O aplikáciach matematiky

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

O APLIKÁCIACH MATEMATIKY

36

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JÁN ČERNÝ

O aplikáciach matematiky

PRAHA 1976
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

*Recenzovali doc. RNDr. Štefan Znám, CSc.
a RNDr. Josef Kubát*

1. kapitola

ÚVOD

1.1. Čo je aplikovaná matematika?

Takáto otázka je na prvý pohľad prirodzená, patrí sa najprv vymedziť matematickú disciplínu, o ktorej bude reč. Lenže pozor! Aplikovanú matematiku nemožno pokladať za matematickú disciplínu s podobným postavením, ako je algebra, teória čísel, alebo matematická štatistika. Nemožno ju vymedziť ani vymenovaním matematických objektov (štruktúr), ktoré skúma, ani popisom metód, ktoré pri svojej práci používa. Hoci sa teda na niektorých univerzitách stretávame s katedrou aplikovanej matematiky vedľa katedry algebry, geometrie, štatistiky apod., predmet, ktorý táto katedra študuje a vyučuje je podstatne odlišný. Na niektorých zahraničných univerzitách dali preto prednosť tomu, že majú len dva ústavy — ústav matematiky „čistej" (v angličtine „pure") a aplikovanej (applied). Prvý z nich sa potom prípadne delí na katedry jednotlivých matematických disciplín tak, ako ich poznáme.

Ak nemožno aplikovanú matematiku charakterizovať ani štruktúrami, ani metódami, ako ju teda možno odlíšiť od matematiky čistej?

Spôsob odlíšenia je podobný, ako pri množine V bodov (x, y, z) trojrozmerného priestoru, pre ktoré platí nerovnosť $a \leqq z \leqq b$ („vrstva"). Body ktoré do V padnú možno od tých druhých odlíšiť len podmienkou pre tretiu súradnicu, prvé dve nám tu nepomôžu. Podobne si môžeme predstaviť, že každá matematická činnosť je charakterizovaná viacerými „súradnicami“, napríklad štruktúrou, s ktorou pracuje, metódou, ktorú používa, spôsobom využitia výsledku, ktorý chce dosiahnúť apod. Pritom činnosti „aplikované“ a „čisté“ nemožno rozlíšiť prvými dvoma súradnicami, ale treťou! Možno preto povedať, že

aplikovaná matematika, na rozdiel od matematiky čistej, sa snaží štúdiom matematických štruktúr a použitím matematických metód dosiahnúť výsledky, ktoré sa budú využívať mimo matematiky.

Vedných odborov, v ktorých sa matematika aplikuje, je veľmi veľa; iste oveľa viac, ako tých, v ktorých sa nevyužíva. Ku dávno známym aplikáciam matematiky vo fyzike pribudla chémia, biológia, medicína, strojníctvo, stavebníctvo, ekonómia, doprava a mnohé iné.

Aplikovaná matematika sa vďaka tejto skutočnosti môže rozdeľovať z dvoch hľadísk: podľa matematickej disciplíny, z ktorej berie štruktúry a metódy, alebo podľa odboru, v ktorom sa jej výsledky uplatňujú. My sa v ďalšom texte budeme pridržiavať prvého hľadiska.

1.2. Aplikovaná matematika ako povolanie

V niekoľkých posledných desaťročiach sa prudko mení spektrum pracovísk, na ktorých matematici môžu nájsť uplatnenie. Do konca II. svetovej vojny temer všetci pracovali ako stredoškolskí učitelia (s výnimkou malého počtu na vysokých školách, prípadne v bankách, poisťovniach apod.). V prvom desaťročí po vojne sa búrlivo rozvíjajú vysoké školy, pričom najmä na ich technickom smere bolo treba veľa prednášateľov a asistentov matematiky.

Mimo školstva však nepracoval skoro žiaden matematik.

Koncom päťdesiatych rokov sa situácia mení, rozvíja sa vedecko-výskumná základňa nášho štátu a v nej matematici nachádzajú stále širšie možnosti uplatnenia. Je to po prvý raz v nie zanedbateľnej miere i v odbore aplikovanej matematiky. Pre zaujímavosť možno uviesť, že roku 1958 prijali na SAV prvého matematika na iný ústav ako matematický (bolo to na Laboratórium teoretickej a aplikovanej mechaniky, terajší Ústav technickej kybernetiky SAV) a o niekoľko rokov ich na mimomatematických pracoviskách SAV pracovalo už niekoľko desiatok.

Napokon, v šesťdesiatych rokoch sa objaví ďalšia, búrlivo rastúca sféra uplatnenia aplikovaných matematikov — výpočtové strediská. Ich kádrové potreby sú také veľké, že doterajší „producenti" matematikov — prírodovedecké, resp. matematicko-fyzikálne fakulty — ich nestačia uspokojiť a tak sa výchovou odborníkov, ktorých možno považovať viac-menej za aplikovaných matematikov, zaoberajú i ďalšie vysoké školy (Vysoká škola ekonomická a Vysoká škola technická v Bratislave, Vysoká škola dopravná v Žiline a iné.)

Pretože, ako uvidíme neskôr, je práca aplikovaných matematikov odlišná od práce „čistých" matematikov, je aj ich študijný program iný. V zásade možno povedať, že aplikovaný matematik by mal mať znalosti širšie, i keď menej hlboké; tak aby vedel formulovať úlohy vo všetkých významnejších matematických disciplínach.

1.3. Ako pracujú aplikovaní matematici

Ako sme už spomínali, poslaním aplikovanej matematiky je riešiť problémy, ktoré sú inšpirované mimo matematiky a tam sa aj uplatní výsledok ich riešenia.

Uvedieme si jednoduchý príklad takejto úlohy.

Na aplikovaného matematika sa obrátil ekonóm s prosbou, aby mu pomohol pri riešení úlohy, ktorej cieľom je stanoviť najvýhodnejšiu výrobnú kapacitu pekární a tehelní. Jde o továrne, ktoré vyrábajú jeden druh výrobku, alebo niekoľko príbuzných druhov. Potreba týchto výrobkov je približne rovnomerná po celom obývanom území nášho štátu, pretože všade sa stavia a všade sa je chlieb.

Problém je v tom, že malá výrobňa vyrába pomerne draho, ale pretože zásobuje len najbližšie okolie, dopravné náklady sú malé. Naopak, veľká výrobňa vyrába lacno, ale zásobuje väčšie územie a tým rastú dopravné náklady. Treba určiť, kedy je súčet výrobných a dopravných nákladov na jednu tonu minimálny.

Matematik porozumel, o čo v úlohe ide, ale aby ju mohol presne formulovať, požiadal ekonóma, aby mu presne opísal

1. ako závisia výrobné náklady jednej tony od toho, koľko výrobkov denne továreň vyrába,

2. ako závisia dopravné náklady od prepravovaného množstva a od vzdialenosti,

3. koľko ton výrobkov sa v priemere spotrebuje denne na 1000 obyvateľov.

Ekonóm odpovedal, že

1. Ak vyrába závod x ton výrobkov denne, výrobné náklady (celkové) možno približne vyjadriť lineárnou funkciou $ax + b$, teda na jednu tonu $a + b/x$ Kčs.

2. Preprava x ton na vzdialenosť d km stojí približne cxd Kčs.

3. Na 1000 obyvateľov sa spotrebuje denne v priemere s ton výrobkov, teda pri priemernej hustote h obyvateľov na 1 km^2 môžeme rátať s priemernou spotrebou $sh/1000$ ton výrobkov denne na 1 km^2.

Matematik uvážil, že sotva bude môcť brať do úvahy tvar územia, ktoré továreň zásobuje, pretože toto možno sotva vopred určiť. Rozhodol sa preto pre jednoduchosť predpokladať, že toto územie je kruh a že továreň je v jeho strede. Priemerná vzdialenosť bodu kruhu od stredu je $2r/3$, kde r je polomer kruhu. Priemerná cena dopravy jednej tony je potom $2cr/3$.

Ak má továreň dennú výrobu x ton výrobkov, pokryje nimi 1000 x/sh km², teda kruh o polomere r, pre ktorý

$$\pi r^2 = \frac{1000x}{sh}$$

čiže

$$r = \sqrt{\frac{1000x}{\pi sh}}$$

a priemerné dopravné náklady na 1 tonu budú

$$\frac{2c}{3}\sqrt{\frac{1000x}{\pi sh}} = \frac{2c\sqrt{1000}}{3\sqrt{\pi sh}}\sqrt{x}$$

čo môžeme skrátene označiť $g\sqrt{x}$.

Výrobné náklady na jednu tonu budú v tomto prípade $a + b/x$ a celkové náklady spolu $y = a + b/x + g\sqrt{x}$.

Matematická formulácia úlohy je teda nasledovná: nájsť minimum funkcie

$$y = a + \frac{b}{x} + g\sqrt{x}$$

na množine kladných čísel (kladných preto, že vyrábať treba).

Matematik ju riešil bežným postupom: Derivoval y podľa x a našiel také x, pre ktoré $y' = 0$:

$$y' = \frac{-b}{x^2} + \frac{g}{2\sqrt{x}} = 0$$

z čoho

$$x^{\frac{3}{2}} = \frac{2b}{g}$$

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{2b}{g}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9\pi b^2 sh}{1000c^2}}$$

Potom pomocou druhej derivácie zistil, že táto sa pre toto x rovná $3g^2/8b$, čo je kladné číslo, teda y má v bode x lokálne minimum. Keďže x bolo jediné také, kde $y' = 0$, je x hľadaná denná výroba v tonách.

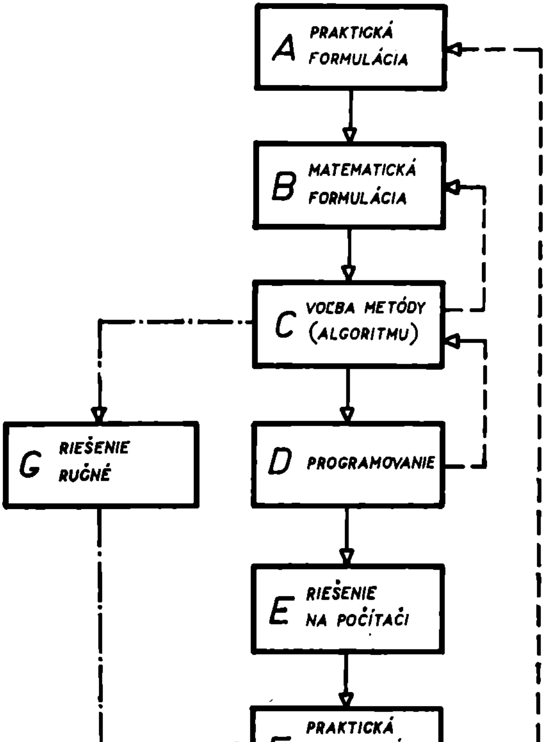
Riešenie väčšiny takýchto úloh možno rozdeliť na niekoľko štandardných fáz, ktoré vidíme na obrázku 1. Plná čiara tu značí obvyklý postup, bodkočiarkovaná postup bez využitia počítača a čiarkovaná spätné väzby, ktoré znamenajú, že niekedy treba opraviť výsledok predchádzajúcej fázy na základe nasledujúcej (napr. vo fáze D zistíme, že navrhnutou metódou by počítač úlohu riešil tri bilióny rokov, tak musíme zmeniť metódu prípadne až formuláciu úlohy a pod.).

