# Vytvořující funkce

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

# VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE

29

Vydal ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

# vytvořující funkce

FRANTIŠEK ZÍTEK

PRAHA
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

*Recenzovali Dr. Jaroslav Fuka a Dr. Pavel Kostyrko*

# PŘEDMLUVA

Když se žáci našich středních škol seznamují s elementy kombinatoriky, vzniká v nich dosti často málo příznivý dojem, jako by kombinatorika byla jen jakousi okrajovou záležitostí bez hlubšího teoretického podkladu, vhodnou spíše pro zábavné koutky nedělních novin a časopisů. Na obvyklé středoškolské úrovni se kombinatorika většinou jeví jako málo soustavná tříšť různých, navzájem příliš nesouvisejících vzorců a vztahů; kombinatorické úlohy se tu obvykle řeší jen úvahami ad hoc, pomocí „zdravého úsudku", často spíše obratným trikem. Ostatně i samotný charakter řešených úloh přispívá k posílení dojmu umělosti a malé praktické užitečnosti celé této disciplíny. (Jen zcela mimochodem: podobný osud tradičně stíhá také počet pravděpodobnosti, snad proto, že je — aspoň na úrovni střední školy — úzce spjat právě s kombinatorikou.) Dokonce i u vysokoškolsky vzdělaných odborníků se můžeme občas ještě setkat s podceňováním kombinatoriky a naopak s přeceňováním významu a centrálního postavení tzv. vyšší matematiky, zejména klasické analýzy.

Na druhé straně však, jak tomu nasvědčuje celý současný vývoj matematiky, význam tzv. konečné nebo diskrétní matematiky, a tedy také kombinatoriky, jež k ní patří, neustále roste. Nejenom že se kombinatorika samotná rozvinula tak, že už dávno daleko přesáhla rámec tradiční „nauky o permutacích, kombinacích a variacích", ale v poslední době jsme zejména svědky toho, že kombinatorika a jí příbuzné disciplíny nacházejí stále větší uplatnění i v *praktických aplikacích* matematiky v technických a ekonomických oborech. S kombinatorickými úlohami se setkáváme i v zdánlivě zcela vzdálených oblastech matematiky. A pro čtenáře Školy mladých matematiků není bez významu ani ta skutečnost, že také v matematických olympiádách, ať už našich, domácích, anebo v olympiádách mezinárodních se takřka pravidelně objevují úlohy kombinatorického rázu. Z tohoto hlediska se tedy hlubší seznámení s touto zajímavou matematickou disciplínou jeví jako velmi žádoucí.

Není úkolem této knížky podat systematický výklad celé kombinatoriky či alespoň přehled jejích hlavních výsledků a metod. Naše cíle jsou mnohem skromnější: chtěli bychom seznámit čtenáře se základními myšlenkami aspoň jedné obecné metody kombinatoriky, založené na použití tzv. vytvořujících funkcí. Domníváme se totiž, že je to právě nedostatek obecných metod a algoritmů, který přispívá k nezájmu o kombinatoriku. Kromě toho lze metody vytvořujících funkcí s úspěchem využít též jinde: v počtu pravděpodobnosti, při řešení diferenčních rovnic atd.

Celá knížka se skládá ze tří částí. První pojednává o vztazích mezi mnohočleny a jejich koeficienty a navazuje tedy dosti úzce na běžnou středoškolskou látku. Druhá část rozšiřuje pojem mnohočlenu směrem k mocninným řadám (aniž by přirozeně dospěla až k jejich systematické teorii). Ve třetí části pak teprve jde o kombinatorické aplikace teorie vytvořujících funkcí. Pokud se týče ostatních aplikací vytvořujících funkcí, o těch jsou zde jen letmé a nesoustavné zmínky; jejich důkladnější zpracování by si vyžádalo mnohem více místa.

Zbývá snad jen poznamenat, že metoda vytvořujících funkcí a algebraické metody vůbec nejsou jediné obecné metody užívané v kombinatorice. V této souvislosti bychom chtěli zvláště upozornit na teorii grafů — dnes již velmi rozsáhlou, ale ve svých základech i na úrovni střední školy přístupnou — která rovněž poskytuje kombinatorice, do níž bývá ostatně občas zahrnována, nejen vlastní metody, ale i problémy a podněty k další práci.

*V Praze v únoru 1972* *Autor*

# I.

# MNOHOČLENY A JEJICH KOEFICIENTY

**1. Mnohočleny.** Převážnou většinu čtenářů této knížky budou bezpochyby tvořit žáci středních škol, kteří se hlouběji zajímají o matematiku, takže snad nebude nemístné očekávat, že mají jisté základní znalosti středoškolské algebry. Půjde tu především o *mnohočleny* (polynomy) s reálnými koeficienty. Předpokládáme tedy, že naši čtenáři znají nejenom samotný pojem mnohočlenu, ale že se seznámili i s jednoduššími vlastnostmi mnohočlenů, vědí např., co to jsou koeficienty mnohočlenu, absolutní člen, stupeň mnohočlenu, nulový mnohočlen atp., dovedou také s mnohočleny zacházet, tzn. upravovat je a provádět s nimi základní početní operace sčítání a násobení, umějí dosazovat do mnohočlenu za proměnnou reálné hodnoty atd. Mohou si ostatně — pokud by si snad v těchto věcech nebyli jisti — své vědomosti o mnohočlenech doplnit a z obecnějšího hlediska prohloubit prostudováním příslušných partií 26. svazku Školy mladých matematiků, tj. knížky K. Hruši *Polynomy v moderní algebře* (Mladá fronta, Praha 1970). Četbu Hrušovy knížky můžeme doporučit všem, není však nezbytně nutná pro porozumění našemu dalšímu výkladu.

Mnohočleny zde budeme obvykle psát v základním tvaru se členy uspořádanými podle mocnin proměnné

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \,, \tag{1}$$

přičemž většinou nevypisujeme členy s nulovými koeficienty ani koeficienty, které jsou rovny jedné. Zápis (1) vyjadřuje tedy mnohočlen stupně $n$, je-li $a_n \neq 0$, resp. obecně mnohočlen stupně nejvýše $n$.

Předpokládáme také, že naši čtenáři vědí, že dva mnohočleny jsou si rovny (a to identicky, pro všechny reálné hodnoty proměnné $x$) *právě tehdy*, jestliže mají u stejných mocnin proměnné vesměs také stejné koeficienty. Této věty budeme v dalším často používat.

Pro úplnost připojme ještě snad úplnou samozřejmost, že znalost mnohočlenů a početních operací s nimi nutně předpokládá znalost reálných čísel (a operací s nimi), jež v mnohočlenech vystupují v roli koeficientů: jednak se operace s mnohočleny i četné jejich vlastnosti obvykle převádějí na obdobné operace s jejich koeficienty, jednak tvoří reálná čísla vlastně jen zvláštní případ mnohočlenů — mnohočleny nultého stupně neboli konstanty.

**2. Binomické koeficienty.** Již na střední škole se při různých příležitostech setkáváme s čísly $\binom{n}{k}$, definovanými pro celá $n \geqq k \geqq 0$ vzorcem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \quad (0! = 1)\ ; \qquad (2)$$

tuto definici pak rozšiřujeme pro všechna celá nezáporná $n$, $k$ tak, že při $k > n$ klademe $\binom{n}{k} = 0$.

V kombinatorice známe čísla $\binom{n}{k}$ pod názvem *kombinační čísla*: číslo $\binom{n}{k}$ udává „počet kombinací $k$-té třídy z $n$prvků“, neboli — vyjádřeno modernější terminologií

— počet všech různých $k$-prvkových podmnožin dané množiny o $n$ prvcích.

V jiné souvislosti se nám čísla $\binom{n}{k}$ objevují v tzv. binomickém vzorci, tj. ve vzorci pro $n$-tou mocninu dvojčlenu (binomu):

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \qquad (3)$$
$$+ \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n} b^n ;$$

zde se číslům $\binom{n}{k}$ říká *binomické koeficienty*.

O obou těchto významech i o četných dalších vlastnostech čísel $\binom{n}{k}$ pojednává mj. knížka J. Sedláčka, *Faktoriály a kombinační čísla*, která vyšla jako 10. svazek Školy mladých matematiků (Mladá Fronta, Praha 1964); doporučujeme čtenářům, aby si ji příležitostně také pročetli.

V dalším nás budou zajímat především vlastnosti čísel $\binom{n}{k}$ jakožto binomických koeficientů; k souvislostem s kombinatorickými problémy se vrátíme až později, ke konci naší knížky. Budeme tu vycházet z binomického vzorce (3), který si však upravíme dosazením $a = 1$, $b = x$ na výhodnější tvar

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{k} x^k +$$
$$+ \ldots + \binom{n}{n} x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k , \qquad (4)$$

$(n \geqq 0,$ celé

číslo $\binom{n}{k}$ je tu koeficientem při $x^k$ v mnohočlenu $(1 + x)^n$.

Některé jednoduché vlastnosti čísel $\binom{n}{k}$ jsou všeobecně známé a snadno se odvodí přímo z jejich definice (2). Tak např. víme, že pro všechna celá nezáporná $n$, $k$ platí

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \tag{5}$$

Přímý důkaz rovnosti (5) pomocí vyjádření (2) není opravdu nijak obtížný a vyžaduje jen jisté elemementární úpravy odpovídajících výrazů. Jestliže však už známe vztah (4), můžeme ho využít k poněkud méně pracnému odvození rovnosti (5). Skutečně, stačí k tomu vyjít z identity

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n = (1 + x)^n + \\ + x(1 + x)^n .$$

Podle věty o rovnosti koeficientů v mnohočlenech, kterou jsme si připomněli v předchozím odstavci, je koeficient při $x^{k+1}$ v mnohočlenu na levé straně – a to je právě číslo $\binom{n+1}{k+1}$ – nutně roven odpovídajícímu koeficientu v mnohočlenu na pravé straně, resp. součtu všech takových koeficientů v mnohočlenech, jejichž součet tuto pravou stranu identity tvoří. To však je právě součet čísel $\binom{n}{k+1}$ a $\binom{n}{k}$; tím je rovnost (5) obecně dokázána.

Věty o rovnosti koeficientů však můžeme použít také v obráceném směru. Mají-li dva mnohočleny vesměs stejné koeficienty u odpovídajících si mocnin proměnné, jsou si také identicky rovny a můžeme tudíž do nich dosadit za proměnnou libovolnou reálnou hodnotu; rovnost zůstane zachována. Také tohoto postupu dosazování reálných hodnot za proměnnou lze využít k odvození různých vztahů a vlastností binomických koeficientů. Takřka triviálním příkladem je důkaz známé rovnosti

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{k}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n\ ; \tag{6}$$

dostaneme ji ze (4) dosazením $x = 1$.

Tyto dva jednoduché příklady naznačují vlastně již základní myšlenku celé další teorie, využití věty o rovnosti koeficientů k odvozování vztahů mezi nimi; tuto myšlenku budeme nyní dále rozvíjet. Nejprve si však pro pocvičení odvodíme obdobným způsobem ještě několik dalších, známých i méně známých, prostých i méně samozřejmých vlastností čísel $\binom{n}{k}$.

**Příklad 1.** Přímým zobecněním vzorce (5) je rovnost

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}, \tag{7}$$

platná pro celá nezáporná $n$, $m$ a $k = 0, 1, 2, \ldots, n + m$. Odvodíme si ji snadno porovnáním koeficientů při $x^k$ v mnohočlenech v identitě

$$(1 + x)^{n+m} = (1 + x)^n (1 + x)^m .$$

Předpokládáme, že si čtenář dovede představit, jak vypadají koeficienty v součinu dvou mnohočlenů. Vzorec (5) je pak speciálním případem vzorce (7), a to pro $m = 1$.

**Příklad 2.** Celkem snadná a ostatně z (2) zcela zřejmá je rovnost

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{8}$$

$$n \geqq k \geqq 0\,;$$

můžeme ji získat i tak, že ve vzorci (4) budeme předpokládat $x \neq 0$ a položíme $y = 1/x$; bude pak (identicky)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1 + x)^n = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^n = \frac{1}{y^n}(1 + y)^n =$$

$$= \frac{1}{y^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{k-n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k\,.$$

Jak vidíme, může být někdy přímá cesta snazší než oklika přes koeficienty mnohočlenů, to však nijak nesnižuje užitečnost obecného postupu.

Aby vztah (8) platil i při $k > n$, kdy je $\binom{n}{k} = 0$, doplňuje se někdy definice čísel $\binom{n}{k}$ pro záporná $k$ tak, že také zde klademe $\binom{n}{k} = 0$ (tedy pro $n \geqq 0 > k$).

**Příklad 3.** Trochu méně známá je snad rovnost

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2. \tag{9}$$

K jejímu odvození užijeme rovnosti (8), která umožňuje psát (9) ve tvaru

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n}{n-j}.$$

Potom však již nejde o nic jiného než o zvláštní případ rovnosti (7), položíme-li v ní $m = n$, $k = n$.

Píšeme-li v (4) všude $-x$ místo $x$, dostaneme vztah

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k ; \tag{10}$$

v mnohočlenu $(1 - x)^n$ je tedy koeficient při $x^k$ roven $(-1)^k \binom{n}{k}$. Také odtud lze odvodit řadu zajímavých vlastností čísel $\binom{n}{k}$. Dosadíme-li např. do (10) $x = 1$, dostaneme

$$(1-1)^n = 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \tag{11}$$
$$+ \binom{n}{2} - + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

Podobně dosazením $x = 2$ vychází

$$\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n}{k} = (-1)^n. \tag{12}$$

**Příklad 4.** Poněvadž $(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2$, platí identicky

$$(1+x)^n (1-x)^n = (1-x^2)^n.$$

Porovnáním koeficientů při stejných mocninách proměnné $x$ odtud dostáváme podle toho, zda jde o sudou či lichou mocninu, jednak

$$\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{2m-k} = (-1)^m \binom{n}{m}$$

pro $0 \leqq m \leqq n$, jednak

$$\sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{2m+1-k} = 0$$

pro všechna $m \geqq 0$.

**Příklad 5.** Ukážeme si nyní ještě jedno zobecnění vztahu (5); vyjdeme přitom ze známé identity

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \\ + \ldots + a^{n-k}b^k + \ldots + ab^{n-1} + b^n) . \qquad (13)$$

Položme zde $a = 1 + x$, $b = x$, takže

$$(1+x)^{n+1} - x^{n+1} = (1+x)^n + x(1+x)^{n-1} + \\ + x^2(1+x)^{n-2} + \ldots + x^{n-1}(1+x) + x^n . \qquad (13')$$

V této identitě porovnáme koeficienty při $x^k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ na obou stranách; obdržíme tak rovnost

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} + \qquad (14)$$

$$+ \ldots + \binom{n-k}{0} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-j}{k-j} .$$

Píšeme-li zde $m = n - k + 1$, tj. $n = m + k - 1$, dostane rovnost (14) nový tvar, totiž

$$\binom{m+k}{k} = \binom{m+k-1}{k} + \binom{m+k-2}{k-1} + \qquad (14')$$

$$+ \ldots + \binom{m-1}{0} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m+j-1}{j}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Vzorce (14′) ještě použijeme v dalších odstavcích.

Vzorci a vztahy, které jsme si tu doposud uvedli, nejsou přirozeně vyčerpány všechny možnosti. Odvození několika dalších vztahů přenecháváme pro pocvičení čtenáři.

*Cvičení*

Dokažte

1. $\binom{2n}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{m-k}, \qquad 0 \leqq m \leqq n.$

2. $\sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-k}{m} \binom{n}{k} = 0, \qquad 0 \leqq m < n.$

3. $\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-m} = 2^m \binom{n}{m}, \qquad 0 \leqq m \leqq n.$

4. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \frac{n}{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} = 2^{2n-1}.$

**3. Stirlingova čísla.** Přirozené mocniny dvojčlenu $1 + x$, resp. $1 - x$ nejsou ovšem jedinými mnohočleny, jejichž koeficienty mají zvláštní význam. Podobnou úlohu jako binomické koeficienty $\binom{n}{k}$ hrají v kombinatorice i jiné koeficienty, mj. tzv. Stirlingova čísla, jež si nyní zavedeme.

Součiny tvaru

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$$

potkáváme v kombinatorice takřka na každém kroku, vlastně i v binomických koeficientech. Nahradíme-li zde $m$ proměnnou $x$, dostaneme mnohočlen

$$F_n(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) \qquad (15)$$

zřejmě $n$-tého stupně. Přepíšeme si jej v obvyklém tvaru, uspořádaný podle mocnin proměnné $x$ a označíme $s(n, k)$, $k = 0,1, \dots, n$, jeho koeficienty, tedy

$$F_n(x) = s(n, 0) + s(n, 1)x + s(n, 2)x^2 + \dots + \\ + s(n, n)x^n . \qquad (16)$$

Čísla $s(n, k)$, $k = 0, 1, \dots, n$; $n = 1, 2, 3, \dots$ se nazývají *Stirlingova čísla prvního druhu*. K jejich významu v kombinatorice se ještě vrátíme později, zde si jen — stejným způsobem jako v případě binomických koeficientů — formálně odvodíme některé vztahy a vlastnosti Stirlingových čísel.

Bezprostředním porovnáním vyjádření (15) a (16) zjistíme, že je vždy, tj. pro všechna přirozená $n$,

$$s(n, 0) = 0 , \qquad s(n, n) = 1 , \qquad (17)$$

a že pro $k > n$ je $s(n, k) = 0$, neboť $F_n(x)$ je stupně právě $n$.

Zároveň je však z (15) ihned vidět, že platí

$$F_{n+1}(x) = F_n(x) . (x - n) = xF_n(x) - nF_n(x) . \qquad (18)$$

Přepíšeme si tuto identitu pomocí (16)

$$\sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k)x^k = \sum_{k=0}^{n} s(n, k)x^{k+1} - n \sum_{k=0}^{n} s(n, k)x^k .$$

Porovnáním koeficientů při stejných mocninách proměnné $x$ dostaneme vztah

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k)\,, \qquad 1 \leqq k \leqq n\,. \tag{19}$$

Spolu s hodnotami (17) umožňuje nám rekurentní relace (19) postupně vypočítat všechna Stirlingova čísla pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ Několik hodnot $s(n, k)$ pro malá $n, k$ ($\leqq 8$) uvádíme v následující tabulce, kde jsme připojili též konvencí stanovené hodnoty $s(0, 0) = 1$, $s(0, k) = 0$ pro $k > 0$ — tzn. $F_0(x) \equiv 1$ —:

| $k =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 0$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | −1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 2 | −3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | −6 | 11 | −6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 24 | −50 | 35 | −10 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | −120 | 274 | −225 | 85 | −15 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 720 | −1764 | 1624 | −735 | 175 | −21 | 1 | 0 |
| 8 | 0 | −5040 | 13068 | −13132 | 6769 | −1960 | 322 | −28 | 1 |

Vztah (18) není ovšem jedinou možnou úpravou rovnosti (15). Stejně dobře můžeme podle (15) psát např.

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x-1)\,, \tag{20}$$

odkud po přechodu k vyjádření (16) plyne rovnost

$$\sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k)x^k = \sum_{k=0}^{n} s(n, k)\, x(x-1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} s(n, k) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{j+1} (-1)^{k+j}\,.$$

Dalšími, celkem jednoduchými úpravami odtud dostáváme nakonec identitu

$$\sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k)x^k = \tag{21}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} x^k \sum_{r=0}^{n+1-k} \binom{r+k-1}{r} (-1)^r s(n, r+k-1).$$

Jako obvykle porovnáme teď koeficienty při $x^k$ na obou stranách identity (21) a máme

$$s(n+1, k) = \sum_{r=0}^{n+1-k} (-1)^r \binom{r+k-1}{r} s(n, r+k-1), \tag{22}$$

nebo po dosazení $m = n + 1,\ q = r + k,$

$$s(m, k) = \tag{22'}$$

$$= \sum_{q=k}^{m} (-1)^{q-k} \binom{q-1}{q-k} s(m-1,\ q-1), \qquad 1 \leqq k \leqq m.$$

**Příklad 6.** Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ platí

$$\sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} s(n+1, j) = \tag{23}$$

$$= s(n, k) + s(n, k-1), \qquad 1 \leqq k \leqq n-1.$$

Tuto rovnost lze rovněž odvodit z (20), jestliže tam napíšeme všude $x + 1$ namísto $x$, tedy

$$F_{n+1}(x+1) = (x+1)\, F_n(x) = xF_n(x) + F_n(x). \tag{20'}$$

Podle (16) pak bude jednak

$$F_{n+1}(x+1) = \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k)\,(x+1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} s(n+1, k) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} x^k \sum_{j=k}^{n+1} \binom{j}{k} s(n+1, j)\,,$$

jednak

$$xF_n(x) + F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s(n, k)\,x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} s(n, k)\,x^k =$$

$$= s(n, 0)\,x^0 + \sum_{k=1}^{n} [s(n, k-1) + s(n, k)]x^k + s(n, n)\,x^{n+1}\,.$$

A nyní stačí již jen opět porovnat koeficienty při $x^k$, $k = 1$, $2, \ldots, n+1$, abychom dostali požadovanou rovnost (23).

**Příklad 7.** Pro $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\sum_{k=j}^{n} s(n, k) \binom{k}{j} \left[n^{k-j} - (-1)^{n-k}\right] = 0\,. \tag{24}$$

K odvození této rovnosti vyjdeme opět z (15), kde však místo $x$ píšeme všude $-x-1$, tedy

$$F_n(-x-1) = (-x-1)(-x-2) \ldots (-x-n)\,.$$

Odtud však plyne užitečný vztah

$$F_n[-(x+1)] = (-1)^n F_n(x+n)\,. \qquad (25)$$

Přejdeme nyní k vyjádření (16); na levé straně identity (25) dostáváme postupně

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)\,(-1)^k\,(x+1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\,(-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\, x^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} x^j \sum_{k=j}^{n} (-1)^k\, s(n,k) \binom{k}{j}\,,$$

kdežto na pravé straně vyjde

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\,(x+n)^k =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} s(n,k) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\, x^j n^{k-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} x^j \sum_{k=j}^{n} (-1)^n\, s(n,k) \binom{k}{j} n^{k-j}\,.$$

Porovnáme koeficienty při stejných mocninách $x$ a odečteme

$$\sum_{k=j}^{n} s(n,k) \binom{k}{j} \left[(-1)^n n^{k-j} - (-1)^k\right] = 0\,.$$

Vynásobením této rovnosti číslem $(-1)^n$ dostaneme (24).

Pro pocvičení přenecháváme čtenářům odvození několika jednoduchých vztahů; k jejich formulaci poskytují inspiraci výsledky uvedené výše (včetně tabulky hodnot $s(n, k)$).

*Cvičení*

Dokažte

6. $s(n + 1, 1) = (-1)^n n!\ ,\qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

7. $s(n + 1, n) = -\binom{n+1}{2}\ ,\qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

8. $\sum\limits_{k=0}^{n} s(n, k)\left[n^k - (-1)^{n-k}\right] = 0\ ,\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

**4. Derivace.** Pojem derivace funkce patří svou podstatou do matematické analýzy a pojat obecně přesahuje poněkud rámec všeobecných středoškolských znalostí. V algebře však můžeme definovat derivaci mnohočlenu zcela formálně jako jistou operaci provedenou s jeho koeficienty, bez přímé souvislosti s významem derivace jakožto limity podílu přírůstků funkce a jejího argumentu; to si nyní ukážeme.

Mějme dán mnohočlen

$$M(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k\ ; \qquad (26)$$

jeho *derivací* nazveme a $M'(x)$ nebo $\mathrm{D}M(x)$ označíme mnohočlen

$$M'(x) = a'_0 + a'_1x + a'_2x^2 + \ldots + a'_nx^n \;,$$

pro jehož koeficienty platí $a'_{k-1} = k\,a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $a'_k = 0$ pro $k \geqq n$, tedy mnohočlen

$$M'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} = \tag{27}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} ka_kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}x^k \;.$$

**Příklad 8.** Derivací mnohočlenu

$$2 - 3x^2 + 5x^3 - x^7 + x^8$$

je mnohočlen

$$-6x + 15x^2 - 7x^6 + 8x^7 \;;$$

derivací mnohočlenu $3 - x + \frac{1}{6}x^4$ je mnohočlen $-1 + \frac{2}{3}x^3$.

Z definice derivace mnohočlenu je zřejmé, že derivací mnohočlenu stupně $n > 0$ je mnohočlen stupně $n - 1$. Derivací mnohočlenu stupně nula (tj. konstanty) je vždy mnohočlen nulový: je-li $M(x) \equiv c$ je $M'(x) \equiv 0$; také derivace nulového mnohočlenu je mnohočlen nulový.

Derivace mnohočlenu je jednoznačně určena jeho koeficienty. Platí-li pro dva mnohočleny $M(x)$, $N(x)$ rovnost $M(x) = N(x)$ (ve smyslu identity, tj. rovnosti všech koeficientů), platí také $M'(x) = N'(x)$. Toto tvrzení nelze obrátit, neboť existují zřejmě různé mnohočleny mající stejnou derivaci. Jsou-li

$$M(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

a

$$N(x) = \bar{a}_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

dva mnohočleny s různými absolutními členy ($a_0 \neq \bar{a}_0$), mají přesto touž derivaci

$$M'(x) = N'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} .$$

Vzhledem k početním operacím sčítání a násobení mnohočlenů platí pro operaci derivování následující jednoduchá *pravidla*:

1. Derivace součtu dvou mnohočlenů je rovna součtu jejich derivací

$$\mathrm{D}[M(x) + N(x)] = \mathrm{D}M(x) + \mathrm{D}N(x) . \qquad (28)$$

Skutečně, nechť $M(x) = \Sigma\, a_kx^k$, $N(x) = \Sigma\, b_kx^k$, pak

$$\begin{aligned} \mathrm{D}[M(x) + N(x)] &= \mathrm{D}[\Sigma a_kx^k + \Sigma b_kx^k] = \\ &= \mathrm{D}[\Sigma(a_k + b_k)x^k] = \Sigma k(a_k + b_k)x^{k-1} = \\ &= \Sigma ka_kx^{k-1} + \Sigma kb_kx^{k-1} = \mathrm{D}M(x) + \mathrm{D}N(x) . \end{aligned}$$

2. Je-li $c$ reálné číslo a $M(x)$ mnohočlen, pak derivací mnohočlenu $cM(x)$ je $c$-násobek derivace mnohočlenu $M(x)$

$$\mathrm{D}[cM(x)] = c\mathrm{D}M(x) . \qquad (29)$$

Je totiž pro $M(x) = \Sigma a_kx^k$

$$\begin{aligned} \mathrm{D}[cM(x)] &= \mathrm{D}[c\Sigma a_kx^k] = \mathrm{D}[\Sigma ca_kx^k] = \\ &= \Sigma kca_kx^{k-1} = c\Sigma ka_kx^{k-1} = c\mathrm{D}M(x) . \end{aligned}$$

Derivací mnohočlenu $x^k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) je zřejmě vždy mnohočlen $kx^{k-1}$; známe-li pravidla 1 a 2 a umíme-li derivovat tyto jednoduché mnohočleny tvaru $x^k$, umíme už derivovat libovolný mnohočlen, neboť si každý mnohočlen $M(x)$ můžeme představit jako součet mnohočlenů (vlastně jednočlenů) tvaru $x^k$ násobených reálnými konstantami (koeficienty mnohočlenu $M(x)$).

3. Pro derivaci součinu dvou mnohočlenů platí vzorec

$$D[M(x)\,.\,N(x)] = M(x)\,.\,N'(x) + M'(x)\,.\,N(x)\;. \quad (30)$$

Nechť $M(x) = \sum a_k x^k$, $N(x) = \sum b_j x^j$, potom

$$D[M(x)\,.\,N(x)] = D\left[\sum a_k x^k\,.\,\sum b_j x^j\right] =$$

$$= D\left[\sum_k \sum_j a_k b_j x^{k+j}\right] = \sum_k \sum_j (k+j) a_k b_j x^{k+j-1} =$$

$$= \sum_k \sum_j k a_k x^{k-1} b_j x^j + \sum_k \sum_j a_k x^k j b_j x^{j-1} =$$

$$= \sum_k k a_k x^{k-1} \sum_j b_j x^j + \sum_k a_k x^k \sum_j j b_j x^{j-1} =$$

$$= M'(x)\,N(x) + M(x)\,N'(x)\;.$$

**Příklad 9.** Nechť $M(x) = 1 + 2x + x^2$, $N(x) = 1 - 2x + x^2$ a počítejme derivaci součinu obou těchto mnohočlenů. Je $M'(x) = 2 + 2x$, $N'(x) = -2 + 2x$, takže podle (30) bude

$$\begin{aligned} D[M(x)\,.\,N(x)] &= M'(x)\,N(x) + M(x)\,.\,N'(x) = \\ &= (2+2x)(1-2x+x^2) + (1+2x+x^2)(-2+2x) = \\ &= 2 - 2x - 2x^2 + 2x^3 - 2 - 2x + 2x^2 + 2x^3 = \\ &= -4x + 4x^3\;. \end{aligned}$$

Na druhé straně však snadno zjistíme, že $M(x) = (1+x)^2$, $N(x) = (1-x)^2$, takže $M(x)\,.\,N(x) = [(1+x)(1-x)]^2 = (1-x^2)^2 = 1 - 2x^2 + x^4$, a tedy přímo podle definice derivace je

$$D[M(x)\,.\,N(x)] = -4x + 4x^3\;;$$

obě cesty vedou přirozeně k témuž konečnému výsledku.

Vzorce (28) a (30) lze indukcí snadno rozšířit na případ libovolného (konečného) počtu sčítanců, resp. činitelů. Z (28) tak máme pro $m$ mnohočlenů $M_1(x)$, $M_2(x)$, ..., $M_m(x)$:

$$\mathrm{D}\left[\sum_{j=1}^{m} M_j(x)\right] = \sum_{j=1}^{m} M'_j(x) = M'_1(x) + M'_2(x) + \\ + \ldots + M'_m(x) \tag{31}$$

a obdobným zobecněním vzorce (30) je

$$\mathrm{D}[M_1(x)\, M_2(x) \ldots M_m(x)] = M'_1(x)\, M_2(x) \ldots M_m(x) + \\ + M_1(x)\, M'_2(x)\, M_3(x) \ldots M_m(x) + \ldots + \\ + M_1(x)\, M_2(x) \ldots M_{m-1}(x)\, M'_m(x)\,, \tag{32}$$

tj.

$$\mathrm{D}\left[\prod_{j=1}^{m} M_j(x)\right] = \sum_{j=1}^{m} M'_j(x)\,.\prod_{k=1,\,k=j}^{m} M_k(x)\,. \tag{32'}$$

Položíme-li v (32) $M_j(x) = M(x)$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, m$, dostaneme vztah

$$\mathrm{D}M^m(x) = mM^{m-1}(x)\, M'(x) \tag{33}$$

(vzorec pro derivaci mocniny mnohočlenu).

