^2 - 3u^2}{2uv}, \text{ kde } u\sqrt{3} < v < 3u,$$

alebo po označení $\frac{v}{u} = x$ je

$$\cos\varphi = \frac{x^2 - 3}{2x}, \text{ kde } \sqrt{3} < x < 3.$$

Posledná funkcia je na intervale $x > 0$ rastúca, lebo sa dá písať ako súčet rastúcich funkcií $\frac{x}{2}$ a $-\frac{3}{2x}$. Extrémnych hodnôt nadobúda $\cos\varphi$ v koncových bodoch, preto

$$0 = \frac{(\sqrt{3})^2 - 3}{2\sqrt{3}} < \cos\varphi < \frac{3^2 - 3}{2.3} = 1,$$

tj.

$$0° < \varphi < 90°.$$

61. Predovšetkým je $\varepsilon(U_iU_{i+1}) = u\sqrt{2}$ pre $i = 1, 2, 3, 4$. $\varepsilon(U_1W) = (2\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2})\,u$ a $\varepsilon(WA_4) = \frac{u}{2}\sqrt{2}$, kde W je e-stred e-úsečky U_3U_4. Podľa Pytagorovej vety je potom $\varepsilon^2(U_1A_4) = \varepsilon^2(U_1W) + \varepsilon^2(WA_4) = 13u^2$ a tiež $\varepsilon(U_1V) = 3\sqrt{2}\,u + u$. Nakoľko $\varepsilon(U_1A_4) < \varepsilon(U_1A_5) < < \varepsilon(U_1V)$ je po dosadení $13u^2 < v^2 < (3\sqrt{2} + 1)^2 u^2$. V e-trojuholníku $U_1A_5U_4$ použijeme kosinovu vetu:

$$(3\sqrt{2}\,u)^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\lambda(\sphericalangle\varphi),$$

lebo $\lambda(\sphericalangle\varphi) = \varepsilon(\sphericalangle U_1A_5U_4)$. Označme ešte $\frac{v}{u} = x$. Potom $18 = 1 + x^2 - 2x\cos\lambda(\sphericalangle\varphi)$, kde $13 < x^2 < (3\sqrt{2} +$

$+ 1)^2 = 19 + 6\sqrt{2}$. Teda číslo $\lambda\,(\sphericalangle\,\varphi)$ môže nadobúdať práve tie hodnoty, pre ktoré

$$\cos \lambda\,(\sphericalangle\,\varphi) = \frac{x^2 - 17}{2x}, \text{ kde } \sqrt{13} < x < 1 + 3\sqrt{2}.$$

Pre $x > 0$ je funkcia $\cos \lambda\,(\sphericalangle\,\varphi)$ rastúca, pretože sa dá písať ako polovičný súčet dvoch rastúcich (na intervale $x > 0$) funkcií: x a $-\dfrac{17}{x}$. Teda

$$-\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{13 - 17}{2\sqrt{13}} < \frac{x^2 - 17}{2x} < \frac{19 + 6\sqrt{2} - 17}{2(1 + 3\sqrt{2})} = 1,$$

alebo

$$-\frac{2}{\sqrt{13}} < \cos \lambda\,(\sphericalangle\,\varphi) < 1,$$

teda

$$0 < \lambda\,(\sphericalangle\,\varphi) < 123°, 41'$$

s presnosťou na $1'$.
V e-rovine neexistuje šesťuholník s piatimi pravými uhlami.
Útvar je l-konvexný.

62. Pretože p, q sú l-rôznobežky, môže najviac jedna z nich byť druhého druhu. Uvážime dva prípady: (Obr. 23).

A. je druhého druhu, tj. $a' \ni H$ a preto je buď $U \equiv H$, alebo $V \equiv H$. Bez ujmy na všeobecnosti voľme druhý prípad. Potom nutne je q druhého a p prvého druhu. Označme $\lambda\,(\sphericalangle\,UAR) = \psi$, $\lambda\,(\sphericalangle\,HAR) = \varphi$, $M = S\,(p)$. Pretože je $\varepsilon\,(UM) = \varepsilon\,(AM)$, je tiež $\varepsilon\,(\sphericalangle\,AUM) = \varepsilon\,(\sphericalangle\,UAM)$ a preto $\varphi = \psi$.