Aplikovaní matematici (teoreticky) by mali vykonávať činnosti B a C, ale prax ukazuje, že ich spolupráca je nutná aj pri A, D, F, G a istý dohľad aj pri E. Sledujú teda úlohu od jej vzniku až do úplného vyriešenia i s využitím výsledkov. Fáza A, ktorú by (teoreticky) mali vykonávať tí, ktorí na problém vo svojej práci narazili, spočíva zväčša v dvoch krokoch:

1.3.1. Definícia množiny prípustných riešení.

1.3.2. Stanovenie kritéria kvality a optimality, ktoré umožní vybrať spomedzi prípustných riešení najlepšie.

Krok 1.3.1 spočíva vlastne v tom, že sa stanoví základný priestor, ktorého časťou je množina riešení a ohraničenia, ktoré jej prvky musia spĺňať. Tento krok zvyčajne nerobí ťažkosti pracovníkom iných odborov a len niekedy vyžaduje spoluprácu matematika.



Obr. 1

Krok 1.3.2 však býva prekvapujúco kameňom úrazu. Ak totiž chceme, aby existovalo optimálne riešenie, musíme mať na množine riešení dané usporiadanie podľa kvality a to buď lineárne, alebo čiastočné; v každom prípade však také, aby v množine existoval maximálny (minimálny) prvok. Toto usporiadanie by malo byť určené práve pomocou kritéria kvality a optimality. Nematematici však formulujú toto kritérium nevhodne, tak, že množinu riešení nemožno pomocou neho usporiadať žiadúcim spôsobom.

Najčastejšia chyba, ktorej sa „praktici" dopúšťajú, je, že nezadávajú jedno ale viac kritérií, a to často protichodných. Napríklad žiadajú, aby navrhovaný výrobok bol čo najľahší, najpevnejší a najlacnejší — hoci je zrejmé, že čím je výrobok ľahší a pevnejší, tým je drahší (musíme použiť drahé suroviny), čím je lacnejší a pevnejší, tým je i ťažší atď. Matematik potom musí praktika namáhavo presvedčovať, že je treba určiť jediné komplexné kritérium $k = k\,(v, p, c)$, kde k by bolo funkciou váhy v, pevnosti p a ceny c, pričom (napríklad) čím väčšie by bolo k, tým lepšie by bolo riešenie. Z niektorými príkladmi tohto druhu sa stretneme aj v ďalšej časti knižky a všetky podporia názor, že prítomnosť matematika už vo fáze A je veľmi potrebná.

Fáza B — matematická formulácia úlohy — je práve kľúčovým miestom, na ktorom sa nejviac rozhoduje o úspechu alebo o neúspechu celého riešenia. Musí ju zvyčajne vykonávať jeden človek (mal by to byť práve aplikovaný matematik), ktorý musí mať dostatočný prehľad o všetkých podstatných matematických disciplínach, tak, aby vedel do ktorej z nich úloha patrí, ktorej reč má použiť.

V minulosti sme boli svedkami dvoch prudkých obratov v hodnotení významu matematiky, ako pomocníka pri riešení praktických úloh. Najprv sa matematika využívala len nepatrne a úlohy sa riešili na základe predchádzajúcich skúseností, bez výpočtov. Potom prišla éra rapídneho rastu záujmu o matematiku, jej využívanie sa stalo módnym a malo temer kampaňový charakter. Po čase však, na základe nie najlepších skúseností, mnoho praktikov prešlo na skeptické stanovisko pri posudzovaní možností matematiky pomôcť v ich práci.

Druhý zo spomínaných obratov je pre matematikov nepríjemný, hoci zaň do značnej miery nemôžu. Jednou z hlavných príčin je totiž to, že fázu *B* — matematickú formuláciu úloh — vykonávali často ľudia nedostatočne pripravení, mnoho ráz ani nie matematici. Chybné matematické vyjadrenie — matematický model — ktoré nevystihovalo podstatu praktickej úlohy, potom spôsobilo, že výsledky riešenia nebolo možné v praxi využiť.

Najčastejšie závažné chyby vo fáze *B* bývajú tieto:

1.3.3. Chybná voľba matematickej disciplíny, ktorej reč sa použije, prípadne „navliekanie“ pratickej úlohy na už známy typový problém, pričom sa však porušia ohraničenia, alebo kritérium. Práve preto, aby sa aplikovaný matematik vyhnul týmto úskaliam, musí mať dostatočne široký rozhľad.

K takýmto chybám sa často dospelo zásadne nesprávnym prostupom, pri ktorom sa niektorý pracovník zoznámil s niektorou výhodne aplikovateľnou matematickou metódou (napríklad s niektorou metódou na riešenie dopravného problému) a začal okolo seba hľadať jej uplatnenie za každú cenu, aj na nevhodné úlohy. Proste, nemá sa k matematickému modelu hľadať praktický problém, ale k problému model.

1.3.4. Neprípustné zjednodušenie úlohy, pri ktorom sa vynechajú podstatné ohraničenia, alebo sa zmení ich tvar (napríklad linearizáciou).

1.3.5. Chybné stanovenie kritéria, ku ktorému môže tiež napríklad dôjsť linearizáciou niektorej funkcie, ktorej nelineárnosť je podstatná.

Vyvarovaním sa týchto chýb možno dosiahnúť situáciu, že praktici nebudú ani fetišistami, ktorí by verili vo všemohúcnosť matematiky, ani nihilistami, ktorí by sa od nej celkom odvracali; že dajú aplikáciam matematiky to dôstojné miesto, ktoré jej patrí.

V posledných rokoch možno konštatovať, že podnikov a ústavov, kde tomu tak je, neustále pribúda a treba dúfať, že časom budú také všetky. Na to však bude treba pripraviť erudovaných aplikovaných matematikov, ktorých najväčší nedostatok pociťuje u nás práve fáza *B*.

Fazu *C* — výber vhodnej metódy (algoritmu) na riešenie sformulovaného problému — sme označili za jednu z ťažiskových úloh aplikovaných matematikov. Nemyslíme tým však, že by matematik, ktorý úlohu sformuloval, musel ihneď stanoviť aj metódu. Takého odborníka, ktorý by ovládal všetky metódy zo všetkých matematických disciplín, by sme sotva našli. Dobrý aplikovaný matematik iste pozná mnoho metód, najmä z tých, ktoré sú v jeho práci najúžitočnejšie, ale namôže ich vedieť ani zďaleka všetky. Stačí ak vie, v ktorej knihe ju má hľadať, alebo na ktorého odborníka (i spomedzi „čistých matematikov") sa má obrátiť.

Záverečným momentom fázy *C* je rozhodnutie, či sa úloha bude riešiť na počítači (a ak áno, tak na akom), alebo „ručne". Pritom pod ručným výpočtom rozumieme i výpočet s pomocou kalkulačky alebo logaritmického pravítka. Pod počítačom rozumieme buď samočinný počítač analogový, alebo číslicový.

Nie je cieľom tejto knižky, popisovať jednotlivé typy počítačov, tejto téme sa napokon venuje dostatok inej literatúry. Poznamenávame len, že počítače nie sú vhodné na všetko a je mnoho úloh, ktoré je lepšie riešiť ručne, či už z dôvodov časových, alebo finančných. Časové dôvody sa uplatňujú najmä vtedy, keď ide o úlohu jednorázovú, neštandartnú, na ktorú treba vypracovať nový program, čo spolu s čakaním na pridelenie strojového času a s časom, potrebným na odladenie programu trvá dlhšie, než ručný výpočet. Niekedy zas sa môže stať, že použitie počítača by bolo síce z časového hľadiska výhodnejšie, ale úloha nie je taká urgentná a pri pomerne veľkej cene strojového času (až niekoľko tisíc Kčs za hodinu) je lacnejšie, aby ju niektorý (zvyčajne stredoškolsky vzdelaný) pracovník vypočítal ručne.

Pri úvahách o fázach *D*, *E* resp. *G*, si treba uvedomiť, že aplikovaní matematici sú vysoko kvalifikovaní odborníci, ktorých je a dlho bude veľký nedostatok. Bolo by preto nerozumné plýtvať ich časom a nechať ich tieto fázy vykonávať, na to sú „nižšie" kádre. Na druhej strane je však potrebné, aby týmto prácam rozumeli, vedeli na ne dohliadnúť a najmä poradiť, ak sa vyskytnú problémy.

Záverečná fáza *F* — interpretácie výsledkov — má síce podobné postavenie, ako bodka vo vete, ale treba, aby ju aplikovaní matematici dobre strážili a radšej nepúšťali z rúk, pretože inak by mohla celá ich predchádzajúca práca vyjst navnivoč chybnou interpretáciou, alebo nesprávnym použitím výsledkov. Pritom aj praktici majú radšej, keď im matematik vypracuje hotové uzávery, alebo pokyny, než aby ich zo „surových" výsledkov museli pracne dedukovať.

1.4. Kde sa najviac uplatňujú aplikovaní matematici a akú majú perspektívu

Najširšie uplatnenie aplikovaných matematikov v súčasnosti je a v budúcnosti pravdepodobne bude v súčinnosti s výpočtovými strediskami, v príprave úloh pre riešenie na počítačoch. U nich sa okrem spomínaného dobrého prehľadu o matematike vyžadujú dobré znalosti o počítačoch, ich stavbe, operačných systémoch a programovacích jazykoch.

Ďalšie široké uplatnenie nachádzajú a budú nachádzať títo odborníci vo výrobných podnikoch a výskumných ústavoch ako členovia tímov (skupín) odborníkov rôzneho zamerania. Tieto tímy sa zostavujú na riešenie takých úloh, na aké nestačí jeden odborník sám. Prítomnosť matematika vo väčšine takýchto tímov zvýrazňuje snahu postaviť riešenie väčšiny technických i ekonomicko-organizačných úloh na exaktný základ.

V menšej, ale nie celkom zanedbatelnej miere aplikovaní matematici pracujú a budú pracovať vo výskumnej a pedagogickej práci na vysokých školách technického a ekonomického zamerania.