**Příklad 10.** Nechť $M(x) = 1 + x$, takže $[M(x)]^m = (1 + x)^m$, a počítejme derivaci $\mathrm{D}M^m(x)$. Podle (33) to bude

$$\mathrm{D}M^m(x) = \mathrm{D}[(1 + x)^m] = m(1 + x)^{m-1}\,.\,1 = \\ = m \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} x^k\,.$$

Zároveň však $(1 + x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$, takže

$$D[(1+x)^m] = \sum_{k=1}^{m} k \binom{m}{k} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \binom{m}{k+1} x^k .$$

Z porovnání obou výsledků vyplývá celkem známý (resp. z (2) zřejmý) vztah mezi binomickými koeficienty

$$(k+1)\binom{m}{k+1} = m\binom{m-1}{k}, \quad k = 0,1,\ldots,m-1. \tag{34}$$

**Příklad 11.** Jak jsme si právě ukázali, platí pro $m > 0$

$$D[(1+x)^m] = \sum_{k=1}^{m} k \binom{m}{k} x^{k-1} = m(1+x)^{m-1} .$$

Dosadíme-li sem $x = 1$, vyjde nám nový vztah pro binomické koeficienty

$$\sum_{k=1}^{m} k \binom{m}{k} = m\, 2^{m-1} ; \tag{35}$$

můžeme ho jinak získat též porovnáním (34) a (6).

Poněvadž derivace každého mnohočlenu $M(x)$ je sama opět mnohočlenem, můžeme ji znovu derivovat, výsledek — tedy derivaci derivace $M'(x)$ — nazveme *druhou derivací* mnohočlenu $M(x)$ a označíme $M''(x)$ nebo $D^2M(x)$:

$$M''(x) = D^2M(x) = D[DM(x)] .$$

Obdobně definujeme dále *derivaci třetí*, *čtvrtou* atd., obecně $k$-tou ($k = 2, 3, 4, \ldots$) jako derivaci derivace ($k-1$)-vé:

$$D^kM(x) = D[D^{k-1} M(x)] . \tag{36}$$

Jest ovšem $D^1M(x) = DM(x) = M'(x)$; umluvíme se navíc, že pod nultou derivací $D^0M(x)$ budeme rozumět samotný mnohočlen $M(x)$. Tato konvence nám zjednoduší některé další úvahy a vzorce, např. (41). Pro všechna celá nezáporná $n$, $m$ bude pak platit, jak snadno nahlédneme, vztah

$$D^m[D^nM(x)] = D^{m+n}M(x) \ . \tag{37}$$

Pro první derivaci $M'(x)$ mnohočlenu (26) máme explicitní vzorec (27); jeho obdobou a zobecněním pro $k$-tou derivaci je

$$D^kM(x) = \sum_{j=k}^{n} j(j-1)\ldots(j-k+1)a_jx^{j-k} =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-k} (j+1)(j+2)\ldots(j+k)a_{j+k}x^j \ , \tag{38}$$

jak se snadno dokáže indukcí.

Zatímco pravidla 1 a 2 pro derivaci součtu a konstantního násobku se dají bezprostředně přenést i na případ vyšších derivací

$$D^k[M(x) + N(x)] = D^kM(x) + D^kN(x) \ , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{39}$$

$$D^k[cM(x)] = cD^kM(x) \ , \tag{40}$$

je zobecněním vztahu (30) sám o sobě zajímavý tzv. *Leibnizův vzorec pro k-tou derivaci součinu*

$$D^k[M(x) \, . \, N(x)] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^jM(x)\, D^{k-j}\, N(x) \ . \tag{41}$$

Vzorec (41) se dokáže snadno indukcí. Pro $k = 1$ je (41) totéž co (30) a pro $k = 0$ je to triviální identita. Indukční krok pak využívá vztahů (39) a (36) a ovšem také (5), totiž

$$\mathrm{D}^{k+1}[M(x) \,.\, N(x)] = \mathrm{D}(\mathrm{D}^k[M(x) \,.\, N(x)]) =$$

$$= \mathrm{D}\left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{D}^j M(x)\, \mathrm{D}^{k-j} N(x)\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} [\mathrm{D}^{j+1} M(x)\, \mathrm{D}^{k-j} N(x) + \mathrm{D}^j M(x)\, \mathrm{D}^{k-j+1} N(x)] =$$

$$= M(x)\, \mathrm{D}^{k+1} N(x) + \sum_{j=1}^{k} \left[\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j}\right] \cdot$$

$$\cdot\, \mathrm{D}^j M(x)\, \mathrm{D}^{k+1-j} N(x) + \mathrm{D}^{k-1} M(x) \,.\, N(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \mathrm{D}^j M(x)\, \mathrm{D}^{k+1-j} N(x) \,.$$

Řekli jsme si už — a také (27) to potvrzuje —, že derivováním se sníží stupeň mnohočlenu o jednotku; $k$-tá derivace mnohočlenu stupně $n$ je tedy mnohočlenem stupně $n - k$, pokud $n \geqq k$, jak je ostatně vidět také z (38). Při $k > n$ je už $k$-tá derivace identicky rovna nule (je to nulový mnohočlen).

Mají-li dva mnohočleny $M(x)$ a $N(x)$ stejné $k$-té derivace $\mathrm{D}^k M(x) = \mathrm{D}^k N(x)$, pak jejich rozdíl $M(x) - N(x)$ má, jak plyne z uvedených pravidel (39) a (40), $k$-tou derivaci rovnou (identicky) nule, a je tudíž sám mnohočlenem stupně nižšího než $k$, příp. je to přímo mnohočlen nulový, když $M(x) = N(x)$.

Jestliže do mnohočlenu (26) dosadíme $x = 0$, dostaneme

$M(0) = a_0$. Dosadíme-li touž hodnotu do derivace $M'(x)$, vyjde $M'(0) = a_1$. Obecně pak pro $k$-tou derivaci ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) vychází z (38) rovnost

$$D^k M(0) = k!\, a_k \ . \tag{42}$$

Obráceně tedy můžeme vyjádřit koeficienty $a_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) mnohočlenu (26) pomocí hodnot jeho derivací $D^k M(x)$ pro $x = 0$

$$a_k = \frac{1}{k!} D^k M(0) \ ,$$

takže platí

$$M(x) = M(0) + xM'(0) + x^2 \frac{1}{2} M''(0) + \ldots + \tag{43}$$

$$+ x^n \frac{1}{n!} D^n M(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} D^k M(0) \ .$$

Vzorec (43) se nazývá *MacLaurinova formule.*

**Příklad 12.** Pomocí MacLaurinovy formule se dá také mj. odvodit binomický vzorec, tzn. dokázat, že koeficienty mnohočlenu

$$B_n(x) = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

jsou dány vzorcem (2). Podle (33) máme totiž $DB_n(x) = nB_{n-1}(x)$, takže obecně pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí

$$D^k B_n(x) = n(n-1) \ldots (n-k+1) B_{n-k}(x) \ . \tag{44}$$

Odtud po dosazení $x = 0$ vychází podle (42)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \, ,$$

a to je právě vzorec (2).

**Příklad 13.** Ve třetím paragrafu jsme poznali mnohočleny $F_n(x)$, jejichž koeficienty jsou Stirlingova čísla $s(n, k)$. Počítejme derivaci $F'_n(x)$ podle vyjádření (15). Užitím pravidla o derivaci součinu dostáváme

$$F'_n(x) = \mathrm{D}[F_{n-1}(x)(x-n+1)] =$$
$$= F'_{n-1}(x) \, . \, (x-n+1) + F_{n-1}(x) \, .$$

Dosaďme sem $x = 0$:

$$F'_n(0) = F_{n-1}(0) - (n-1)F'_{n-1}(0) \, .$$

Avšak z (15) je vidět, že $F_n(0) = 0$ pro $n > 0$, kdežto $F_0(0) = 1$. Zároveň je podle (16) $F'_n(0) = s(n, 1)$, takže celkem vychází

$$s(1, 1) = 1 \, ,$$
$$s(n, 1) = -(n-1) \, s(n-1, 1) \, .$$

Z těchto dvou rovností pak přímo plyne

$$s(n, 1) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

(viz též cvičení 6).

*Cvičení*

9. Najděte mnohočleny $E_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, takové,

že $E_n(x)$ je stupně právě $n$ a $D^k E_n(x) = E_{n-k}(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n - 1$), $D^n E_n(x) \equiv 1$.

Dokažte vztahy

10. $$F'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} F_{k-1}(x)\, F_{n-k}(x - k)\ .$$

11. $$D^k \left[\sum_{j=1}^{m} M_j(x)\right] = \sum_{j=1}^{m} D^k M_j(x)\ ,$$
kde $M_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) jsou libovolné mnohočleny, $k \geqq 0$.

12. $$D^3 M^m(x) = F_3(m)\, M^{m-3}(x)\, [M'(x)]^3 + {} + 3F_2(m)\, M^{m-2}(x)\, M'(x)\, M''(x) + {} + F_1(m)\, M^{m-1}(x)\, M'''(x)\ ,$$
($M^m(x)$ je $m$-tá mocnina mnohočlenu $M(x)$, $m = 3, 4, 5, \ldots$).

**5. Substituce.** Operaci, kterou jsme již často s mnohočleny prováděli a kterou jsme považovali za dostatečně známou bez zvláštního vysvětlování, je operace dosazení pevné reálné hodnoty za proměnnou. Výsledkem dosazení je pak vždy určité reálné číslo, hodnota mnohočlenu odpovídající dané hodnotě proměnné.

Obdobnou (o něco obecnější) operací je „dosazení“ jednoho mnohočlenu do druhého; tuto operaci si teď probereme. Pro odlišení od prostého dosazení čísla ji budeme nazývat *substitucí*.

Mějme dva mnohočleny

$$M(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (26)$$

a $N(x)$. Spolu s $N(x)$ jsou ovšem mnohočleny i všechny jeho mocniny $N^k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ($N^0(x)$ je mnohočlen identicky rovný jedné.) Je tedy mnohočlenem také součet

$$a_0 + a_1N(x) + a_2N^2(x) + \ldots + a_nN^n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kN^k(x) \, . \tag{45}$$

A právě tento mnohočlen (45) bereme jako výsledek operace *substituce mnohočlenu* $N(x)$ *do mnohočlenu* $M(x)$; značíme jej obvykle $M[N(x)]$.

Je-li $M(x) = a_0$ (mnohočlen nultého stupně), je také $M[N(x)] = a_0$ bez ohledu na to, jaký mnohočlen $N(x)$ jsme vzali; je-li naopak $N(x) = c =$ konst., je $M[N(x)] = M(c)$, tedy mnohočlen nultého stupně identicky rovný hodnotě mnohočlenu $M(x)$ pro $x = c$. Ztotožňujeme-li mnohočleny nultého stupně — konstanty — s reálnými čísly, vidíme, že operace dosazení (reálné hodnoty za proměnnou) je zvláštním případem operace substituce, totiž substituce mnohočlenu nultého stupně, resp. mnohočlenu nulového (je-li $c = 0$). Obecně je pak stupeň mnohočlenu $M[N(x)]$ roven, pokud v (26) je $a_n \neq 0$, stupni mnohočlenu $N^n(x)$, a je tedy dán součinem stupňů obou mnohočlenů $M(x)$ a $N(x)$.

**Příklad 14.** Náš známý mnohočlen $(1 + x)^n$ můžeme mj. považovat za výsledek substituce mnohočlenu $N(x) = 1 + x$ do mnohočlenu $M(x) = x^n$. Zároveň odtud vidíme, že při $n > 1$ je

$$N[M(x)] = 1 + x^n \neq (1 + x)^n = M[N(x)] \; ;$$

substituce $N(x)$ do $M(x)$ je tedy obecně něco jiného než substituce $M(x)$ do $N(x)$.

Snadno se přesvědčíme, že z rovnosti $M(x) = P(x) + Q(x)$ plyne také

$$M[N(x)] = P[N(x)] + Q[N(x)] \tag{46}$$

pro libovolný mnohočlen $N(x)$ a podobně ze vztahu $M(x) = P(x) \,.\, Q(x)$ vyplývá

$$M[N(x)] = P[N(x)] \,.\, Q[N(x)] \;; \tag{47}$$

oba vztahy (46) a (47) se dají indukcí rozšířit na libovolný počet sčítanců, resp. činitelů.

V důsledku vzorců (46) a (47) se při provádění substitucí nemusíme omezovat jen na mnohočleny $M(x)$ napsané v základním tvaru (1), resp. (26); stačí prostě psát v $M(x)$ všude $N(x)$ místo $x$ (v odpovídající mocnině) a výsledek bude vždy stejný, totiž $M[N(x)]$, bez ohledu na tvar, v jakém je mnohočlen $M(x)$ právě zapsán.

Příkladem užité operace substituce bylo vlastně už odvození vzorců (20) a (20′) nebo vyjádření $F_n\,(-x-1)$ v příkladě 7. Šlo tu vesměs o velmi jednoduché substituce, v nichž byl mnohočlen $N(x)$ prvního stupně. Takové substituce nazýváme *lineární*; budeme se s nimi často setkávat (viz též cvičení 16).

Podívejme se ještě, jak vypadá derivace mnohočlenu po substituci. Podle (45) a pravidel 1 a 2 pro derivování máme

$$\mathrm{D}(M[N(x)]) = \mathrm{D} \sum_{k=0}^{n} a_k N^k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \mathrm{D}[N^k(x)] \,.$$

Avšak podle cvičení 12 je $\mathrm{D}[N^k(x)] = kN^{k-1}(x) \,.\, N'(x)$, takže

$$\mathrm{D}(M[N(x)]) = \sum_{k=1}^{n} ka_k N^{k-1}(x)\, N'(x) =$$

$$= N'(x) \sum_{k=1}^{n} ka_k N^{k-1}(x) \ .$$

Ale poslední součet není podle (27) nic jiného nežli výsledek substituce mnohočlenu $N(x)$ do mnohočlenu $M'(x)$; platí tedy obecný vzorec

$$D(M[N(x)]) = M'[N(x)] \ . \ N'(x) \ . \qquad (48)$$

**Příklad 15.** Mnohočlen $N(x) = 1 + 2x$ substituujme do mnohočlenu $B_n(x) = (1 + x)^n$, tedy

$$B_n[N(x)] = (1 + 1 + 2x)^n = (2 + 2x)^n = 2^n B_n(x) \ .$$

Platí potom (podle pravidla 2 pro derivování)

$$DB_n[N(x)] = 2^n B'_n(x) = 2^n n B_{n-1}(x) \ .$$

Podle vzorce (48) však je

$$DB_n[N(x)] = B'_n[N(x)] \ . \ N'(x) = nB_{n-1}[N(x)] \ . \ 2 =$$
$$= 2n(1 + 1 + 2x)^{n-1} = 2^n n \, B_{n-1}(x) \ .$$

**Příklad 16.** Počítejme derivaci mnohočlenu $F_n(x)$ z vyjádření (15). Podle vzorce (20) bude

$$F'_n(x) = D[xF_{n-1}(x - 1)] =$$
$$= F_{n-1}(x - 1) + xF'_{n-1}(x - 1) \ . \ 1 \ .$$

Dosaďme sem $x = 0$, vyjde

$$F'_n(0) = F_{n-1}(-1) = (-1)(-2) \dots (-n + 1) =$$
$$= (-1)^{n-1} (n - 1)!$$

Poněvadž podle (16) a (42) je $F'_n(0) = s(n, 1)$, dostáváme odtud znovu známý vztah (srv. příklad 13 a cvičení 6)

$$s(n, 1) = (-1)^{n-1} (n - 1)!$$

Již z vyjádření (45) je zřejmé, že výsledkem dosazení pevné hodnoty $x = c$ do mnohočlenu $M[N(x)]$ je stejná hodnota $M[N(c)]$ tohoto mnohočlenu, jakou dostaneme, když do mnohočlenu $M(x)$ dosadíme hodnotu mnohočlenu $N(x)$ pro $x = c$; je-li $N(c) = d$, je $M[N(c)] = M(d)$. Toho nyní využijeme k odvození dalšího důležitého vzorce.

Označme $P(x)$ výsledek lineární substituce mnohočlenu $N(x) = c + x$ do mnohočlenu $M(x)$ z (26). Ježto $N'(x) \equiv 1$, zjednoduší se vzorec (48) na vztah $P'(x) = M'[N(x)]$, takže bude zcela obecně

$$\mathrm{D}^k P(x) = \mathrm{D}^k M[N(x)] \ , \qquad k = 0, 1, 2, \dots \qquad (49)$$

Dosaďme sem $x = 0$; poněvadž $N(0) = c$, dostaneme z (49) rovnost

$$\mathrm{D}^k P(0) = \mathrm{D}^k M(c) \ , \qquad k = 0, 1, 2, \dots \qquad (50)$$

Napišme si teď MacLaurinovu formuli pro mnohočlen $P(x)$ a přepišme ji pomocí (50):

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \mathrm{D}^k P(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \mathrm{D}^k M(c) \ .$$

Avšak $P(x) = M[N(x)] = M(x + c)$. Platí tedy

$$M(x + c) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \mathrm{D}^k M(c) \ ; \qquad (51)$$

je to tzv. *Taylorova formule*. MacLaurinova formule (43) je speciálním případem Taylorovy formule pro $c = 0$.

Lineární substitucí mnohočlenu $N^*(x) = x - c$ do mnohočlenu $P(x)$ dostaneme (viz též cvičení 14 a 16)

$$P[N^*(x)] = M(N[N^*(x)]) = M[N(x - c)] =$$
$$= M(x - c + c) = M(x) \ ;$$

formuli (51) lze tedy psát též ve tvaru

$$M(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-c)^k}{k!} \mathrm{D}^k M(c) \, . \qquad (51')$$

Hned na začátku našich výkladů o mnohočlenech jsme si v prvním odstavci připomněli důležité tvrzení o jednoznačnosti koeficientů, kterého jsme pak také často užívali jako účinného nástroje při odvozování různých vztahů a vzorců. Podívejme se teď, jak se podobné otázky řeší při provádění substitucí.

Již ze vzorce (45) je zřejmé, že při daných mnohočlenech $M(x)$ a $N(x)$ je mnohočlen $M[N(x)]$ (a tedy také jeho koeficienty) jednoznačně určen. Ptejme se však obráceně, zda, resp. za jakých podmínek kladených na mnohočlen $N(x)$ lze k danému mnohočlenu $P(x)$ najít mnohočlen $M(x)$ tak, aby bylo $P(x) = M[N(x)]$.

Odpověď na tuto otázku závisí podstatně na stupni mnohočlenu $N(x)$. Označme po řadě $p$, $n$, $r$ stupeň mnohočlenu $P(x)$, $M(x)$, $N(x)$; má-li být $P(x) = M[N(x)]$, musí být, jak víme $p = nr$. Rozlišíme proto tři případy:

1. $r > 1$. V tomto případě je nutné, aby číslo $r$ bylo dělitelem čísla $p$. Jenom pak existuje $n$ takové, že $p = nr$. Je-li tomu tak, lze najít — a to právě jedno — číslo, označme je $a_n$, takové, aby mnohočlen $R_1(x) = P(x) - a_n N^n(x)$ byl stupně $r_1$ nižšího nežli $p$ (číslo $a_n$ snadno určíme jako podíl koeficientů při nejvyšších, tj. $p$-tých mocninách proměnné v mnohočlenech $P(x)$ a $N^n(x)$). Hledaný mnohočlen $M(x)$ bude pak existovat právě tehdy, podaří-li se nám vyjádřit mnohočlen $R_1(x)$ obdobně jako $M_1[N(x)]$. Ocitáme se tak znovu ve stejné situaci jako na začátku: číslo $r_1$ — stupeň mnohočlenu $R_1(x)$ — musí být dělitelné číslem $r$; jediný rozdíl je v tom, že stupeň mnohočlenu $R_1(x)$ je nižší, než byl stupeň mnohočlenu $P(x)$. Naložíme-li s $R_1(x)$ stejně jako s $P(x)$ atd., určíme postupně koeficienty hledaného mnohočlenu $M(x)$. Přitom musí být při každém

kroku splněna podmínka dělitelnosti stupňů. Není-li splněna, hledaný $M(x)$ neexistuje; je-li vždy splněna, jsou jeho koeficienty určeny jednoznačně.

2. $r = 1$. Tento případ je jednodušší, mnohočlen $N(x)$ je prvního stupně: $N(x) = c + dx$, $d \neq 0$, takže $N^k(x)$ je stupně právě $k$-tého. Lze tedy vždy nalézt, a to *právě jedno* číslo $a_n$ tak, aby mnohočlen $R_1(x) = P(x) - - a_n(c + dx)^n$ byl stupně nižšího než $n$ (je totiž nutně $n = p$). Tím se nám podařilo snížit stupeň daného mnohočlenu aspoň o jednotku. Opakujeme-li stejný postup, dostaneme postupně všechny koeficienty $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ hledaného mnohočlenu $M(x)$. V případě lineární substituce $N(x) = c + dx$ existuje tak ke každému $P(x)$ právě jeden $M(x)$, pro který je $P(x) = M[N(x)]$.

Jiný způsob, jak v tomto případě najít mnohočlen $M(x)$, je provést lineární substituci mnohočlenu

$$N^*(x) = -\frac{c}{d} + \frac{1}{d}x$$

do mnohočlenu $P(x)$ (viz též cvičení 14 a 16).

3. $r = 0$. Poslední případ je triviální. Je-li $p > 0$, neexistuje zřejmě žádné $n$, pro které by bylo $p = n \cdot 0$, a tedy neexistuje ani žádný mnohočlen $M(x)$. Je-li naopak $p = 0$, tzn. $P(x) = b =$ konst., nelze mnohočlen $M(x)$ určit, resp. existuje jich nekonečně mnoho. Je totiž $N(x) = = c =$ konst. a podmínce vyhoví všechny mnohočleny $M(x)$, které pro $x = c$ nabývají hodnoty $b$.

**Příklad 17.** Nechť $P(x) = 1 + 3x^2 - 2x^4 + x^6$, $N(x) = 1 - x^2$; hledejme $M(x)$ tak, aby $P(x) = M[N(x)]$. Je $p = 6$, $r = 2$, tedy $n = p/r = 3$. Hledáme $a_3$ z podmínky, aby mnohočlen

$$R_1(x) = P(x) - a_3(1 - x^2)^3$$

byl stupně nižšího než 6. Vyjde $a_3 = -1$, takže $R_1(x) = 2 + x^4$. Je tedy $r_1 = 4 = 2r$, a můžeme proto hledat $a_2$ z podmínky, aby mnohočlen

$$R_2(x) = R_1(x) - a_2(1 - x^2)^2$$

byl stupně nižšího než 4. Vyjde $a_2 = 1$, takže $R_2 = 1 - 2x^2$. Dále je však už zřejmé, že $R_2(x) = 3 - 2N(x)$, takže celkem máme

$$P(x) = 3 - 2N(x) + N^2(x) - N^3(x) \ ,$$

tj.

$$M(x) = 3 - 2x + x^2 - x^3 \ ;$$

hledaný mnohočlen $M(x)$ splňující $P(x) = M[N(x)]$ tedy existuje.

*Cvičení*

Dokažte:

13. Operace substituce je asociativní, tzn. že při $P(x) = N_1[N_2(x)]$, $Q(x) = N_2[N_3(x)]$ vždy platí $P[N_3(x)] = N_1[Q(x)]$ .
14. Pro každý mnohočlen $M(x)$ platí, že je-li $P(x) = M(c - x)$, ($c$ = konst.), potom také $M(x) = P(c - x)$.
15. Nechť $M_1[N(x)] = M_2[N(x)]$, kde $N(x)$ je mnohočlen stupně aspoň prvního; potom $M_1(x) = M_2(x)$.
16. Lineární substituce tvoří grupu.

**6. Normální soustavy mnohočlenů.** Posloupnost mnohočlenů $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x), \ldots$ nazveme *normální soustavou mnohočlenů*, jestliže má tyto tři vlastnosti:

(i) $P_0(x) \equiv 1$;
(ii) $P_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, je mnohočlen stupně *právě* $k$;
(iii) pro každé $k = 1, 2, 3, \ldots$ je $P_k(0) = 0$.

**Příklad 18.** Posloupnost mnohočlenů $P_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ tvoří normální soustavu. Rovněž tak posloupnost mnohočlenů $F_0(x) \equiv 1$, $F_k(x)$ – viz (15) – $k = 1, 2, 3, \ldots$ tvoří normální soustavu.

Mějme dánu normální soustavu mnohočlenů $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, a budiž $M(x)$ libovolný mnohočlen stupně $n$

$$M(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \;, \quad a_n \neq 0\,. \tag{26'}$$

Potom lze $M(x)$ vyjádřit ve tvaru

$$M(x) = \sum_{k=0}^{n} c_kP_k(x) = c_0 + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + \ldots + c_nP_n(x)\;, \tag{52}$$

a to *právě jedním způsobem*, tzn., že koeficienty $c_0, c_1, \ldots, c_n$ ve vyjádření (52) jsou *jednoznačně* určeny mnohočlenem $M(x)$, resp. jeho koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Toto tvrzení dokážeme nejsnáze indukcí podle stupně $n$ mnohočlenu $M(x)$. Nejprve dokážeme existenci. Je-li $M(x)$ mnohočlen nulový, stačí vzít všechna $c_k$ rovna nule. Je-li $M(x)$ mnohočlen nultého stupně, je $M(x) = a_0 =$ konst.; vzhledem k (i) je tedy $M(x) = a_0 \,.\, P_0(x)$, tedy $c_0 = a_0$ a $c_k = 0$ pro $k > 0$. Předpokládejme tedy, že tvrzení o existenci koeficientů $c_k$ platí pro mnohočleny stupně nejvýše $n$. Dokážeme, že platí také pro mnohočleny stupně $n + 1$. Budiž tedy $M(x)$ mnohočlen stupně $n + 1$

$$M(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1},\; a_{n+1} \neq 0\,.$$

Také $P_{n+1}(x)$ je podle (ii) mnohočlen stupně $n + 1$

$$P_{n+1}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + b_{n+1}x^{n+1} , \quad b_{n+1} \neq 0 .$$

Položme

$$N(x) = M(x) - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n+1}(x) .$$

Snadno se vidí, že $N(x)$ je mnohočlen stupně nejvýše $n$, takže podle předpokladu existuje skupina $n$ čísel $c_0$, $c_1$, $\ldots$, $c_n$ taková, že

$$N(x) = c_0 + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + \ldots + c_nP_n(x) .$$

Nyní však již stačí jen položit $c_{n+1} = a_{n+1}/b_{n+1}$ a bude

$$M(x) = c_0 + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + \ldots + c_nP_n(x) + \\ + c_{n+1}P_{n+1}(x) ,$$

takže vyjádření mnohočlenu $M(x)$ ve tvaru (52) rovněž existuje.

K důkazu jednoznačnosti vyjádření (52) stačí ukázat, že pro žádnou skupinu čísel $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$, která by nebyla všechna rovna nule, nemůže být $\sum_{k=0}^{n} c_kP_k(x)$ nulový mnohočlen. Kdyby však existovalo takové vyjádření nulového mnohočlenu s nenulovými $c_k$, existoval by mezi koeficienty $c_0, c_1, \ldots, c_n$ nenulový koeficient s nejvyšším indexem, označme jej $c_m$ ($c_m \neq 0$, $c_k = 0$ pro $k = m + 1, \ldots, n$). Byl by tedy nulový mnohočlen roven součtu $\sum_{k=0}^{m} c_kP_k(x)$. Avšak z mnohočlenů $P_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, m$ je jedině $P_m(x)$ mnohočlenem stupně $m$; jedině v něm se tedy vyskytuje $x^m$, a to s nenulovým koeficientem. Ježto podle předpokladu je i $c_m \neq 0$, vystupuje $x^m$ s nenulovým koeficientem také v celkovém součtu $\sum_{k=0}^{m} c_k P_k(x)$, ale to není možné, poněvadž tento součet je nulovým mnohočlenem a ten má nutně koeficienty při všech mocninách proměnné $x$ rovny nule.

**Příklad 19.** Je-li danou normální soustavou mnohočlenů $P_k(x)$ právě soustava mnohočlenů $x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, budou čísla $c_k$ z (52) rovna koeficientům $a_k$ z (26). Je tedy zápis (26) mnohočlenu $M(x)$ speciálním případem vyjádření (52), odpovídajícím speciální normální soustavě mnohočlenů $P_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Číslům $c_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ z (52) budeme říkat *koeficienty mnohočlenu $M(x)$ vzhledem k normální soustavě $P_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$)*; obvyklé koeficienty $a_k$ z (26) jsou tedy koeficienty mnohočlenu $M(x)$ vzhledem k soustavě mnohočlenů $x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Snadno se přesvědčíme, že při početních operacích sčítání mnohočlenů a násobení konstantou se koeficienty vzhledem k libovolné normální soustavě chovají vždy stejně. Jestliže je $M(x) = \Sigma c_k P_k(x)$ a $N(x) = \Sigma d_k P_k(x)$, potom

$$M(x) + N(x) = \Sigma(c_k + d_k)\, P_k(x)\,, \tag{53}$$

$$aN(x) = \Sigma a d_k P_k(x)\,, \qquad a = \text{konst.} \tag{54}$$

Pro operaci násobení už toto neplatí, není totiž $P_{j+k}(x) = P_j(x)\,.\,P_k(x)$, jako tomu bylo u mocnin $x^k$.

**Příklad 20.** Jestliže za normální soustavu, vzhledem k níž mnohočleny vyjadřujeme, vezmeme posloupnost mnohočlenů $x^k/k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, pak pro součin dvou mnohočlenů $M(x) = \Sigma c_k(x^k/k!)$ a $N(x) = \Sigma d_k(x^k/k!)$ platí vzorec

$$M(x)\,N(x) = \sum_k \left( \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c_j d_{k-j} \right) \frac{x^k}{k!} \, . \qquad (55)$$

Ten si můžeme ověřit nejlépe přechodem k vyjádření mnohočlenů ve tvaru (26); vzájemný vztah koeficientů vzhledem k soustavám mnohočlenů $x^k/k!$ a $x^k$ je totiž poměrně jednoduchý.