B. a je prvého druhu a nech p je druhého druhu. Označme N a-bod l-priamky q rôzny od V a dokážeme, že $S(r) \equiv N$. e-Trojuholník VAN je e-pravouhlý a platia v ňom euklidove vety, špeciálne $\varepsilon^2(NA) = \varepsilon(NU) . \varepsilon(NV)$. Posledný výraz je mocnosťou e-bodu N ku e-kružnici a, preto $\varepsilon(NA)$ je dotyková e-vzdialenosť e-bodu N od e-kružnice $\bar{a}$. Teda e-kružnica k_1 $[N, \varepsilon(NA)]$ je e-kolmá na e-kružnicu $\bar{a}$, $R \in k_1$ a preto $k_1 \cap \lambda \equiv r$. Z e-rovnoramenného trojuholníka $ANS(q)$ vyplýva $\lambda(\sphericalangle UAR) = \varepsilon(\sphericalangle ANS(q)) = \varepsilon(\sphericalangle NAS(q)) = \lambda(\sphericalangle VAR)$, čo sme chceli dokázať.

63. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $M \in h$. Označme $P \equiv AM \cap h^*$ a uvážme dva možné prípady:

1. $M \equiv H$,
2. $M \equiv P$.

V prvom z nich je výraz $log \dfrac{\varepsilon(XP)}{\varepsilon(AP)}$ nezáporný a v druhom nekladný. Rovnica $c = \lambda(AX)$ má potom podľa (12) v oboch prípadoch jediné riešenie x a to:

1. $\varepsilon(XP) = 2^c \cdot \varepsilon(AP)$,
2. $\varepsilon(XP) = 2^{-c} \cdot \varepsilon(AP)$.

64. Označme $P \in p'$, $P \not\equiv H$. Podľa (12) je potom

$$1 = \lambda(AX) = \left| log \frac{\varepsilon(AP)}{\varepsilon(XP)} \right|$$

teda

$$log \frac{\varepsilon(AP)}{\varepsilon(XP)} = \pm 1 \Rightarrow \frac{\varepsilon(AP)}{\varepsilon(XP)} = 2^{\pm 1}.$$

Hľadaná množina je dvojprvková a skladá sa z l-bodov X_1, X_2 charakterizovaných vzťahmi $\varepsilon(AP) = 2 \cdot \varepsilon(X_1P)$ a $2 \cdot \varepsilon(AP) = \varepsilon(X_2P)$. Inak povedané X_1 je e-stred e-úsečky AP, A je e-stred e-úsečky PX_2.

65. Hľadaná l-mierka je patrná z obrázku 25. Platí $\varepsilon(A_2P) = 2\,\varepsilon(A_1P) = 4 . \varepsilon(AP) = 8\varepsilon(A_{-1}P) = 16\,\varepsilon(A_{-2}P)$.

Všeobecne $\varepsilon(PA_i) = 2^{i-j}\,\varepsilon(PA_j)$ pre ľubovoľné celé i, j, ak A_i je l-bod prislúchajúci hodnote i na l-mierke. Dodajme, že existujú dve orientácie. Zámena $A_i \to A_{-i}$ charakterizuje prechod od jednej ku druhej.

66. Riešenie patrné z priloženého obrázku je založené na konštrukcii l-stredu — pozri príklad 3.

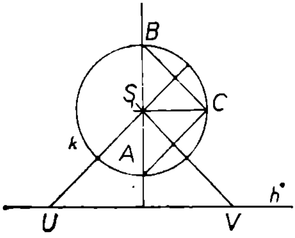
67. Obidve konštrukcie sú patrné z obrázku 28. Označme $P \in p'$, $Q \in q'$, $P \nparallel H \nparallel Q$; U resp. V je priesečník h^* a e-priamky AC resp. BC. Potom podľa úlohy 64 existujú práva dva rôzne l-body D_1, D_2 a práve jeden l-bod E, pričom a) D_1 je priesečník e-priamok UB a $\bar{q}$, D_2 je priesečník e-priamok AV a $\bar{q}$, b) Ak A leží medzi B a P potom E je priesečník e-priamok UD_2 a p. Dôkaz tvrdenia je jednoduchý. Z e-rovnobežnosti e-priamok $\bar{p}$, $\bar{q}$ vyplýva $\varepsilon(CQ) : \varepsilon(D_1Q) = \varepsilon(AP) : \varepsilon(BP) = \varepsilon(D_2Q) : \varepsilon(CQ) = \varepsilon(EP) : \varepsilon(AP)$ a vzhľadom na (12) potom $\lambda(CD_1) = \lambda(AB) = \lambda(CD_2) = \lambda(AE)$, čím je dôkaz prevedený. Dodajme, že v prípade e-rovnobežnosti e-priamok h^* a AC resp. h^* a BC bude s h^* e-rovnobežná aj BD_1 aj ED_2 resp. AD_2. Nepresne povedané, a-bod U resp. V „unikne do nekonečna“.