Okrem doteraz spomínaných možností sa nájdu ešte ďalšie ustanovizne, ktoré tiež matematikov potrebujú, ako napríklad peňažné a geodetické ústavy, ministerstvá apod. Rozhodne možno povedať, že aplikovaní matematici majú v súčasnosti (r. 1974) širšie možnosti uplatnenia, ako matematici „čistí" (ak medzi čistých nerátame stredoškolských profesorov a učiteľov matematiky), ktorí zväčša pôsobia len v sídlach vysokých škôl. Majú dobré platové i (zväčša) bytové podmienky a jediné, čo zatiaľ majú ťažšie, ako „čistí" matematici, je možnosť získať vedecké hodnosti. Ale i v tomto sa ľady pohli a než dnešní adepti aplikovanej matematiky doštudujú, bude asi aj tento problém vyriešený.

1.5. Kto sa hodí na aplikovanú matematiku?

Mnohých gymnazistov matematika zaujíma, radi by si ju zvolili za svoje životné povolanie a radi by sa už teraz rozhodli, na ktorú z troch možností (učiteľský smer, čistá matematika, aplikovaná matematika) sa budú orientovať. Nie je to otázka ľahká, veľa pri nej záleží na záľubách a vnútornom sebahodnotení každého študenta. Zväčša je tiež možné, najmä počas prvých ročníkov vysokoškolského štúdia, zmeniť svoju orientáciu.

Zásadne možno povedať, že na štúdium aplikovanej matematiky sa hodia najmä študenti, ktorí dobre riešia slovné úlohy a najmä úlohy Matematickej olympiády a úlohy netypické, ktorí celkom radi odvodzovali fyzikálne a chemické vzorce, dobre sa citia v kolektíve a ľahko sa prispôsobujú novým podmienkam.

Nakoniec pre tých, čo sa chcú trochu pobaviť, pridávame malý test (veď móda testov svetom vládne), na pomoc pri rozhodovaní. Netreba ho brať celkom vážne, skôr ako hru, ale samozrejme nie je zakázané viac sa zamyslieť ako nad zmyslom jednotlivých otázok, tak aj nad celkovým výsledkom.

Kto z čitateľov sa chce pohrať, nech si po každéj kladnej odpovedi zapíše písmeno, uvedené za otázkou (po odpovedi „nie“ netreba písať nič).

1. Máte radšej algebru, ako geometriu? . . . . . . b
2. Zo školských predmetov vás zaujíma temer výhradne len matematika? . . . . b
3. Ide vám ťažko štúdium cudzích rečí? . . . . . . a

4. Je pravda, že ste zatiaľ neprečítali do konca žiadnu matematickú knihu (okrem učebnice)? c
5. Články v „Matematických rozhľadoch“ vás zaujímajú menej, ako príklady v nich? c
6. Mali ste v škole radi tzv. „slovné“ úlohy? . . . c
7. Je pravda, že ste v Matematickej olympiáde neboli ani raz v II. kole úspešným riešiteľom? . . . . a
8. Ak ste dosiahli úspech v MO, bolo to viac vďaka vášmu dôvtipu ako vedomostiam? c
9. Domnievate sa, že metodická príprava učiteľa matematiky je aspoň tak dôležitá, ako jeho vedomosti? . . . . a
10. Študujete najradšej večer? . . . . b
11. Hráte sa ešte teraz radi s detskými vláčikmi, alebo konštrukčnými stavebnicami? c
12. Pestujete vášnivo turistiku? . . . . a
13. Máte radi samotu? . . . . b
14. Ťažko sa prispôsobujete novým podmienkam? . . b
15. Radšej by ste pretekali v behu na 1000 m ako na 60 m? . . . . b
16. Považujete dva mesiace učiteľských prázdnin za ťažko nahraditeľnú výhodu oproti iným povolaniam? . . . . a
17. Hľadáte dobre v cestovnom poriadku? c
18. Ste dievča? . . . . a

Tak, a teraz si sčítajte počty písmen, ktoré ste si zapísali za kladné odpovede. Väčšina písmen „a“ znamená, že by ste mohli uvažovať najmä o učiteľskom povolaní, „b“ o vedeckej práci v čistej matematike a „c“ o aplikovane-matematickej životnej dráhe. Ale, ako sme už povedali, celkom vážne to neberte!

2. kapitola

APLIKÁCIE STREDOŠKOLSKEJ MATEMATIKY

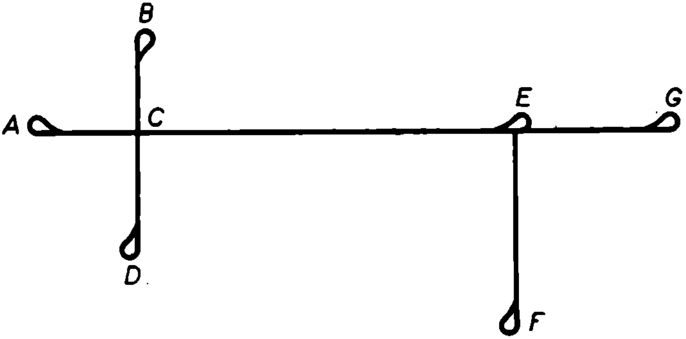
Po prečítaní tohto nadpisu si jedni čitatelia povedia, že takých aplikácií poznajú plno, stačí si vziať ktorúkoľvek slovnú úlohu zo stredoškolskej učebnice; druhí zas budú stredoškolskú matematiku považovať za príliš slabú na zdolanie problémov, s ktorými sa stretajú aplikovaní matematici.

S prvou námietkou nemožno súhlasiť, pretože slovné úlohy v stredoškolských učebniciach nesú na sebe príliš jasné znaky toho, ako vznikli. Sotva by sa našla medzi nimi taká, ktorá má pôvod v aplikovane-matematickej praxi. Naopak, tieto príklady si vytvorili autori učebníc na ilustráciu preberanej látky (je to opäť prístup od metódy k problému a nie naopak!)

Druhá námietka je vážnejšia, skutočne málo kedy sa možno stretnúť s praktickou úlohou, pri ktorej riešení by sa vystačilo len so stredoškolskou matematikou. Nie je to však vylúčené, ako ukazuje nasledujúci príklad. Je dosť zložitý a preto menej skúseným čitateľom doporučujeme ho vynechať, prejsť k III. kapitole a vrátiť sa sem až po prečítaní ostatných kapitol.

2.1. Úloha o sústave pravidelných mnohouholníkov na kružnici a jej aplikácia v doprave

2.1.1. Úvod. Na obr. 2 máme znázornenú sieť troch liniek mestskej dopravy: číslo 1 z A cez C a E do G, číslo 2 z B cez C a E do F a číslo 3 z D cez C do E. Vozy linky 1 premávajú v pravidelných 12-minútových intervaloch. Linky 2 v 8-minútových a linky 3 v 6-minútových intervaloch. Doprava na úsekoch AC, BC, CD,



Obr. 2

EF a EG je potom celkom pravidelná, kým na úseku CE nie. Cestujúci, ktorí cestujú len na tomto úseku, a teda môžu použiť voz ktorejkoľvek linky, musia raz čakať viac, inokedy menej.

Nech by odchody zo stanice C smerom na E boli takéto:

Linka 1: 6.00, 6.12, 6.24, 6.36, ...
Linka 2: 6.00, 6.08, 6.16, 6.24, 6.32, 6.40, ...
Linka 3: 6.02, 6.08, 6.14, 6.20, 6.26, 6.32, 6.38, ...

Intervaly medzi vozmi na tomto úseku by potom boli v minútach 0, 2, 6, 0, 4, 2, 2, 4, 4, 0, 2, 6, 0, 4, 2, 2, 4, 4, ... Vidíme, že skupina 0, 2, 6, 0, 4, 2, 2, 4, 4, ktorá dáva v súčte 24 = [6, 8, 12] sa tu opakuje a svedčí o veľkej nerovnomernosti v odvoze cestujúcich na úseku

CE, a tým aj nerovnomernosti vyťaženia jednotlivých vozov (symbolom $[a_1, a_2, \ldots, a_r]$ označujeme najmenší spoločný násobok čísel $a_1, a_2, \ldots, a_r$).

Iné možné riešenie cestovných poriadkov je takéto:

Linka 1: 6.03, 6.15, 6.27, 6.39, ...
Linka 2: 6.01, 6.09, 6.17, 6.25, 6.33, 6.41, ...
Linka 3: 6.00, 6.06, 6.12, 6.18, 6.24, 6.30, 6.36, 6.42, ...

s opakujúcimi sa intervalmi medzi vozmi na úseku CE 1, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 6. Toto riešenie sa zdá byť lepšie, a to napríklad preto, že interval medzi najbližšími po sebe idúcimi vozmi je tu najmenej 1 minúta a nie 0, ako v predošlom prípade (nulový interval medzi vozmi je skutočne nevýhodný, vozy sa nevojdú na zastávku a zadný ide prázdny). Ak však chceme odpovedať na otázku, ktoré riešenie je najlepšie, musíme si presne stanoviť

1. aké cestovné poriadky možno uvažovať, tj. aká je množina prípustných riešení;

2. čo je kritériom kvality riešenia, tj. ako poznáme, že riešenie je najlepšie.

1. Za prípustný cestovný poriadok budeme považovať tri aritmetické postupnosti časových údajov v hodinách a minútach, pričom diferencie sú: pri prvej $d_1 = 12$, pri druhej $d_2 = 8$, pri tretej $d_3 = 6$ minút a prvý člen i-tej postupnosti je ($i = 1, 2, 3$) je medzi 6.00 a 6.00 + d_i.

2. Ak potom z týchto postupností vytvoríme jednu, usporiadanú podľa veľkosti, za kritérium kvality riešenia budeme považovať minimum z rozdielov po sebe nasledujúcich členov tejto postupnosti, tj. minimálny interval medzi vozmi na úseku CE. Cestovný poriadok bude tým lepší, čím je toto číslo väčšie.

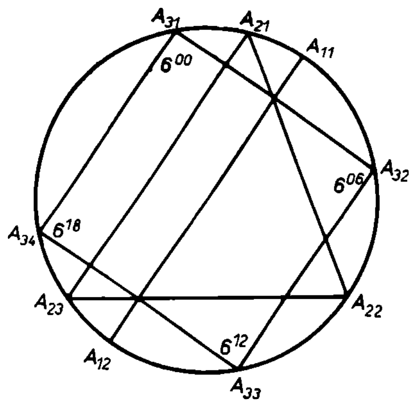
I keď úlohu už máme vlastne matematicky formulovanú, prevedieme si ju na formu, prístupnejšiu skúmaniu. Uvážme kružnicu dĺžky $24 = [6, 8, 12]$. Zvoľme na nej bod, ktorému priradíme čas 6.00 hodín, počínajúc týmto bodom si rozdeľme kružnicu na 24 rovnakých dielikov dĺžky 1 a v smere hodinových ručičiek priraďme deliacim bodom časy 6.01, 6.02, ... Keby sme takto pokračovali ďalej, je zrejmé, že časom, líšiacim sa o 24 minút by zodpovedali rovnaké body.