Pozorný čtenář si patrně již povšiml, že jsme zatím nikde nevyužili vlastnosti (iii) normálních soustav. Uvedená tvrzení tedy platí i pro takové posloupnosti mnohočlenů, které mají jen vlastnosti (i) a (ii). V předcházejícím paragrafu jsme se setkali se speciálním případem takových posloupností. Byly to posloupnosti mocnin $N^k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ mnohočlenů $N(x)$ prvního stupně.

Vlastnost (iii) přijde ke cti při studiu zobecnění pojmu derivace mnohočlenu. Budiž $M(x)$ daný mnohočlen s vyjádřením (52) vzhledem k dané normální soustavě mnohočlenů $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *Derivací mnohočlenu* $M(x)$ *vzhledem k této normální soustavě* nazveme mnohočlen s vyjádřením

$$c_1 + 2c_2P_1(x) + 3c_3P_2(x) + \ldots + nc_nP_{n-1}(x) = \\ = \sum_{k=1}^{n} kc_kP_{k-1}(x) \; ; \qquad (56)$$

označíme jej $\mathrm{D}_P\, M(x)$.

Pravidlo pro určování koeficientů derivace $\mathrm{D}_P M(x)$ mnohočlenu $M(x)$ vzhledem k soustavě mnohočlenů $P_k(x)$ je tedy obdobné pravidlu vyjádřenému vzorcem (27) pro obyčejnou derivaci, která se takto jeví jako jeden speciální případ derivace, totiž derivace vzhledem k normální soustavě mnohočlenů $x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Výsledný mnohočlen $\mathrm{D}_P M(x)$ ovšem závisí velmi podstatně na zvolené normální soustavě, vzhledem k níž derivujeme.

**Příklad 21.** Vezměme opět normální soustavu mnohočlenů $x^k/k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, a budiž $M(x)$ mnohočlen (26), takže jeho vyjádření tvaru (52) při dané soustavě $P_k(x) = x^k/k!$ je

$$M(x) = a_0 + 1!\, a_1 P_1(x) + 2!\, a_2 P_2(x) + \ldots + n!\, a_n P_n(x).$$

Tomu odpovídá podle (56) derivace

$$\mathrm{D}_P M(x) = a_1 + 2\,.\,2!\; P_1(x) + 3\,.\,3!\; P_2(x) + \ldots + n\,.\,n!\; P_{n-1}(x)\,,$$

takže

$$\mathrm{D}_P M(x) = a_1 + 2^2 a_2 x + 3^2 a_3 x^2 + \ldots + n^2 a_n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k^2 a_n x^{k-1}\,.$$

Není těžké si ověřit, že pro derivace vzhledem k libovolné normální soustavě mnohočlenů platí rovněž pravidla 1 a 2 pro sčítání a konstantní násobky, tj. obdoby vzorců (28) a (29),

$$\mathrm{D}_P[M(x) + N(x)] = \mathrm{D}_P M(x) + \mathrm{D}_P N(x)\,, \tag{28'}$$

$$\mathrm{D}_P[cM(x)] = c\mathrm{D}_P M(x)\,. \tag{29'}$$

Při odvozování stačí jen psát všude $\mathrm{D}_P$ místo $\mathrm{D}$ a $P_k(x)$ místo $x^k$. Vidíme, že k tomu, abychom uměli zderivovat libovolný mnohočlen $M(x)$ vzhledem k dané normální soustavě — srv. poznámku za vzorcem (29) na str. 23 —, stačí umět derivovat mnohočleny $x^k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

**Příklad 22.** Vezměme si normální soustavu mnohočlenů $F_k(x)$ z (15), $k = 1, 2, 3, \ldots, F_0(x) \equiv 1$, a podívejme se, jak vypadají derivace mnohočlenů vzhledem k této soustavě. S tím souvisí též otázka stanovení koeficientů mnohočlenu vzhledem k této normální soustavě; stačí ovšem obojí řešit jen pro mnohočleny tvaru $x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Položme nejprve obecně

$$x^n = S(n, 0) + S(n, 1)\,F_1(x) + S(n, 2)\,F_2(x) + \ldots +$$
$$+ S(n, n)\,F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)\,F_k(x)\,; \tag{57}$$

čísla $S(n, k)$ jsou tedy koeficienty mnohočlenu $x^n$ vzhledem k normální soustavě mnohočlenů $F_k(x)$. Dosazením $x = 0$ do (57) zjistíme snadno, že $S(n, 0) = 0$ pro všechna přirozená $n$. Zde konečně dochází uplatnění vlastnost (iii) naší normální soustavy. Prvý sčítanec na pravé straně (57) můžeme tedy případně vynechat. Koeficienty $S(n, k)$ definované vzorcem (57) se nazývají *Stirlingova čísla druhého druhu*. Podle (56) je pak

$$\mathrm{D}_F(x^n) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)\,kF_{k-1}(x)\,. \tag{58}$$

Vztah (58) si dále upravíme pomocí vzorců (18) a (20); podle nich je totiž

$$\begin{aligned} kF_{k-1}(x) &= (k - 1)\,F_{k-1}(x) + F_{k-1}(x) = \\ &= xF_{k-1}(x) - F_k(x) + F_{k-1}(x) = \\ &= (x + 1)\,F_{k-1}(x) - F_k(x) = \\ &= F_k(x + 1) - F_k(x)\,. \end{aligned}$$

Dosadíme-li tento výsledek do (58), dostáváme

$$\mathrm{D}_F(x^n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, F_k(x+1) - \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, F_k(x) \ ,$$

a tedy podle (57)

$$\mathrm{D}_F(x^n) = (x+1)^n - x^n \ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{59}$$

Pro $n = 0$ je ovšem $\mathrm{D}_F(x^0) = 0$. V důsledku pravidel pro sčítání a násobky platí tedy i pro libovolný mnohočlen $M(x)$

$$\mathrm{D}_F\, M(x) = M(x+1) - M(x) \ . \tag{60}$$

Operaci derivace vzhledem k normální soustavě mnohočlenů $F_k(x)$ značíme obvykle $\Delta$ místo $\mathrm{D}_F$ a nazýváme ji *diferencí*.

Stejně jako v případě derivace v obvyklém smyslu (viz paragraf 4), lze i pro derivace vzhledem k libovolné normální soustavě zavést pojem druhé, třetí, ... atd., obecně $k$-té ($k = 1, 2, 3, \ldots$) derivace; pro $k = 0$ klademe vždy $\mathrm{D}^0{}_P M(x) = M(x)$, bez ohledu na konkrétní volbu soustavy mnohočlenů $P_k(x)$. Snadno pak uvidíme, že vztahy (37), (39) a (40) se rovněž přenesou na obecný případ, že tedy platí

$$\mathrm{D}_P{}^m[\mathrm{D}_P{}^n\, M(x)] = \mathrm{D}_P{}^{m+n}\, M(x) \ , \tag{37'}$$

$$\mathrm{D}_P{}^k[M(x) + N(x)] = \mathrm{D}_P{}^k\, M(x) + \mathrm{D}_P{}^k\, N(x) \ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{39'}$$

$$\mathrm{D}_P{}^k[cM(x)] = c\mathrm{D}_P{}^k\, M(x) \ ; \tag{40'}$$

při jejich odvozování stačí znovu jen všude psát $\mathrm{D}_P$ místo $\mathrm{D}$ a $P_k(x)$ místo $x^k$. Vzorce pro derivaci součinu takto zobecnit nelze z důvodů, které jsme si uvedli už při určování koeficientů vzhledem k různým normálním soustavám. Explicitní vzorec (38) pro $k$-tou derivaci, resp. jeho analogie

$$\mathrm{D}_P{}^k\, M(x) = \sum_{j=k}^{n} F_k(j)\, c_j P_{j-k}(x) = \tag{38'}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k} (j+1)(j+2)\ldots(j+k) c_{j+k}\, P_j(x)\ ,$$

kde $c_k$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) jsou koeficienty $M(x)$ z (52), ovšem platí pro každou normální soustavu mnohočlenů $P_k(x)$.

Díky vlastnosti (iii) normálních soustav platí také vzorec (42), resp.

$$\mathrm{D}_P{}^k\, M(0) = k!\, c_k\ , \tag{42'}$$

takže místo (52) můžeme opět zcela obecně psát

$$M(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, P_k(x)\, \mathrm{D}_P{}^k\, M(0)\ . \tag{61}$$

To je *obecná MacLaurinova formule.*

**Příklad 23.** Zvolme normální soustavu mnohočlenů $F_k(x)$ z (15), $F_0(x) \equiv 1$, a vzhledem k ní vyjádřeme mnohočlen $M(x) = F_n(x + c)$, $c =$ konst., ve tvaru (52), resp. (61). Podle (60) bude

$$\begin{aligned}\Delta M(x) &= M(x+1) - M(x) = \\ &= F_n(x+c+1) - F_n(x+c) = \\ &= (x+c+1-x-c+n-1)\, F_{n-1}(x+c) = \\ &= nF_{n-1}(x+c)\ , \quad n > 0\ ,\end{aligned}$$

a tedy obecně pro $0 \leqq k \leqq n$

$$\begin{aligned}\Delta^k M(x) &= \Delta^k F_n(x+c) = \\ &= n(n-1)\ldots(n-k+1)\, F_{n-k}(x+c) = \\ &= F_k(n)\, F_{n-k}(x+c)\ .\end{aligned}$$

Pro $x = 0$ je tedy

$$\Delta^k M(0) = \Delta^k F_n(c) = F_k(n)\, F_{n-k}(c) \ ,$$

takže MacLaurinova formule pro mnohočlen $M(x)$ je

$$M(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} F_k(n)\, F_{n-k}(c)\, F_k(x) \ ;$$

poněvadž pak $F_k(n)/k! = \binom{n}{k}$ a $M(x) = F_n(x + c)$, platí

$$F_n(x + c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(x)\, F_{n-k}(c) \ ; \tag{62}$$

je to tzv. *formule Vandermondova.*

Mnohočleny $F_n(x)$ se někdy nazývají *faktoriální mocniny* a místo $F_n(x)$ se píše $x^{[n]}$; v tomto zápise pak (62) zní

$$(x + c)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{[k]} c^{[n-k]} \ ; \tag{62'}$$

(tzv. *binomický vzorec pro faktoriální mocniny*).

Při pevně zvolené normální soustavě mnohočlenů $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, jsou koeficienty každého daného mnohočlenu $M(x)$ vzhledem k této soustavě, tj. čísla $c_k$ v (52), zcela jednoznačně určeny, takže i pro ně platí základní věta o rovnosti koeficientů (viz odstavec 1). Toho lze využít k odvozování různých vztahů mezi těmito koeficienty podobně, jako jsme to udělali v předcházejících paragrafech s obyčejnými koeficienty (tj. s čísly $a_k$ z (26)). Ukážeme si některé takové vztahy pro Stirlingova čísla druhého druhu.

**Příklad 24.** Podle (57) je pro přirozené $n$

$$x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} S(n+1, k)\, F_k(x) \ .$$

Zároveň však je

$$x^{n+1} = x\, x^n = x \sum_{k=1}^{n} S(n, k)\, F_k(x) \ .$$

Avšak $x = x - k + k$ a $(x - k)\, F_k(x) = F_{k+1}(x)$, takže

$$x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)\, F_{k+1}(x) + \sum_{k=1}^{n} kS(n, k)\, F_k(x) \ .$$

Porovnáním koeficientů při $F_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$ v obou vyjádřeních $x^{n+1}$ dostáváme jednak

$$S(n+1, 1) = S(n, 1) \quad \text{a} \quad S(n+1, n+1) = S(n, n) \ , \tag{63}$$

jednak při $1 < k < n + 1$

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k) \ . \tag{64}$$

Ze (63) a z rovnosti $F_1(x) = x$, tzn. $S(1, 1) = 1$, plyne dále

$$S(n, n) = S(1, 1) = 1 \ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{65}$$

**Příklad 25.** Vyjdeme ze zřejmé rovnosti

$$x^{n+1} = x\, x^n = x(1 + x - 1)^n = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^k$$

a pro mocniny $x$ použijeme vyjádření (57). Máme tedy

$$\sum_{r=1}^{n+1} S(n+1, r)\, F_r(x) = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} S(k, j)\, F_j(x-1) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} F_{j+1}(x) \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} S(k, j) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n+1} F_r(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(k, r-1) \;;$$

vzhledem k (57) můžeme celkem přirozeně doplnit definici Stirlingových čísel tak, že $S(k, j) = 0$ pro $k < j$. Porovnáním koeficientů při $F_k(x)$, $r = 1, 2, \ldots, n+1$ dostaneme rovnost

$$S(n+1, r) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(k, r-1) \,. \tag{66}$$

Stejně jako v případě binomických koeficientů nebo Stirlingových čísel prvního druhu neuvedli jsme si ani tady všechny známé zajímavé vztahy mezi čísly $S(n, k)$. Některé vlastnosti těchto čísel pozná čtenář, který si vyřeší připojená cvičení, ale i tak zůstane ještě velmi mnoho vzorců, které si lze s trochou fantazie odvozovat uvedenými metodami téměř bez omezení. To však již musíme přenechat samostatné práci čtenářů.

*Cvičení*

17. Dokažte platnost vzorců

$$S(n, 2) = 2^{n-1} - 1 \,, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

$$S(n, 3) = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1)\,, \qquad n = 3, 4, 5, \ldots,$$

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}\,, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

18. Z rekurentních vzorců (64), známých hodnot (65) a $S(n, 0) = 0$ vypočtěte $S(n, k)$ pro $n, k \leqq 8$ a sestavte tabulku obdobnou tabulce hodnot $s(n, k)$ ze str. 17.
19. Dokažte vztah mezi Stirlingovými čísly prvního a druhého druhu

$$\sum_k S(n, k)\, s(k, m) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže} \quad n \neq m, \\ 1 & \text{jestliže} \quad n = m. \end{cases}$$

20. Odvoďte explicitní vzorec pro $S(n, k)$:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n\,.$$

21. Položte

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$$

a dokažte pak, že

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k\,.$$

($B_n$ jsou tzv. Bellova čísla; vypočtěte několik z nich numericky.)

22. Označte $F_n^\star(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ mnohočleny

$$F_n^\star(x) = F_n(x + n - 1) = x(x + 1) \ldots (x + n - 1)$$

a dokažte pro ně rovnost obdobnou vzorci (62)

$$F_n^\star(x + c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k^\star(x)\, F_{n-k}^\star(c)$$

(tzv. *Nörlundova formule*).

# II.

# ŘADY

**1. Mnohočleny a řady.** Při odvozování různých vzorců pro binomické koeficienty, Stirlingova čísla atd. jsme v předchozí kapitole využívali mj. početních operací s mnohočleny: sčítání, násobení a umocňování. Nemluvili jsme však zatím nikde o dělení nebo odmocňování. Důvod je jasný, obecně nelze vždy dělit mnohočlen mnohočlenem tak, aby výsledek byl opět jen mnohočlen, tzn. beze zbytku. V této souvislosti se mnohočleny chovají podobně jako celá čísla, která také nemůžeme mezi sebou libovolně dělit, chceme-li zůstat stále v oboru celých čísel. Ostatně stejně jako pro celá čísla byla i pro mnohočleny vypracována teorie dělitelnosti; tvoří zajímavý oddíl algebry. A odmocňování mnohočlenů je ještě složitější záležitost.

Na druhé straně by nám však jistě možnost použití dalších operací s mnohočleny dovolila získat nové výsledky. Vezměme jen např. dvojčlen $1 + x$. Při studiu binomických koeficientů jsme byli omezeni na jeho celé nezáporné mocniny. Kdybychom jím uměli vždy dělit anebo vypočítat jeho druhou odmocninu, mohli bychom studovat i jeho záporné, popříp. i lomené mocniny. Avšak neexistuje mnohočlen, jehož součin s dvojčlenem $1 + x$ by byl identicky roven jedné — to by bylo $(1 + x)^{-1}$ —, ani mnohočlen, jehož druhou mocninou by byl dvojčlen $(1 + x)$.

Jde-li o čísla, pomáháme si z nesnází s dělením a odmocňováním tím, že číselný obor rozšiřujeme zavedením čísel racionálních (zlomků), nebo ještě dále čísel reálných;

omezení při dělení se pak redukují na jediné: zákaz dělení nulou a odmocňovat můžeme v oboru nezáporných reálných čísel bez omezení.

Pokusíme se teď provést něco podobného s mnohočleny. Daný obor si rozšíříme přidáním nových prvků tak, abychom si dělení a odmocňování zjednodušili. Postup, kterého přitom užijeme, nevyřeší sice všechny problémy s dělením, ale pro naše účely postačí.

Již při definici stupně mnohočlenu se setkáváme s jakousi nedůsledností: pro určení stupně mnohočlenu

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n \qquad (1)$$

není rozhodující, kolik členů v (1) skutečně vypíšeme, ale jen to, který z nich je „poslední nenulový". Je to něco podobného jako při psaní desetinných zlomků, kdy také můžeme na konec připsat nuly, aniž by se hodnota zlomku změnila:

$$0{,}1 = 0{,}100 = 0{,}1000000 \ .$$

Je zřejmé, že každý mnohočlen v jedné proměnné je zcela určen posloupností svých koeficientů, avšak dvě různě dlouhé posloupnosti, lišící se jen počtem nul „na konci", odpovídají témuž mnohočlenu:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = a_0 + a_1x +$$
$$+ a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + 0 \,.\, x^{n+1} + \ldots + 0 \,.\, x^{n+m} \ .$$

Abychom tyto nedůslednosti odstranili, umluvíme se, že napříště zásadně *každému* mnohočlenu přiřadíme *nekonečnou posloupnost koeficientů*; ovšem jen konečný počet jich bude nenulových. Obdobně upravíme též zápis mnohočlenů a místo (1) budeme zásadně psát

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \qquad (2)$$

bez udání posledního vypsaného členu. Tím nám odpadne starost o to, zda v (1) není náhodou $a_n = 0$, zjednoduší se pravidla zápisu při sčítání mnohočlenů (stupeň součtu může být totiž nižší než stupně sčítanců) atd. Skutečně podstatná bude pro mnohočleny pouze ta vlastnost, že ve vyjádření (2) je vždy jen *konečný počet* nenulových koeficientů.

Na první pohled tu jde jen o zcela formální úpravu zápisu mnohočlenů. Snadno se totiž přesvědčíme, že pravidla pro počítání s mnohočleny nejsou touto změnou nijak dotčena. Hlubší význam přechodu k vyjádření (2) však tkví v tom, že nám umožňuje provést ono slíbené rozšíření oboru mnohočlenů o nové prvky. K mnohočlenům přidáme i všechny takové výrazy tvaru (2), v nichž je *nekonečně mnoho nenulových* koeficientů. Prvkům tohoto širšího oboru budeme říkat *řady*. Mezi ně počítáme samozřejmě také všechny mnohočleny.

Rozšíření oboru o nové prvky bude ovšem mít plný význam teprve tehdy, jestliže se nám podaří zavést pro ně vhodné početní operace, resp. rozšířit i na nové prvky — řady — vztahy a operace zavedené v původním užším oboru mnohočlenů. To bude nyní naším prvním úkolem.

Pro zjednodušení budeme v dalším při zápisu řad, stejně jako to běžně děláme u mnohočlenů, vynechávat členy s nulovými koeficienty a nevypisovat koeficienty rovné jedné. Místo

$$1 + 0x + 1x^2 + 0x^3 + 1x^4 + \ldots + 0x^{2n-1} + 1x^{2n} + \ldots$$

budeme psát

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$$

apod. Pro označování řad budeme též užívat obdobných symbolů jako pro mnohočleny, např. $A(x) = \Sigma a_k x^k$ apod.

A nakonec ještě jednu *výstrahu*. I když analogie mezi řadami a mnohočleny je zjevná a je vlastně smyslem celé naší teorie, přesto jsou řady něco zcela nového, co vlastně ještě pořádně neznáme (zatím jsme si je pouze definovali), a proto na ně nesmíme ukvapeně přenášet bez řádné definice a bez důkazu všechno, co známe o mnohočlenech. Zacházet s řadami se musíme znovu učit od začátku.

**2. Počítání s řadami.** Nejprve musíme definovat rovnost mezi řadami; učiníme tak zcela přirozeným způsobem. Platí

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots &= \\ = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k + \ldots & \end{aligned}$$

právě když $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., tzn. když $a_k = b_k$ pro všechna nezáporná celá $k$. Každá řada je tedy zcela jednoznačně určena posloupností svých koeficientů. Naše definice rovnosti řad je přitom plně ve shodě s rovností zavedenou pro mnohočleny. V případě, že dané dvě řady jsou mnohočleny, rovnají se jako řady právě tehdy, rovnají-li se jako mnohočleny ve smyslu obvyklé definice. Jde tedy skutečně o *rozšíření* vztahu rovnosti z mnohočlenů na všechny řady.

Operaci *sčítání řad* zavedeme rovněž obdobně jako u mnohočlenů. Bude

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots) &+ \\ + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k + \ldots) &= \\ = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_kx^k + \ldots, & \end{aligned} \tag{3}$$

právě když $c_k = a_k + b_k$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$

Vztah rovnosti i operace sčítání řad jsou celkem jednoduše vyjádřeny pomocí rovnosti a sčítání jednotlivých koeficientů. Není proto nijak těžké si ověřit, že mají všechny patřičné vlastnosti. Rovnost řad je reflexivní, symetrická a tranzitivní relace, tzn. že pro libovolné řady $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ platí

$$A(x) = A(x) \ ; \tag{R}$$

$$\text{jestliže } A(x) = B(x) \ , \quad \text{potom } B(x) = A(x) \ ; \tag{S}$$

$$\text{jestliže } A(x) = B(x) \ \text{ a } \ B(x) = C(x) \ , \tag{T}$$

$$\text{potom } A(x) = C(x) \ ;$$

pro sčítání řad platí zákony asociativní a komutativní:

$$A(x) + [B(x) + C(x)] = [A(x) + B(x)] + C(x) \ , \tag{A}$$

$$A(x) + B(x) = B(x) + A(x) \ . \tag{K}$$

Úlohu neutrálního prvku (nuly) při sčítání hraje řada, jež má všechny koeficienty nulové; značíme ji $0(x)$

$$0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots$$

Podrobnější ověření všech těchto skutečností je tak snadné, že si je dovolíme přenechat čtenáři. Rovněž snadno uvidíme, že pro řady, které jsou mnohočleny, se sčítání řad shoduje se sčítáním mnohočlenů. Výsledek je stejný, ať použijeme kterékoliv z obou definic.

Další operací, kterou potřebujeme rozšířit na řady, je *násobení*. Bude

$$\begin{aligned}&(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots) \ . \\ &. \ (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k + \ldots) = \\ &= d_0 + d_1x + d_2x^2 + \ldots + d_kx^k + \ldots \ ,\end{aligned} \tag{4}$$

právě když

$$d_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0 = \sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j} \tag{5}$$

pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ .

Také tato definice je ve shodě s definicí operace násobení mnohočlenů. Jsou-li dané dvě řady mnohočleny, tj. mají-li obě jen konečný počet nenulových koeficientů, je i jejich součin podle (4) mnohočlenem, a je to právě ten mnohočlen, který bychom dostali vynásobením obou daných mnohočlenů podle definice násobení mnohočlenů.

Již ze symetrie výrazu (5) vidíme, že násobení řad je operace komutativní. Platí vždy

$$A(x) \, . \, B(x) = B(x) \, . \, A(x) \; ; \tag{K}$$

ověření asociativnosti násobení řad, tj. vztahu

$$A(x) \, . \, [B(x) \, . \, C(x)] = [A(x) \, . \, B(x)]C(x) \; , \tag{A}$$

je o něco složitější, resp. zdlouhavější, ale v podstatě i při něm jde jen o elementární úpravy algebraických výrazů. Postup je ostatně stejný jako při ověřování asociativnosti násobení mnohočlenů.

Také distributivní zákon (vzhledem ke sčítání), tj. platnost vztahu

$$A(x) \, . \, [B(x) + C(x)] = A(x) \, . \, B(x) + A(x) \, . \, C(x) \, , \tag{D}$$

se snadno ověří.

Vcelku tedy můžeme říci, že početní operace sčítání a násobení řad jsou zcela přirozeným rozšířením obou těchto operací z oboru mnohočlenů a že si při rozšiřování zachovávají své vlastnosti (A), (K), (D).

Mezi mnohočleny, jež jsou zvláštním případem řad, patří také mnohočleny nultého stupně, tj. reálná čísla — konstanty. Každé reálné číslo $c$ můžeme tedy napsat též ve tvaru řady

$$c = c + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots$$

s jediným nenulovým (pokud $c \neq 0$) koeficientem. Poněvadž umíme již násobit řadu řadou, umíme také násobit řadu reálným číslem. Podle (4) a (5) bude

$$c(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots) =$$
$$= ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 + \ldots + ca_kx^k + \ldots$$

Vezmeme-li zde speciálně $c = 1$, vidíme, že řada

$$1(x) = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots$$

hraje úlohu *neutrálního prvku při násobení* (jednotka v oboru řad). Pro libovolnou řadu $A(x)$ platí

$$1(x) \,.\, A(x) = A(x) = A(x) \,.\, 1(x) \,.$$

Zvolíme-li naopak $c = -1$, můžeme definovat pojem *řady opačné* k dané řadě $A(x)$. Bude to řada

$$-A(x) = (-1) \,.\, A(x) \,,$$

kterou z $A(x)$ dostaneme změnou znaménka u *všech* jejích koeficientů. Je zřejmé, že platí

$$A(x) + [-A(x)] = 0(x) \,, \quad -[-A(x)] = A(x)$$

pro každou řadu $A(x)$. Pomocí opačné řady pak již snadno definujeme operaci *odečítání*; odečíst řadu $A(x)$ znamená přičíst řadu k ní opačnou.

Zvláštní úlohu při násobení hraje také nulová řada $0(x)$. Pro libovolnou řadu $A(x)$ totiž platí $A(x) \,.\, 0(x) = 0(x)$. Velmi důležité je však tvrzení obrácené:

*Jestliže součin dvou řad $A(x) \,.\, B(x)$ je roven nulové řadě $0(x)$, pak je $A(x) = 0(x)$ nebo $B(x) = 0(x)$.*

Skutečně, mějme dvě řady

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots$$

a

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k + \ldots ,$$

takové, že $A(x) \,.\, B(x) = 0(x)$, a předpokládejme, že $B(x) \neq \neq 0(x)$. Máme tedy dokázat, že je $A(x) = 0(x)$. Ježto $B(x) \neq 0(x)$, nejsou všechny koeficienty $b_k$ řady $B(x)$ rovny nule. Budiž $b_m$ první nenulový koeficient řady $B(x)$, tzn. že je buď $m = 0$, $b_0 \neq 0$, anebo $m > 0$, $b_m \neq 0$ a $b_k = 0$ pro $k = 0, 1, \ldots, m - 1$. Pro koeficienty $d_k$ součinu $D(x) = A(x) \,.\, B(x)$ platí ovšem vzorec (5). Počítejme podle něho koeficient $d_m$, který je nutně roven nule, protože podle předpokladu je $D(x) = A(x) \,.\, B(x) = 0(x)$. Máme tedy

$$0 = d_m = a_0b_m + a_1b_{m-1} + \ldots + a_mb_0 = a_0b_m ,$$

neboť $b_0 = b_1 = \ldots = b_{m-1} = 0$. Avšak $b_m \neq 0$, a tedy nutně $a_0 = 0$. Podobně pro koeficient $d_{m+1}$ bude

$$0 = d_{m+1} = a_0b_{m+1} + a_1b_m + a_2b_{m-1} + \ldots a_{m+1}b_0 = a_1b_m ,$$

takže také $a_1 = 0$ atd. Stejným způsobem, resp. obecně indukcí dokážeme, že $a_k = 0$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$; to však znamená, že je $A(x) = 0(x)$, ale to jsme měli právě dokázat.

Čtenář, který je obeznámen s příslušnými algebraickými pojmy, si patrně již uvědomil význam právě dokázaného tvrzení. Spolu s uvedenými vlastnostmi rovnosti, sčítání a násobení totiž tato věta znamená, že řady v naší definici tvoří — podobně jako mnohočleny — *obor integrity*. (Blíže o tom viz citovaný již svazek č. 26 Školy mladých matematiků — K. Hruša, *Polynomy v moderní algebře*, anebo knihu V. Kořínek, *Základy algebry*, NČSAV, Praha 1953.)

Podívejme se teď na možnost *dělení*. Také zde budeme nejprve definovat pojem řady *reciproké* („převrácené“) k dané řadě a dělení řadou pak zavedeme jako násobení řadou reciprokou. Mějme tedy dánu řadu

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \tag{6}$$

a hledejme k ní řadu

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k + \ldots \tag{7}$$

takovou, aby jejich součin byl

$$A(x) \,.\, B(x) = 1(x) \equiv 1 \,.$$

Ze vzorce (5) vidíme ihned, že musí především platit $a_0b_0 = 1$. To je však možné jenom tehdy, je-li $a_0 \neq 0$, jinak nenajdeme žádné vyhovující číslo $b_0$. Dostali jsme tak jednu *nutnou podmínku* pro to, aby k dané řadě (6) mohla existovat reciproká řada (7). Lze však ukázat, že tato podmínka je také *postačující.* Jakmile v (6) je $a_0 \neq 0$, dovedeme řadu (7) určit. Skutečně, její koeficienty $b_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) počítáme postupně z (5) porovnáním se známými koeficienty řady $1(x)$. Dostáváme tak

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0^{-1} \,, \\ b_1 &= -a_1a_0^{-2} \,, \\ b_2 &= a_1^2a_0^{-3} - a_2a_0^{-2} \,, \end{aligned}$$

atd.

**Příklad 1.** Hledejme řadu reciprokou k řadě

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots \tag{8}$$

(s koeficienty vesměs rovnými jedné). Podmínka nenulovosti koeficientu $a_0$ je tu splněna, můžeme tedy počítat koeficienty $b_k$ reciproké řady naznačeným postupem. Budou to $b_0 = 1$, $b_1 = -1$, $b_2 = -1 + 1 = 0$, ... atd., obecně $b_k = 0$ pro $k = 2, 3, 4, \ldots$ Hledanou řadou reciprokou k (8) je tedy řada — mnohočlen

$$1 + (-1)x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots = 1 - x\,.$$

Poněvadž operace násobení řad je komutativní, vidíme, že je-li (7) řada reciproká k řadě (6), je také (6) řada reciproká k řadě (7). Příklad 1 nám tak zároveň ukazuje, že (8) je řada reciproká k řadě — mnohočlenu $1 - x$.