68. Nech q je l-priamka druhého druhu idúca l-bodom A. Nech $p' \equiv \{U, V\}$. Priesečník e-priamky UB s l-priamkou q označme C. Ak Y je l-stred l-úsečky AC (príklad 3), potom hľadané l-body X_1, X_2 sú priesečníky l-priamky p s e-priamkami UY a VY.

69. Podľa príkladu 4 (obrázok 29) je $\lambda(SA) = \lambda(SM) = \lambda(SB)$.

70. a) Zostrojíme e-kružnicu idúcu danými troma bodmi. b) Nech p je l-priamka druhého druhu idúca l-bodom S. Ak $X \in p$, zistrojíme l-bod $Y \in p$ tak, že $X \nparallel Y$, $\lambda(XS) = \lambda(YS)$. V opačnom prípade vedieme l-priamku q bodmi S a X (tá je nutne prvého druhu) a pomocou a-bodov U, $V \in q'$ konštruujeme l-body A, B ako na obrázku 30.

71. V situácii nakreslenej na obrázku 31 je l-bod C volený tak, že e-priamka S_1C je e-rovnobežná s $h^\star$, S_1 je e-stred kružnice k. Označme l-priamky $AC \equiv b$ a $BC \equiv a$ (sú určite prvého druhu) a označme ešte $U \equiv S(a)$,

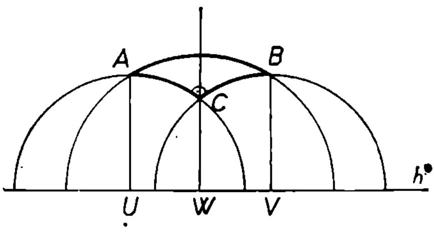


Obr. 31

$V \equiv S(b)$. Potom $\varepsilon(\sphericalangle US_1V) = 90^0$ a preto je $\varepsilon(\sphericalangle$ $\sphericalangle UCV) < 90°$ a preto tiež $\lambda(\sphericalangle ACB) = \varepsilon(\sphericalangle UCV) <$ $< 90°$. AB je zrejme l-priemer kružnice k.

72. Pri označení $\varepsilon(UA) = \varepsilon(UC) = \varepsilon(VC) = \varepsilon(VB) =$ $= u$ a $\varepsilon(WA) = \varepsilon(WB) = v$ je $\varepsilon(UW) = \dfrac{u}{\sqrt{2}}$ a $\varepsilon^2(AW) =$ $= \varepsilon^2(AU) + \varepsilon^2(UW)$ tj. $v^2 = u^2 + \dfrac{u^2}{2} = \dfrac{3}{2}u^2$, odkiaľ $v = u\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Ďalej je $\cos \varepsilon(\sphericalangle AUV) = 0$; $\cos \varepsilon(\sphericalangle$ $\sphericalangle CUV) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos \varepsilon(\sphericalangle BWV) = -\cos \varepsilon(\sphericalangle AWV) =$ $= \dfrac{u}{\sqrt{2}} : v = 1 : \sqrt{3}$. Podľa (14) a známeho vzťahu $tg\,\dfrac{x}{2} =$

$= \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ potom je $\lambda(AC) = |\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon(\sphericalangle AUV) -$
$- \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon(\sphericalangle CUV)| = |\log 1 - \log(\sqrt{2} - 1)| =$
$= \log(\sqrt{2} + 1)$, $\lambda(AB) = |\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon(\sphericalangle AWV) - \log$
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varepsilon(\sphericalangle BWV)| = \left| \log \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} - \log \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} \right| =$
$= \log \dfrac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = \log(2 + \sqrt{3})$ a teda $\lambda^2(AC) +$
$+ \lambda^2(BC) = 2 \log^2(\sqrt{2} + 1)$ a tiež $\lambda^2(AB) = \log^2(2 +$
$+ 3)$. Požadovaná rôznosť $\lambda^2(AC) + \lambda^2(BC) \neq \lambda^2(AB)$ vyplýva z nerovnosti $2 \log^2(\sqrt{2} + .1) < \log^2(2 + \sqrt{3})$, ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou $(\sqrt{2} + 1)^{\sqrt{2}} < 2 + \sqrt{3}$. Trpezlivým výpočtom (binomický rozvoj dokážeme $(\sqrt{2} +$
$+ 1)^{10} < (2 + \sqrt{3})^7$, odkiaľ vzhľadom na vzťah $\sqrt{2} < \frac{10}{7}$
je $(\sqrt{2} + 1)^{\sqrt{2}} (< \sqrt{2} + 1)^{\frac{10}{7}} < 2 + \sqrt{3}$ a teda $\sqrt{2} \log(\sqrt{2} +$
$+ 1) < \log(2 + \sqrt{3})$ čo sme chceli dokázať.