Zvoľme si z deliacich bodov tejto kružnice

1. dva body $A_{1.1}$ a $A_{1.2}$ tak, aby $\widehat{A_{1.1}A_{1.2}} = 12$ (tj. aby tvorili „pravidelný 2-uholník“);

2. tri body $A_{2.1}$, $A_{2.2}$, $A_{2.3}$ tak, aby $\widehat{A_{2.1}A_{2.2}} = \widehat{A_{2.2}A_{2.3}} = 8$ (pravidelný trojuholník);

3. štyri body $A_{3.1}, \ldots, A_{3.4}$ tak, aby tvorili pravidelný štvoruholník, štvorec.



Obr. 3

Na obr. 3 vidíme výsledok takého rozmiestnenia (optimálny). Body $A_{i,j}$ plne určujú odchody i-tej linky a naopak. Podobne aj minimálna vzdialenosť dvoch bodov sa rovná minimálnemu časovému rozdielu v spoločnej postupnosti odchodov. Vyriešiť našu úlohu znamená teda vpísať do celočíselných bodov kružnice dĺžky 24 pravidelný 2-uholník, 3-uholník a 4-uholník tak, aby minimálna vzdialenosť dvoch susedných bodov bola maximálna. Úlohu môžeme formulovať aj všeobecne, pričom vynecháme nie príliš podstatnú požiadavku celočíselnosti:

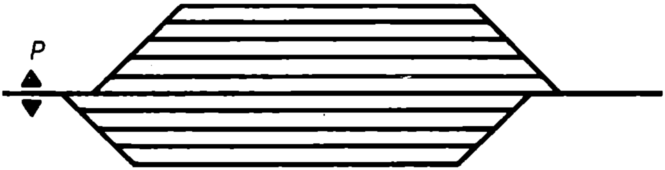
2.1.2. Základná úloha. Daná je kružnica $k = (S; r)$ a prirodzené čísla $m_1, \ldots, m_s$, $s > 1$. Vpísať do k pravidelný m_1-uholník $\mathscr{A}_1 = \{A_{1,1}, \ldots, A_{1,m_1}\}, \ldots,$ pravidelný m_s-uholník $\mathscr{A}_s = \{\mathscr{A}_{s,1}, \ldots, A_{s,m_s}\}$ tak, aby číslo $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) = d = \min \widehat{A_{i,j}A_{\bar{i},\bar{j}}}$ bolo maximálne, pričom $i, \bar{i} = 1, \ldots, s$; $j = 1, \ldots, m_i$; $\bar{j} = 1, \ldots, m_{\bar{i}}$, $\bar{i} \neq i$.

Poznamenávame, že požiadavka $\bar{i} \neq i$ je v poriadku, pretože minimálna vzdialenosť d sa nadobúda skutočne vždy medzi bodmi dvoch rôznych mnohouholníkov a nie medzi dvoma bodmi toho istého mnohouholníka.

Každú sústavu $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s$ vpísanú do k (pričom pre všetky i je $\mathscr{A}_i$ pravidelný m_i-uholník) nazveme riešením. Ak naviac maximalizuje $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s)$, nazveme ju optimálnym riešením.

K aplikácii základnej úlohy prichádzame zväčša v tých praktických situáciách, keď viaceré deje prebiehajú v pravidelných rytmoch, ale s rôznou frekvenciou a časť svojho vplyvu sústreďujú na jedno miesto, alebo na jedno miesto kladú požiadavky.

2.1.3. Príklad. Uvažujme smerové koľajisko zriaďovacej stanice z obr. 4. Zo zvážneho pahrbku sa tu spúšťajú vozne na jednotlivé koľaje podľa nasledujúceho určenia.

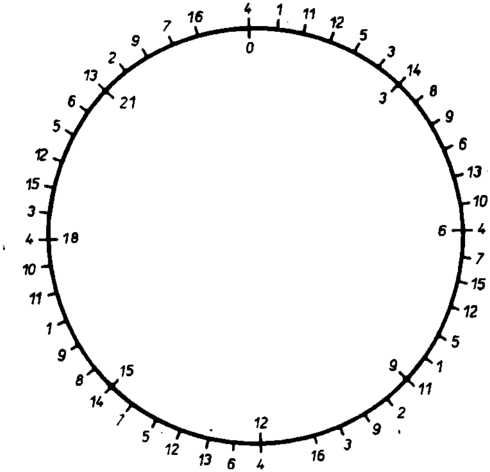


Obr. 4

Číslo koľaje	Počet vlakov denne	Odporúčaný čas ukončenia zhromažďovania			
1	3	0^{30}	8^{30}	16^{30}	
2	2	9^{30}	21^{30}		
3	3	2^{30}	10^{30}	18^{30}	
4	4	0^{00}	6^{00}	12^{00}	18^{00}
5	4	2^{00}	8^{00}	14^{00}	20^{00}
6	3	4^{30}	12^{30}	20^{30}	
7	3	6^{30}	14^{30}	22^{30}	
8	2	3^{30}	15^{30}		
9	4	4^{00}	10^{00}	16^{00}	22^{00}
10	2	5^{30}	17^{30}		
11	3	1^{00}	9^{00}	17^{00}	
12	4	1^{30}	7^{30}	13^{30}	19^{30}
13	3	5^{00}	13^{00}	21^{00}	
14	2	3^{00}	15^{00}		
15	2	7^{00}	19^{00}		
16	2	11^{00}	23^{00}		

Tab. 1

Časť z nich zostáva v stanici (vozne do depa, na vlečky apod.) a časť, zhromažďovaná na tzv. smerových koľajách, odchádza do iných staníc. Na to, aby sa z vozňov na smerovej koľaji utvoril vlak, treba vykonať nie



Obr. 5

koľko úkonov, pospájať, skontrolovať brzdu, spísať vozne atď. Tieto úkony vyžadujú istý čas a nie je vhodné, aby ich bolo treba robiť s viacerými vlakmi naraz, pretože by vyžadovali viac pracovníkov, alebo by niektoré vlaky museli čakať. Okamihy ukončenia zhromažďovania vozňov na smerových koľajách treba preto rozvrhnúť čo najrovnomernejšie, aby medzi najbližšími dvoma po sebe nasledujúcimi bol čo najväčší odstup.

Ak máme s takých koľají, pričom z i-tej koľaje odchádza za 24 hodín m_i vlakov a na každej koľaji sa žiada pravidelný rytmus, prichádzame opäť k našej základnej úlohe. Tu býva vhodné voliť k s obvodom 24.

Napríklad v zriaďovacej stanici Přerov-pravé máme situáciu opísanú v tab. 1, pričom v treťom stĺpci už máme riešenie úlohy, kde d = 30minút. Na obr. 5 vidíme toto riešenie na kružnici k. Zvonku sú čísla koľají, zvnútra čas.

2.1.4. Niektoré vlastnosti sústavy pravidelných mnohouholníkov vpísaných do kružnice. Poznamenávame, že pravidelným 1-uholníkom budeme nazývať ľubovoľný bod kružnice, 2-uholníkom jej ľubovolný priemer.

Lema 1. Nech m_1 a m_2 sú prirodzené čísla, nech $[m_1, m_2]$ je ich najmenší spoločný násobok. Nech $k = (S; o/2\pi)$ je kružnica a nech $A_{1,1}, \ldots, A_{1,m_1}$ a $A_{2,1}, \ldots, A_{2,m_2}$ sú vrcholy pravidelného m_1-uholníka $\mathscr{A}_1$ a m_2-uholníka $\mathscr{A}_2$ vpísaných do k. Potom

$$\text{(D)} \qquad d(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2) = \min_{\substack{i=1,\ldots,m_1 \\ j=1,\ldots,m_2}} \widehat{A_{1,i}A_{2,j}} \leqq \frac{o}{2[m_1, m_2]}$$

pričom existujú $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ také, že vo vzťahu (D) platí rovnosť.

Dôkaz, tejto lemy je trochu zdĺhavý, preto ho neuvádzame.

Lema 1 nám priamo opisuje postup, ktorým môžeme získať optimálne riešenie našej základnej úlohy, ak $s = 2$:

Najprv stotožníme niektorý vrchol m_1-uholníka s niektorým vrcholom m_2-uholníka, a potom m_2-uholník otočíme okolo stredu ktorýmkoľvek smerom o uhol

$\pi/[m_1, m]_2$. Žiaľ, tento postup sa pre $s > 2$ nedá zovšeobecniť. Následujúca lema nám dá aspoň hrubý odhad pre $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s)$.

Lema 2. Nech $k = (S; o/2\pi)$ je daná kružnica a $m_1 \geq \geq m_2 \ldots \geq m_s$ sú prirodzené čísla. Nech $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s$ je optimálne riešenie základnej úlohy. Potom, ak označíme $m = m_1 + \ldots + m_s$, platí

$$\frac{o}{s.[m_1, \ldots, m_s]} \leq d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) \leq \min\left(\frac{o}{2[m_1, m_2]}; \frac{o}{m}\right)$$

Dôkaz. Označme $n = [m_1, \ldots, m_s]$. Pre $\bar{m}_1 = \ldots = \bar{m}_s = n$ dostaneme optimálne riešenie našej úlohy zrejme takto: n-uholník $\mathscr{B}_1$ umiestnime na kružnicu ľubovolne a $\mathscr{B}_{i+1}$ získame otočením $\mathscr{B}_1$ v smere hodinových ručičiek o uhol $i.o/s.n$. Vtedy zrejme $d(\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_s) = o/s.n$. Keďže $\mathscr{A}_i$ vznikne z $\mathscr{B}_i$ vynechánim $n - m_i$ vrcholov, nutne $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) \geq o/s.n$. Ľavá nerovnosť je dokázaná.

Zrejme $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) \leq d(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ kde $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ je optimálne riešenie základnej úlohy pre m_1 a m_2. Podľa lemy 1 je potom $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) \leq o/2[m_1, m_2]$. Zostáva nám teda už len dokázať, že $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) \leq o/m$, čo je však priamym dôsledkom toho, že sústava má spolu m bodov. Lema je dokázaná.