Jak jsme si již před chvílí řekli, umožňuje pojem reciproké řady zavést operaci dělení řady řadou. Omezení dané podmínkou nenulovosti absolutního členu v řadě — děliteli je sice obdobné zákazu dělení nulou v oboru reálných čísel, je však přece jen přísnější. Z dělení jsou vyloučeny nejen nulová řada $O(x)$, ale vůbec všechny řady s nulovým absolutním členem, tedy podstatně více. I toto omezení je sice možné odstranit přidáním dalších nových prvků k našim řadám, avšak tím by se zkomplikovala další teorie, a to pro naše účely celkem zbytečně. Spokojíme se proto s řadami tak, jak jsme si je zavedli; musíme si jen uvědomovat, že tvoří sice obor integrity, nikoli však těleso.

Každopádně jsme však dosáhli, pokud se týče dělení, přechodem od mnohočlenů k řadám nesporného pokroku: zmizely problémy s dělitelností. Z toho, že násobení řad je skutečně rozšířením násobení mnohočlenů (pro řady, které jsou mnohočleny, obě definice dávají týž výsledek), plyne také, že i dělení řad — mnohočlenů vede v případě, kdy dělenec je dělitelný dělitelem, ke stejnému výsledku jako dělení mnohočlenu mnohočlenem.

**Příklad 2.** Z elementární algebry víme např., že

$$(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2\,.$$

Dělme tedy řadu-mnohočlen

$$1 - x^2 = 1 + 0x + (-1)x^2 + 0x^3 + \ldots + 0x^k + \ldots$$

řadou-mnohočlenem

$$1 - x = 1 + (-1)x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots$$

K této řadě je však podle příkladu 1 reciproká řada (8), takže výsledkem našeho dělení bude součin

$$(1 - x^2)(1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots) .$$

Provedeme-li zde násobení, dostaneme podle (5) skutečně jako výsledek řadu-mnohočlen

$$1 + x = 1 + 1x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots$$

Z příkladů 1 a 2 mj. vidíme, že součin dvou řad může být mnohočlenem i tehdy, jestliže oba činitelé mnohočleny nejsou. Ostatně řada reciproká k řadě-mnohočlenu aspoň prvého stupně není nikdy mnohočlenem; stačí si totiž uvědomit, že součin dvou mnohočlenů je vždy mnohočlen, jehož stupeň je roven součtu stupňů obou činitelů.

Naopak řady reciproké k mnohočlenům nultého stupně (tzn. k nenulovým konstantám) jsou opět nenulové konstanty (převrácené hodnoty daných), tedy mnohočleny nultého stupně:

$$\begin{aligned} &(c + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots) \,. \\ &. \,(1/c + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots) = \\ &= 1 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots = 1(x) \,. \end{aligned}$$

K nulové řadě $0(x)$ ovšem reciproká řada neexistuje; ostatně $0(x)$ ani není mnohočlen nultého stupně (nulový mnohočlen nemá žádný stupeň).

*Cvičení*

Znásobte řady

1. $(1 + 2x + 2x^2 + \ldots + 2x^k + \ldots) \,.$
   $. \,(1 - x + x^2 - + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots) \,,$

2. $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 4x^4 + \ldots + 4x^k + \ldots) \,.$
$\,.\, (1 - 2x^2 + 2x^4 - + \ldots + (-1)^k\, 2x^{2k} + \ldots)$ ;

3. $(1 + 2x + 2x^2 + \ldots + 2x^k + \ldots) \,.$
$\,.\, (1 - 2x + 2x^2 - + \ldots + (-1)^k\, 2x^k + \ldots)$ .

Najděte řadu reciprokou k řadě

4. $1 + 2x + x^2 + 0x^3 + \ldots + 0x^k + \ldots = (1 + x)^2$ ;

5. $$1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \ldots + \frac{1}{k!} x^k + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \,.$$

6. V oboru řad proveďte dělení

$(1 + x^2) : (1 + x)$ .

7. Určete řadu $A(x)$, pro kterou platí

$A(x)\,(1 + x) =$
$= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots$

**3. Mocniny řad.** Násobíme-li danou řadu jí samotnou, bývá obvyklé nazývat součin *čtvercem* nebo *druhou mocninou* dané řady. Je-li dána řada

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots = \qquad (6)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \,,$$

je její druhou mocninou řada

$$A^2(x) = a'_0 + a'_1x + a'_2x^2 + \ldots + a'_kx^k + \ldots ,$$

kde ve shodě s (5) je

$$a'_k = a_0a_k + a_1a_{k-1} + \ldots + a_ka_0 = \sum_{j=0}^{k} a_ja_{k-j} , \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5'}$$

Obdobně lze zavést i pojem třetí, čtvrté, ... atd., obecně $n$-té mocniny $A^n(x)$ dané řady $A(x)$

$$A^n(x) = A(x) \,.\, A^{n-1}(x) ,$$

přičemž $A^1(x) = A(x)$. Definici mocnin řady doplníme navíc úmluvou, že nultou mocninou libovolné řady budeme rozumět řadu $1(x)$. Počítání s mocninami řad je pak stejné jako s mocninami reálných čísel: $A^3(x) = A(x) \,.\, A^2(x) = A(x) \,.\, A(x) \,.\, A(x) = A^2(x) \,.\, A(x)$, $A^4(x) = A^3(x) \,.\, A(x) = A^2(x) \,.\, A^2(x) = [A^2(x)]^2$, atd. Vzhledem k asociativnosti a komutativnosti násobení řad je pojem $n$-té mocniny jednoznačný pro všechna celá nezáporná $n$ a platí obvyklé vzorce

$$A^n(x) \,.\, A^m(x) = A^{n+m}(x) , \tag{9}$$

$$[A(x) \,.\, B(x)]^n = A^n(x) \,.\, B^n(x) , \tag{10}$$

$$[A^n(x)]^m = A^{nm}(x) , \tag{11}$$

pro všechna celá $n, m \geqq 0$.

Bylo by zřejmě výhodné rozšířit pojem mocniny řady i na případ *záporných* mocnitelů, přirozeně tak, aby vztahy (9) – (11) zůstaly stále v platnosti. Takové rozšíření je možné. Stačí totiž, abychom pod minus první mocninou $A^{-1}(x)$ dané řady $A(x)$ rozuměli řadu k ní reciprokou. Přitom ovšem musíme předpokládat, že reciproká řada existuje, tzn. že koeficient $a_0$ dané řady (6) je nenulový. Záporné mocniny tedy na rozdíl od kladných nebudou definovány pro všechny řady. V dalším budeme řadu reciprokou k $A(x)$ běžně značit $A^{-1}(x)$.

Obecná platnost (pro všechna celá $n$, $m$) vztahů (9) — (11) se snadno odvodí z asociativního a komutativního zákona pro násobení řad. Vezměme např. $-m > n > 0$; potom $A^m(x) = [A^{-1}(x)]^{-m} = [A^{-1}(x)]^n \,.\, [A^{-1}(x)]^{-m-n}$, takže

$$\begin{aligned} A^n(x) \,.\, A^m(x) &= A^n(x) \,.\, [A^{-1}(x)]^n \, [A^{-1}(x)]^{-m-n} = \\ &= [A(x)\, A^{-1}(x)]^n \, [A^{-1}(x)]^{-m-n} = \\ &= 1^n(x) \, [A^{-1}(x)]^{-m-n} = A^{m+n}(x) \,, \end{aligned}$$

a podobně v ostatních případech.

**Příklad 3.** Počítejme druhou mocninu řady (8). Podle vzorce (5') pro koeficienty čtverce řady dostaneme

$$\begin{aligned} &(1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots)^2 = \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (k + 1)x^k + \ldots \end{aligned}$$

Zároveň můžeme tvrdit, že tato řada je reciproká k řadě-mnohočlenu $(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2$; vyplývá to ze vztahu $[A^2(x)]^{-1} = A^{-2}(x) = [A^{-1}(x)]^2$, který platí pro libovolnou řadu $A(x)$, k níž existuje reciproká řada $A^{-1}(x)$.

Máme-li takto definovány celé mocniny řad, kladné i záporné, je zcela přirozená otázka, zda a jak lze zavést mocniny s libovolným racionálním mocnitelem, zejména tedy, zda a jak lze definovat druhou, třetí atd. *odmocninu* z dané řady.

Samotná definice druhé odmocniny z řady nepůsobí potíže. Je-li dána řada

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k , \tag{7}$$

pak její druhou odmocninou rozumíme přirozeně takovou řadu

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots , \tag{6}$$

pro kterou platí $A^2(x) = B(x)$. Jaké podmínky však musí řada $B(x)$ splňovat, aby se dala řada $A(x)$ nalézt? Z porovnání koeficientů řady $B(x)$ a řady $A^2(x)$ — viz vzorec (5') — plyne především rovnost $b_0 = a_0^2$. Odtud je ihned vidět, že

1) je-li $b_0 < 0$, neexistuje žádná řada $A(x)$ (s reálnými koeficienty!), která by vyhovovala vztahu $A^2(x) = B(x)$;

2) je-li $b_0 = 0$, je nutně také $a_0 = 0$;

3) je-li $b_0 > 0$, pak $a_0$ může být buď $\sqrt{b_0}$, nebo $-\sqrt{b_0}$.

Podívejme se dále na případ 3). Porovnáním dalších koeficientů $b_k$ se vzorcem (5') dostáváme postupně

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1/2a_0 , \\ a_2 &= (b_2 - a_1^2)/2a_0 , \\ a_3 &= (b_3 - 2a_1a_3)/2a_0 \end{aligned}$$

atd.; ve jmenovateli všech těchto výrazů je vždy $2a_0$, tedy číslo od nuly různé, v čitateli pak jsou výrazy obsahující jen koeficienty $b_k$ dané řady a koeficienty $a_k$ s nižším indexem, tedy určené již v předcházejících krocích. V případě 3), když $b_0 > 0$, můžeme tedy postupně nalézt všechny koeficienty $a_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) hledané řady $A(x)$. Ze vzorce (5') pak vyplyne $A^2(x) = B(x)$.

Zbývá tedy probrat ještě případ 2), kdy $b_0 = 0$. Víme již, že nutně $a_0 = 0$, avšak podle (5') máme pro $b_1$ rovnost $b_1 = 2a_0a_1$, takže

2a) jestliže $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0$, nelze najít řadu $A(x)$, která by vyhovovala vztahu $A^2(x) = B(x)$;

2b) jestliže $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, dostaneme opět porovnáním koeficientů při $x^2$ podmínku $b_2 = a_1^2$ a jsme v podstatě ve stejné situaci jako na začátku, jenže „o jeden index dále". Jestliže $b_2 < 0$, hledaná řada $A(x)$ neexistuje; jestliže $b_2 > 0$, lze postupně najít jak $a_1$ ($a_1 = \sqrt{b_2}$ nebo $a_1 = -\sqrt{b_2}$), tak také další koeficienty $a_2, a_3, \ldots$ (vzorce jsou obdobné jako v případě 3); jestliže $b_2 = 0$, pak máme znovu dvě možnosti podle toho, zda je $b_3 \neq 0$ (řada $A(x)$ neexistuje), anebo $b_3 = 0$ — pak rozhoduje znaménko koeficientu $b_4$ atd.

Můžeme stručně shrnout celý rozbor. K tomu, aby k dané řadě $B(x)$ existovala řada $A(x)$ taková, že $A^2(x) = B(x)$, je *nutné a stačí*, aby *první nenulový* koeficient řady $B(x)$ měl *sudý index* a byl *kladný*.

Podobně jako u reálných čísel plyne z rovnosti $A^2(x) = B(x)$ také $[-A(x)]^2 = (-1)^2 A^2(x) = B(x)$, takže spolu s $A(x)$ je také $-A(x)$ — řada opačná k řadě $A(x)$ — druhou odmocninou řady $B(x)$. Odpovídá to dvojí možné volbě koeficientu $a_0$ (resp. prvního nenulového koeficientu $a_m$, je-li $b_k = 0$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1$, $b_{2m} \neq 0$). Z podmínky $a_0^2 = b_0$ (resp. $a_m^2 = b_{2m}$) dostaneme buď $a_0 = \sqrt{b_0}$, ($a_m = \sqrt{b_{2m}}$), nebo $a_0 = -\sqrt{b_0}$, ($a_m = -\sqrt{b_{2m}}$); volbou znaménka koeficientu $a_0$ (resp. $a_m$) jsou už další koeficienty řady $A(x)$ jednoznačně určeny.

**Příklad 4.** Pokusme se najít druhou odmocninu $A(x)$ řady (8). Podmínka existence je tu splněna, koeficient s indexem nula (tedy sudým) řady (8) je kladný (totiž roven jedné). Z první podmínky $a_0^2 = 1$ vezměme $a_0 = +1$ (volba znaménka). Potom dále vychází $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{8}$, $a_3 = \frac{5}{16}$, .... Pro koeficienty $a_k$ hledané řady existuje obecný vzorec

$$a_k = 4^{-k} \binom{2k}{k} ; \tag{12}$$

odvodíme si ho ještě později jinou cestou.

Jak rozbor podmínek, tak i konkrétní výpočet koeficientů při hledání druhé odmocniny z řady je dosti složitý; pro třetí a vyšší odmocniny nebude situace o nic lepší. Existuje však naštěstí ještě jiná, výhodnější metoda hledání odmocnin z dané řady. Ukážeme si ji později, až si dále rozšíříme výběr nástrojů, kterých umíme při zacházení s řadami používat.

*Cvičení*

Určete druhé odmocniny z řad

8. $1 - 2x + 3x^2 - + \ldots + (-1)^k (k+1)x^k + \ldots$
9. $1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - \ldots =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [x^{3k} + x^{3k+1}] .$$

10. Dokažte, že $[-A(x)]^k = (-1)^k A^k(x)$ pro všechna celá $k$.
11. Zjednodušte diskusi podmínek existence druhé odmocniny řady tím, že z ní vytknete vhodnou sudou mocninu $x$. Řadu $B(x)$ vyjádříte tedy jako součin jiné řady a mnohočlenu tvaru $x^{2m}$.

**4. Binomická řada.** Vraťme se teď na chvíli znovu k tématu, kterým jsme se zabývali ve druhém odstavci první kapitoly, k binomickým koeficientům. Vlastní obsah tzv. binomické věty jakožto tvrzení o platnosti vzorce (I.3), resp. (I.4) tkví v rovnosti koeficientů mnohočlenu $(1 + x)^n$ a výrazů (I.2). Je přitom lhostejné, *kterým směrem* postupujeme, zda *definujeme* čísla $\binom{n}{k}$ vzorcem (I.2) a *pak dokážeme*, že koeficienty v $(1 + x)^n$ jsou právě tato čísla $\binom{n}{k}$, anebo zda *obráceně* definujeme čísla $\binom{n}{k}$ jako koeficienty v $(1 + x)^n$ a pak dokážeme, že pro ně platí vyjádření (I.2).

Tento druhý postup nyní uplatníme při definici čísel $\binom{-n}{k}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots$. Podle naší úmluvy je $\binom{n}{k} = 0$ pro $0 \leqq n < k$, takže při pevném $n \geqq 0$ jsou čísla $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ právě koeficienty řady (mnohočlenu) $(1 + x)^n$, což není nic jiného než $n$-tá mocnina *řady* (mnohočlenu) $1 + x$. Je proto zcela přirozené *definovat* čísla $\binom{-1}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, jako koeficienty řady reciproké k řadě $1 + x$ a obecně pak čísla $\binom{-n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots$ jako koeficienty řady reciproké k řadě $(1 + x)^n$, anebo — což je podle (10) totéž — jako koeficienty řady, která je $n$-tou mocninou řady reciproké k řadě $1 + x$.

Řadu reciprokou k $1 + x$ najdeme snadno známým způsobem; je to řada

$$1 - x + x^2 - + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots, \qquad (13)$$

takže podle naší definice bude

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Řadu (13) nyní umocníme. Podle (5') dostaneme

$$\binom{-2}{k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (-1)^{k-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^k = (-1)^k (k+1) ,$$

tedy

$$(1 + 2x + x^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)x^k =$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots + (-1)^k (k+1)x^k + \ldots$$

Zcela stejně jako v případě kladných mocnin odvodíme ze vzorců pro násobení řad obecný vztah

$$\binom{-n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{-r}{j} \binom{-n+r}{k-j}, \qquad 0 \leqq r \leqq n ; \tag{15}$$

speciálně tedy při $r = 1$ platí

$$\binom{-n-1}{k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-n}{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{-n}{j} (-1)^{k-j} =$$

$$= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-n}{j} ,$$

takže

$$(-1)^k \binom{-n-1}{k} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-n}{j} . \tag{16}$$

Pomocí vzorce (16) můžeme už celkem snadno počítat postupně všechna čísla $\binom{-n}{k}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, podobně jako počítáme $\binom{n}{k}$ při $0 \leqq k \leqq n$ z Pascalova trojúhelníka. V následující tabulce je pro názornost uvedeno několik hodnot čísel $\binom{-n}{k}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, 8$; $n = 1, 2, \ldots, 8$:

| $k =$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 1$ | 1 | −1 | 1 | −1 | 1 | −1 | 1 | −1 | 1 |
| 2 | 1 | −2 | 3 | −4 | 5 | −6 | 7 | −8 | 9 |
| 3 | 1 | −3 | 6 | −10 | 15 | −21 | 28 | −36 | 45 |
| 4 | 1 | −4 | 10 | −20 | 35 | −56 | 84 | −120 | 165 |
| 5 | 1 | −5 | 15 | −35 | 70 | −126 | 210 | −330 | 495 |
| 6 | 1 | −6 | 21 | −56 | 126 | −252 | 462 | −792 | 1287 |
| 7 | 1 | −7 | 28 | −84 | 210 | −462 | 924 | −1716 | 3003 |
| 8 | 1 | −8 | 36 | −120 | 330 | −792 | 1716 | −3432 | 6435 |

Analogickým způsobem se dá z rovnosti řad

$$(1 + x)^{-n-1} \,.\, (1 + x) = (1 + x)^{-n}$$

odvodit vzorec odpovídající vzorci (I.5), totiž

$$\binom{-n-1}{k} + \binom{-n-1}{k-1} = \binom{-n}{k} \tag{17}$$

platný pro $n \geqq 0$, $k > 0$. Vzorec (17) lze ostatně získat též ze (16) odečtením.

Vedle rekurentních vzorců (16) a (17) bychom ovšem také rádi měli explicitní vyjádření čísel $\binom{-n}{k}$ obdobné vzorci (I.2). Takové vyjádření skutečně existuje; dokážeme si teď, že platí

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}, \quad n > 0,\ k \geqq 0. \qquad (18)$$

Důkaz povedeme indukcí podle $n$. Pro $n = 1$ vzorec (18) platí, neboť $\binom{-1}{k} = (-1)^k$ podle (14) a $\binom{k}{k} = 1$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$. Předpokládejme tedy, že (18) platí pro určité $n = m \geqq 1$ a dokažme, že potom platí také pro $n = m + 1$. Podle (16) však je

$$\binom{-m-1}{k} = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{-m}{j} =$$

$$= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{m+j-1}{j}.$$

Ale podle (I.14′) je součet na pravé straně roven právě číslu $\binom{m+k}{k}$, takže

$$\binom{-m-1}{k} = (-1)^k \binom{m+1+k-1}{k},$$

což není nic jiného nežli rovnost (18) pro $n = m + 1$, kterou jsme právě měli dokázat. Platí tedy (18) pro všechna přirozená $n$.

**Příklad 5.** Počítejme $\binom{-7}{4}$ podle (18). Víme, že

$$\binom{-7}{4} = (-1)^4 \binom{10}{4} = \binom{10}{4} = 10\,.\,3\,.\,7 = 210$$

ve shodě s hodnotou uvedenou v předchozí tabulce.

Vzorec (I.2) se dá poněkud zjednodušit zkrácením číslem $(n-k)!$ S použitím označení zavedeného ve třetím paragrafu první kapitoly můžeme psát

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{F_k(n)}{k!}\,. \tag{19}$$

Je-li $k > n$, platí vzorec (19) rovněž, neboť se pak v čitateli jako jeden z činitelů objeví i číslo $n - n = 0$, takže pak $\binom{n}{k} = 0$ ve shodě s naší úmluvou. Ale i pro $n < 0 \leqq k$ platí (19); je-li $n = -m$, $m > 0$, je podle vzorce (18)

$$\binom{n}{k} = \binom{-m}{k} = (-1)^k\binom{m+k-1}{k} =$$

$$= (-1)^k(m+k-1)(m+k-2)\dots(m+k-k)\frac{1}{k!} =$$

$$= \frac{1}{k!}(-m)(-m-1)\dots(-m-k+1) =$$

$$= \frac{1}{k!}n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{F_k(n)}{k!}\,.$$

Ve shodě s našimi definicemi čísel $\binom{n}{k}$ tak můžeme psát

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots \tag{20}$$

pro libovolné celé $n$. Je-li $n \geqq 0$, je (20) mnohočlen, neboť $\binom{n}{k} = 0$ pro všechna $k > n$; je-li $n < 0$, není řada (20) mnohočlenem, neboť všechny její koeficienty jsou pak nenulové. Tím se liší případ záporných mocnin řady $1 + x$

od jednoduššího a známého případu kladných mocnin dvojčlenu $1 + x$.

**Příklad 6.** Poněvadž $(1 + x)^n (1 + x)^{-n} = 1$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$, musí pro každé kladné $k$ platit

$$0 = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k-j} \binom{-n}{j} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} \binom{n}{k-j}, \tag{21}$$

jak vyplývá z porovnání koeficientů při $x^k$.

**Příklad 7.** Podobně jako v příkladě 4 v první kapitole porovnejme koeficienty v řadách

$$(1 + x)^{-n} (1 - x)^{-n} = (1 - x^2)^{-n}. \tag{22}$$

Dostaneme tak jednak rovnost

$$\binom{n+k-1}{k} = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} \binom{n+2k-j-1}{2k-j},$$

jednak

$$\sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} \binom{n+2k-j}{2k-j+1} = 0 ;$$

obě jsou platné pro $k = 1, 2, 3, \ldots$

Řadám tvaru (20) říkáme *binomické řady*. Jejich speciálním případem jsou tedy i známé mnohočleny $(1 + x)^n$, $n \geqq 0$, mocniny dvojčlenu – binomu $1 + x$ (odtud jejich název). Upozorňujeme však pro jistotu hned teď, že jsme zatím nikde nemluvili o hodnotě řady, o dosazování reálných hodnot za proměnnou $x$ do řady, o substitucích atd. O tom všem pojednáme až v dalších odstavcích. Proto také je třeba rozumět např. rovnostem tvaru (22) zatím jen ve smyslu násobení řad jakožto formální operace s jejich koeficienty.

Vzorec (19) je zcela obecné vyjádření koeficientů $\binom{n}{k}$ pro libovolné celé $n$ a nezáporné celé $k$. To nás celkem přirozeně vede k myšlence *definovat* výrazem (19) čísla $\binom{n}{k}$ i pro necelé hodnoty $n$, tzn. položit pro libovolné reálné číslo $p$ a celé $k \geqq 0$

$$\binom{p}{k} = \frac{1}{k!} F_k(p) \, . \tag{19'}$$

Bude nás teď především zajímat, jak se chová řada, která má za koeficienty tato čísla $\binom{p}{k}$, tedy řada

$$B_p(x) = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \ldots + \binom{p}{k} x^k + \ldots \tag{23}$$

Speciálními případy (pro *celé* hodnoty $p$) řad (23) jsou ovšem naše už známé binomické řady (20), resp. též mnohočleny $(1 + x)^n$. Proto i řady (23) budeme nazývat *binomickými řadami*.

Mějme dvě binomické řady tvaru (23), $B_p(x)$ a $B_q(x)$, a počítejme koeficienty jejich součinu $B_p(x) \, . \, B_q(x)$. Podle (5) je koeficient při $x^n$ v tomto součinu dán součtem

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} F_k(p)\, F_{n-k}(q) =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(p)\, F_{n-k}(q) \, .$$

Ten však je podle vzorce (I.62) roven právě

$$\frac{1}{n!} \; F_n(p + q) = \binom{p+q}{n} \, ,$$

takže zcela obecně platí

$$B_p(x) \, . \, B_q(x) = B_{p+q}(x) \tag{24}$$

pro všechna reálná $p$, $q$. Speciálně pak z (24) plyne také $B_p(x) \, . \, B_p(x) = B_p{}^2(x) = B_{2p}(x)$, resp. obecně $B_p{}^m(x) = B_{mp}(x)$ pro každé reálné $p$ a přirozené $m$. Je-li $r$ racionální číslo, $r = p/q$ ($p$, $q$ přirozená), platí tedy také

$$B_r{}^2(x) = B_p(x) = (1 + x)^p \, ,$$

takže můžeme řadu $B_r(x)$ pokládat za $q$-tou odmocninu z řady $B_p(x)$, tj. z mnohočlenu $(1 + x)^p$, a můžeme psát

$$B_r(x) = (1 + x)^r \tag{25}$$

pro všechna kladná racionální čísla $r$. Přechodem k reciprokým řadám pak snadno odvodíme platnost (25) i pro záporná $r$. Při $r = 0$ je ovšem $\binom{0}{k} = 0$ pro všechna $k > 0$ a $B_0(x) = 1(x) = (1 + x)^0$; (25) tedy platí pro *všechna racionální* $r$.

**Příklad 8.** Ve (23) zvolme $p = \dfrac{1}{2}$. Podle (25) bude řada

$$B_{\frac{1}{2}}(x) = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} x + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 + \ldots + \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k + \ldots \tag{26}$$

vlastně druhou odmocninou (ve smyslu odstavce 3) z mnohočlenu $1 + x$. Koeficienty v (26) jsou čísla

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \ldots \left(\frac{3}{2} - k\right)}{k!} =$$

$$= \frac{1(-1)(-3) \ldots (-2k+3)}{k!\,2^k} =$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2k-3)}{k!\,2^k} \,.$$

$$. \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots (2k-2)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots (2k-2)} =$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2k-2)}{k!\,2^k \,.\, 2^{k-1}(k-1)!} =$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} \,.\, k!\,(k-1)!} \,.$$

**Příklad 9.** Podívejme se ještě na řadu reciprokou k řadě (26); bude jí podle (24) řada

$$B_{-\frac{1}{2}}(x) = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} x + \binom{-\frac{1}{2}}{2} x^2 + \ldots +$$

$$+ \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k + \ldots \tag{27}$$

Pro její koeficienty dostaneme stejným postupem jako v případě řady (26) vyjádření

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2k-1)}{k!\, 2^k} =$$

$$= (-1)^k \frac{2k!}{2^{2k} k!\, k!} = \left(\frac{-1}{4}\right)^k \binom{2k}{k} .$$

Píšeme-li v (27) všude $-x$ místo $x$, dostaneme řadu

$$B_{-\frac{1}{2}}(-x) = 1 - \binom{-\frac{1}{2}}{1} x + \binom{-\frac{1}{2}}{2} x^2 - + \tag{28}$$

$$+ \ldots + (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k + \ldots ,$$

jejíž koeficienty jsou zřejmě

$$(-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} = 4^{-k} \binom{2k}{k} .$$

Podle (24) máme přitom $B_{-\frac{1}{2}}^2(x) = B_{-1}(x)$, což je podle (14) právě řada (13). Píšeme-li v ní $-x$ místo $x$, dostaneme řadu $B_{-\frac{1}{2}}^2(x) = B_{-1}(-x) = (1-x)^{-1}$, tedy řadu (8). Řada (28) je tedy druhou odmocninou z řady (8); tím jsme si dokázali vlastně obecnou platnost vzorce (12) pro její koeficienty, jak jsme o tom hovořili už v příkladě 4.

*Omezenými algebraickými prostředky, které zde máme k dispozici, nedovedeme dokázat, že rovnost* (25) *platí i pro jiná nežli racionální r*, ač ovšem řada $B_r(x)$ je i v tomto případě definována. *Nevíme* však *zatím*, jak bychom měli rozumět výrazu $(1 + x)^r$, nevíme totiž, *co znamená r-tá mocnina řady při iracionálním r.*

*Cvičení*

12. Určete koeficienty řady $B_{\frac{3}{2}}(x) = (1 + x)^{\frac{3}{2}}$ a ověřte, že je
$B_{\frac{3}{2}}^2(x) = B_3(x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^2$.

13. Dokažte, že pro *libovolné reálné p* platí

$$\binom{p+1}{k+1} = \binom{p}{k+1} + \binom{p}{k}$$

pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$

14. Ukažte, že také vzorce (I.7) a (I.14′) i výsledky cvičení 1 a 2 z první kapitoly zůstanou v platnosti, nahradíme-li v nich celé $n$ libovolným reálným $p$. Stejná tvrzení platí i pro vzorce (15), (16) a (18), které jsme si zatím odvodili jen pro celá $n$.

**5. Derivace řady.** Rozšíření pojmu derivace z mnohočlenů na řady je takřka bezprostřední. Je-li dána řada

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k\,, \tag{6}$$

nazveme její derivací řadu

$$\mathrm{D}A(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (k+1)a_{k+1}x^k + $$
$$+ \dots = \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^{k-1} \, . \tag{29}$$

Jde přitom o skutečné rozšíření. Je-li totiž daná řada (6) mnohočlenem, je její derivace (29) stejná jako derivace tohoto mnohočlenu podle definice podané v první kapitole.