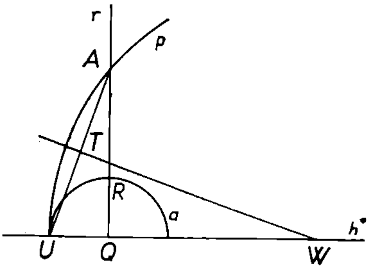
Obr. 32

73. l-priamku AU označme p, $S(p) \equiv W$ a $\bar{r} \cap h^{\star} \equiv Q$; obr. 33. Nech A je zvonka $\bar{a}$ tj. $\varepsilon(AQ) > \varepsilon(RQ)$. Nech T je e-stred e-úsečky AU. Potom WT je e-výška v e-trojuholníku AUW a e-trojuholníky AQU a WTU sú podobné, lebo $\varepsilon(\sphericalangle AQU) = \varepsilon(\sphericalangle WTU) = 90°$ a $\varepsilon(\sphericalangle AUQ) = \varepsilon(\sphericalangle TUW)$. Preto je $\varepsilon(\sphericalangle UAQ) = \varepsilon(\sphericalangle UWT) = \frac{1}{2}\varepsilon(\sphericalangle UWA) = \frac{1}{2}\lambda(\sphericalangle UAR) = \frac{\varphi}{2}$. Z e-trojuholníka AQU vyplýva

$$cotg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{\varepsilon(AQ)}{\varepsilon(UQ)} = \frac{\varepsilon(AQ)}{\varepsilon(RQ)},$$

odkiaľ

$$d = \left|\log cotg\,\frac{\varphi}{2}\right|.$$



Obr. 33

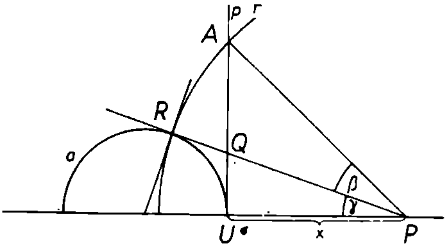
Skoro rovnakým spôsobom dokážeme tento vzťah aj v prípade, že A je vnútri $\bar{a}$ tj. $\varepsilon(AQ) < \varepsilon(RQ)$.

74. Situácia bola popísaná v úlohe 62 (prípad A). Podľa (14) je

$$d = \lambda(AR) = \left| \log \frac{tg \frac{1}{2} \varepsilon(\sphericalangle MUR)}{tg \frac{1}{2} \varepsilon(\sphericalangle MUA)} \right| =$$

$$= \left| \log \frac{1}{tg \frac{\varphi}{2}} \right| = \left| \log cotg \frac{\varphi}{2} \right| .$$

75. Označme $S(r) \equiv P$, $\varepsilon(\sphericalangle APR) = \beta$, $\varepsilon(\sphericalangle RPU) = \gamma$ a priesečník e-priamok AU a PR nech je Q. Pretože e-priamky RQ, UQ sú dotyčnice e-kružnice $\bar{a}$, je $\varepsilon(RQ) = \varepsilon(QU)$ a teda (obr. 34)



Obr. 34

$$tg\, \gamma = \frac{\varepsilon(QU)}{\varepsilon(UP)} = \frac{1}{cos(\beta + \gamma)} - \frac{1}{cos\, \gamma}$$

lebo

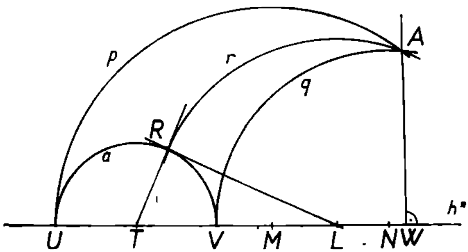
$$\varepsilon(QU) = \varepsilon(RQ) = \varepsilon(RP) - \varepsilon(QP) = \varepsilon(AP) - \varepsilon(QP) =$$
$$= \frac{\varepsilon(UP)}{cos(\beta + \gamma)} - \frac{\varepsilon(UP)}{cos\, \gamma}.$$

Potom platí

$$\cos(\beta+\gamma) = \frac{\cos\gamma}{1+\sin\gamma} = \frac{\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}$$

a preto

$$tg^2\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{1-\cos(\beta+\gamma)}{1+\cos(\beta+\gamma)} = \frac{1-\dfrac{\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}}{1+\dfrac{\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}} = tg\frac{\gamma}{2}$$