Vráťme sa teraz k našim dvom príkladom. V prvom sme mali $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 4$ a našli sme pravidelný 2-uholník, 3-uholník a 4-uholník ako na obr. 2. Lema 2 nám ohraničuje $d(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3) \leq 24/2.12 = 1$, pre naše riešenie platí rovnosť, je teda optimálne. V druhom príklade sme našli $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_{16}$ ako na obr. 4. Podľa lemy 2 $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_{16}) \leq 24/46 = 0{,}52$, kým my sme dosiahli 0,50, čo je iste výsledok veľmi uspokojivý.

Nasledujúce odstavce sú matematicky náročnejšie, možno ich vynechať a prejsť k III. kapitole.

Sústavu pravidelných mnohouholníkov $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s$, vpísaných do kružnice k tak, že žiadne dva vrcholy sústavy nesplývajú, môžeme charakterizovať vektorom $(i_1, \ldots, i_m)$, kde $m = m_1 + \ldots + m_s$ a čísla $i_1, \ldots, i_m$ dostaneme takto: Zvolíme si ľubovoľný bod $A_{i,j}$ sústavy a položíme $i_1 = i$. Ak už máme $i_1, \ldots, i_t$ definované přičom sme ich definovali ako prvé indexy vrcholov $A_{i_1,j_1}, \ldots, A_{i_t,j_t}$, potom nájdeme v smere hodinových ručičiek susedný vrchol $A_{i,j}$ k vrcholu A_{i_t,j_t} a položíme $i_{t+1} = i$. Vektor $(i_1, \ldots, i_m)$ nazveme charakteristickým vektorom sústavy $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s$.

Charakteristický vektor sústavy určuje, v akom poradí sa na kružnici striedajú vrcholy jednotlivých mnohouholníkov sústavy, tj., že existuje taký vrchol mnohouholníka $\mathscr{A}_i$, že k nemu susedný v smere hodinových ručičiek je vrchol mnohouholníka $\mathscr{A}_{i_2}$, za ním $\mathscr{A}_{i_3}$ atď. Každé i sa v charakteristickom vektore vyskytuje práve m_i-krát. Podľa toho, ktorý vrchol je ako prvý, by sústava mohla mať až m rôznych charakteristických vektorov (jeden z druhého odvedené cyklickou zámenou). Charakteristickým vektorom sústavy z nášho prvého príkladu je napríklad (1, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 3, 2).

Na množine charakteristických vektorov si definujeme niektoré zobrazenia do seba (unárne operácie):

o_1 — cyklická zámena,

o_2 — obrátenie poradia zložiek vektora,

o_3 — výmena rovnako početných indexov — ak sa prirodzené čísla p a $\bar{p}$ vyskytujú v charakteristickom vektore rovnaký počet krát, nahradíme pri tejto operácii všade p číslom $\bar{p}$ a naopak.

Tak napríklad $o_1(1, 2, 3, 4, 1) = (2, 3, 4, 1, 1)$,

$o_2(1, 2, 3, 4, 1) = (1, 4, 3, 2, 1)$, $o_3(1, 2, 3, 4, 1) = (1, 3, 2, 4, 1)$.

Dve sústavy $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s$; $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_s$ nazveme topologicky ekvivalentné (jednej topologickej triedy), ak možno charakteristický vektor jednej previesť na charakteristický vektor druhej konečným počtom operácií o_1 — o_3.

Zaujímavú úlohu zatiaľ nevyriešenú, dostaneme, ak definujeme číslo $K(m_1, \ldots, m_s)$ ako maximálny počet navzájom topologicky neekvivalentných sústav z m_1-uholníka $\mathscr{A}_1, \ldots, m_s$-uholníka $\mathscr{A}_s$. Napríklad platí $K(3, 3, 1, 1) = 2$ a je hypotéza $K(m_1, m_2) = 1$ pre všetky m_1, m_2.

2.1.5. Problém algoritmu. Našu základnú úlohu by sme mohli riešiť v dvoch častiach:

1. topologickej — určiť topologickú triedu
2. metrickej — vybrať konkrétneho predstaviteľa v rámci topologickej triedy.

Optimálny algoritmus (v praxi sotva použiteľný) je napríklad tento: Prebrať všetky topologické triedy pre dané $m_1, \ldots, m_s$ a v rámci každej triedy nájsť reprezentanta s najväčším d (napríklad metódou hľadania extrémov funkcie $s - 1$ premenných $\xi_2, \ldots, \xi_s$, kde ξ_i vyjadruje uhlové natočenie i-tého mnohouholníka voči prvému). Pochybnosti o praktickom význame takéhoto algoritmu sa týkajú najmä jeho prvej časti, pri väčšom s bude asi ťažké vyhľadať všetky topologické triedy, či už pre ich veľký počet, alebo komplikovanú štruktúru. Uvedieme si preto algoritmus, ktorý nevedie vždy k riešeniu optimálnemu, ale dáva dobré výsledky. Úspešný býva najmä vtedy, keď je s pomerne veľké, kým $n = [m_1, \ldots, m_s]$ pomerne malé. I v našom druhom príklade ($s = 16$, $n = 12$), sme ním dosiahli pekný výsledok.

Najprv si definujeme pojmy, ktoré v ňom budú hrať významnú úlohu: Predovšetkým vyslovíme induktívnu definíciu tzv. prípustného rozkladu prirodzeného čísla.

1. Prípustným rozkladom čísla n je každý vektor $\nu = (n_1, \ldots, n_q)$, ktorého zložkami sú prirodzené čísla $n_1 = \ldots = n_q$ a $q . n_1 = n$.

2. Ak $(n_1, \ldots, n_q)$ je prípustným rozkladom čísla n a $(n_{i,1}, \ldots, n_{i,q_i})$ je prípustným rozkladom čísla n_i, potom $(n_1, \ldots, n_{i-1}, n_{i,1}, \ldots, n_{i,q_i}, n_{i+1}, \ldots, n_q)$ je prípustným rozkladom čísla n.

Prípustnými rozkladmi čísla 6 sú napríklad (3, 3), (2, 2, 2), (3, 1, 1, 1).

Lema 3. Nech $A_0, \ldots, A_{n-1}$ sú vrcholy pravidelného n-uholníka a nech $(n_1, \ldots, n_q)$ je prípustný rozklad čísla n. Potom existuje rozklad množiny $\mathscr{A} = \{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$ na množiny $\mathscr{A}_i = \{A_{i,0}, \ldots, A_{i, n_i-1}\}$ $(i = 1, \ldots, q)$, tak, že body $\mathscr{A}_i$ sú vrcholmi pravidelného n_i-uholníka.

Dôkaz lemy plynie priamo z definície prípustného rozklada, indukciou cez počet použití časti 2 tejto definície.

Vektor $(n_1, \ldots, n_q)$ nazveme n-prípustným, ak existujú prirodzené čísla $n_{q+1}, \ldots, n_p$ také, že $(n_1, \ldots, n_q, n_{q+1}, \ldots, n_p)$ je prípustný rozklad čísla n. (Prípustný rozklad je teda špeciálnym prípadom n-prípustného vektora.)

Nasledujúcu lemu uvedieme bez dôkazu.

Lema 4. Nech $m_1, \ldots, m_s$ sú dané prirodzené čísla. Nech $n = [m_1, \ldots, m_s]$ a nech $\nu_i = (n_{i,1}, \ldots, n_{i,q_i})$, $i = 1, \ldots, t$ sú n-prípustné vektory, pričom $(n_{1,1}, \ldots, n_{1,q_1}, \ldots, n_{t,q_t})$ je permutáciou vektora $(m_1, \ldots, m_s)$. Potom na danej kružnici $k = (S; o/2\pi)$ existuje sústava z pravidelného m_1-uholníka $\mathscr{A}_1$, ..., m_s-uholníka $\mathscr{A}_s$ taká, že $d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s) = o/t.n$.

Lema 4 nám umožňuje nájsť riešenie (nie nutne optimálne) v dvoch krokoch:

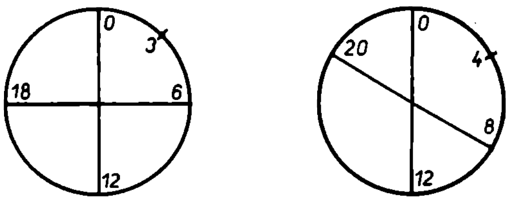
1. Z čísel $m_1, \ldots, m_s$ skombinovať čo najmenší počet n-prípustných vektorov pre $n = [m_1, \ldots, m_s]$. Nech je tento počet t.

2. Rozdeliť kružnicu k na $t.[m_1, \ldots, m_s]$ dielikov a zostaviť z deliacich bodov pravidelný m_1-uholník, ..., m_s-uholník.

Riešenie, ktoré dostaneme, bude mať $d \geqq o/t.n$.

Návrh rozpisu dôb ukončenia zhromažďovania záťaže v zriaďovacej stanici Přerov-pravé v tab. 1 je príkladom použitia spomínaného postupu. Mali sme $n = 12$, $t \doteq 4$ a použité 12-prípustné vektory boli (4, 4, 4), (3, 3, 3, 3), (3, 3, 2, 2, 2), (4, 2, 2, 2). Vidíme, že okrem posledného sú to všetko aj prípustné rozklady čísla 12.

2.1.6. Niektoré príbuzné úlohy. Kritérium, ktoré sme použili v našej základnej úlohe, nie je jediné, s ktorým sa môžeme v praxi stretnúť. Tak napríklad pri navrhovaní cestovných poriadkov mestskej dopravy sa môže žiadať, aby úhrnná čakacia doba cestujúcich bola minimálna, čo podľa [1] vedie na minimalizáciu súčtu štvorcov rozdie-



Obr. 6a Obr. 6b

lov medzi po sebe nasledujúcimi odchodmi. Toto kritérium sa od nášho pôvodného líši, ako vidno na obr. 6. Ide o dva 2-uholníky a jeden 1-uholník na kružnici obvodu 24. Podľa nášho pôvodného kritéria je variant b) lepší, nakoľko $d = 4$, kým pri a) je $d = 3$. Podľa súčtu štvorcov je však lepší a), pretože $9 + 9 + 36 + 36 + 36 = 126 < 16 + 16 + 64 + 16 = 128$.

K zaujúmavej úlohe dôjdeme, keď sa snažíme minimalizovať celkovú čakaciu dobu v celej sieti (napr. na obr. 2), ale pripustíme narušenie pravidelnosti i na jednotlivých linkách. Touto problematikou sa zaoberajú práce [1] a [2].