Stejně snadno se přesvědčíme, že derivace řady se vzhledem k početním operacím chovají stejně jako derivace mnohočlenů; i pro ně platí pravidla 1, 2 a 3, tzn. vzorce

$$\mathrm{D}[A(x) + B(x)] = \mathrm{D}A(x) + \mathrm{D}B(x) \, , \tag{30}$$

resp. obecněji

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}[A_1(x) + A_2(x) + \dots + A_m(x)] = \\ &= \mathrm{D}A_1(x) + \mathrm{D}A_2(x) + \dots + \mathrm{D}A_m(x) \, , \end{aligned} \tag{30'}$$

$$\mathrm{D}[cA(x)] = c\mathrm{D}A(x) \, , \quad c = \text{konst.}, \tag{31}$$

$$\mathrm{D}[A(x) \, . \, B(x)] = A(x) \, \mathrm{D}B(x) + \mathrm{D}A(x) \, . \, B(x) \, , \tag{32}$$

resp.

$$\begin{aligned} \mathrm{D}[A_1(x) \, A_2(x) \dots A_m(x)] &= \mathrm{D}A_1(x) \, . \, A_2(x) \dots A_m(x) + \\ &+ A_1(x) \, \mathrm{D}A_2(x) \, . \, A_3(x) \dots A_m(x) + \\ &+ \dots + A_1(x) \, A_2(x) \dots A_{m-1}(x) \, \mathrm{D}A_m(x) \, . \end{aligned} \tag{32'}$$

Odtud plyne pak pro $m = 1, 2, 3, \dots$

$$\mathrm{D}A^m(x) = mA^{m-1}(x) \, \mathrm{D}A(x) \, , \tag{33}$$

srv. obdobně (I.33). Z rovností $A(x) \, . \, A^{-1}(x) = 1(x)$ a $\mathrm{D}1(x) = 0(x)$ dostáváme pro derivaci řady $A^{-1}(x)$ reciproké k dané řadě $A(x)$ vzorec

$$\mathrm{D}A^{-1}(x) = -A^{-2}(x)\,\mathrm{D}A(x)\,, \tag{34}$$

takže (33) platí pro *všechna* celá $m$ (včetně záporných). Vzorec (33) lze dokonce zobecnit i na případ libovolných racionálních exponentů $r$

$$\mathrm{D}A^{r}(x) = rA^{r-1}(x)\,\mathrm{D}A(x)\,. \tag{33'}$$

Podrobné ověření vzorců (30) — (34) přenecháváme pro pocvičení čtenáři.

**Příklad 10.** Pro naše známé binomické řady $B_p(x) = (1+x)^p$ platí

$$\mathrm{D}B_r(x) = rB_{r-1}(x) = r(1+x)^{r-1} \tag{35}$$

pro všechna racionální $r$. Platnost prvé rovnosti v (35) lze ovšem dokázat — a to dokonce pro libovolné reálné (tedy i iracionální) $r$ — také přímo z (19) a (I.20) bez odvolávání se na (33').

Také pojem *druhé, třetí, ...* atd. *derivace* se dá pro řady zavést stejně jako pro mnohočleny:

$$\mathrm{D}^k A(x) = \mathrm{D}[\mathrm{D}^{k-1}A(x)]\,, \qquad k = 1, 2, 3, \dots \tag{36}$$

přičemž $\mathrm{D}^1 A(x) = \mathrm{D}A(x)$ a $\mathrm{D}^0 A(x) = A(x)$. Platí ovšem opět

$$\mathrm{D}^m[\mathrm{D}^n A(x)] = \mathrm{D}^{m+n}A(x)\,, \qquad m, n \geqq 0\,, \tag{37}$$

a

$$\mathrm{D}^k A(x) = \sum_{j=k}^{\infty} F_k\,(j)\,a_j x^{j-k} = \sum_{j=0}^{\infty} F_k(j+k) a_{j+k} x^j, \tag{38}$$

kde řadu $A(x)$ předpokládáme danou výrazem (6). Také vzorce (I.39) a (I.40) a Leibnizův vzorec (I.41) se dají přenést z mnohočlenů na řady

$$\mathrm{D}^k[A(x) + B(x)] = \mathrm{D}^k A(x) + \mathrm{D}^k B(x)\ , \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{39}$$

$$\mathrm{D}^k[cA(x)] = c\mathrm{D}^k A(x)\ , \quad c = \text{konst.} \tag{40}$$

$$\mathrm{D}^k[A(x)\ .\ B(x)] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{D}^j A(x)\ .\ \mathrm{D}^{k-j} B(x)\ . \tag{41}$$

**Příklad 11.** Hledejme řadu $A(x)$, pro kterou by platilo

$$\mathrm{D}^k A(x) = A(x) \tag{42}$$

pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ Stačí ovšem uvažovat jen $k = 1$; z (29) dostáváme podmínku $ka_k = a_{k-1}$, tzn. $a_k = a_0/k!$. Je-li zde $a_0 = 0$, je hledanou řadou nulová řada $O(x)$, která ovšem podmínce (42) také vyhovuje. Při $a_0 = 1$ vychází pak řada

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots \tag{43}$$

Ihned vidíme, že všechny řady, jež vyhovují (42), jsou konstantní násobky řady $E(x)$ z (43).

**6. Hodnota řady.** Na první pohled by se mohlo zdát, že můžeme být s výsledky pokusu o rozšíření oboru mnohočlenů na řady jedině spokojeni. Potíže s dělením a odmocňováním se zmenšily a jiné operace (jako např. derivování) se nijak podstatně nezkomplikovaly. Ale na světě nebývá nic zadarmo a za zjednodušení v jednom směru zaplatíme komplikacemi, které se objeví jinde.

S mnohočleny jsme totiž prováděli zcela běžně ještě jednu operaci, kterou jsme si dosud nedefinovali pro řady, a to *dosazení určité* (reálné) *hodnoty* za proměnnou $x$.

A právě zde narazíme v případě řad na bohužel dosti podstatnou obtíž. Dosazením reálného čísla za $x$ do mnohočlenu dostaneme vždy součet jen *konečného* počtu sčítanců, který tedy dovedeme spočítat. V případě řady budeme mít po dosazení za $x$ takových sčítanců nekonečně mnoho, ale v aritmetice reálných čísel jsme si nekonečné součty nedefinovali a nevíme, co znamenají.

K základům matematické analýzy, které se u nás probírají až na vysoké škole, patří také teorie nekonečných řad, která umožňuje dát rozumný smysl právě takovým „součtům nekonečně mnoha sčítanců". Je však nemyslitelné, abychom si zde, v malé knížce určené zcela jiným cílům, probírali podrobněji tak obsáhlé téma, jako je teorie nekonečných řad. Musíme si proto vypomoci jinak. Budeme muset přijmout bez důkazu některá základní tvrzení. Budou to pro nás jakési „axiómy teorie dosazování do řad". Snažíme se je ovšem volit tak, aby operace dosazení do řady měla pokud možno „rozumné" vlastnosti, co možná blízké vlastnostem operace dosazení do mnohočlenu. Bohužel není možné zařídit, aby se každé reálné číslo dalo dosadit do každé řady; musíme se spokojit s jistým rozumným *optimem*, když maximum je nedosažitelné.

Jako první, celkem přirozený „axióm" přijmeme konvenci, že *součet nekonečně mnoha nulových sčítanců se vždy rovná nule*. To má hned dvě výhody:

1) Je-li daná řada $A(x)$ mnohočlenem, má jen konečný počet nenulových koeficientů. Dosadíme-li do ní za $x$ jakoukoliv pevnou reálnou hodnotu $q$, dostaneme součet, v němž je konečný počet sčítanců nenulových (a ten umíme spočítat) a nekonečně mnoho sčítanců nulových (a jejich součet je tedy roven nule). Celkový výsledek (součet oněch nenulových sčítanců) je pak zřejmě stejný jako výsledek dosazení téže hodnoty $q$ do mnohočlenu $A(x)$ v obvyklém

smyslu. Operace dosazení do řady se tak jeví jako skutečné *rozšíření* operace dosazení do mnohočlenu.

2) Do *každé* řady můžeme za $x$ dosadit nulu. Výsledkem dosazení $x = 0$ do řady $A(x) = \Sigma a_k x^k$ je pak podle našeho „axiómu" nutně $A(0) = a_0$. Odtud a z (38) vyplývají už pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ rovnosti $\mathrm{D}^k A(0) = k!\, a_k$. I pro řady platí *MacLaurinova formule*

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \mathrm{D}^k A(0) . \tag{44}$$

Má-li mít operace dosazení i v obecném případě rozumný smysl, musí *respektovat početní operace s řadami* stejně, jako je respektuje operace dosazení do mnohočlenu; to bude náš druhý „axióm". Jestliže je tedy $q$ reálné číslo, které smíme dosadit do daných řad $A(x)$ a $B(x)$ — což znamená, že příslušné součty mají určité hodnoty $A(q)$ a $B(q)$ — pak smíme $q$ dosadit za $x$ také do součtu $C(x) = A(x) + B(x)$ obou daných řad a do jejich součinu $D(x) = A(x) \,.\, B(x)$, a přitom musí platit $C(q) = A(q) + B(q)$ a $D(q) = A(q) \,.\, B(q)$.

Všimněme si dvou konkrétních důsledků druhého „axiómu". Každé reálné číslo $q$ smíme dosadit do mnohočlenu $B(x) = b + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^k + \ldots$ a vždy je $B(q) = b = $ konst. Smíme-li tedy dosadit $q$ do dané řady $A(x)$, smíme je dosadit též do jejího konstantního násobku $bA(x) = B(x) \,.\, A(x)$ a jako výsledek dostaneme číslo $bA(q)$.

Druhý důsledek se týká reciprokých řad. Jestliže k dané řadě $A(x)$ existuje reciproká řada $A^{-1}(x)$ — k tomu, jak víme, je nutné a stačí, aby bylo $A(0) \neq 0$ — platí $A(x) \,.\, A^{-1}(x) = 1(x)$. Je-li tedy $q$ číslo, které smíme dosadit *jak do* $A(x)$, *tak také do* $A^{-1}(x)$, musí pro příslušné hodnoty platit $A(q) \,.\, A^{-1}(q) = 1(q) = 1$, takže nutně

$A^{-1}(q) = [A(q)]^{-1}$. Této vlastnosti operace dosazení využíváme např. k určování hodnot řad reciprokých k mnohočlenům.

**Příklad 12.** Poněvadž víme, že řada (8) je reciproká k řadě-mnohočlenu $1 - x$, bude hodnota řady (8) po dosazení $x = q$, tj. hodnota součtu $1 + q + q^2 + \ldots + q^k + \ldots$ rovna vždy $(1 - q)^{-1}$, a to pro každé reálné číslo $q$, které smíme do řady (8) dosadit. Kdybychom do řady (8) dosadili $x = 1$, měla by nám jako hodnota řady vyjít převrácená hodnota nuly, což není možné. Z toho už vidíme, že $x = 1$ zřejmě nesmíme do řady (8) dosazovat. Máme tu příklad řady, do které (na rozdíl od mnohočlenů) nelze dosadit cokoliv.

Jako třetí, opět celkem přirozený „axióm" přijmeme zásadu, podle níž *o existenci a hodnotě součtu rozhodují* zcela *hodnoty jednotlivých sčítanců* (v daném pořadí) vzniklých dosazením reálné hodnoty, avšak nezáleží ani na dosazované hodnotě, ani na tom, do které řady se operace dosazení provádí.

V dalším budeme většinou vycházet z následující konkrétnější formulace této zásady:

Mějme dány dvě řady $A(x) = \Sigma a_k x^k$ a $B(x) = \Sigma b_k x^k$ a nechť $q$ je reálné číslo, které smíme dosadit za $x$ do řady $A(x)$, tzn. že existuje hodnota $A(q)$ součtu $a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots + a_k q^k + \ldots$ Jestliže nyní pro jisté reálné číslo $p$ platí $a_k q^k = b_k p^k$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, pak smíme dosadit číslo $p$ za $x$ do řady $B(x)$ a platí $B(p) = A(q)$.

V některých případech by ovšem tato formulace byla příliš speciální; tak např. z ní přímo nevyplývá, že dosazením hodnoty $\frac{1}{2}$ za $x$ do řady

$$B(x) = \Sigma b_k x^k = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k} + \ldots ,$$
kde $b_k = 0$ pro lichá $k$, dostaneme týž výsledek jako dosazením hodnoty $x = \frac{1}{4}$ do řady (8), která má všechny koeficienty (tedy i s lichými indexy) nenulové, takže požadovaná rovnost $a_k q^k = b_k p^k$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ tu zřejmě neplatí. Poněvadž však podle prvního „axiómu" rozhodují o existenci a hodnotě součtu jen *nenuloví* sčítanci a poněvadž — po vynechání nulových sčítanců — dostaneme v obou případech stejný součet, totiž $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{4^k} + \ldots$, můžeme na základě naší *obecné zásady* tvrdit, že obojí dosazení bude *stejně oprávněné* a povede také ke *stejné výsledné hodnotě* (uvidíme později, ke které). Obdobně budeme postupovat i v jiných případech.

Uvedeme si ještě jeden důsledek našeho nového „axiómu".

Do každé řady $A(x) = \Sigma a_k x^k$ smíme za $x$ dosadit právě ta čísla, která smíme dosadit do řady $D(x) = x\,A(x) = \Sigma a_k x^{k+1}$.

Skutečně, řada $D(x)$ je součinem řady $A(x)$ a mnohočlenu $M(x) = x$, a proto již podle druhého „axiómu" smíme do řady $D(x)$ dosadit každé číslo $q$, které smíme dosadit do řady $A(x)$. Že do $A(x)$ smíme vždy dosadit nulu, víme již z prvního „axiómu". Buďiž tedy $q \neq 0$ číslo, které smíme dosadit do řady $D(x)$ a vezměme nyní řadu $C(x)$, která je součinem řady $D(x)$ a mnohočlenu $N(x) = 1/q = $ konst. Číslo $q$ smíme (podle druhého „axiómu") dosadit do $C(x)$; dostaneme tak součet
$$C(q) = \frac{1}{q} a_0 q + \frac{1}{q} a_1 q^2 + \frac{1}{q} a_2 q^3 + \ldots + \frac{1}{q} a_k q^{k+1} + \ldots = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots + a_k q^k + \ldots ,$$

ale to je právě součet, který vznikne dosazením $q$ za $x$ do řady $A(x)$. Hodnota $A(q)$ tedy existuje a je $A(q) = C(q)$.

K dosud uvedeným „přirozeným" požadavkům kladeným na operaci dosazení do řady musíme připojit ještě několik dalších tvrzení základního významu, možná už méně názorných. V analytické teorii nekonečných řad se sice většinou dokazují, resp. odvozují z jednodušších, ale my si je zde zahrneme mezi nedokazované „axiómy". Z estetického hlediska by jistě bylo žádoucí, aby zejména těchto „s nebe spadlých axiómů" bylo co nejméně, ale aby se z nich naopak dalo odvodit co nejvíce a aby přitom byly navzájem nezávislé. Poněvadž nám však zde nejde o systematické vybudování skutečné axiomatické teorie nekonečných řad, budeme se důsledně starat pouze o to, aby náš systém „axiómů" byl bezesporný. Vzájemná závislost „axiómů" nám pak nebude příliš vadit, půjde nám vždy spíše o to, abychom co nejpohodlněji dospěli k žádoucím výsledkům a abychom v konkrétních případech uměli bez velkých potíží rozhodnout, které hodnoty do dané řady smíme dosazovat a jaký bude výsledek.

Jedním z nejdůležitějších kritérií možnosti dosazení je následující *princip majorizace* při porovnávání dvou řad.

Mějme znovu dány dvě řady $A(x) = \Sigma a_k x^k$ a $B(x) = \Sigma b_k x^k$ a nechť pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí nerovnosti $|a_k| \leqq |b_k|$. Budiž $q \neq 0$ číslo, které smíme dosadit do řady $B(x)$ — tzn., že součet $b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + \ldots + b_k q^k + \ldots$ má určitou hodnotu $B(q)$. Potom do řady $A(x)$ smíme dosadit *mj.* každé číslo $p$, pro které je $|p| < |q|$.

Poněvadž vždy platí $|b_k| \leqq |b_k|$, vidíme, že do řady $B(x)$, do které smíme dosadit číslo $q \neq 0$, smíme dosadit také každé číslo $p$, které je v absolutní hodnotě menší než $|q|$. Odtud již bezprostředně vyplývá obecný tvar množiny hodnot, které do určité řady smíme dosadit. Z tohoto hlediska se řady zřejmě dělí do těchto tří kategorií:

1) Řady, do nichž smíme dosadit kterékoliv reálné číslo. Tyto řady budeme nazývat *celistvé*; patří k nim mj. všechny mnohočleny.

2) Řady, do nichž smíme dosadit pouze nulu. Tyto řady budeme nazývat *banální.*

3) Ostatní řady, které nejsou ani celistvé, ani banální. Pro každou takovou řadu existuje kladné číslo $\varrho$ tak, že do řady smíme dosazovat reálná čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než $\varrho$ a nesmíme dosazovat čísla s absolutní hodnotou větší nežli $\varrho$ (odpovídající součet by neměl smysl). O samotných číslech $\varrho$ a $-\varrho$ se přitom obecně nedá nic tvrdit.

Číslu $\varrho$ se říká *poloměr* dané řady. Abychom mohli o poloměru mluvit ve všech případech, doplňujeme jeho definici tak, že pro banální řady klademe $\varrho = 0$ a pro celistvé řady $\varrho = \infty$ ($\infty$ je ex definitione větší než každé reálné číslo). V matematické analýze se odvozuje postup, jak určit poloměr řady přímo z jejích koeficientů, užívá se však při něm nealgebraické operace limity. My se zde omezíme na jednodušší způsoby zjišťování poloměru řady; jsou založeny většinou na porovnání s řadou, jejíž poloměr už známe, s použitím *principu majorizace.* Ten si můžeme pomocí pojmu poloměru přeformulovat takto: *platí-li pro koeficienty $a_k$, $b_k$ dvou daných řad $A(x)$, $B(x)$ nerovnosti $|a_k| \leqq |b_k|$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), pak poloměr řady $A(x)$ není menší než poloměr řady $B(x)$.*

Chceme-li ovšem vzájemně porovnávat řady, musíme odněkud vyjít. Potřebujeme tedy znát poloměry aspoň některých základních řad; zatím vlastně jen víme, že mnohočleny jsou celistvé řady a mají tedy poloměr $\infty$. Velmi užitečnou úlohu zde sehraje znovu naše známá řada (8). Už z příkladu 12 víme, že její poloměr *nemůže být větší* než 1, protože $x = 1$ do ní *nesmíme* dosadit. Tvrzení, že její poloměr je *právě roven* 1, nemůžeme na základě dosud přijatých „axiómů" dokázat, takže bude tvořit samostatný další (pátý) „axióm", ale čtenáři, který již něco slyšel o geometrické posloupnosti (a tento pojem se na středních školách probírá), nebude připadat nijak nepřirozené; dosazením čísla $q$ za $x$ do řady (8) dostaneme součet členů nekonečné geometrické posloupnosti s kvocientem $q$.

Spolu s řadou (8) má podle principu majorizace poloměr rovný 1 také řada (13), neboli binomická řada $B_{-1}(x)$. Z druhého „axiómu" pak plyne, že všechny binomické řady $B_{-n}(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ mají poloměr aspoň rovný 1; poněvadž však $B_n(-1) = 0$, nemůže být vzhledem k (24) poloměr řad $B_{-n}(x)$ větší než 1, je tedy také právě roven 1. Binomické řady $B_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ jsou ovšem mnohočleny a mají poloměr $\infty$. K řadám $B_r(x)$ s necelým $r$ se vrátíme ještě později.

Zatím se však podívejme na některé důležité důsledky principu majorizace. Jedním z nich je zřejmé tvrzení, že každá řada, jejíž všechny koeficienty jsou v absolutní hodnotě menší než 1, má poloměr rovný alespoň 1. To plyne z jejího srovnání s řadou (8). Platí však mnohem více; viděli jsme již u druhého „axiómu", že násobením řady nenulovou konstantou se její poloměr nemění. Proto každá řada s omezenými koeficienty, tj. každá řada (6), pro kterou existuje kladná konstanta $K$ tak, že $|a_k| < K$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, má poloměr aspoň rovný 1.

Z našeho třetího a čtvrtého „axiómu" však lze vyvodit ještě jeden velmi důležitý výsledek. Budiž $a$ kladné číslo a vezměme řadu

$$C_a(x) = 1 + ax + a^2x^2 + \ldots + a^kx^k + \ldots \qquad (45)$$

Dosadíme-li do $C(x)$ za $x$ číslo $q/a$, dostaneme součet

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^k + \ldots,$$

který, jak víme, má při $|q| < 1$ určitou hodnotu, totiž $C_\alpha(q/\alpha) = (1 - q)^{-1}$. Podle našeho třetího „axiómu" odtud plyne, že poloměr řady $C_\alpha(x)$ je aspoň (lze dokonce dokázat, že právě) roven $1/\alpha$. Mějme teď obecně řadu $A(x) = \Sigma a_k x^k$, pro jejíž koeficienty platí nerovnosti

$$|a_{k+1}| \leqq \alpha |a_k| \;, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{46}$$

kde $\alpha$ je kladné číslo. Poněvadž ze (46) snadno (např. indukcí) vyvodíme obecnou platnost nerovností

$$|a_k| \leqq \alpha^k |a_0| \;, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

vidíme podle principu majorizace (porovnáním řady $A(x)$ s řadou (45), resp. jejím $|a_0|$ násobkem), že řada $A(x)$ má také poloměr rovný aspoň $1/\alpha$.

Využijeme-li navíc ještě druhého „axiómu", můžeme svá tvrzení ještě dále zobecnit v tom smyslu, že platnost nerovností (46) nepožadujeme pro všechna nezáporná $k$, nýbrž teprve pro $k$ větší než jisté pevné číslo $m$. Stejné zobecnění lze ostatně provést i se samotným principem majorizace. K tomu, aby řada $A(x) = \Sigma a_k x^k$ měla poloměr aspoň tak velký jako řada $B(x) = \Sigma b_k x^k$, stačí, aby pro jejich koeficienty platily nerovnosti $|a_k| \leqq |b_k|$ pro $k = m + 1, m + 2, \ldots$, kde $m$ je pevné celé nezáporné číslo. Stačí totiž vyjádřit řadu $A(x)$ jako součet mnohočlenu

$$A_{m|}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \tag{47}$$

a řady

$$A_{|m}(x) = 0 + 0x + \ldots + 0x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \\ + a_{m+2} x^{m+2} + \ldots \tag{48}$$

Řada (48) splňuje již zřejmě podmínku vyslovenou v původní formulaci principu majorizace a má tedy poloměr aspoň tak velký jako řada $B(x)$, avšak přičtením mnohočlenu, tj. celistvé řady, se podle druhého „axiómu" její poloměr nezmenší. Z takto zobecněného principu majorizace pak už snadno odvodíme i zmíněné obecnější tvrzení o poloměru řady splňující podmínku (46) teprve pro $k > m$.

**Příklad 13.** V řadě $E(x)$ ze (43) je koeficientem při $x^k$ číslo $1/k!$ Budiž $a$ libovolné (tj. libovolně malé) kladné číslo. Pro $k > 1/a$ platí $(k + 1)^{-1} < k^{-1} < a$, a tedy

$$\frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k!} < a \frac{1}{k!},$$

takže řada $E(x)$ má poloměr rovný aspoň $1/a$. Poněvadž však $a$ bylo libovolné, vidíme, že řada $E(x)$ je celistvá. Máme tu příklad celistvé řady, která není mnohočlenem. Řada $E(x)$ je velmi důležitá a v matematice se s ní často setkáváme. Její vlastnosti si ostatně ještě probereme podrobněji v dalších odstavcích.

**Příklad 14.** Derivací řady (8) je řada

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (k + 1)x^k + \ldots,$$

která je však také její druhou mocninou, takže má — stejně jako řada (8) — poloměr rovný 1.

Ukážeme si teď, že zcela obecně pro *každou* řadu $A(x)$ platí:

*Řada $A(x)$ a její derivace $\mathrm{D}A(x)$ mají stejný poloměr.*

K důkazu tohoto tvrzení užijeme pomocné věty.

Ke každému číslu $q$ s absolutní hodnotou $|q| < 1$ existuje kladné číslo $K$ tak, že pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ je $|kq^k| \leqq K$.

Skutečně, stačí najít celé číslo $m$ tak, aby platilo $m \leqq \leqq (1 - |q|)^{-1} < m + 1$, čili

$$\frac{m-1}{m} \leqq |q| < \frac{m}{m+1},$$

a pak již snadno dokážeme, že pro každé celé nezáporné $k$ je $|kq^k| \leqq |mq^m|$, takže za číslo $K$ můžeme vzít např. právě $K = m|q|^m$.

Budiž nyní $A(x) = \Sigma a_k x^k$ libovolná řada s poloměrem $\varrho$ a $\mathrm{D}A(x)$ její derivace s poloměrem $\varrho'$. Stejný poloměr $\varrho'$ má také řada $D(x) = x\mathrm{D}A(x)$. Ze srovnání řad $A(x)$ a $D(x)$ vyplývá podle principu majorizace nerovnost $\varrho' \leqq \varrho$. Předpokládejme, že skutečně je $\varrho' < \varrho$; z toho odvodíme spor. Je-li $\varrho' < \varrho$, lze najít dvě reálná čísla $\alpha$ a $\beta$ tak, že je $\varrho' < < \alpha < \beta < \varrho$. Označme $q = \alpha/\beta$; je tedy $0 < q < 1$. Vezměme nyní řadu $C(x) = \Sigma k a_k q^k x^k$. K našemu číslu $q$ lze najít $K > 0$ tak, že $|kq^k| \leqq K$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$; podle principu majorizace má tedy řada $C(x)$ poloměr aspoň rovný $\varrho$ (jak plyne z jejího porovnání s $K$-násobkem řady $A(x)$, takže do ní můžeme dosadit $x = \beta$. Dostaneme tak součet $C(\beta) = \Sigma k a_k q^k \beta^k = \Sigma k a_k \alpha^k$. Avšak stejný součet dostaneme dosazením $x = \alpha$ do řady $D(x)$; to však podle našeho třetího „axiómu" znamená, že řada $D(x)$ má poloměr aspoň rovný $\alpha$, ale $\alpha > \varrho'$. Není tedy možné, aby bylo $\varrho' < \varrho$, a proto musí platit rovnost $\varrho' = \varrho$, což jsme chtěli dokázat.

Je zřejmé, že stejný poloměr jako řada $A(x)$ má nejen její derivace $\mathrm{D}A(x)$, ale také všechny její vyšší derivace $\mathrm{D}^k A(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Týž poloměr má však také každá řada $C(x)$, pro kterou platí $\mathrm{D}C(x) = A(x)$. Je-li $A(x) = = \Sigma a_k x^k$, je

$C(x) = c_0 + a_0 x + (a_1/2)x^2 + \ldots + a_k(k+1)^{-1} x^k + \ldots,$
kde $c_0$ je libovolná konstanta; stejné tvrzení platí i pro řady $C_k(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, pro něž je $\mathrm{D}^k C_k(x) = A(x)$.

**Příklad 15.** Derivací řady

$$L(x) = x - (1/2)x^2 + (1/3)x^3 - + \ldots + (-1)^{k+1}(1/k)x^k + \ldots \tag{49}$$

je řada (13), tj. binomická řada $B_{-1}(x)$ s poloměrem rovným 1. Má tedy také řada (49) poloměr rovný 1.

Vraťme se teď znovu na chvíli k binomickým řadám, resp. k otázce určení jejich poloměrů, kterou jsme předtím museli opustit. Zatím víme jen, že pro *celá kladná n* mají řady $B_n(x)$ poloměr $\infty$ (jsou celistvé), kdežto řady $B_{-n}(x)$ mají poloměr rovný 1.

Jestliže $r$ je číslo, které není celé (takže nutně $r \neq 0 \neq r - 1$), má podle naší věty o rovnosti poloměru řady a její derivace řada $B_r(x)$ stejný poloměr jako řada $rB_{r-1}(x)$ (viz vzorec (35)), a tedy podle druhého „axiómu" i jako řada $B_{r-1}(x)$. Stačí tudíž vyšetřit případ, kdy je $-1 < r < 0$. Tu však platí pro $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left|\binom{r}{k}\right| = \left|\frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}\right| = \frac{|r|}{1}\cdot\frac{1+|r|}{2}\cdots\frac{k-1+|r|}{k} \leqq 1 ,$$

neboť $|r| < 1$. Podle principu majorizace je tedy poloměr řady $B_r(x)$ alespoň rovný 1, jak vyplývá z porovnání s řadou (8).

Libovolná binomická řada má tedy poloměr $\geqq 1$; ukážeme si nejprve, že při racionálním $r < 0$ je poloměr řady $B_r(x)$ *právě roven* 1. Skutečně, podle (24) pro $r = p/q$, $p$, $q$ celá, $p < 0 < q$ platí

$$[B_r(x)]^q = B_p(x) ,$$

takže řada $B_r(x)$ nemůže mít poloměr větší nežli řada $B_p(x)$, avšak $p$ je celé záporné číslo, a tedy má $B_p(x)$ poloměr právě rovný 1.

Mějme nyní libovolné *iracionální* číslo $q$, $0 < q < 1$, a racionální číslo $r$ takové, že $0 < r < q$. Pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ pak platí nerovnosti

$$\left|\binom{-q}{k}\right| = \frac{1}{k!}\, q(1+q)\ldots(k-1+q) >$$

$$> \frac{1}{k!}\, r(1+r)\ldots(k-1+r) = \left|\binom{-r}{k}\right|,$$

z nichž vyplývá, že řada $B_{-r}(x)$ má poloměr aspoň rovný poloměru řady $B_{-q}(x)$.

Shrneme-li všechny výsledky týkající se poloměrů binomických řad, vidíme, že jsou jen dvě možnosti: buď je řada $B_p(x)$ mnohočlenem (tj. řadou s poloměrem $\infty$, což nastane jen, je-li $p$ celé nezáporné číslo), anebo má binomická řada $B_p(x)$ poloměr rovný 1 (pro všechna ostatní reálná $p$).

Na závěr tohoto paragrafu si dokážeme ještě jednu větu o poloměrech.

Nechť $A(x) = \Sigma a_k x^k$ je řada s kladným poloměrem $\varrho$, potom řada

$$\tilde{A}(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2}\, x^2 + \ldots + \frac{a_k}{k!}\, x^k + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\, x^k \tag{50}$$

je *celistvá.*

Abychom dokázali, že řada $\tilde{A}(x)$ je celistvá, musíme dokázat, že do ní smíme dosadit libovolné reálné číslo $q > 0$.