Obr. 35

čiže

$$\frac{tg\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{tg\dfrac{\gamma}{2}} = cotg\,\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Podľa (14), vzhľadom na rovnosť $\lambda(\sphericalangle RAQ) = \varepsilon(\sphericalangle APU)$ je

$$\lambda(AR) = \left| \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right| = \left| \log \operatorname{cotg} \frac{\beta + \gamma}{2} \right| = \left| \log \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} \right|.$$

DODATOK

A. Logika a množiny

Výrokom nazývame takú gramatickú vetu (či niekoľko viet), ktorá má zmysel a niečo tvrdí či popiera. Môže byť zapísaná slovne, alebo formulou, prípadne oboma. Príklady: „Pre dĺžky a, b, c strán pravouhlého trojuholníka s preponou c platí $a^2 + b^2 = c^2$“; „$(x + y)^2 = x^2 - 2xy$, pre všetky párne čísla x, y“ — sú výroky, prvý z nich je (v e-rovine) pravdivý, druhý je nepravdivý. Naopak veta „Dunaj je múdre veľkomesto“ je bezo zmyslu.

Výroky označujeme „tučnými“ veľkými literami: **A**, **B**, **E**, **L**, **U**, apod. Nech **A**, **B** sú výroky, potom symbol
$\neg$ **A** značí výrok: *nie je pravda že platí* **A**;
A $\Rightarrow$ **B** značí výrok:
ak platí **A**, *potom platí aj* **B**; *(implikácia)*
A $\Leftrightarrow$ **B** značí výrok:
A *platí práve vtedy keď aj* **B**; *(ekvivalencia)*

Výrok **A** $\Leftrightarrow$ **B** je pravdivý v dvoch prípadoch: buď **A** aj **B** sú pravdivé, alebo **A** aj **B** sú nepravdivé. Ak jeden z výrokov **A**, **B** je pravdivý a druhý nepravdivý, potom výrok **A** $\Leftrightarrow$ **B** je nepravdivý, čiže výrok $\neg$ **A** $\Leftrightarrow$ **B** je pravdivý.

Výrok **A** $\Rightarrow$ **B** je nepravdivý jedine v tom prípade, ak je **A** pravdivý a **B** nepravdivý; vo všetkých ostatných prípadoch je pravdivý. Z pravdy nie je možné dokázať nepravdu. Ale pozor! Výrok **A** $\Rightarrow$ **B** je pravdivý aj v tom prípade, ak predpoklad, tj. výrok A, je nepravdivý a záver, tj. výrok B, je pravdivý. Je totižto dobre možné z nepravdy dokázať pravdu. Napríklad z výroku (zjavne vadného) $2 = 10$ obdržíme postupne povolenými úpravami: $[2 = 10] \Rightarrow$ $\Rightarrow [2 - 6 = 10 - 6] \Rightarrow [-4 = 4] \Rightarrow [(-4)^2 = 4^2] \Rightarrow$ $\Rightarrow [16 = 16]$. Dobre si poslednú úvahu premyslite, je častým zdrojom logických chýb.

Čitateľovi prospeje, ak si dobre rozmyslí nasledujúce vzťahy platné medzi ľubovolnými výrokmi A, B:

a) výrok $\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}$ je pravdivý práve vtedy, keď je pravdivý aj výrok $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$, aj výrok $\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{A}$;

b) Výrok $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ je pravdivý práve vtedy, keď je pravdivý aj výrok $\neg \mathsf{B} \Rightarrow \neg \mathsf{A}$;

c) Výrok $\neg (\neg \mathsf{A})$ je pravdivý práve vtedy, keď aj výrok A, tj. platí $\neg (\neg \mathsf{A}) \equiv \mathsf{A}$.

Predpokladáme, že čitateľovi pojem *množiny* nie je celkom neznámy. K zápisu množín používame svorkové zátvorky $\{ \}$.

Ak a, b, C, Q_1 sú akékoľvek objekty, potom množinu, ktorá sa skladá práve z týchto štyroch objektov, značíme $\{a, b, C, Q_1\}$. Teda symbol $\{X\}$ označuje množinu, ktorá obsahuje jediný prvok — objekt X. Napríklad ak p je priamka (úsečka, kružnica, apod.) potom na p často hľadíme ako na množinu bodov X pre ktoré $X \in p$. Avšak symbolom $\{p\}$ označujeme množinu, ktorá obsahuje jediný prvok a to priamku (úsečku, kružnicu a pod.) p. Bod $X \in p$ nie je prvkom množiny $\{p\}$, čiže $X \notin \{p\}$.

Symbolom $\emptyset$ označujeme *prázdnu množinu*, tj. množinu, ktorá neobsahuje žiadny prvok.