Cvičenia

1. Nech na kružnici $k = (S; o/2\pi)$ je $\mathscr{A}_1$ pravidelný 6-uholník, $\mathscr{A}_2$ a $\mathscr{A}_3$ štvorce, $\mathscr{A}_4$ a $\mathscr{A}_5$ rovnostranné trojuholníky, $\mathscr{A}_6$ a $\mathscr{A}_7$ priemery kružnice. Dokážte, že $\mathscr{A}_1$ — $\mathscr{A}_7$ možno zvoliť tak, že

$$d(\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_7) = \frac{o}{24}$$

2. Nech na kružnici $k = (S; o/2\pi)$ je $\mathscr{A}_1$ pravidelný m_1-uholník a $\mathscr{A}_2$ pravidelný m_2-uholník, ktoré nemajú spoločný vrchol.

Dokážte, že pre $m_1 = 3$, $m_2 = 7$ a pre každý charakteristický vektor $\vec{i} = (i_1, \ldots, i_{m_1+m_2})$ sústavy $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ existujú racionálne čísla p_1, r_1, p_2, r_2 také, že

$$i_j = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow j = \operatorname{int}[p_1(k + nm_1) + r_1] - n(m_1 + m_2) \\ \qquad k = 1, \ldots, m_1,\ n = 0, 1, 2, \ldots \\ 2 \Leftrightarrow j = \operatorname{int}[p_2(k + nm_2) + r_2] - n(m_1 + m_2) \\ \qquad k = 1, \ldots, m_2,\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

int x tu znamená celú časť z x, čiže najväčšie také celé číslo, ktoré neprevýši x.

Platí toto tvrdenie pre ľubovoľné m_1 a m_2?

3. kapitola

TEÓRIA GRAFOV — JEDNA Z NAJVIAC APLIKOVANÝCH DISCIPLÍN

V posledných desaťročiach čoraz viac vystupujú do popredia aplikácie matematiky na riešenie problémov organizácie a riadenia. Vážnu úlohu tu hrá práve teória grafov. Táto síce nie je súčasťou povinnej matematiky na gymnáziách (i keď aj o tomto sa uvažuje), ale väčšina čitateľov, i mladých, sa s ňou už asi stretla pri iných príležitostiach, napr. v Rozhledoch, v krúžkoch, na akciách JČSMF apod.

3.1. Základné pojmy teórie grafov

Grafom nazývame dvojicu (V, H), kde V je nejaká množina a H je podmnožina množiny V^2 všetkých dvojíc (v_1, v_2), kde $v_1 \in V$, $v_2 \in V$. Množina V sa volá vrcholová množina grafu a my o nej budeme predpokladať, že je konečná. Jej prvky sa volajú vrcholy grafu. Množina H sa volá hranová množina grafu a jej prvky sa volajú hrany grafu.

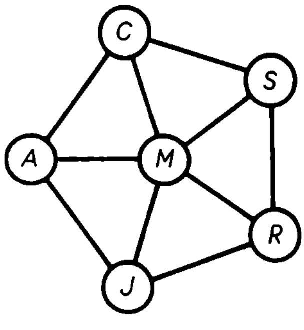
Ak chápeme hranu $h = (v_1, v_2)$ ako usporiadanú dvojicu, voláme ju orientovanou hranou, vrchol v_1 voláme jej začiatočným a vrchol v_2 jej koncovým vrcholom. Ak nám naopak pri hrane h nezáleží na poradí vrcholov v_1, v_2, voláme h neorientovanou hranou a v_1, v_2 voláme jej koncovými vrcholmi. Graf, ktorý obsahuje len orientované hrany sa volá orientovaný, graf, ktorý obsahuje len neorientované hrany sa volá neorientovaný, graf, ktorý obsahuje hrany oboch druhov sa volá čiastočne orientovaný.

Graf často znázorňujeme v rovine, a to tak, že každému vrcholu priradíme v rovine krúžok, pričom tieto krúžky sú navzájom disjunktné, tj. nemajú spoločné body. Ak v_1, v_2 je orientovaná hrana, narysujeme v rovine šípku z krúžku v_1 do v_2.

Ak (v_1, v_2) je neorientovaná hrana, spojíme krúžky v_1 a v_2 úsečkou, alebo oblúkom. Obrázok 7a a ďalšie sú príkladmi znázornenia grafov v rovine.

Na danom grafe $\mathscr{G} = (V, H)$ voláme vrcholy v_1 a v_2 susednými, ak $(v_1, v_2) \in H$, alebo $(v_2, v_1) \in H$. Navzájom rozne hrany h_1, h_2 voláme susednými, ak majú spoločný vrchol.

Vidíme, že graf je matematická štruktúra, ktorá vyjadruje istý vzťah medzi dvojicami prvkov množiny V, čiže binárnu reláciu na množine V. V praxi sa často stretávame práve s potrebou študovať množinu prvkov s binárnou reláciou, a preto má teória grafov také široké uplatnenie.



Obr. 7a

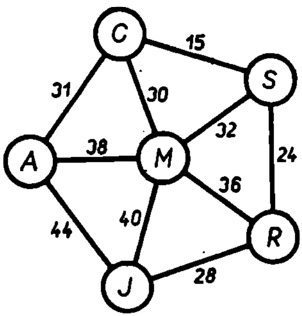
Uvážme napríklad neorientovaný graf z obr. 7a. Tento graf može mať mnoho rôznych významov, ako napríklad

3.1.1. Vrcholmi sú niektoré európske štáty (*C* — Československo, *S* — Sovietsky zväz, *A* — Rakúsko, *M* — Maďarsko, *J* — Juhoslávia a *R* — Rumunsko), hranou sú spojené susedné štáty.

3.1.2. Vrcholmi sú televízne vysielače I. programu. Dva vysielače spojíme hranou, ak na niektorom mieste možno prijímať signál s oboch vysielačov.

3.1.3. Vrcholmi grafu sú šiesti žiaci (Cyril, Stano, Andrej, Martin, Juraj a Roman) a hranou sú spojení tí dvaja, ktorí sa spolu priatelia.

3.1.4. Vrcholmi grafu sú objekty, ktoré má strážiť vojenská strážna jednotka (centrálny sklad, strelnica, autopark, muničný sklad, južný sklad a radarová stanica). Dva objekty sú spojené hranou, ak je medzi nimi priama viditeľnosť.



Obr. 7b

Niekedy pripisujeme hranám grafu číselné ohodnotenia, ako napríklad na obr. 7b. Tieto čísla môžu mať rôzny zmysel, napríklad

3.1.5. Tento graf môže vyjadrovať šesť homogénnych rovníc pre šesť neznámych A, C, J, M, R, S, ktoré dostaneme tak, že pre každý vrchol grafu napíšeme rovnicu, v ktorej označenie vrcholu je na ľavej strane rovnice a na pravej strane je súčet, ktorého členmi sú označenia susedných vrcholov násobené ohodnoteniami hrán, smerujúcich do vybraného vrcholu:

$$\begin{aligned}
A &= 31C + 44J + 38M \\
C &= 31A + 30M + 15S \\
J &= 44A + 40M + 28R \\
M &= 38A + 30C + 40J + 36R + 32S \\
R &= 28J + 36M + 24S \\
S &= 15C + 32M + 24R
\end{aligned}$$

3.1.6. Vrcholy grafu môžu znamenať mestá v niektorej oblasti, pričom hranou sú spojené susedné mestá a číselné ohodnotenie znamená vzdialenosť v kilometroch (prípadne v hodinách jazdy, alebo v nákladoch na prepravu jednej tony).

3.1.7. Vrcholmi grafu sú dopravné uzly; dva uzly sú spojené hranou, ak medzi nimi vedie priama dopravná tepna, ktorá už neprechádza žiadnym ďalším uzlom. Číselné ohodnotenie tu znamená priepustnosť, kapacitu dopravnej tepny. Priepustnosťou rozumieme maximálne množstvo dopravných jednotiek, ktoré môžu tepnou prejsť za jednotku časovú (napr. počet vozidiel za minútu apod.).

3.2. Najčastejšie aplikované metódy teórie grafov

Príklady, ktoré sme si uviedli, nám ukazujú, aké rozmanité situácie možno opísať pomocou grafov, ba dokonca aj pomocou toho istého grafu. Opis tu však býva len začiatkom, zriedkakedy konečným cieľom práce. Zvyčajne sa pomocou niektorej metódy teórie grafov hľadá odpoveď na istú praktickú otázku. V ďalšom texte si preberieme niektoré úlohy teórie grafov i prípadne s metódami na ich riešenie, ktoré sa častejšie vyskytujú v praktických aplikáciách.

3.2.1. Farebná úloha. Uvážme časť mapy Európy, na ktorej je Československo, Sovietsky zväz, Rakúsko, Maďarsko, Juhoslávia a Rumunsko. Úlohou je nájsť minimálny počet farieb, ktorými možno túto mapu vyfarbiť, a to tak, že celé územie jedného štátu je jednofarebné, ale územia susedných štátov sú vyfarbené rôznymi farbami. Riešenie tejto úlohy by sme sa síce mohli pokúsiť nájsť priamo na spomínanej mape, ukážeme si však lepšiu grafickú pomôcku. Je ňou graf z obr. 7a. Pre nás je totiž zaujímavé len to, aké prvky má množina skúmaných štátov a ktoré z nich sú susedné. Ako sme si už uviedli v príklade 3.1.1, tieto skutočnosti vyjadruje práve graf z obr. 7a.

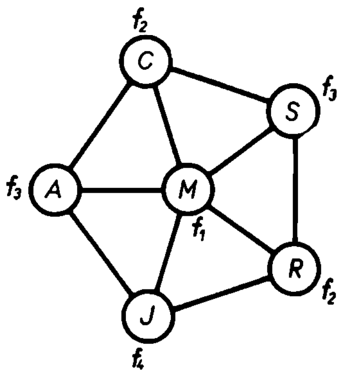
Naša úloha je špeciálnym prípadom všeobecnej farebnej úlohy pre vrcholy grafu, ktorá je nasledovná:

Pre daný graf $\mathscr{G} = (V, H)$ nájsť množinu farieb $F_{\mathscr{G}} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ a zobrazenie f množiny V do $F_{\mathscr{G}}$ také, že

1. pre všetky $(v, w) \in H$ platí $f(v) \neq f(w)$,
2. číslo n je minimálne.

Ak existuje riešenie tejto úlohy, ktoré spĺňa tieto podmienky, hovoríme, že na vyfarbenie grafu treba minimálne n farieb čiže, že graf je n-farebný. Ak sa splní len podmienka 1, hovoríme, že na vyfarbenie grafu stačí n farieb.

Algoritmy, ktoré poznáme na riešenie všeobecnej farebnej úlohy sú málo uspokojivé. Počet počtových výkonov, ktoré sú potrebné na ich vykonanie, prudko rastie s rastúcim počtom vrcholov a hrán grafu a je temer porovnateľný s počtom výkonov pri „absolútnom“ algoritme preskúmania všetkých variantov. Jeden z algoritmov si popíšeme neskôr.