Budiž $c$ kladné reálné číslo menší nežli je poloměr $\varrho$ řady $A(x)$, položme $\alpha = q/c$; tedy $q = \alpha c$. Ke kladnému číslu $\alpha$ najdeme celé $m$ takové, aby bylo $m \leqq \alpha < m + 1$. Potom pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots$ bude platit $\alpha^k/k! \leqq \alpha^m/m!$, jak se snadno přesvědčíme. Označme si $\alpha^m/m! = K$. Dosadíme-li $x = q$ do řady $\tilde{A}(x)$, dostaneme součet

$$\sum \frac{a_k}{k!} q^k = \sum \frac{a_k}{k!} \alpha^k c^k ,$$

avšak stejný součet dostaneme dosazením $x = c$ do řady s koeficienty $a_k \alpha^k/k!$ Poněvadž $|a_k \alpha^k/k!| \leqq K|a_k|$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, má tato řada poloměr aspoň rovný $\varrho$, tedy jistě větší než $c$, takže do ní smíme dosadit $x = c$. Z toho ovšem podle našeho třetího „axiómu" plyne, že do řady $\tilde{A}(x)$ opravdu smíme dosadit $x = q$.

*Cvičení*

15. Zformulujte druhý „axióm" pomocí pojmu poloměru řady.
16. Pomocí MacLaurinovy formule (44) pro řady a vzorce (35) odvoďte vyjádření (19′) pro koeficienty obecné binomické řady.
17. Najděte poloměr řady $D(x) = \Sigma d_k x^k$, kde všechna čísla $d_k$ jsou celá nezáporná a menší než 10, a ukažte pak, že ke každému reálnému číslu $q$, $0 < q < 1$, lze najít řadu $D_q(x)$ tohoto tvaru takovou, že $D_q(1/10) = q$.
18. Najděte poloměr řady $(1/2)x + (1/16)x^2 + (1/72)x^3 + \ldots + (1/k^2 2^k)x^k + \ldots$
19. Nechť $A(x) = \Sigma a_k x^k$ je banální řada a $K$ libovolné kladné číslo; pak lze najít index $k$ takový, že $\sqrt[k]{|a_k|} > > K$. Dokažte.

20. Nechť pro koeficienty $a_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) řady $A(x)$ platí: Ke každému kladnému číslu $K$ lze najít celé číslo $m$ tak, že pro $k > m$ je $\sqrt[k]{|a_k|} < K$. Potom $A(x)$ je celistvá řada. Dokažte.

**7. Substituce.** Obdobně jako v případě mnohočlenů (viz paragraf 5 první kapitoly) lze i pro řady definovat operaci *substituce*. Jsou-li $A(x) = \Sigma a_k x^k$ a $B(x) = \Sigma b_k x^k$ dvě řady, pak by — analogicky k (I.45) — výsledkem substituce řady $B(x)$ do řady $A(x)$ měl být výraz

$$A[B(x)] = \Sigma a_k B^k(x) = a_0 \,.\, 1(x) + \qquad (51)$$
$$+ a_1 B(x) + a_2 B^2(x) + \ldots + a_k B^k(x) + \ldots$$

Narazili jsme tu na podobnou potíž jako při definici operace dosazení: ve druhém odstavci jsme si zavedli sčítání řad jen pro případ *konečného počtu sčítanců*. Jsme tedy opět postaveni před problém, kdy a jak lze dát výrazu (51) rozumný smysl. Ve zcela obecném případě jsou s tím ovšem spojeny jisté netriviální problémy, kterým se však můžeme vyhnout, jestliže se omezíme jen na určité *speciální případy*, což pro naše účely plně postačí.

Jako první, nejjednodušší případ si vezmeme substituci mnohočlenů $N(x)$ tvaru $N(x) = cx$ do libovolné řady $A(x) = \Sigma a_k x^k$. Píšeme-li podle (51) v $A(x)$ všude $cx$ místo $x$, dostaneme řadu $A[N(x)] = A(cx)$, totiž

$$A(cx) = a_0 + a_1 cx + a_2 c^2 x^2 + \ldots + a_k c^k x^k + \ldots\,, \qquad (52)$$

tedy řadu s koeficienty $a_k c^k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Snadno uvidíme, že při $c \neq 0$ je poloměr řady $A(cx)$ právě $|c|^{-1}$-násobkem poloměru řady $A(x)$ (klademe ovšem $\infty|c|^{-1} = \infty$); je-li $c = 0$, je $A(cx)$ celistvá řada, totiž mnohočlen — konstanta $A(cx) \equiv a_0$.

Substituce tohoto typu s $c = -1$ jsme vlastně už občas prováděli; je tu $|c| = 1$, takže se při nich poloměr řady nemění.

**Příklad 16.** Řada $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \ldots +$
$+ (-1)^k 2^k x^k + \ldots$
má poloměr rovný $\frac{1}{2}$. Je to vlastně binomická řada $B_{-1}(2x)$.

Druhým jednoduchým typem substituce je substituce mnohočlenu $N(x) = x^m$ ($m \geqq 1$, celé) do řady $A(x)$. Píšeme-li v $A(x)$ všude $x^m$ místo $x$, dostaneme podle (51) řadu

$$A(x^m) = a_0 + a_1 x^m + a_2 x^{2m} + \ldots + a_k x^{km} + \ldots, \quad (53)$$

(koeficienty u těch mocnin $x$, jejichž exponent není násobkem čísla $m$, jsou v $A(x^m)$ rovny nule). Je zřejmé, že poloměr řady $A(x^m)$ je $\sqrt[m]{\varrho}$, kde $\varrho$ je poloměr původní řady $A(x)$ (s konvencí $\sqrt[m]{\infty} = \infty$).

**Příklad 17.** Řada $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2k} + \ldots$ je vlastně řada $B_{-1}(-x^2) = (1 - x^2)^{-1}$, a má tedy poloměr rovný 1.

V uvedených dvou speciálních typech substitucí byla situace o to jednodušší, že jsme ve výrazu (51) na první pohled poznali řadu s určitými koeficienty. Avšak již v případě obecné *lineární substituce* (tj. substituce mnohočlenu $N(x)$ prvního stupně) se v případě řad objevují komplikace, které jsme u lineárních substitucí do mnohočlenů nepoznali. Ukážeme si to na příkladě substituce mnohočlenu $N(x) = c + x$, $c \neq 0$, do dané řady.

Provedeme-li — zatím zcela formálně — substituci $N(x) = c + x$ do $A(x)$ podle (51), dostaneme

$$A(c + x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(c + x)^k = \tag{54}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} c^{k-j}x^j \ .$$

To ovšem není řada, jak jsme na ni zvyklí, chtěli bychom ji mít „uspořádánu podle mocnin $x$". Proto si (54) přepíšeme na

$$A(c + x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \left[\sum_{k=j}^{\infty} a_k \binom{k}{j} c^{k-j}\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} x^j \left[\sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+j}{j} a_{r+j}c^r\right] . \tag{55}$$

Pro koeficient při $x^j$ jsme tak dostali výraz, který lze chápat jako hodnotu řady

$$\sum_{r=0}^{\infty} (r + 1)(r + 2) \dots (r + j)a_{r+j}x^r \tag{56}$$

pro $x = c$, násobenou číslem $1/j!$. Avšak řada (56) není podle (38) nic jiného nežli $j$-tá derivace řady $A(x)$, tedy $D^jA(x)$, která má ovšem stejný poloměr $\varrho$ jako řada $A(x)$ samotná. Předpokládejme, že tento poloměr je kladný, $\varrho > 0$ (tzn., že řada $A(x)$ není banální) a že $|c| < \varrho$. Potom ovšem smíme dosadit $x = c$ do každé řady $D^jA(x)$, $j = 0, 1, 2, \dots$ a výraz (55) má rozumný smysl. Můžeme si jej ostatně přepsat na tvar

$$A(c + x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!)x^kD^kA(c) \ , \tag{57}$$

což není nic jiného nežli *Taylorova formule pro řady* (srv. vzorec (I.51)).

Zbývá ovšem ještě určit *poloměr* řady (57). Z vyjádření (54) resp. (51) můžeme ihned usoudit, že poloměr řady (57) nebude jistě menší nežli $\varrho - |c|$, a pokud je $\varrho = \infty$, bude i řada (57) celistvá. Může se však stát, že poloměr řady (57) je větší i nežli poloměr $\varrho$ původní řady $A(x)$.

**Příklad 18.** Proveďme substituci $N(x) = 1/2 + x$ do řady (13), tj. do binomické řady $B_{-1}(x)$. Podle (57) dostaneme

$$B_{-1}\left(\frac{1}{2} + x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} (-1)^k k! \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} =$$

$$= \frac{2}{3} B_{-1}\left(\frac{2}{3} x\right),$$

tj. (2/3)násobek řady, kterou dostaneme z $B_{-1}(x)$ substitucí $M(x) = (2/3)x$ a která má tedy poloměr rovný 3/2, tzn. větší nežli binomická řada $B_{-1}(x)$, z níž jsme vyšli.

Hlubší pohled na otázku změny poloměru řady při lineární substituci by vyžadoval přece jen trochu více analytických metod, nežli si jich zde dopřáváme, a také ovšem „komplexní" přístup k celé problematice. Pohybovali jsme se totiž doposud (a vytrváme v tom i dále) pouze v oboru *reálných* čísel (naše řady mají reálné koeficienty, dosazujeme do nich reálné hodnoty atd.), avšak celá teorie řad získá pravou hloubku teprve v oboru čísel komplexních. Její hlavní výsledky se přitom nijak nezkomplikují, spíše naopak.

Probrali jsme si zatím jen tři velmi speciální typy substitucí (52), (53) a (54); to je na první pohled velmi málo. Ale operace substituce je asociativní v případě řad stejně jako v případě mnohočlenů (viz cvičení I.13). Provedeme-li do řady $A(x)$ postupně substituce mnohočlenů $M(x)$ a pak $N(x)$, bude výsledek stejný jako při jediné substituci mnohočlenu $P(x) = M[N(x)]$. Toho lze využít a postupným skládáním substitucí typů (52), (53) a (54) vyjádřit substituce složitější; lze tak vyjádřit libovolnou substituci mnohočlenu do dané řady. Stanovení poloměru výsledné řady se tu pak provádí rovněž postupně a zdlouhavě, ale (zvláště v komplexním oboru) relativně názorně.

**Příklad 19.** Provedeme-li postupně substituce $N_1(x) = 4 + x$, $N_2(x) = x^2$, $N_3(x) = -1 + x$, $N_4(x) = 3x$, dostaneme výslednou kvadratickou substituci $M(x) = N_1[N_2(N_3[N_4(x)])] = 5 - 6x + 9x^2$.

Podívejme se ještě ve stručnosti na obecný případ substituce řady, která *není* mnohočlenem, do jiné řady. Tento případ přirozeně *nelze postihnout* uvedeným postupným skládáním substitucí (52) — (54). Zde se již nemůžeme obejít bez analytických metod, chceme-li dospět k neformálním výsledkům. Provádíme-li substituci řady $B(x)$ do $A(x) = \Sigma a_k x^k$, můžeme příslušný výraz (51) formálně uvést na tvar řady

$$A[B(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_j^{(k)} \right], \qquad (58)$$

kde $b_j^{(k)}$ je koeficient při $x^j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$) v $k$-té mocnině $B^k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) řady $B(x)$. V analýze se pak ukazuje, kdy lze součtům, které v (58) tvoří koeficienty při mocninách $x$, dát rozumný smysl a jak se určí, případně odhadne poloměr řady (58). Není v našich možnostech zabývat se těmito otázkami podrobněji a tak si zde uvedeme — bez důkazu a odůvodňování — jen jednu základní větu.

Má-li řada $B(x)$ kladný poloměr $\varrho$ a jsou-li její hodnoty $B(q)$ pro $q$ z intervalu $-\alpha < q < \alpha$, $0 < \alpha < \varrho$, vesměs v absolutní hodnotě menší než je poloměr řady $A(x)$, pak lze provést substituci řady $B(x)$ do řady $A(x)$ a výsledná řada $A[B(x)]$ má poloměr aspoň rovný $\alpha$.

**Příklad 20.** Řada $A(x) = -xB_{-1}(x) = -x + x^2 - - x^3 + \ldots + (-1)^k x^k + \ldots$ má poloměr stejný jako řada $B_{-1}(x)$, tedy rovný 1, a pro $|q| < 1/2$ je

$$|A(q)| = |q| \cdot |B_{-1}(q)| = \left| \frac{q}{1-q} \right| < 1\ .$$

Lze tedy provést substituci řady $A(x)$ do binomické řady $B_{\frac{1}{2}}(x)$. Ježto $A^k(x) = (-1)^k x^k B_{-k}(x)$, je koeficient při $x^j$ v řadě $A^k(x)$ roven nule pro $k > j$, takže podle (58) dostáváme

$$B_{\frac{1}{2}}\,[A(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[ \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(-1\right)^k \binom{-k}{n-k} \right].$$

Avšak

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \binom{-k}{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{F_k\left(\frac{1}{2}\right) F_{n-k}(-k)}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k\left(\tfrac{1}{2}\right) F_{n-k}(n-1) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} F_n\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n!} F_n\left(-\frac{1}{2}\right) = \binom{-\frac{1}{2}}{n};$$

při úpravách jsme použili vzorců (19'), (I.62) a (I.25). Platí tedy celkem

$$B_{\frac{1}{2}}[A(x)] = B_{-\frac{1}{2}}(x) . \tag{59}$$

Výsledek (59) lze interpretovat též tak, že řadu $A(x)$ vyjádříme jako $A(x) = B_{-1}(x) - 1$, takže $B_{\frac{1}{2}}[A(x)] = [1 + A(x)]^{\frac{1}{2}} = [1 + B_{-1}(x) - 1]^{\frac{1}{2}} = [B_{-1}(x)]^{\frac{1}{2}} = B_{-\frac{1}{2}}(x)$. Podobným způsobem můžeme počítat odmocniny (a to nejen druhé) i z jiných řad podle vzoru

$$[A(x)]^{1/k} = [1 + A(x) - 1]^{1/k} = B_{1/k}[A(x) - 1] ,$$

samozřejmě jen pokud řada $A(x)$ splňuje příslušné podmínky. To je tedy onen obecný způsob výpočtu odmocnin z řad, o němž jsme se zmínili už na konci paragrafu 3.

Stejně jako pro mnohočleny (viz str. 28) platí i pro řady tvrzení, že výsledek dosazení $x = q$ do řady $A[B(x)]$ je stejný jako výsledek dosazení $x = r$, kde $r = B(q)$ do řady $A(x)$; samozřejmě jen za předpokladu, že všechna tato dosazení smíme provádět. Výraz $A[B(q)]$ má tedy jednoznačný smysl.

*Cvičení*

21. Určete poloměr řady

$$2x + \left(\frac{2}{3}\right)x^3 + \left(\frac{2}{5}\right)x^5 + \ldots + 2(2k + 1)^{-1}x^{2k+1} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} 2(2k + 1)^{-1}x^{2k+1} .$$

22. Vypočtěte třetí odmocninu z řady (8).
23. Dokažte, že pro řadu $E(x)$ ze (43) platí $E^2(x) = E(2x)$, resp. obecněji $E(x + c) = E(c)\,E(x)$.
24. Pro substituci mnohočlenu $N(x)$ do řady $A(x)$ odvoďte formuli obdobnou vzorci (I.48).
25. Pro řadu (49) dokažte vzorec

$$L(x) + L(-x) = L(-x^2).$$

**8. Některé význačné řady a jejich hodnoty.** Výsledky odvozené v předchozích paragrafech jsou vcelku dostatečnou (aspoň pro naše účely) pomůckou při určování poloměrů řad. Většinou nám však nestačí vědět, která reálná čísla $q$ smíme do dané řady $A(x)$ za $x$ dosadit, ale chceme znát také příslušné hodnoty $A(q)$. Zatím však vlastně dovedeme udat hodnotu řady jen v některých speciálních případech, např. je-li daná řada $A(x)$ mnohočlenem nebo řadou reciprokou k řadě — mnohočlenu, anebo ji lze vyjádřit pomocí řad tohoto druhu spojených operacemi sčítání a násobení. Vedle toho si můžeme také řadu upravit vhodnou substitucí. Přesto však zůstává ještě mnoho řad, jejichž hodnoty takto určit nedovedeme, ač víme, že existují, resp. že velikost poloměru řady taková dosazení připouští. Tak např. o řadě $E(x)$ ze (43) víme, že je celistvá, ale kromě $E(0) = 1$ neznáme žádnou její hodnotu.

Při určování hodnot řad se budeme v dalším opírat o jedno obecné tvrzení, které však neumíme odvodit z našich pěti „axiómů“, jak jsme je přijali v paragrafu 6. Je však natolik „přirozené“, že snad nebude potíží s jeho přijetím v roli dalšího, šestého „axiómu“. Stručně je lze vyjádřit větou: *Součet nezáporných sčítanců je nezáporný*. Přesná formulace našeho nového „axiómu“ pak bude tato:

Budiž $A(x) = \Sigma a_k x^k$ řada s *nezápornými* koeficienty, $a_k \geqq 0$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, a s kladným poloměrem $\varrho$; budiž $q$ reálné číslo $0 \leqq q < \varrho$. Potom $A(q) \geqq 0$.

Bezprostředním důsledkem tohoto a čtvrtého „axiómu" je věta:

Nechť $A(x) = \Sigma a_k x^k$ a $B(x) = \Sigma b_k x^k$ jsou dvě řady s poloměry $\varrho_A$ a $\varrho_B$ a nechť pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí nerovnosti $0 \leqq a_k \leqq b_k$. Potom $\varrho_A \geqq \varrho_B$ a pro každé reálné $q$, $0 \leqq q < \varrho_B$ platí $0 \leqq A(q) \leqq B(q)$.

Tak jsme konečně získali možnost navzájem porovnávat nejenom poloměry, ale i hodnoty řad.

**Příklad 21.** Budiž $A(x) = \Sigma a_k x^k$ libovolná řada s koeficienty $a_k$, $0 \leqq a_k \leqq 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Potom pro každé $q$ z intervalu $0 \leqq q < 1$ je $0 \leqq A(q) \leqq (1 - q)^{-1}$. Vyplývá to z porovnání řady $A(x)$ s řadou (8).

Omezení dané podmínkou nezápornosti koeficientů porovnávané řady $A(x) = \Sigma a_k x^k$ můžeme poněkud oslabit pomocí rozkladu řady $A(x)$ na dvě řady s nezápornými koeficienty. Definujme si čísla $a_k^+$, $a_k^-$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ takto: Jestliže je $a_k \geqq 0$, položme $a_k^+ = a_k$, $a_k^- = 0$; jestliže naopak $a_k < 0$, položme $a_k^+ = 0$, $a_k^- = -a_k$. Je potom zřejmě $0 \leqq a_k^+ \leqq |a_k|$, $0 \leqq a_k^- \leqq |a_k|$, $a_k^+ - a_k^- = a_k$, pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, takže $A(x) = A^+(x) - A^-(x)$, kde $A^+(x) = \Sigma a_k^+ x^k$, $A^-(x) = \Sigma a_k^- x^k$; poloměry řad $A^+(x)$, $A^-(x)$ jistě nejsou menší nežli poloměr řady $A(x)$. Jestliže nyní je např. $|a_k| \leqq 1$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, má řada $A(x)$ (a tedy i obě řady $A^+(x)$ a $A^-(x)$) poloměr aspoň rovný 1 a pro všechna $q$ z intervalu $0 \leqq q < 1$ jest $0 \leqq A^+(q) \leqq (1 - q)^{-1}$, $0 \leqq A^-(q) \leqq (1 - q)^{-1}$, takže $|A(q)| \leqq 2(1 - q)^{-1}$.

Podobných odhadů hodnoty řady lze využít také pro přibližné určení hodnoty dané řady $A(x)$, např. jestliže se nám podaří vyjádřit $A(x)$ ve tvaru součtu řady $A_1(x)$, jejíž hodnotu známe a řady, jejíž hodnoty dovedeme odhadnout. Za řadu $A_1(x)$ se dá často vzít mnohočlen — „začátek" řady $A(x)$.

**Příklad 22.** Řada $L(x)$ ze (49) má, jak víme, poloměr rovný 1. Pro $0 \leqq q < 1$ pak platí

$$L(q) = q - \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{3} q^3 - + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} q^n + $$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k q^k/k \, .$$

Poněvadž však $|(-q)^k/k| < q^k/n$ pro $k > n$, vidíme, že platí

$$|L(q) - \sum_{k=1}^{n} (-q)^k/k| \leqq 2q^{n+1}/(n - nq) \, . \qquad (60)$$

Avšak ke každému $q$ z intervalu $0 \leqq q < 1$ lze najít $m$ tak, že pro $n > m$ už je pravá strana v (60) malá (menší než daná přípustná chyba). Pro hodnotu $L(q)$ tak máme přibližné vyjádření ve tvaru hodnoty mnohočlenu $\sum_{k=1}^{n} (-q)^k/k$, s chybou zaručeně menší nežli $2q^{n+1}/(n - nq)$.

**Příklad 23.** Vyjdeme z identity

$$2 = \frac{50}{25} = \frac{50 \, . \, 49}{25 \, . \, 49} = \frac{49}{25} \cdot \frac{1}{\frac{49}{50}} = \frac{49}{25} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{50}} \, .$$

Pomocí binomické řady $B_{\frac{1}{2}}(x)$ můžeme tak vypočítat přibližnou hodnotu $\sqrt{2}$; bude totiž

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5} B_{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{50}\right) = \frac{7}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k (50)^{-k} .$$

Avšak pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí, jak se snadno přesvědčíme (viz též příklad 9),

$$\left| \binom{-\frac{1}{2}}{k+1} \right| < \binom{-\frac{1}{2}}{k} \leqq 1 ,$$

takže pro každé $k \geqq 0$ je

$$\left| \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{-1}{50}\right)^k \right| < 50^{-k} .$$

Odtud vyplývá odhad

$$\left| \sqrt{2} - \frac{7}{5} \sum_{k=0}^{m} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(-\frac{1}{50}\right)^k \right| < \frac{100}{49} \,.\, 50^{-m-1} \leqq$$

$$\leqq 2{,}05 \,.\, 50^{-m-1} .$$

I pro poměrně malé hodnoty $m$ dostaneme tak již velmi dobré přiblížení. Tak např. pro $m = 3$ bude

$$\sqrt{2} = (7/5)\,[1 + 0{,}01 + 0{,}00015 + 0{,}0000005] =$$
$$= 1{,}4 \,.\, 1{,}0101505 = 1{,}4142107$$

s pěti správnými desetinnými místy (s chybou zaručeně menší než 0,000033).

Vedle binomických řad $B_p(x)$ hraje v teorii řad významnou úlohu také řada $E(x)$, kterou známe ze (43)

$$E(x) = 1 + x + x^2/2! + \ldots + x^k/k! + \ldots ; \tag{43}$$

nyní si jí všimneme trochu podrobněji.

V šestém paragrafu jsme si ukázali, že řada $E(x)$ je celistvá. Vyplývá to ostatně též z obecného tvrzení uvedeného na konci šestého paragrafu a z toho, že řada (8) má kladný poloměr. Z příkladu 11 dále víme, že platí $\mathrm{D}^k E(x) = E(x)$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, a konečně ve cvičení 23 se ukazuje, že platí $E^2(x) = E(2x)$. Odtud indukcí snadno dokážeme platnost rovnosti

$$E^k(x) = E(kx) \tag{61}$$

pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ Zcela stejně však také bude $E\left(\frac{1}{2}x\right) . E\left(\frac{1}{2}x\right) = E(x)$, tzn. obecně $E^k(x/k) = E(x)$, takže řadu $E(x/k)$ lze vzít za $k$-tou odmocninu z řady $E(x)$. Vztah (61) platí tedy obecněji, totiž

$$E^r(x) = E(rx) \tag{61'}$$

pro všechna racionální nezáporná $r$. Není však těžké se přesvědčit, že $E(x) . E(-x) = 1(x)$, tzn. že $E(-x) = E^{-1}(x)$. Přechodem k reciprokým řadám tak rozšíříme platnost (61′) i na záporná racionální $r$.

Všechny tyto řady jsou ovšem celistvé, neboť je dostaneme z $E(x)$ substitucemi tvaru $N(x) = rx$; můžeme tedy do nich libovolně dosazovat. Z (61′) pak při $x = 1$ plyne rovnost

$$E(r) = [E(1)]^r \tag{62}$$

pro všechna racionální $r$.

Ukážeme si teď, že (62) platí zcela obecně, bez omezení na racionální hodnoty exponentu. K libovolnému reálnému číslu $q$ si totiž můžeme najít dvě racionální čísla $r_1$, $r_2$, tak, že $r_1 \leqq q \leqq r_2$ a přitom je rozdíl $r_2 - r_1$ libovolně malý.

Poněvadž má řada $E(x)$ vesměs nezáporné koeficienty, plynou z $r_1 \leqq q \leqq r_2$ nerovnosti $E(r_1) \leqq E(q) \leqq E(r_2)$. Zároveň však z Taylorovy formule (57) odvodíme rovnost $E(r_2) = E(r_1) \,.\, E(r_2 - r_1)$. Poněvadž $0 \leqq 1/k! \leqq 1$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$, dostaneme porovnáním řady $E(x)$ s řadou (8) nerovnosti $0 \leqq E(p) - 1 \leqq p(1 - p)^{-1}$, platné pro všechna $p$ z intervalu $0 \leqq p < 1$. Při $p = r_2 - r_1$ máme tedy

$$E(r_2) = E(r_1) \,.\, E(r_2 - r_1) \leqq E(r_1) + E(r_1) \,.\, \frac{r_2 - r_1}{1 - r_2 + r_1} \,,$$

takže

$$[E(1)]^{r_1} = E(r_1) \leqq E(q) \leqq E(r_2) = [E(1)]^{r_2} \leqq [E(1)]^{r_1} + \varepsilon \,, \tag{63}$$

kde rozdíl $\varepsilon$ lze učinit libovolně malým, jestliže se s čísly $r_1$, $r_2$ dostatečně přiblížíme číslu $q$. Nerovnostem (63) však lze vyhověti jenom tehdy, bude-li i pro naše $q$ platit

$$E(q) = [E(1)]^q \,. \tag{62'}$$

Číslo $E(1)$ se obvykle označuje prostým symbolem $e$; jeho význam v matematice je tak obrovský, že se ani nepokoušíme jej nějak oceňovat. Místo (62') tedy píšeme $E(q) = e^q$.

S řadou $E(x)$ jsou příbuzné dvě další zajímavé řady

$$C(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! - + \ldots + (-1)^k x^{2k}/2k! + \ldots \tag{64}$$

a

$$S(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - + \ldots + (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)! + \ldots \tag{65}$$

Jsou ovšem obě celistvé, jak snadno zjistíme porovnáním s řadou $E(x)$, a mají řadu zajímavých vlastností; např. platí

$$\mathrm{D}S(x) = C(x), \quad \mathrm{D}C(x) = -S(x) \; . \tag{66}$$

Taylorova formule (57) pak dává

$$C(a + x) = C(a) \, . \, C(x) - S(a) \, S(x) \; , \tag{67}$$

$$S(a + x) = S(a) \, C(x) + C(a) \, S(x) \; , \tag{68}$$

takže

$$C^2(x) + S^2(x) = 1(x) \; , \tag{69}$$

$$C(2x) = C^2(x) - S^2(x) \; , \tag{70}$$

$$S(2x) = 2 \, C(x) \, S(x) \; . \tag{71}$$

Čtenáři se znalostmi základů matematické analýzy patrně vědí, že $C(q)$ a $S(q)$ jsou hodnoty známých funkcí cosinus a sinus: $C(q) = \cos q$, $S(q) = \sin q$ pro všechna reálná $q$. Jakmile je nám tato souvislost známa, přestanou nás vztahy (67) — (71) překvapovat a dokážeme snadno objevit a odvodit celou řadu dalších „známých“ vztahů pro řady $C(x)$ a $S(x)$.

Jak jsme se už jednou zmínili v sedmém paragrafu, vyniknou hlubší vlastnosti řad teprve v komplexním oboru. Tam se také objeví bezprostřední souvislost řad $C(x)$ a $S(x)$ s řadou $E(x)$. Zkusme si — zcela formálně — provést do řady $E(x)$ substituci $N(x) = ix$. Rozkladem na reálnou a imaginární část objevíme tak dobře známý vztah

$$E(ix) = C(x) + i \, S(x) \; . \tag{72}$$

Na podrobnější studium řad v komplexním oboru však v této knížce není dost místa.

Za zmínku snad stojí též řada $L(x)$ z (49). Dá se ukázat, že pro $|q| < 1$ je $L(q) = \lg (1 + q)$. Jde o *přirozený* logaritmus při základu $e$. Studium souvislosti řady $L(x)$ s řadou $E(x)$ (jsou tzv. navzájem inversní), jakož i studium obdobných inversních řad k řadám $C(x)$ a $S(x)$, ač velmi zajímavé, zřetelně překračuje naše možnosti; čtenáře, který by se o řadách chtěl poučit podrobněji, musíme odkázat na učebnici matematické analýzy, příp. na klasickou soubornou monografii Knoppovu (K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*).

*Cvičení*

26. Pomocí binomických řad a identit

$$2 = \frac{99\,.\,99}{70\,.\,70}\cdot\frac{9\,800}{9\,801}\,, \quad 3 = (1{,}7)^2\,\frac{300}{289}\,,$$

$$11 = \frac{100}{9}\cdot\frac{99}{100}\,, \quad 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^3\frac{128}{125}\,,$$

$$3 = \frac{1\,000}{7^3}\cdot\frac{1\,029}{1\,000}$$

vypočtěte přibližné hodnoty odmocnin $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$.

27. Vypočtěte $e = E(1)$ s přesností na pět desetinných míst.

28. Dokažte nerovnosti
    a) $q < E(q) - 1 < q(1-q)^{-1}$
    pro $0 < q < 1$;
    b) $E(q) > q^k/k!$
    pro $0 < q$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;
    c) $E(q) - 1 - q < q^2/2$
    pro $0 < q$.

29. Vypočtěte několik vhodných hodnot $E(q)$ a vyšetřete průběh funkce $E(q)$ v intervalu $-\infty < q < \infty$.

30. Vypočtěte přibližně $\cos q$, $\sin q$ pro vhodné hodnoty argumentu $q$ (např. $q = \pi/6$, apod.) a odhadněte přesnost výpočtů.

31. Pomocí řady $L^*(x) = L(x) - L(-x)$ vypočtěte přibližně přirozený logaritmus čísla 2 a určete přesnost výpočtu.
32. Obdobně jako v případě rovnosti (62′) dokažte i pro binomické řady, že rovnost $B_p(q) = (1 + q)^p$ platí pro všechna reálná $p$ a pro $|q| < 1$.
33. Proveďte si podrobně důkazy vztahů (67) a (68). Nezávisle na nich pak odvoďte vztahy (69), (70) a (71).