Ak M, N sú dve (nie nutne rôzne) množiny, potom symbolom $\mathsf{M} \cup \mathsf{N}$ označujeme ich *zjednotenie* tj. množinu tých X, pre ktoré platí buď $X \in \mathsf{M}$, alebo $X \in \mathsf{N}$;

$\mathsf{M} \cap \mathsf{N}$ označujeme ich *prienik* tj. množinu tých X, pre ktoré platí aj $X \in \mathsf{M}$, aj $X \in \mathsf{N}$;

$\mathsf{M} \subset \mathsf{N}$ označujeme výrok: M *je podmnožina* množiny N, tj. výrok $X \in \mathsf{M} \Rightarrow X \in \mathsf{N}$;

$\mathsf{p}: \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ označujeme zobrazenie p z množiny M do množiny N tj. predpis, podľa ktorého každému prvku $X \in \mathsf{M}$ je možné a to jednoznačne priradiť prvok množiny N. Tento prvok označujeme potom $\mathsf{p}(X)$.

Poznamenajme, že v texte tejto knižočky sa zobrazenie vyskytuje v článku 3.3, pričom tri tam vystupujúce zobrazenia sú značené σ, p a P.

B. Polodotyčnica (v e-rovine).

Nech T je koncový bod kruhového oblúka a, ležiaceho na kružnici $k(S, r)$. Nech t je dotyčnica ku kružnici k vedená v bode T. Zvoľme bod $P \in a$ tak, aby stredový uhol $\sphericalangle TSP$ prislúchajúci oblúku $\widehat{TP} \subset a$ bol uhlom ostrým. Potom polpriamku $t_1 \equiv TQ$, kde $Q \equiv t \cap PS$, nazveme *polodotyčnicou oblúka a v bode T*. Pri tejto definícii je nepodstatné, či koncový bod T sám k oblúku a náleží, alebo nenáleží.

C. Poznámka o uhloch (v e-rovine).

Nech $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CVD$ sú dva pravé uhly so spoločným vrcholom V. Nech naviac $AV = BV = CV = DV$. Uhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CVD$ nazveme súhlasne orientované, ak otočenie okolo bodu V, ktoré prevedie bod C do bodu A prevedie aj bod D do bodu B. V opačnom prípade povieme, že uhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CVD$ sú opačne orientované. Ak veľkosť uhla $\sphericalangle AVC$ označíme α, potom veľkosť uhla

$\sphericalangle BVD$ je rovná α v prípade, že $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle$ CVD sú súhlasne orientované a $180° - \alpha$ v prípade, že $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CVD$ sú nesúhlasne orientované.

D. Mocnosť bodu ke kružnici (v e-rovine).

Nech je daná kružnica $k(S, r)$ a bod M. Číslo $MS^2 - r^2$ nazveme mocnosť bodu M ku kružnici $k(S, r)$. Platí nasledujúca

Veta o mocnosti bodu ku kružnici.

Nech $P \not\equiv Q$ sú priesečníky priamky p s kružnicou $k(S, r)$ a nech M je bod priamky p. Potom číslo $MP \cdot MQ$ je rovné

a) mocnosti bodu M ku kružnici $k(S, r)$ práve keď M leží zvonka, alebo na kružnici k,

b) zápornej hodnote mocnosti bodu M ku kružnici $k(S, r)$ práve keď M leží vnútri, alebo na kružnici k.

V prípade a) je mocnosť bodu M ku k rovná tiež číslu MT^2, kde T je dotykový bod (ktorejkoľvek) dotyčnice vedenej bodom M ku k. Mocnosť bodu M ku k je rovná nule práve keď $M \in k$ a číslu $-r^2$ práve keď $M \equiv S$.

Dôkaz. Prípady $S \equiv M$ a $M \in k$ sú evidentné. Nech teda $S \not\equiv M \in k$, $S \in p$. Nech A, B sú priesečníky priamky SM s kružnicou k. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať také značenie bodov A, B, P a Q, že body M, A, P a S ležia v jednej polrovine vyťatej priamkou BQ. Pretože veľkosti uhlov $\sphericalangle PQA$, $\sphericalangle PBA$ sú rovnaké podľa vety o obvodovom uhle, sú trojuholníky MPB a MAQ podobné. Preto je $MP : MB = MA : MQ$, odkiaľ

$$MP.MQ = MA.MB = |(MS - r).(MS + r)| = \\ = |MS^2 - r^2|.$$

Číslo v poslednej absolútnej hodnote je mocnosť M ku k; toto číslo je zrejme kladné ak M leží zvonka a záporné ak M leží vnútri k. Posledné tvrdenie vety: $MT^2 = MS - r^2$ je okamžite zrejmé podľa Pytagorovej vety. Veta o mocnosti je dokázaná.