Obr. 8

V našom konkrétnom prípade je však zrejmé, že štyrmi farbami je možné graf vyfarbiť (obr. 8), kým tri farby nestačia, čo si môžeme dokázať nepriamo: Predpokladajme, že by tri farby stačili na vyfarbenie tohto grafu. Označme si farby, priradené vrcholom M, C, S po rade f_1, f_2, f_3, tj. $f(M) = f_1$, $f(C) = f_2$, $f(S) = f_3$. Potom nutne $f(A) = f_3$, $f(R) = f_2$, a teda susedné vrcholy vrcholu J majú farby f_1, f_3, f_2, čiže žiadnu z týchto farieb nemožno priradiť vrcholu J, čo je spor s predpokladom.

Čitatelia si iste uvedomujú, že farbenie máp je úloha veľmi špeciálna a v praxi tak zriedkavá, že by sa sotva oplatilo o nej hovoriť, keby neexistovali iné, významnejšie aplikácie farebnej úlohy. Jedna z nich súvisí s príkladom 3.1.2.

Na našom území máme už postavených, alebo plánovaných, niekoľko stovák vysielačov rôzneho výkonu pre I. televízny program. Ak z nich zostavíme graf podobne, ako v 3.1.2 a podarí sa nám ho zafarbiť menej, ako 12 farbami, potom, ak považujeme každú z farieb za niektorý vysielací kanál, nájdeme vysielacie kanály pre všetky vysielače tak, aby sa navzájom nerušili. Hovoríme o menej, ako 12 farbách preto, že k dispozícii je len 11 kanálov, hoci na televízore ich je 12. Tretí kanál sa používa pre VKV rozhlas.

Teraz si opíšeme jeden z algoritmov na riešenie všeobecnej farebnej úlohy. Jeho presnou úlohou je zistiť, či možno pre daný graf a dané n vystačiť s n farbami. Viacnásobne opakovaným použitím tohto algoritmu nakoniec zistíme minimálne n.

1. krok: Pre každé $v \in V$ a $i = 1, \ldots, n$ definujme premennú x_{vi} (tzv. binomickú), ktorá môže nadobúdať len hodnoty 0, 1.

2. krok: Riešme systém rovníc a nerovníc

$$\sum_{i=1}^{n} x_{vi} = 1 \qquad (v \in V)$$

$$x_{vi} + x_{wi} \leqq 1 \qquad ((v, w) \in H\,, \quad i = 1, \ldots, n)$$

Ako sa takýto systém rieši, si povieme v 4. kapitole.

Ak riešenie neexistuje, nemožno graf vyfarbiť n farbami. Ak áno, tak n farieb na to stačí a $x_{vi} = 1$ znamená, že $f(v) = f_i$.

3.2.2. Úloha o vnútornej stabilite. Predstavte si, že by sme zo žiakov, ktorých spomíname v príklade 3.1.3, potrebovali vybrať predsedu a pokladníka triedneho výboru. Bolo by pritom žiadúce, aby neboli blízkymi priateľmi. Existuje takáto dvojica? Na grafe z obr. 7a vidíme, že ich existuje niekoľko, napr. Cyril—Juraj, Cyril—Roman, atď., spolu 5 dvojíc. Ak by sme však chceli vybrať troch žiakov tak, aby žiadni dvaja neboli blízkymi priateľmi, už sa nám to nepodarí. Ak na grafe z obr. 7a vyberieme akúkoľvek množinu troch vrcholov, vždy sa medzi nimi nájdu aspoň dva spojené hranou. Číslo 2 má teda pre tento graf istý význam, ktorý môžeme všeobecne formulovať takto:

Majme graf $\mathscr{G} = (V, H)$. Množina $W \subset V$ sa volá vnútorne stabilná, ak žiadne dva jej vrcholy nie sú susedné (spojené hranou). Najväčšie číslo $v_{\mathscr{G}}$, ku ktorému v grafe $\mathscr{G}$ existuje vnútorne stabilná množina s počtom prvkov $v_{\mathscr{G}}$, sa volá číslo vnútornej stability grafu $\mathscr{G}$.

Algoritmus na vyhľadanie vnútorne stabilnej množiny s maximálnym počtom prvkov, je popísaný v Bergeho knihe [4]. Táto úloha, prípadne úlohy k nej príbuzné, možu mať aplikácie tam, kde ide o tvorenie kompletov z viacerých zložiek, pričom niektoré dvojice zložiek nesmú byť obsiahnuté v jednom komplete. Čitatelia sa môžu vlastnou úvahou presvedčiť, že úloha o rozmiestení maximálneho počtu dám na šachovnici tak, aby žiadne dve se nemohli navzájom zobrať (tento maximálny počet je 8), je tiež úlohou o maximálnej vnútorne stabilnej množine.

3.2.3. Úloha o vonkajšej stabilite. Uvážme strážené objekty, ktoré spomíname v príklade 3.1.4. Predpokladajme, že netreba obsadiť strážnym všetky objekty, ale že stačí, ak na každý neobsadený objekt je vidno z niektorého obsadeného. Stačilo by teda napríklad obsadiť objekty C a J, ale nestačilo by H a S. Zvláštnosťou grafu z obr. 7a (iné grafy túto vlastnosť nemusia mať) je, že vrchol M je susedný všetkým ostatným vrcholom a teda stačí obsadiť M, ostatné sú z neho vidno. Úloha, o ktorej sme teraz hovorili, je špeciálnym prípadom nasledovnej všeobecnej úlohy, ktorá sa volá úlohou o vonkajšej stabilite:

Majme graf $\mathscr{G} = (V, H)$. Množinu $W \subset V$ voláme navonok stabilnou, ak pre každý vrchol $v \in (V - W)$ platí, že je susedný k niektorému $w \in W$ (čiže každý vrchol grafu alebo padne do W, alebo je k tejto množine susedný). Najmenšie číslo $w_{\mathscr{G}}$, ku ktorému existuje v grafe $\mathscr{G}$ navonok stabilná množina W s počtom prvkov $w_{\mathscr{G}}$, sa volá číslo vonkajšej stability grafu $\mathscr{G}$.

S algoritmami na vyhľadanie najmenšej navonok stabilnej množiny je situácia podobná, ako pri farebnej úlohe; sú veľmi zdĺhavé. Aj túto úlohu možno riešiť použitím binomických premenných:

Ku každému $v \in V$ definujeme binomickú premennú x_v ($x_v = 1$ bude znamenať, že $v \in W$, $x_v = 0$, že $v \notin W$), Treba nájsť minimum tzv. cieľovej funkcie

$$z = \sum_{v \in V} x_v$$

na množine, určenej podmienkami

$$x_v + \sum_{w \text{ sus. k } v} x_w \geqq 1 \qquad (v \in V).$$

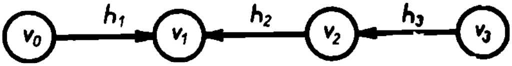
Úloha o vonkajšej stabilite má širšie uplatnenie, ako úloha o stabilite vnútornej. Ukážeme si jeden príklad.

Predpokladajme, že v istom meste sa chystá nejaká významná akcia (festival, spartakiáda apod.). Nech V je množina všetkých jeho križovatiek. Predpokladajme, že pre veľký počet prvkov v množine V nie je možné každú križovatku v meste obsadiť informátorom, ale že by bolo žiadúce, aby v prípade, že na niektorej križovatke informátor nie je, existovala križovatka ku nej susedná, na ktorej už informátor je. Najmenšia množina obsadených križovatiek s touto vlastnosťou je najmenšia navonok stabilná množina v grafe $\mathscr{G} = (V, H)$, kde $(v, w) \in H$, ak sú križovatky v, w susedné v dopravnom zmysle.

Iným príkladom takejto úlohy je problém umiestenia minimálneho počtu dám na šachovnici tak, aby každé pole, na ktorom dáma nestojí, bolo v dosahu niektorej z nich. Čitateľ sa môže sám presvedčiť, že táto úloha je úlohou o minimálnej navonok stabilnej množine.

3.2.4. Cesty na grafoch. Cestou na grafe $\mathscr{G} = (V, H)$ voláme konečnú postupnosť $\mathscr{C} = (v_0, h_1, v_1, \ldots, h_n, v_n)$, kde v_0 a v_1 sú rôzne vrcholy hrany h_1, v_1 a v_2 sú rôzne vrcholy hrany $h_2, \ldots, v_{n-1}$ a v_n sú rôzne vrcholy hrany h_n.

Dôležité je, aby sme si uvedomili, že v prípade orientovanej hrany h_1 nežiadame, aby v_0 bol jej začiatočný a v_1 koncový vrchol. Môže to byť aj naopak!



Obr. 9

Na obr. 9 máme príklad cesty $\mathscr{C} = (v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, h_3, v_3)$ na orientovanom (prípadne čiastočne orientovanom grafe).

Ak naviac všetky orientované hrany $h_i = (v_{i-1}, v_i)$

majú svoje vrcholy i v tomto poradí na ceste $\mathscr{C}$ hovoríme, že $\mathscr{C}$ je usmernená cesta. Na obr. 9 je cesta (v_3, h_3, v_2, h_2, v_1) usmernená.

Ak pre cestu $\mathscr{C}$ platí $v_0 = v_n$ a všetky ostatné vrcholy sú navzájom rôzne, voláme ju kružnicou. Ak to platí pre usmernenú cestu $\mathscr{C}$, voláme ju usmernenou kružnicou.

3.2.5. Vyhľadanie cesty medzi dvoma vrcholmi. Táto úloha sa môže zdať čitateľom triviálna, veď kto by mohol mať starosti napríklad s vyhľadaním cesty z S do A na grafe z obr. 7a. Zdanie sa však tento raz mýli. Omyl spočíva v tom, že nie vždy máme možnosť „systematického" pohľadu na graf ako celok. Predstavme si, že by sme nemohli kresliť žiadne obrázky, ale mali graf značený takto:

$$V = \{C, A, J, R, S, M\}$$

$$h_1 = (C, A), \quad h_2 = (A, J), \quad h_3 = (J, R), \quad h_4 = (R, S)$$
$$h_5 = (S, C), \quad h_6 = (M, C), \quad h_7 = (M, A), \quad h_8 = (M, J)$$
$$h_9 = (M, R), \quad h_{10} = (M, S)$$

(takýmto spôsobom by mohol byť graf z obr. 7a zadaný napríklad v pamäti počítača). Pri takomto spôsobe určenia grafu nevidno cestu z S do A „na prvý pohľad".

Predstavme si však, že pri takomto spôsobe zadania by vrcholov nebolo 6, ale 60 a hrán okolo 300. Potom vzniká skutočne netriviálna otázka, podľa akého algoritmu treba postupovať (napríklad pri riešení na počítači) pri hľadaní cesty medzi dvoma vrcholmi grafu.