# III.

# VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE A JEJICH POUŽITÍ

**1. Vytvořující funkce.** Mějme posloupnost reálných čísel

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots \tag{1}$$

a předpokládejme, že řada

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k \tag{2}$$

má kladný poloměr $\varrho > 0$. Potom pro všechna reálná čísla $q$ z intervalu $-\varrho < q < \varrho$ je definována hodnota $A(q)$ řady (2). Tím je v tomto intervalu definována jistá funkce $f$, $f(q) = A(q)$. Funkci $f$ nazveme *vytvořující funkcí* posloupnosti (1); řadu $A(x)$ budeme — ač to není zcela obvyklé — nazývat také *vytvořující řadou* posloupnosti (1).

Jak vyplývá z definice pojmu poloměru řady, není v případě $\varrho < \infty$ vyloučeno, že existují též hodnoty $A(\varrho)$ a $A(-\varrho)$, případně jen jedna z nich, takže definici funkce $f$ lze rozšířit též o tyto krajní hodnoty. Pro $|q| > \varrho$ ani $A(q)$, ani $f(q)$ samozřejmě nedefinujeme. Je-li řada $A(x)$ příslušná k posloupnosti (1) banální, byla by funkce $f$ definována jen v jediném bodě $q = 0$. Takový pojem by zřejmě nebyl moc užitečný, a proto v takovém případě o vytvořující funkci nemluvíme; pojem vytvořující řady má ovšem smysl vždy.

Jestliže je daná posloupnost (1) konečná, představujeme si ji vždy doplněnou nulami (srv. první paragraf druhé kapitoly); příslušnou vytvořující řadou je pak zřejmě mnohočlen, takže vytvořující funkce je definována pro všechna reálná $q$.

**Příklad 1.** Funkce $f(q) = (1 + q)^n$, $n \geqq 0$, celé je vytvořující funkcí posloupnosti binomických koeficientů $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$

Jestliže je daná posloupnost (1) omezená, tzn. jestliže existuje kladná konstanta $K$ taková, že nerovnost $|a_k| < K$ platí pro všechny členy $a_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) posloupnosti (1), má příslušná vytvořující řada (2) poloměr rovný aspoň 1, takže vytvořující funkce posloupnosti (1) je definována alespoň v intervalu $-1 < q < 1$.

**Příklad 2.** Funkce $f(q) = (1 - q)^{-1}$, definovaná v intervalu $-1 < q < 1$, je vytvořující funkcí posloupnosti

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots \tag{3}$$

složené ze samých jedniček. Příslušnou vytvořující řadou je řada (II.8).

Základní početní operace s řadami mají svá vyjádření v odpovídajících operacích s jejich koeficienty. Poněvadž operace dosazení do řady respektuje početní operace s řadami (viz druhý „axióm“ v šestém paragrafu druhé kapitoly), můžeme formulovat následující zásady.

Mějme dány dvě posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ a $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$ s vytvořujícími funkcemi $f(q)$ a $g(q)$, definovanými (aspoň) v jistém intervalu $-\alpha < q < \alpha$, $\alpha > 0$ (za číslo $\alpha$ lze vzít např. menší z poloměrů řad $A(x) = \Sigma a_k x^k$ a $B(x) = \Sigma b_k x^k$). Potom funkce $v(q) = f(q) + g(q)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots$ takové, že $c_k = a_k + b_k$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$ a funkce $w(q) = f(q) \,.\, g(q)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots$, jejíž členy jsou dány vzorcem (II.5).

**Příklad 3.** Nechť je dána posloupnost (1) s vytvořující funkcí $f(q)$, potom $g(q) = (1 - q) \,.\, f(q)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $a_0, (a_1 - a_0), (a_2 - a_1), \ldots, (a_k - a_{k-1}), \ldots$ Funkce $f$ a $g$ jsou tu definovány ve stejném intervalu hodnot $q$. Obráceně pak funkce $h(q) = (1 - q)^{-1} \,.\, f(q)$ bude vytvořující funkcí posloupnosti $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$ postupných součtů $s_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, členů posloupnosti (1). Funkce $h(q)$ je definována v průniku definičního intervalu funkce $f(q)$ s intervalem $-1 < q < 1$.

*Cvičení*

1. Najděte vytvořující funkce posloupností

   a) $1, 2, 6, 20, 70, \ldots, \binom{2k}{k}, \ldots;$

   b) $1, 2, 3, 4, \ldots, k, \ldots;$
   c) $1, 4, 9, 16, \ldots, k^2, \ldots;$
   d) $1, 8, 27, 64, \ldots, k^3, \ldots$
   a určete též jejich definiční intervaly.
2. Určete posloupnosti, kterým odpovídají vytvořující funkce
   a) $f(q) = (2 + 3q)^5;$
   b) $f(q) = (1 - 2q)^{-2};$
   c) $f(q) = 2^q.$

3. S použitím výsledků cvičení 1c, 1d odvoďte vzorce pro součty druhých a třetích mocnin přirozených čísel

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \; ; \qquad S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 \, .$$

**2. Rekurentní vztahy.** Při vyšetřování posloupností čísel se často ocitáme v situaci, kdy neznáme všechny jednotlivé členy posloupnosti, ale jen jisté vztahy mezi nimi, označované obvykle jako *vytvářecí zákony* posloupnosti nebo *rekurentní vzorce*, anebo též *diferenční rovnice*. Tyto vztahy umožňují sice postupně vypočítat všechny členy posloupnosti (tj. kterýkoliv z nich), ale zpravidla je k určení jednoho členu třeba nejprve znát všechny předcházející. Dáváme proto většinou přednost *explicitním* vzorcům, *explicitnímu* vyjádření obecného členu posloupnosti. Odvození explicitních vzorců z rekurentních bývá pak více či méně složitou záležitostí v závislosti na druhu daných rekurentních vztahů.

**Příklad 4.** Známým příkladem je tzv. aritmetická posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ charakterizovaná tím, že rozdíl (diference) dvou po sobě následujících členů je konstantní:

$$a_{k+1} - a_k = d = \text{konst.}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Ze (4) ovšem snadno odvodíme explicitní vzorec $a_k = a_0 + kd$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Vidíme, že k úplnému určení posloupnosti je vedle rekurentního vzorce (4) třeba ještě znát počáteční člen $a_0$.

**Příklad 5.** Jiným známým příkladem je geometrická posloupnost $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$ charakterizovaná svým vytvářecím zákonem $b_{k+1} = qb_k$, $q \neq 0$ ($q$ = konst., je tzv. kvocient geometrické posloupnosti). Explicitní vzorec je zde $b_k = b_0 q^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; potřebujeme tu opět znát vedle čísla $q$ také počáteční člen posloupnosti $b_0$.

Při odvozování explicitních vzorců z daných rekurentních vztahů můžeme v mnoha případech využít též pojmu vytvořující funkce, resp. vytvořující řady posloupnosti. Ze vztahů mezi členy posloupnosti odvodíme určité podmínky, kterým musí příslušná vytvořující funkce, resp. řada vyhovovat, podle nich najdeme vytvořující řadu; členy posloupnosti se pak objeví jako koeficienty této řady. Hlavní předností takového postupu je jeho obecnost a určitá *mechaničnost*, poskytuje nám takřka *„samočinný" algoritmus* pro řešení daného úkolu. Nemáme zde možnost (a ani to neodpovídá cílům naší knížky) pouštět se do rozvíjení obecné, *systematické* teorie řešení úloh tohoto typu, a tak si tu jen osvětlíme základní myšlenku použití vytvořujících funkcí na jednom konkrétním příkladě, který je ostatně sám o sobě zajímavý. Odvodíme si explicitní vzorec pro tzv. *Fibonacciova čísla.*

Posloupnost Fibonacciových čísel (budeme si je značit $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$) je dána poměrně velmi jednoduchým vytvářecím zákonem. Začíná dvěma jedničkami, tzn. $\varphi_0 = \varphi_1 = 1$, a každý další její člen je vždy součtem dvou členů předcházejících. Platí tedy

$$\varphi_{k+2} = \varphi_{k+1} + \varphi_k\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Je to tedy posloupnost čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Označme si $\Phi(x)$ příslušnou vytvořující řadu posloupnosti Fibonacciových čísel

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k x^k = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots \tag{6}$$

a položme pak $A(x) = \Sigma a_k x^k = \Phi(x) - x\,\Phi(x) - x^2\,\Phi(x)$. Budeme hledat postupně koeficienty řady $A(x)$. Zřejmě je $a_0 = A(0) = \Phi(0) = \varphi_0 = 1$ a dále $a_1 = \varphi_1 - \varphi_0 = 0$. Pro $k = 2, 3, 4, \dots$ platí pak $a_k = \varphi_k - \varphi_{k-1} - \varphi_{k-2}$, takže podle (5) je $a_k = 0$ pro všechna $k \geqq 2$. Je tedy $A(x) = I(x)$, avšak $A(x) = \Phi(x)\,[1 - x - x^2]$. To však znamená, že řada $\Phi(x)$ je reciproká k řadě — mnohočlenu $1 - x - x^2$.

Při určování koeficientů řady $\Phi(x)$, tj. Fibonacciových čísel $\varphi_k$, můžeme dále postupovat dvěma způsoby. Prvý z nich spočívá v tom, že mnohočlen $1 - x - x^2$ vyjádříme ve tvaru součinu dvou dvojčlenů

$$1 - x - x^2 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5} + 1}\,x\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5} - 1}\,x\right), \tag{7}$$

takže řada $\Phi(x)$ bude také součinem řad reciprokých k těmto dvěma dvojčlenům, tedy řad

$$\Phi_1(x) = \left[1 + \frac{2}{\sqrt{5} + 1}\,x\right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{(\sqrt{5} + 1)^k}\, x^k$$

a

$$\Phi_2(x) = \left[1 - \frac{2}{\sqrt{5} - 1}\,x\right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(\sqrt{5} - 1)^k}\, x^k .$$

V součinu $\Phi(x) = \Phi_1(x)\,.\,\Phi_2(x)$ bude podle vzorce (II.5) koeficient při $x^n$ roven součtu

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \frac{2^j}{(\sqrt{5}+1)^j} \cdot \frac{2^{n-j}}{(\sqrt{5}-1)^{n-j}} =$$

$$= 2^n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(\sqrt{5}+1)^j\,(\sqrt{5}-1)^{n-j}} =$$

$$= 2^n \sum_{j=0}^{n} \frac{(1-\sqrt{5})^j}{4^j} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})^{n-j}}{4^{n-j}} =$$

$$= 2^{-n} \sum_{j=0}^{n} (1-\sqrt{5})^j (1+\sqrt{5})^{n-j}\,.$$

To však lze podle vzorce (II.13), kde položíme $a = 1 + \sqrt{5}$, $b = 1 - \sqrt{5}$, psát též jako

$$2^{-n} \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})} = \tag{8}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Jiné zajímavé vyjádření Fibonacciových čísel dostaneme, jestliže si mnohočlen $1 - x - x^2$ představíme jako výsledek substituce mnohočlenu $N(x) = x + x^2 = x(1 + x)$ do mnohočlenu $M(x) = 1 - x$. Poněvadž k $M(x)$ je reciproká řada (II.8), vidíme, že

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} N^k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k(1+x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \binom{k}{j} x^{k+j}\,. \tag{9}$$

Koeficient při $x^n$ ve $\Phi(x)$, tj. číslo $\varphi_n$, je tedy roven součtu

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} \; ; \tag{10}$$

přímý důkaz rovnosti výrazů (10) a (8) by asi nebyl právě snadnou záležitostí.

Z důvodů, které jsme si uvedli hned na začátku, musíme opustit tuto velmi zajímavou oblast aplikací teorie vytvořujících funkcí a spokojit se s jediným podrobněji provedeným příkladem. Čtenáře, který by se o rekurentní vztahy a diferenční rovnice zajímal hlouběji, musíme odkázat na speciální literaturu o diferenčním počtu.

*Cvičení*

4. Najděte vytvořující řadu obecné aritmetické posloupnosti s počátečním členem $a_0$ a diferencí $d$.
5. Určete posloupnost $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$, jestliže $b_0 = 1$ a $b_{k+1} = 2b_k + 1$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$
6. Najděte obecný tvar posloupností $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, s počátečním členem $a_0 = 0$, jestliže pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ platí v nich rekurentní vztah tvaru $a_{k+1} = \alpha a_k + \beta$, kde $\alpha$ a $\beta$ jsou pevná reálná čísla, $\alpha \neq 0$.
7. Najděte posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, ve které je $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ a platí $a_k + k = a_{k+2}$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \ldots$
8. Najděte vytvořující funkci posloupnosti $F_m(0)$, $F_m(1)$, $F_m(2), \ldots, F_m(k), \ldots$

**3. Kombinace.** Již ve druhém paragrafu první kapitoly jsme si připomněli, že se binomickým koeficientům $\binom{n}{k}$,

$0 \leqq k \leqq n$, říká také *kombinační čísla*, protože $\binom{n}{k}$ je právě počet kombinací $k$-té třídy z $n$ prvků. Tuto souvislost si můžeme názorně vyjádřit pomocí pojmu vytvořující řady, resp. funkce. Pro určení počtu kombinací a podobných dalších vlastností je totiž zcela lhostejné, z jakých „prvků" vlastně své kombinace tvoříme, z které množiny je vybíráme; rozhodující je pouze jejich celkový počet, jejich vzájemná rozlišitelnost, jedinečnost či opakovatelnost apod. Můžeme tedy uvažovat i takový případ, kdy tvoříme kombinace prvků z dané množiny v podstatě abstraktních symbolů, s nimiž zacházíme podle určitých obecných pravidel.

Ukážeme si to opět na konkrétním příkladě. Vezměme si součin $n$ lineárních dvojčlenů v proměnné $x$

$$P(x) = (1 + a_1x)(1 + a_2x) \ldots (1 + a_nx) \ , \tag{11}$$

kde jsme písmeny $a_1, a_2, \ldots, a_n$ označili jistých $n$ nenulových reálných čísel obecně vesměs navzájem různých, o nichž zatím nic dalšího nepředpokládáme. Výraz $P(x)$ je zřejmě mnohočlen stupně $n$ v proměnné $x$.

Rozepíšeme si součin stojící v (11) vpravo; dostaneme tak součet $2^n$ sčítanců, z nichž každý je součinem $n$ faktorů vybraných po jednom z daných $n$ dvojčlenů. Vybereme-li při tom z $k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) dvojčlenů faktor tvaru $a_jx$ a ze zbývajících $n - k$ dvojčlenů faktor 1, dostaneme člen s $x^k$ opatřený koeficientem, jenž je součinem vybrané $k$-tice čísel $a_j$. Každé takové $k$-tici, tj. každé kombinaci $k$-té třídy z $n$ prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$ odpovídá právě jeden člen s $x^k$. Máme tak

$$\begin{aligned} P(x) = 1 &+ \\ &+ (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x + \\ &+ (a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_1a_n + a_2a_3 + \end{aligned} \tag{12}$$

$$+ \dots + a_{n-1}a_n)x^2 + (a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 +$$
$$+ \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n)x^3 + \dots +$$
$$+ a_1a_2 \dots a_n \, . \, x^n \, .$$

V mnohočlenu $P(x)$ je tedy koeficient při $x^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) právě součet součinů všech možných kombinací $k$-té třídy z prvků $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Ve výrazech pro $P(x)$ položme nyní $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$. Podle (12) bude potom koeficient při $x^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) roven právě *počtu všech kombinací k-té třídy z n-prvků.* Zároveň však podle (11) bude $P(x) = (1 + x)^n$, takže koeficientem při $x^k$ bude číslo $\binom{n}{k}$.

Základní myšlenkou tohoto způsobu odvození významu $\binom{n}{k}$ jakožto kombinačních čísel je reprezentace procesu tvoření $k$-tic z dané $n$-prvkové množiny pomocí procesu vybírání faktorů z jednotlivých členů násobených mnohočlenů. Tento proces výběru si můžeme představit též ve formě postupného $n$-násobného rozhodování. Bereme postupně jednotlivé dvojčleny v součinu v (11) a rozhodujeme se pro jeden či druhý člen jakožto faktor.

Stejného postupu lze užít i ve složitějších případech, kdy máme na výběr více než jenom dvě možnosti (prvek $a_j$ zařadit nebo nezařadit). Vezměme si např. součin (pro jednoduchost se omezíme na dva prvky $a_1, a_2$)

$$Q(x) = (1 + a_1x + a_1^2x^2)(1 + a_2x + a_2^2x^2) \, . \quad (13)$$

Při tvoření jednotlivých členů při roznásobení

$$Q(x) = 1 + a_1x + a_2x + a_1^2x^2 + a_2^2x^2 + a_1a_2x^2 +$$
$$+ a_1^2a_2x^3 + a_1a_2^2x^3 + a_1^2a_2^2x^4$$

se rozhodujeme (postupně dvakrát) vždy pro jednu ze tří možností: prvek $a_j$ ($j = 1, 2$) vůbec nevzít nebo vzít v první anebo ve druhé mocnině (tj. jakoby dvakrát). Koeficienty při $x^k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, 4$) v mnohočlenu $Q(x)$, tj. v

$$Q(x) = 1 + (a_1 + a_2)x + (a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2)x^2 + \\ + (a_1^2a_2 + a_1a_2^2)x^3 + a_1^2a_2^2x^4 \tag{14}$$

nám pak reprezentují různé možné způsoby výběru vždy celkem $k$ prvků, přičemž jak prvek $a_1$, tak také $a_2$ se v nich může objevit nulkrát, jednou nebo dvakrát.

Po dosazení $a_1 = a_2 = 1$ dostaneme ve (14) jako koeficient při $x^k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, 4$) opět počet těchto tzv. kombinací $k$-té třídy s opakováním (a to nejvýše jedním opakováním pro každý prvek) ze dvou prvků $a_1$, $a_2$. Zároveň plyne z (13), že pak je $Q(x) = (1 + x + x^2)^2$. Porovnáním obou výrazů, resp. odpovídajících si koeficientů získáme vyjádření čísel udávajících počet příslušných kombinací.

**Příklad 6.** Mějme tři bílé, dvě černé a dvě modré koule; z těchto sedmi koulí vybereme tři. Kolika různých kombinací barev můžeme přitom dosáhnout? Jde o kombinatorickou úlohu klasického typu; jejím převedením na problém výběru faktorů při násobení tří mnohočlenů dojdeme k součinu

$$R(x) = (1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3)(1 + cx + c^2x^2)(1 + \\ + mx + m^2x^2) ,$$

ve kterém nás zajímají členy obsahující $x^3$. Dosazením $b = c = m = 1$ dostaneme pak jejich počet jako koeficient při $x^3$ v součinu $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2)^2$. Výsledkem je v prvním případě součet $b^3 + b^2c + b^2m + bc^2 + bm^2 + cm^2 + c^2m + bcm$; pro počet barevných kombinací vychází pak 8.

**Příklad 7.** Hledejme *počet kombinací k-té třídy s neomezeným opakováním z n prvků*, tj. počet způsobů, jimiž lze z $n$ různých prvků vybrat $k$ ne nutně různých. Obvyklým postupem přejdeme k vyšetřování koeficientů při $x^k$ v součinu

$$P(x) = (1 + \alpha_1 x + \alpha_1^2 x^2 + \ldots + \alpha_1^m x^m + \ldots)\,(1 + \alpha_2 x + \alpha_2^2 x^2 + \ldots + \alpha_2^m x^m + \ldots) \ldots (1 + \alpha_n x + \alpha_n^2 x^2 + \ldots + \alpha_n^m x^m + \ldots)\,. \tag{15}$$

Dále jako obvykle položíme $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$ a vidíme, že pak

$$P(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^m + \ldots)^n = (1 - x)^{-n} = B_{-n}(-x)\,.$$

Koeficient při $x^k$ v řadě $B_{-n}(-x)$ je ovšem

$$(-1)^k \binom{-n}{k} = \binom{n + k - 1}{k}$$

— viz vzorec (II.18); pro počet kombinací $k$-té třídy s neomezeným opakováním z $n$ prvků máme tedy výraz $\binom{n + k - 1}{k}$.

*Cvičení*

9. Určete počet kombinací šesté třídy s libovolným opakováním ze tří prvků, jestliže se v každé kombinaci vyskytují vždy všechny tři prvky.
10. Určete počet kombinací čtvrté třídy z $n$ prvků, jestliže se každý prvek vyskytuje v každé kombinaci vždy v sudém počtu exemplářů.
11. Z pěti prvků $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ tvoříme kombinaci s opakováním, vyhovující těmto podmínkám:

a) Prvky $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ se vyskytují v sudém, $\delta$ a $\varepsilon$ v lichém počtu exemplářů.
b) Počet exemplářů prvku $\alpha$ je vždy alespoň dvojnásobkem počtu exemplářů prvku $\delta$.
c) V kombinaci nejsou nikdy prvky $\alpha$ a $\beta$ současně, prvky $\alpha$ a $\gamma$ jsou přítomny současně jen tehdy, když je přítomen též prvek $\delta$.
d) Je-li v kombinaci sudý počet exemplářů prvku $\alpha$, je v ní lichý počet exemplářů prvku $\beta$ a obráceně; prvek $\delta$ je přítomen nejvýše ve dvou exemplářích, prvek $\varepsilon$ nejvýše v jednom.
Určete jejich počty.

12. Určete počet kombinací $k$-té třídy z $n$ prvků takových, že v kombinaci je vždy $m$ prvků ve dvou exemplářích a $n - 2m$ prvků v jednom exempláři ($0 \leqq m \leqq 2m \leqq \leqq n$).

13. Ukažte, že počet kombinací $k$-té třídy z $n$ prvků takových, že v kombinaci je vždy jeden prvek v $p$ exemplářích a $n - p$ prvků v jednom exempláři, je dán součtem

$$\binom{n-p}{k} + \binom{n-p}{k-1} + \dots + \binom{n-p}{k-p},$$

$0 < p < k$.

**4. Exponenciální vytvořující funkce.** V první kapitole jsme si v souvislosti se studiem normálních soustav mnohočlenů vedle obyčejných koeficientů mnohočlenů zavedli též obecnější pojem *koeficientů vzhledem k určité normální soustavě* (viz paragraf 6 první kapitoly). Také tento pojem bychom mohli rozšířit z mnohočlenů na řady. Při dané normální soustavě mnohočlenů $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, vyhovujících známým podmínkám (i), (ii) a (iii) bychom studovali „řady vzhledem k dané normální soustavě“, tj. výrazy tvaru

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x) \,. \tag{16}$$

V obecném případě bychom však brzy narazili na dosti vážné potíže, např. při vyšetřování operace dosazení do řady. Existuje však jeden speciální případ, kdy řady tvaru (16) skutečně používáme. Je to případ normální soustavy mnohočlenů $P_k(x) = x^k/k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, který je celkem jednoduchý, takže ho dokážeme zvládnout i našimi poměrně omezenými prostředky, a který přitom vede k velmi užitečným výsledkům.

Mějme tedy znovu posloupnost reálných čísel (1) a vedle její vytvořující řady $A(x)$ dané vzorcem (2) vezměme řadu

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2/2! + \ldots + a_k x^k/k! + \ldots ; \tag{17}$$

nazveme ji *exponenciální vytvořující řadou* posloupnosti (1). Poloměr řady $G(x)$ není ovšem nikdy menší nežli poloměr řady $A(x)$, ba dokonce víme (viz konec šestého paragrafu druhé kapitoly), že řada $G(x)$ je celistvá, jakmile má řada $A(x)$ kladný poloměr. Může se dokonce stát, že řada $G(x)$ má kladný poloměr, i když řada $A(x)$ je banální. Do řady $G(x)$ můžeme tedy dosazovat stejně dobře a obvykle podstatně lépe (tj. s menšími omezeními) než do řady $A(x)$. Funkce $g(q) = G(q)$, kterou si takto (pro $q$ menší nežli poloměr řady $G(x)$) můžeme definovat, se nazývá *exponenciální vytvořující funkcí* posloupnosti (1); její definiční interval obsahuje (a obvykle dokonce přesahuje) definiční interval vytvořující funkce posloupnosti (1). Není těžké udat příklad posloupnosti, která nemá vytvořující funkci, má však exponenciální vytvořující funkci.

**Příklad 8.** Posloupnost 1, 1, 1, ..., 1, ... má za exponenciální vytvořující řadu celistvou řadu $E(x)$; příslušná exponenciální vytvořující funkce je $g(q) = e^q$ (viz osmý paragraf druhé kapitoly).

*Cvičení*

14. Najděte exponenciální vytvořující řady a funkce posloupností
    a) $0, 1, 2, 3, \ldots, k, \ldots,$
    b) $0, 1, 4, 9, \ldots, k^2, \ldots,$
    c) $0, 2, 6, \ldots, k^2 - k, \ldots$
15. Najděte posloupnost, jejíž exponenciální vytvořující funkcí je $g(q) = (1 + q)^n$.
16. Jaké operaci s posloupnostmi odpovídá a) sčítání, b) násobení jejich exponenciálních vytvořujících funkcí?
17. Dokažte, že exponenciální vytvořující řadou posloupnosti Stirlingových čísel druhého druhu je

$$H_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k)x^n/n! = [E(x) - 1]^k/k!$$

**5. Permutace a variace.** Při tvoření kombinací $k$-té třídy z $n$ prvků, tj. při vybírání $k$-tic prvků z dané $n$-prvkové množiny, nerozlišujeme výsledné kombinace podle pořadí, v jakém byly jednotlivé prvky vybrány. Také součin (11), jehož jsme užili ke stanovení počtu kombinací, je nezávislý na pořadí, v němž jsou jeho činitelé zapsáni; násobení je komutativní operace.

Jestliže tedy chceme při postupném vybírání prvků z dané množiny rozlišovat také pořadí (v takovém případě už nemluvíme o kombinacích, ale obvykle o *variacích* nebo o *uspořádaných výběrech*), musíme postup uvedený ve třetím paragrafu obměnit tak, aby pořadí respektoval. Cesta vedoucí přes zavedení nové, nekomutativní operace je sice možná, ale nepříliš schůdná. Spokojíme se proto takovou úpravou, která dovoluje určit počet uspořádaných výběrů, ale nedává jejich úplný výčet tak, jak jsme to u kombinací viděli v (12).

Z elementární kombinatoriky víme, že počet permutací $n$ prvků, tj. počet různých způsobů, jimiž lze uspořádat $n$ navzájem rozlišitelných prvků, je dán číslem $n! = F_n(n)$. Mějme opět $n$ různých „čísel" $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a utvořme z nich všechny kombinace $k$-té třídy. Jejich počet se nám objeví v (12) jako koeficient při $x^k$ po dosazení $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$. Avšak každou takovou $k$-tici různých prvků můžeme uspořádat $k!$ různými způsoby. Počet variací $k$-té třídy je tedy $k!$ krát větší. Vyjádříme-li si týž mnohočlen (12) vzhledem k normální soustavě mnohočlenů $x^m/m!$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, bude nový koeficient při $x^k/k!$ přirozeně právě $k!$ násobkem původního koeficientu při $x^k$. Přechod k soustavě $x^m/m!$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ znamená přechod od vytvořujících řad a funkcí k *exponenciálním vytvořujícím řadám* a funkcím; ukážeme si, že exponenciální vytvořující řady a funkce tvoří přirozený nástroj vyšetřování uspořádaných výběrů.

Podívejme se ještě na poněkud obecnější případ tzv. *variací s opakováním*, kdy máme při výběru k dispozici více exemplářů stejného prvku. Vezmeme-li takové stejné prvky do výběru, nedokážeme je pak rozlišit. Existuje např. jen jeden způsob, jak z $n$ stejných prvků vybrat $k$-tici, neboť zde pořadí vůbec nerozhoduje. Má-li se počet uspořádaných výběrů (variací) objevit jako koeficient při $x^k/k!$ ($k$ je počet vybraných prvků, „třída" variace neboli „rozsah" výběru), musí být v případě nerozlišitelných prvků tento koeficient rovný 1. To tedy znamená, že místo součinů tvaru (13), (15) apod. musíme při vyšetřování variací brát podobné součiny mnohočlenů, jejichž koeficienty vzhledem k normální soustavě mnohočlenů $x^m/m!$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ jsou rovny 1. Máme-li tedy např. po dvou exemplářích dvou různých prvků $a_1$ a $a_2$, vezmeme místo (13) součin

$$(1 + a_1x + a_1^2x^2/2!)\,(1 + a_2x + a_2^2x^2/2!)\;; \qquad (18)$$

po roznásobení a dosazení $a_1 = a_2 = 1$ dostaneme odtud skutečně počty variací třídy $k = 0, 1, \ldots, 4$ jako koeficienty (vzhledem k soustavě $x^m/m!$) mnohočlenu

$$1 + 2x + 4x^2/2! + 6x^3/3! + 6x^4/4!$$

**Příklad 9.** Ze dvou prvků $a_1$ a $a_2$ tvořme variace páté třídy s podmínkou, že se v nich prvek $a_1$ objeví v lichém počtu exemplářů a prvek $a_2$ nejvýše dvakrát. Počet variací tohoto druhu dostaneme z koeficientu při $x^5/5!$ v součinu

$$(a_1x + a_1^3x^3/3! + a_1^5x^5/5!)\,(1 + a_2x + a_2^2x^2/2!)\,.$$

Snadno se vidí, že tento koeficient je

$$a_1^5 + \frac{5!}{2!\,3!}\,a_1^3a_2^2\;,$$

takže po obvyklém dosazení $a_1 = a_2 = 1$ vyjde pro hledaný počet výsledek 11.

Podobně se postupuje i v obecnějších a složitějších případech. Princip použití exponenciálních vytvořujících řad pro studium variací je snad z uvedených příkladů dostatečně patrný. Při troše cviku není ani nutné vypisovat ve výchozích mnohočlenech, resp. řadách dané prvky $a_1$, $a_2, \ldots$, a je možno psát rovnou součiny po dosazení $a_1 = a_2 = \ldots = 1$. Na rozdíl od případu kombinací nám totiž rozpis součinů stejně nedá výčet variací, ale jen jejich počet.

Všimněme si ještě dvou speciálních a vlastně téměř triviálních výsledků.