E. Poznámka ku kružnici (v e-rovine).

Dokážeme nasledovnú vetu.

Veta. Nech M je vonkajší bod kružnice $k(S, r)$ a nech Q je vnútorný bod kružnice k ležiaci na polpriamke SM. Nech konečne T je jeden z priesečníkov kolmice vedenej bodom Q ku MS s kuržnicou k. Potom priamka MT je dotyčnicou ku kružnici k práve vtedy, ak platí $SQ.SM = = ST^2$.

Dôkaz. Ak posledná rovnica platí, potom podľa euklidovej vety o strane je uhol STM pravý a teda $MT \perp TS$ je dotyčnicou ku k s dotykovým bodom T. Ak naopak je MT dotyčnicou, potom znovu podľa euklidovej vety o strane platí horný vzťah.

F. Veta Pappova (v e-rovine).

Nech sú dané dve rôzne priamky p a p' a nech a, b, c, d, sú priamky, vzájomne rôznobežné so spoločným priesečníkom $V \notin p \cup p'$. Priesečníky priamok a, b, c, d s priamkou p resp. p' označme v poradí A, B, C, D resp. A', B', C', D'. Potom platí:

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{A'C'}{A'D'} : \frac{B'C'}{B'D'}.$$

Dôkaz. Nech v je vzdialenosť bodu V od priamky p a označme α, β, γ, σ veľkosti uhlov AVD, BVC, AVC, BVD v poradí. Obsah trojuholníka AVD môžeme vyjadriť dvoma rôznymi spôsobmi. Tak dostaneme rovnosť $AD.v = 2\,AV.DV \sin \alpha$. Podobné rovnosti napíšeme pre trojuholníky BVC, AVC, BVD. Potom

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC.v}{AD.v} : \frac{BC.v}{BD.v} =$$

$$= \frac{AV.CV \sin \gamma}{AV.DV \sin \alpha} : \frac{BV.CV \sin \beta}{BV.DV \sin \sigma} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} : \frac{\sin \beta}{\sin \sigma}.$$

Rovnakú úpravu prevedieme aj pre pravú (čiarkovanú) stranu dokazovanej rovnosti. Pretože výsledok v obidvoch úpravách je ten istý rovnajú sa aj obidva upravované výrazy. Veta je dokázaná. Poznamenajme, že poloha priamok p, p' môže byť buď rovnobežná, alebo rôznobežná. V poslednom prípade môže napríklad bod A splynúť s A', teda $A \equiv A' \equiv p \cap p'$.

ZÁVER

Čitateľ, ktorý sa prehrýzol až ku tomuto záveru má iste mnoho otázok: prečo je miera l-úsečky v modeli B či v modeli P definovaná takým čudným zpôsobom, ako je to s mierou l-uhla v modeli B, či existuje Lobačevského geometria aj v priestore, aká je vlastne axiomatická sústava euklidovská a aká Lobačevského, či existuje okrem euklidovskej a Lobačevského planimetrie aj iná planimetria atď. atď....

Ako sme už v úvode povedali nebolo cieľom knižky dať ucelený pohľad na neeuklidovskú geometriu, ale oboznámiť čitateľa s niektorými myšlienkami a otvoriť mu cestu do niektorých ďalších oblastí matematiky. Zodpovedanie uvedených (a mnohých ďalších) otázok nutne predpokladá podstatne hlbšie načretie do štruktúry elementárnej geometrie. Vstupnou bránou do štruktúry syntetickej geometrie bolo objavenie tzv. projektívnej geometrie, ktorá je strešnou teóriou nielen v geometrii euklidovskej a Lobačevského, ale aj mnohým ďalším (eliptická, afinná, unimodulárna...).

Veríme, že krásna téma projektívnej geometrie najde autorov, ktorí by ju v tejto edícii sprístupnili našim mladým čitateľom.