Koeficient při $x^k/k!$ v mnohočlenu $(1 + x)^n$ je $k! \binom{n}{k} = F_k(n)$; to je *počet variací (bez opakování) k-té třídy z n prvků.*

*Počet variací k-té třídy z n prvků s libovolným opakováním* dostaneme jako koeficient při $x^k/k!$ v řadě

$$(1 + x + x^2/2! + \ldots + x^j/j! + \ldots)^n .$$

Výraz v závorce však není nic jiného než naše známá řada $E(x)$; podle (II.61) je $[E(x)]^n = E(nx)$ a hledaný koeficient je tedy $n^k$. Variace s neomezeným opakováním lze ovšem vyjádřit též jako prvky $k$-té kartézské mocniny dané $n$-prvkové množiny a ta má ovšem $n^k$ prvků.

Na závěr ještě poznámku k terminologii. Permutace v obvyklém smyslu jsou zvláštním případem variací (variace $n$-té třídy z $n$ prvků), takže pro ně nemusíme odvozovat zvláštní vzorce. Tato souvislost vede dokonce některé matematiky k tomu, že oba pojmy ani nerozlišují a užívají jednotného názvu *permutace*; z tradičních důvodů jsme se zde přidrželi termínu variace. Název *uspořádaný výběr* má svůj původ v matematické statistice.

*Cvičení*

18. Vypište si explicitně všechny variace ze součinu (18) i 11 variací páté třídy z příkladu 9.
19. Proveďte si cvičení 9—12 s tou změnou, že místo kombinací hledáte variace.

**6. Rozklady čísel.** Budiž $n$ přirozené číslo. Rozkladem čísla $n$ budeme rozumět každé jeho vyjádření ve tvaru součtu přirozených sčítanců

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m \,, \tag{19}$$

přičemž nerozlišujeme rozklady lišící se jen pořadím sčítanců. (Pro jednoznačnost je tedy vhodné předpokládat $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_m \geqq 1$.)

**Příklad 10.** Existuje pět rozkladů čísla 8 na čtyři sčítance:

$$\begin{gathered} 8 = 5 + 1 + 1 + 1 \,, \quad 8 = 4 + 2 + 1 + 1 \,, \\ 8 = 3 + 3 + 1 + 1 \,, \quad 8 = 3 + 2 + 2 + 1 \,, \\ 8 = 2 + 2 + 2 + 2 \,, \end{gathered}$$

a dva rozklady na šest sčítanců:

$$\begin{gathered} 8 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \,, \\ 8 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 \,. \end{gathered}$$

Ke stručnějšímu vyjádření rozkladů se obvykle používá symbolického zápisu, kde sčítání je nahrazeno násobením. Tak např. rozklady z příkladu 10 se stručně zapíší jako $5 \,.\, 1^3$, $4 \,.\, 2 \,.\, 1^2$, $3^2 \,.\, 1^2$, $3 \,.\, 2^2 \,.\, 1$, $2^4$, resp. $3 \,.\, 1^5$, $2^2 \,.\, 1^4$. Někdy je vhodné připustit též nulové exponenty (znamenají ovšem, že se příslušný sčítanec v rozkladu nevyskytuje) zvláště tam, kde nevíme předem, jaké hodnoty sčítanců se nám v rozkladu objeví; např. $5 \,.\, 4^0 \,.\, 3^2 \,.\, 2^0 \,.\, 1^2$ značí rozklad $5 \,.\, 3^2 \,.\, 1^2$, tedy

$$13 = 5 + 3 + 3 + 1 + 1 \,.$$

Označíme si $P_n^m$ počet všech různých rozkladů čísla $n$ na právě $m$ sčítanců a $P_n$ počet všech rozkladů $n$ bez ohledu na počet sčítanců. Platí zřejmě

$$P_n^1 = 1\ , \quad P_n^n = 1 \tag{20}$$

a

$$P_n = P_n^1 + P_n^2 + \ldots + P_n^n\ . \tag{21}$$

Snadno se dokáže platnost zajímavého vztahu

$$P_n^1 + P_n^2 + \ldots + P_k^n = P_{n+k}^k\ , \qquad 1 \leqq k \leqq n\ . \tag{22}$$

Skutečně, levá strana (22) vyjadřuje počet rozkladů čísla $n$ na *nejvýše* $k$ sčítanců. Vezměme si takový rozklad

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m\ , \qquad m \leqq k\ ,$$

kde $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_m \geqq 1$ a v případě $m < k$ si jej doplňme formálně nulami na součet *právě* $k$ sčítanců

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} + \ldots + a_k\ ,$$

$a_{m+1} = \ldots = a_k = 0$. Zvýšíme-li teď každý sčítanec o 1, dostaneme zřejmě rozklad

$$n + k = (a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \ldots + (a_k + 1)$$

čísla $n + k$ na právě $k$ sčítanců, přičemž opět platí nerovnosti $(a_1 + 1) \geqq (a_2 + 1) \geqq \ldots \geqq (a_k + 1) \geqq 1$. Naopak z každého rozkladu čísla $n + k$ na *právě* $k$ kladných sčítanců dostaneme odečtením 1 od každého z nich rozklad čísla $n$ na *nejvýše* $k$ kladných sčítanců. Přitom je vidět, že toto přiřazení je vzájemně jednoznačné. Dva různé rozklady čísla $n$ se nutně liší v některém ze sčítanců, ale přičtení jednotky ke všem sčítancům tuto nerovnost zachová, a podobně obráceně; tím je rovnost (22) dokázána.

K určení čísel $P_n$ a $P_n^m$ užijeme vytvořujících řad. Vezměme si opět naše abstraktní prvky — čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a utvořme součin

$$(1 + a_1x + a_1^2x^2 + \ldots + a_1^kx^k + \ldots)(1 + a_2x^2 + a_2^2x^4 + \ldots + a_2^kx^{2k} +) \, . \, (1 + a_3x^3 + a_3^2x^6 + \ldots) \ldots \ldots (1 + a_nx^n + a_n^2x^{2n} + \ldots) \, . \tag{23}$$

Po roznásobení dostaneme jako koeficient při $x^k$, $0 \leqq k \leqq n$, součet výrazů tvaru

$$a_1^{\alpha_1} \, a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} \; , \tag{24}$$

kde $\alpha_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ jsou celá nezáporná čísla, pro která platí

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n = k \; . \tag{25}$$

Přitom jsou výrazy (24) v koeficientu při $x^k$ vesměs navzájem různé. Avšak každému vyjádření čísla $k$ ve tvaru (25) lze, a to vzájemně jednoznačně, přiřadit rozklad čísla $k$, totiž rozklad $n^{\alpha_n} \, (n-1)^{\alpha_{n-1}} \ldots 2^{\alpha_2} \, 1^{\alpha_1}$ , resp.

$$\begin{aligned} k = {} & \underbrace{n + n + \ldots + n +}_{\alpha_n} \\ & + \underbrace{(n-1) + \ldots + (n-1) +}_{\alpha_{n-1}} \\ & + \ldots \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2 +}_{\alpha_2} \\ & + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{\alpha_1} \; . \end{aligned}$$

Nyní již zbývá jen položit jako obvykle $a_1 = a_2 \ldots = a_n = 1$ a koeficient při $x^k$ nám udá právě počet $P_k$ všech rozkladů čísla $k$.

V součinu (23) odpovídá činitel tvaru

$$1 + a_m x^m + a_m{}^2 x^{2m} + \ldots + a_m{}^j x^{mj} + \ldots \qquad (26)$$

výskytům sčítanců velikosti $m$ ve výsledném rozkladu. Poněvadž se v rozkladu čísla $k \leqq n$ nemůže objevit sčítanec větší než $n$, mohli jsme se při určování $P_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ omezit na $n$ činitelů. Kdybychom chtěli vyjádřit najednou všechna $P_k$ jako koeficienty jediné řady, museli bychom místo (23) vzít vlastně součin nekonečně mnoha řad tvaru (26) pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ Součiny nekonečně mnoha řad jsme si sice ve druhé kapitole nedefinovali, ale — jak jsme ostatně právě viděli — v našem případě stačí vzít pro každé pevné $k$ jen konečný počet činitelů, abychom mohli vypočítat koeficient při $x^k$. Z ostatních řad (pro $m > k$) už stejně musíme vzít jen první člen, totiž 1, jako faktor a (obdobně jako v našem prvním „axiómu" o dosazování do řad) je přirozené pokládat součin i nekonečně mnoha jedniček za rovný 1.

Při $k > n$ nebude koeficient u $x^k$ v (23) roven $P_k$, ale bude, jak snadno nahlédneme, udávat *počet rozkladů čísla $k$ na sčítance nejvýše rovné $n$*, což je jistě také zajímavý výsledek. Součiny tvaru (23) můžeme ostatně i jinak modifikovat obvyklými způsoby, chceme-li dostávat jen rozklady vyhovující dalším omezujícím podmínkám. Tak např. pro stanovení počtu rozkladů čísla $n$ na součty výhradně lichých sčítanců stačí najít koeficient při $x^n$ v součinu řad (26) pro $m = 1, 3, 5, \ldots, 2k + 1; 2k + 1 \leqq n < 2k + 3$. Každá řada tvaru (26) je ovšem reciproká k mnohočlenu $(1 - a_m x^m)$, takže místo toho můžeme psát kratčeji

$$(1 - a_1 x)^{-1} (1 - a_3 x^3)^{-1} \ldots (1 - a_{2k+1} x^{2k+1})^{-1} , \qquad (27)$$

resp. již bez $a_m$

$$(1 - x)^{-1} (1 - x^3)^{-1} \ldots (1 - x^{2k+1})^{-1} . \qquad (27')$$

**Příklad 11.** Vezměme si rozklady s vesměs různými sčítanci. Vynecháme-li v řadách (26) členy odpovídající opakování téhož sčítance, dostaneme místo (23) součin dvojčlenů

$$(1 + a_1x)(1 + a_2x^2) \ldots (1 + a_nx^n) \ ,$$

resp. po dosazení $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ součin

$$(1 + x)(1 + x^2) \ldots (1 + x^n) \ . \tag{28}$$

Koeficient při $x^k$, $1 \leqq k \leqq n$, v (28) udává *počet rozkladů čísla $k$ na vesměs různé sčítance.*

Teorie rozkladů přirozených čísel na sčítance tvoří velmi zajímavý a poměrně rozsáhlý oddíl kombinatoriky, z něhož jsme si tu mohli ukázat jen velmi málo. Lze však doufat, že hloubavý čtenář bude ve studiu rozkladů pokračovat samostatně i dále. Připomeňme jenom, že vytvořující funkce nejsou jediným vhodným nástrojem k vyšetřování rozkladů. Mnohé jejich vlastnosti lze velmi snadno odvodit grafickými metodami.

Jestliže rozlišujeme vyjádření (19) lišící se *pořadím* sčítanců, nemluvíme o rozkladech čísla $n$, ale o jeho *kompozicích.* Dá se dokázat, že existuje právě $\binom{n-1}{m-1}$ kompozic čísla $n$ s $m$ sčítanci. Příslušná vytvořující řada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n-1}{m-1} x^n = x^m(1-x)^{-m} = (x + x^2 + \ldots +$$

$$+ x^k + \ldots)^m \ . \tag{29}$$

*Cvičení*

20. Kolik existuje rozkladů čísla 11 na tři sčítance?

21. Kolik existuje rozkladů čísla 12 na pouze sudé sčítance?
22. Vypište si všechny rozklady a všechny kompozice čísla 5. Jak závisí počet kompozic na počtu rozkladů?
23. Kolik existuje rozkladů čísla 19 na lichý počet sčítanců?
24. Dokažte, že počet rozkladů čísla $n$ na vesměs různé sčítance se rovná počtu rozkladů čísla $n$ na liché sčítance.
25. Sestavte si tabulku čísel $P_n^k$ pro $1 \leqq k \leqq n \leqq 8$.
26. Dokažte, že $P_n^k$ je také počet rozkladů čísla $n$ s největším sčítancem rovným $k$.
27. Dokažte, že koeficient při $x^n$ v součinu
$$(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^m), \quad m \geqq n,$$
se rovná $(-1)^k$, je-li $n$ tvaru $(3k^2 \pm k)/2$, a nule v ostatních případech.
28. Odůvodněte obvyklým postupem, proč je vytvořující řadou pro počty kompozic právě (29).
29. Ukažte, že počet kompozic čísla $n$ s $m$ sčítanci rovnými nejvýše $k$ se rovná koeficientu při $x^n$ v mnohočlenu $(x + x^2 + \dots + x^k)^m$.

**7. Rozmisťovací úlohy.** S rozklady a kompozicemi čísel souvisejí dost úzce též kombinatorické úlohy známé jako úlohy o rozmisťování předmětů v přihrádkách. Mějme $n$ různých předmětů a $r$ přihrádek, každý předmět umístíme v (právě) jedné přihrádce; kolika různými způsoby lze toto rozmístění provést?

Nepřipojíme-li žádné další podmínky, je odpověď na tuto otázku poměrně jednoduchá: pro každý předmět máme $r$ možností umístění, celkem tedy $r^n$.

Proces umisťování předmětů do přihrádek si ostatně můžeme představit také jako postupné vybírání přihrádek.

Bereme jeden po druhém jednotlivé předměty a každému vybereme jednu přihrádku; jde tedy o $n$-násobný uspořádaný výběr z $r$ možností s libovolným opakováním. Takový výběr jsme si už popsali v pátém paragrafu, kde jsme také došli ke stejnému výsledku $r^n$.

Místo o vybírání přihrádek pro předměty můžeme ovšem opět uvažovat o vybírání jednotlivých faktorů z různých činitelů v součinech mnohočlenů, resp. řad. Vezměme si součin $n$ stejných výrazů tvaru $a_1 + a_2 + \ldots + a_r$, tedy vlastně $n$-tou mocninu

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_r)(a_1 + a_2 + \\ + \ldots + a_r) \ldots (a_1 + a_2 + \ldots + a_r)\ , \qquad (30)$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_r$ jsou opět známá abstraktní „čísla". Jestliže součin (30) rozepíšeme, dostaneme součet celkem $r^n$ členů, z nichž každý je součinem $n$ faktorů — čísel $a_1, a_2, \ldots, a_r$ —, vybraných vždy po jednom z každého z $n$ činitelů součinu (30). Souvislost s problémem rozmisťování je zřejmá. Umístění $k$-tého ($k = 1, 2, \ldots, n$) předmětu do $j$-té ($j = 1, 2, \ldots, r$) přihrádky odpovídá volba faktoru $a_j$ z $k$-tého činitele součinu (30). Toto přiřazení jednotlivých členů roznásobeného součinu (30) různým způsobům rozmístění $n$ předmětů v $r$ přihrádkách je vzájemně jednoznačné, a proto je také celkový počet členů roznásobeného součinu roven počtu všech možných rozmístění, totiž $r^n$; číslo $r^n$ dostaneme z (30) obvyklým způsobem, tj. dosazením $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 1$.

Ze součinu (30) však můžeme získat i zajímavější výsledky. V rozepsaném součinu se budou opakovat některé stejné členy (násobení je komutativní a asociativní operace); sloučíme-li je, můžeme (30) psát ve tvaru

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = \\ = \Sigma\, C(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)\, a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_r^{\alpha_r} \qquad (31)$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_r$ jsou celá nezáporná čísla se součtem

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_r = n \; ; \tag{32}$$

sčítá se přes všechny možné takové $r$-tice. Koeficienty $C(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ jsou rovněž celé, nezáporné a vyjadřují vždy počet těch členů roznásobeného součinu (30), které mají právě tvar $\alpha_1^{a_1}\alpha_2^{a_2} \ldots \alpha_r^{a_r}$ s danými exponenty $a_1, a_2, \ldots, a_r$. V interpretaci rozmisťovací úlohy je tedy $C(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ *počet způsobů rozmístění takových, že v j-té přihrádce je právě* $a_j$ *předmětů,* $j = 1, 2, \ldots, r$.

Hodnoty koeficientů $C(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ lze určit celkem snadnou elementárně kombinatorickou úvahou (jde v podstatě o permutace s opakováním), kterou však přenecháváme čtenáři. (Ukážeme si ostatně ještě jiný způsob odvození.) Jest

$$C(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)!}{a_1!\, a_2! \ldots a_r!} \; . \tag{33}$$

Čísla $C(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ jsou zřejmou obdobou binomických koeficientů, jež jsou ostatně jejich speciálním případem pro $r = 2$;

$$C(a_1, a_2) = \frac{(a_1 + a_2)!}{a_1!\, a_2!} = \binom{a_1 + a_2}{a_1} = \binom{a_1 + a_2}{a_2} \; .$$

Nazývají se též *multinomické* či *polynomické koeficienty* a značí symboly

$$C(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \binom{n}{a_1\, a_2 \ldots a_r} \; .$$

Rovnost (31) je vlastně vzorcem pro $n$-tou mocninu $r$-členu, tedy zobecnění binomického vzorce (I.3).

Dosadíme-li do (31) $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 1$, dostaneme rovnost

$$\Sigma\, C(a_1, a_2, \ldots, a_r) = r^n \tag{34}$$

(sčítání probíhá opět přes všechny $r$-tice nezáporných celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_r$, vyhovující (32)). Vztah (34) je obdobou a zobecněním rovnosti (I.6).

Svůj význam má též počet sčítanců v součtu v (34). Snadnou úvahou zjistíme, že to je právě *počet kompozic čísla $n$ s nejvýše $r$ sčítanci* (tj. s $r$ sčítanci, z nichž ovšem některé mohou být nulové). Podobně jako při odvozování rovnosti (22) pak shledáme, že tento počet je roven $\binom{n+r-1}{n}$. Ke stejnému výsledku můžeme ostatně dojít, jestliže si uvědomíme, že kompozicím, v nichž na rozdíl od obvyklé definice připustíme i nulové sčítance, odpovídá namísto (29) vytvořující řada

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots)^m = (1 - x)^{-m} \;; \tag{35}$$

potom již stačí jen uplatnit rovnost (II.18).

Vraťme se však k naší rozmisťovací úloze a podívejme se na různé způsoby rozmístění z hlediska jedné určité přihrádky, např. $r$-té. Všechna možná rozmístění si uspořádáme podle počtu předmětů, které v ní umístíme. Může tu být 0, 1, 2, ..., $n$ předmětů. Je-li v $r$-té přihrádce právě $k$ předmětů, je zbývajících $n - k$ předmětů rozmístěno (libovolně) v ostatních $r - 1$ přihrádkách. Přitom $k$ předmětů z $n$ lze vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby.

Přejdeme-li znovu od přihrádek k součinu (30), který si po roznásobení uspořádáme podle mocnin čísla $a_r$, vidíme na základě předchozí úvahy, že má platit

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = \tag{36}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_r{}^k (a_1 + a_2 + \ldots + a_{r-1})^{n-k} \,.$$

To je ovšem jen bezprostřední důsledek binomického vzorce. Rovnost (36) nás však zároveň přivádí na myšlenku neuvažovat výraz (30) izolovaně, ale — jak jsme to běžně dělali při použití metody vytvořujících řad — brát jej jako koeficient při $x^n/n!$ v *exponenciální* (srv. cvičení 16b) vytvořující řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n \, x^n/n! \qquad (37)$$

V řadě (37) snadno poznáme známou řadu $E(x)$ z (II.43), tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n \, x^n/n! = \qquad (37')$$

$$= E[x(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)] \; ;$$

podle známých vlastností řady $E(x)$ lze (37) napsat též jako součin

$$E(a_1x + a_2x + \ldots + a_rx) = E(a_1x) \, E(a_2x) \ldots E(a_rx) \, . \qquad (37'')$$

Ukážeme si teď, že řada (37) má skutečně výhodné vlastnosti pro studium rozmisťovací úlohy. Můžeme totiž z ní, resp. z jejích modifikací snadno získat vzorce pro počty nejen všech možných způsobů rozmístění, ale i pro počty rozmístění vyhovujících určitým dodatečným podmínkám.

**Příklad 12.** Mějme tři přihrádky a pět předmětů. Kolika způsoby lze provést jejich rozmístění tak, aby žádná z přihrádek nezůstala prázdná? Vedeni analogií s postupy uplatněnými v předcházejících paragrafech dospějeme k závěru, že podmínka neprázdnosti přihrádek se projeví vynecháním absolutního členu ve faktorech $E(a_j x)$ součinu (37''), takže hledaná rozmístění nalezneme pomocí koeficientu při $x^5/5!$ v součinu

$$[E(a_1 x) - 1] \, . \, [E(a_2 x) - 1] \, . \, [E(a_3 x) - 1] \; ;$$

přímým výpočtem snadno zjistíme, že tímto koeficientem je výraz

$$\frac{5!}{3!} (a_1 a_2 a_3^3 + a_1 a_2^3 a_3 + a_1^3 a_2 a_3) +$$

$$+ \frac{5!}{2!\,2!} (a_1 a_2^2 a_3^2 + a_1^2 a_2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 a_3) \; .$$

Dosazením $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ pak nalezneme hledaný počet způsobů rozmístění: $3 \, . \, 5!/6 + 3 \, . \, 5!/4 = 60 + + 90 = 150$.

Další obdobné úlohy s různými omezeními (několik jich je uvedeno v připojených cvičeních) dokáže už čtenář jistě rozřešit sám. Ukažme si tu ještě na závěr, jak lze analýzou koeficientu při $x^n/n!$ v (37) odvodit vzorec (33). V (37) je tímto koeficientem součin (30), který lze vyjádřit ve tvaru součtu (31). Naproti tomu z vyjádření (37'') vidíme, že po provedení násobení dostaneme jako koeficient při $x^n$ součet součinů koeficientů při $x^{\alpha_j}$ v řadách $E(a_j x)$, $j = = 1, 2, \ldots, r$; sčítá se opět přes všechny $r$-tice celých nezáporných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ splňujících (32). Při určitých pevných hodnotách čísel $\alpha_j$ to bude

$$(a_1^{\alpha_1}/\alpha_1!)\,(a_2^{\alpha_2}/\alpha_2!) \ldots (a_r^{\alpha_r}/\alpha_r!) =$$
$$= a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_r^{\alpha_r} (\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha^j!)^{-1} \; .$$

Poněvadž hledáme koeficient při $x^n/n!$, musíme výsledek násobit ještě $n!$; odtud však již bezprostředně plyne rovnost (33).

Přítomnost faktoriálů $n!$ v (exponenciální) vytvořující řadě pro rozmisťovací úlohu odpovídá předpokladu, že rozmisťované předměty dovedeme navzájem rozlišit (jsou vesměs různé), takže vzájemnou záměnou dvou předmětů ve dvou různých přihrádkách dostaneme už jiné rozmístění. Jestliže tento předpoklad opustíme, tj. jestliže naopak předpokládáme, že všechny předměty jsou stejné, takže je navzájem nerozlišíme, bude příslušnou vytvořující řadou místo (37), resp. (37″) součin (při rozmisťování bez dalších omezení)

$$(1 + a_1x + a_1^2x^2 + \dots + a_1^kx^k + \dots)(1 + a_2x + a_2^2x^2 + \dots + a_2^kx^k + \dots)\dots(1 + a_rx + a_r^2x^2 + \dots + a_r^kx^k + \dots) = (1 - a_1x)^{-1}(1 - a_2x)^{-1}\dots(1 - a_rx)^{-1}\,. \qquad (38)$$

Odtud vidíme, že *počet různých způsobů,* jimiž lze *umístit $n$ stejných předmětů v $r$ přihrádkách* (o těch ovšem stále předpokládáme, že jsou navzájem rozlišitelné, např. očíslováním), je $\binom{n+r-1}{n}$; je to koeficient při $x^n$ v řadě $(1 - x)^{-r}$, kterou z (38) dostaneme obvyklým dosazením $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 1$. Přenecháváme čtenáři, aby si samostatně promyslel úpravy vytvořující řady (38) odpovídající různým dodatečným omezením kladeným na rozmístění. Několik úloh na toto téma najde ve cvičeních. Zde se omezíme jen na jeden případ, který má zvláštní význam.

Jestliže totiž požadujeme, aby po rozmístění $n$ stejných předmětů do $r$ rozlišitelných přihrádek nezůstala žádná přihrádka prázdná, změní se (38) tak, že z jednotlivých činitelů odpadnou absolutní členy; výsledkem tedy bude řada

$$a_1a_2\dots a_rx^r(1 - a_1x)^{-1}(1 - a_2x)^{-1}\dots(1 - a_rx)^{-1}\,. \qquad (39)$$

Obvyklým dosazením $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 1$ odtud dostaneme vytvořující řadu pro počty rozmístění. Je to řada, kterou už známe z (29). To není nijak překvapující, protože *každému rozmístění n* stejných předmětů do $r$ rozlišitelných (např. očíslovaných) přihrádek *odpovídá* zřejmým způsobem *právě jedna kompozice* čísla $n$ s $r$ sčítanci, interpretujeme-li předměty jako jednotky a přihrádky jako sčítance. Analogickým způsobem lze ostatně vysvětlit i shodu vytvořující řady (38) s řadou (35) pro kompozice, v nichž se připouštějí i nuloví sčítanci (tj. prázdné přihrádky).

V této souvislosti napadá zcela přirozeně otázka, zda se i *rozklady* čísel dají podobným způsobem spojit s úlohou o rozmisťování. Znamená to (viz paragraf 6) nerozlišovat pořadí sčítanců — přihrádek: jde tedy o úlohu rozmístit $n$ stejných — nerozlišitelných předmětů do $r$ rovněž nerozlišitelných přihrádek. Výsledek, tj. počty $P_n$, resp. $P_n^r$ už známe ze šestého paragrafu.

*Cvičení*

30. Kolika způsoby lze umístit šest různých předmětů do tří přihrádek, má-li být v každé vždy sudý počet předmětů?
31. Napište vytvořující řadu pro způsoby rozmístění $n$ předmětů v $r$ přihrádkách s podmínkou, že žádná přihrádka nebude prázdná a že v $k$-té přihrádce ($k = 1, 2, \ldots, r$) bude vždy nejvýše $k$ předmětů. Jaké podmínky pro čísla $n$ a $r$ odtud vyplývají?
32. Ukažte, že počet způsobů, jimž lze $n$ různých předmětů rozmístit v $r$ přihrádkách, z nichž žádná nebude prázdná, je dán číslem $r!\, S(n, r)$.
33. Řešte cvičení 30 pro nerozlišitelné předměty.
34. Dokažte, že existuje právě $S(n, r)$ způsobů, jak roz-

místit $n$ různých, rozlišitelných předmětů do $r$ nerozlišitelných přihrádek tak, aby žádná z nich nebyla prázdná. Kolika způsoby lze rozmístění provést, opustíme-li požadavek neprázdnosti přihrádek?

**8. Závěr.** Omezený rozsah naší knížky nedovolil, abychom se zde seznámili s celou naznačenou problematikou do všech podrobností; v mnoha případech zůstalo jen u náznaku. Na tuto skutečnost jsme ostatně čtenáře upozornili již v předmluvě. Nemělo by to ani být považováno za příliš závažný nedostatek. Nešlo přece o to dát čtenáři všeobsáhlé kompendium, kde by našel odpovědi na všechny otázky; naším cílem bylo daleko spíše právě na tyto otázky, problémy a úlohy upozornit a naznačit metody jejich studia a cesty k jejich řešení. Doufáme, že čtenář, který po přečtení této knížky pocítí touhu seznámit se důkladněji s krásnou, byť i poněkud opomíjenou oblastí matematiky, jíž je kombinatorika, bude v jejím studiu pokračovat. Nebude proto snad na škodu, jestliže mu ještě poradíme, kde může hledat další, důkladnější poučení.

Při sestavování seznamu literatury byly vzaty v úvahu především *přístupnost* a hlavně *dostupnost* doporučovaných knížek; proto jsou u knih západních autorů uvedeny — pokud existují — jen ruské překlady. Česká a slovenská matematická literatura postrádá dosud vhodné dílo o kombinatorice, s výjimkou knížek o teorii grafů vydaných pod „kombinatorickou“ firmou.

# Literatura

*Дж Риордан,* Введение в комбинаторный анализ. ИИЛ, Москва 1963.
*Н. Я. Виленкин,* Комбинаторика. Наука, Москва 1969.
*М. Холл,* Комбинаторный анализ. ИИЛ, Москва 1963.
*Г. Дж. Райзер,* Комбинаторная математика. Мир. Москва 1966.
*Прикладная комбинаторная математика* (ред. Э. Беккенбах). Мир, Москва 1968. Tento sborník však obsahuje jen asi polovinu statí originálu Applied Combinatorial Mathematics (red. E. F. Beckenbach), J. Wiley, New York 1964.
*М. Холл,* Комбинаторика. Мир, Москва 1970.

# NÁVODY KE CVIČENÍM

Řešení některých cvičení by zpočátku mohlo méně zkušeným čtenářům působit potíže a odrazovat je tak od dalšího studia. Uvádíme zde proto stručné, heslovité návody (nikoli výsledky) k řešení. Neznamená to přirozeně, že úlohy nelze řešit i jinak; ostatně doufáme, že se každý čtenář vždy nejprve pokusí rozřešit cvičení samostatně.

## I.

2. $x^2 = (1 + x - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (1 + x)^{n-k}.$

3. $(1 + 2x)^n = (x + x + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(x + 1)^{n-k}.$

4. $\binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \frac{1}{n+1}.$

5. $(1 - x)^{2n} = \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} (-1)^m x^m =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^{2k+1},$$

$$(1-x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} x^{2k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} x^{2k+1} .$$

7. Indukcí pomocí (19).
8. $F_n(n) = n!$, $F_n(-1) = (-1)^n n!$ ; viz též (24).
10. Pomocí (32′).
17. a, b) — pomocí (57), (59) a (42′);
    c, d) — pomocí (64) indukcí.
19. Dosazením (16) do (57).
20. Dosazením $x = 0$ do $\mathrm{D}_F{}^k x^n = \Delta^k x^n$.
21. Pomocí (66).

## II.

5. Pomocí (I.11).
31. Dosazením $x = 1/3$.

## III.

1. c) $k^2 = k(k-1) + k$ ,
   d) $k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k$ .
8. Pomocí (II.35) a (II.18).

# OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

# vytvořující funkce

FRANTIŠEK ZÍTEK

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV Matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Praha 1, Panská 8
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 3137
Edice Škola mladých matematiků,
svazek 29
Vytiskl Mír, n. p., závod 6
Praha 2, Legerova 22
6,34 AA, 6,55 VA. Náklad 5000 výtisků
První vydání. 148 stran. Praha 1972
508/21/8.5 03/2
23-020-72 Cena brožovaného výtisku 11,– Kčs


23-020-72
03/2
Cena brož.
Kčs 11.—