Autori

OBSAH

Úvod - - - - - - - - - - - - - - - - - - 3

1. Axiomatizovaná teória a jej model - - - - - - - - 5

1.1. Pojem základný a pojem odvodený - - - - - - - - 5
1.2. Axiomatizovaná teória - - - - - - - - - - - - 7
1.3. Modely axiomatizovanej teórie - - - - - - - - - 11
1.4. Od modelu k axiomatizovanej teórii - - - - - - - - 15
1.5. Sústava axiom axiomatizovanej teórie - - - - - - - 17
1.6. Axiomatizovaná teória a jej modely - - - - - - - - 20

2. Historické poznámky - - - - - - - - - - - - 23

3. Modely Lobačovského planimetrie - - - - - - - 30

3.1. Spôsob štúdia Lobačevského planimetrie - - - - - - 30
3.2. Model $\mathcal{B}$ (Beltrami – Klein) - - - - - - - - - - 32
3.3. Kolmosť v modeli $\mathcal{B}$ - - - - - - - - - - - - - 37
3.4. Miera úsečky v modeli $\mathcal{B}$ - - - - - - - - - - - 43
3.5. Model $\mathfrak{P}$ (Poincaré) - - - - - - - - - - - - 50
3.6. Miera uhla v modeli $\mathfrak{P}$ - - - - - - - - - - - - 55
3.7. Miera úsečky v modeli $\mathfrak{P}$ - - - - - - - - - - - 66

Riešenie úloh - - - - - - - - - - - - - - 78

Kapitola 1 - - - - - - - - - - - - - - 78
Kapitola 3 - - - - - - - - - - - - - - 84

Dodatok - - - - - - - - - - - - - - - - - 110

A. Logika a množiny - - - - - - - - - - - - - 110
B. Polodotyčnica - - - - - - - - - - - - - - 112
C. Poznámky o uhloch- - - - - - - - - - - - - 112
D. Mocnosť bodu ku kružnici - - - - - - - - - - 115
E. Poznámka ku kružnici - - - - - - - - - - - - 114
F. Veta Pappova - - - - - - - - - - - - - - - 114

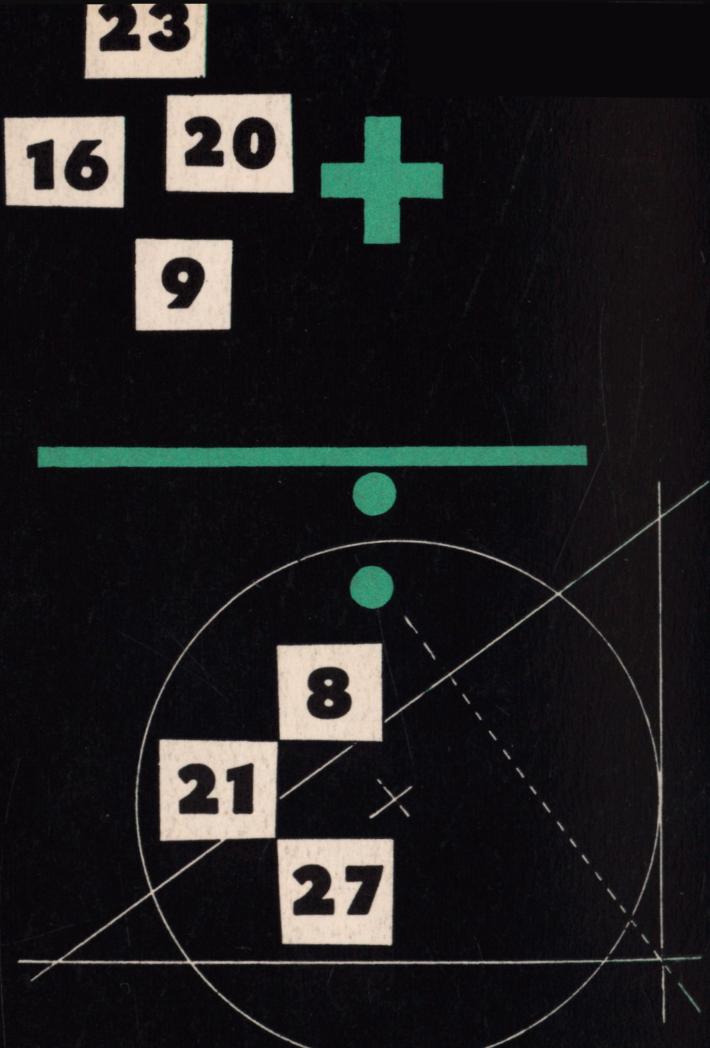
Záver - - - - - - - - - - - - - - - - - - 117

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAN GATIAL - MILAN HEJNÝ

stavba Lobačevského planimetrie

Pro účastníky matematické olympiády vydává
ÚV Matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 2813
Edice Škola mladých matematiků, svazek 24
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p.,
závod 6, Praha 2, Legerova 22
4,98 AA, 5,15 VA
Náklad 5500 výtisků. 1. vydání
120 stran. 507/21/8.5 Praha 1969
23-093-69 03-2 Cena brož. výt. Kčs 7,—



23-093-69
03/2
Cena brož.
Kčs 7,—