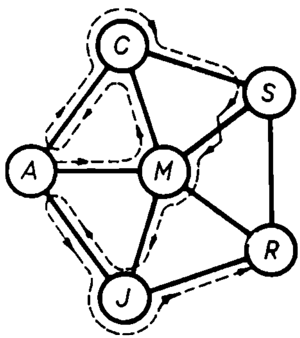
Takýto istý algoritmus by mohol potrebovať aj speleológ (= jaskyniar), keď by zablúdil v spleti podzemných chodieb a potreboval by sa dostať von. Podzemné chodby možno totiž považovať za hrany niektorého grafu a križovatky chodieb za jeho vrcholy. Speleológ pritom nielen že nemá celkový pohľad na graf, ale nevidí nič, okrem chodby, ktorou ide a chodieb, ktoré do nej ústia.

Hoci pre prácu aplikovaného matematika je viac charakteristická tvorba matematických modelov, ako výber algoritmov, algoritmus pre vyhľadanie cesty na grafe si preberieme ako zaujímavú ukážku. Čitatelia si potom môžu premyslieť, ako by bolo treba tento algoritmus upraviť pre hľadanie usmernenej cesty na orientovanom, prípadne čiastočne orientovanom grafe.

Algoritmus na vyhľadanie cesty z vrchola v do w na grafe $\mathscr{G} = (V, H)$ opíšeme tak, že určíme pravidlá, pomocou ktorých sa ďalej predĺži cesta, ktorá začala vo vrchole v a zatiaľ dospela po vrchol u:

3.2.5.1. Nikdy nevybrať hranu, ktorá už raz do cesty vybraná bola, v tom istom smere (= poradí vrcholov), ako predtým. Inými slovami, neslobodno ísť po žiadnej hrane po druhý raz smerom, ktorým sme už raz išli.

3.2.5.2. Ak je vrchol $u \neq v$ a vrchol u sa na konštruovanej ceste $\mathscr{C}$ vyskytuje po prvý raz na hrane $(\bar{u}, u)$, predĺžime cestu $\mathscr{C}$ hranou $(u, \bar{u})$ len vtedy, keď niet inej



Obr. 10

možnosti. Inými slovami, hranou, po ktorej sme do vrchola prišli po prvý raz, sa slobodno vrátiť len vtedy, keď nemáme inú možnosť.

Dá sa dokázať (dôkaz je napríklad v knihe [4]), že po konečnom počte krokov buď dosiahneme vrchol w, ktorý sme chceli dosiahnuť, alebo skončíme vo vrchole v tak, že cestu C nebude možné ďalej predĺžiť bez porušenia pravidla 3.2.5.1. Táto druhá možnosť potom znamená, že hľadaná cesta na grafe neexistuje.

Na obr. 10 vidíme príklad cesty z A do R (čiarkovanej), ktorú sme predlžovali podľa pravidiel 3.2.5.1 a 3.2.5.2, pričom ak bolo možné vyberať si z viacerých možností, vyberali sme si náhodne.

3.2.6. Vyhľadanie najkratšej cesty na grafe. Kým predchádzajúca úloha sa v praxi zriedkakedy vyskytuje samostatne (skôr ako súčasť širšieho problému), úloha o najkratšej ceste má veľa priamych aplikácií.

Väčšina čitateľov už iste používala automapu nášho, alebo cudzieho územia pri hľadaní najkratšej cesty medzi dvoma mestami. Pritom zistila, že najmä pre vzdialenejšie mestá je to neľahká úloha. (stačí si skúsiť vyhľadať najkratšiu cestu z Popradu do Znojma, alebo z Oradey do Giurgiu v Rumunsku). Dopravné závody ČSAD, alebo dopravné útvary iných podnikov, však musia takéto úlohy riešiť temer denne a preto sa na jej opakované riešenie postupne nasadzujú samočinné počítače.

Všeobecná formulácia úlohy o najkratšej ceste na grafe je nasledovná:

Nech $\mathscr{G} = (V, H)$ je graf, na ktorom pre každé $h \in H$ je dané kladné číslo $d(h)$ (toto ohodnotenie môže vyjadrovať dĺžku hrany h, alebo čas, potrebný na jej prechod, alebo cenu za prepravu jednotkového nákladu cez túto hranu). Nech $v \in V$, $w \in V$. Treba nájsť takú cestu $\mathscr{C} = (v = v_0, h_1, \ldots, h_n, v_n = w)$, aby číslo

$$d(\mathscr{C}) = \sum_{i=1}^{n} d(h_i)$$

bolo minimálne.

Výpočtový postup (algoritmus) je typickou ukážkou metódy, vhodnej pre použitie na počítači.

Pri tomto algoritme priraďujeme vrcholom grafu pomocné ohodnotenia. Postupujeme takto:

1° Vrcholu v (východisku) priradíme ohodnotenie $f(v) = 0$, všetkým ostatným vrcholom priradíme ohodnotenie $f(u) = \infty$, alebo $f(u) = m$, kde m je nejaké veľmi veľké číslo, napríklad $m = 10^{20}$ apod. Potom prejdeme ku kroku 2°.

2° Ak existuje hrana $h = (u, \bar{u}) \in H$, na ktorej

$$f(\bar{u}) - f(u) > d(h)$$

nahradíme $f(\bar{u})$ hodnotou $f(u) + d(h)$ a vrátíme sa na začiatok kroku 2°. Ak taká hrana neexistuje, prejdeme ku kroku 3°.

3° Ohodnotenia vrcholov, ku ktorým sme dospeli, znamenajú minimálne hodnoty $d(\mathscr{C})$ pre cesty $\mathscr{C}$ z východiska do príslušného bodu. Minimálnu cestu $\mathscr{C}$ z východiska v do vrcholu w potom zostrojíme spätne od vrcholu w podľa 4°.

4° Ak už máme zostrojenú koncovú časť cesty $v_{n-k}, h_{n-k+1}, v_{n-k+1}, \ldots, h_n, v_n = w$ a platí $v_{n-k} \neq v$, nájdeme vrchol v_{n-k-1} taký, že $h_{n-k} = (v_{n-k-1}, v_{n-k}) \in H$ a platí

$$d(h_{n-k}) = f(v_{n-k}) - f(v_{n-k-1})$$

Cestu potom predĺžime v spätnom smere na tvar $v_{n-k-1}, h_{n-k}, v_{n-k}, h_{n-k+1}, \ldots, h_n, v_n = w$. Taký vrchol v_{n-k-1} vždy existuje vďaka spôsobu, ktorým sme vykonali kroky 1° a 2°.

Ak po tomto kroku je už prvým vrcholom na ceste vrchol v, sme hotoví. Ak nie, zopakujeme krok 4° s predĺženou cestou. Po konečnom počte krokov napokon dospejeme k hľadanej ceste $\mathscr{C} = (v = v_0, h_1, v_1, \ldots, h_n, v_n = w)$.

Ako príklad použitia tejto metódy si ukážeme postup (napr. v počítači) pri určovaní vzdialenosti z vrcholu A do R na grafe z obr. 7b. Postupujme podľa tabuľky 2.

body	Ohodnotenie								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	m	m	31	31	31	31	31	31	31
J	m	m	m	44	44	44	44	44	44
M	m	38	38	38	38	38	38	38	38
R	m	m	m	m	m	74	72	72	70
S	m	m	m	m	70	70	70	46	46

Tab. 2

Každej zmene pomocných ohodnotení vrcholov tu zodpovedá nový stĺpec tabuľky. Čitateľov možno prekvapí „hlúpy“ postup pri určovaní stĺpca 5, kde oprava ohodnotenia $f(S)$ sa vykonala pomocou hrany (M, S), hoci „múdrejšie“ by bolo urobiť to pomocou hrany (C, S). Lenže pozor! Počítač nemá celkový prehľad a použije prvú hranu $h = (u, \bar{u})$, na ktorú natrafí a pre ktorú $f(\bar{u}) - f(u) > d(h)$. Záleží teda potom len od poradia, v ktorom má počítač hrany v pamäti uložené. Ak má skôr (M, S), ako (C, S), postupuje tak, ako v tomto prípade.

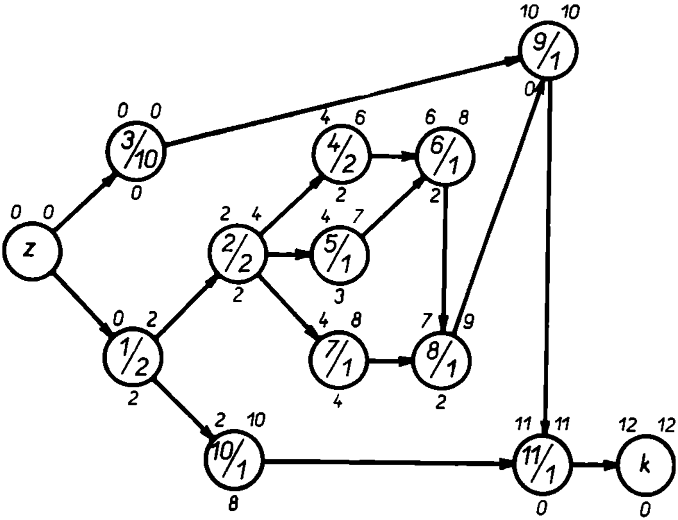
3.2.7. Metoda kritickej cesty. Pomocou orientovaného grafu môžeme znázorniť aj následnosť dielčich činností, ktoré sú potrebné pri vykonávaní niektorej práce.

Predstavme si, že by sme v niektorej chatovej oblasti, kde ešte nie je uzáver chatovej výstavby, chceli postaviť chatu niektorého z typov, ktoré ponúka n. p. Drevina. Cesta, ktorú musíme prejsť od tohto nášho rozhodnutia, až po ukončenia hrubej výstavby chaty, sa skladá z viacerých nutných činností (etáp). Ich zoznam vidíme v tabuľke 3. Tretí stĺpec tabuľky obsahuje trvanie čin-

Číslo činnosti	Názov činnosti	Trvanie činnosti	Pred-chádza-júce činnosti
1	Projektové práce	2	—
2	Povolenie na výstavbu	2	1
3	Objednávka a výroba chaty u n. p. Drevina	10	—
4	Výkop základov	2	2
5	Nákup a dovoz železa a dreva na debnenie	1	2
6	Debnenie základov a armovanie	1	4,5
7	Nákup a dovoz kameňa, štrku a cementu	1	2
8	Vybudovanie základov	1	6,7
9	Montáž chaty	1	3,8
10	Nákup a dovoz krytiny	1	2
11	Pokrytie chaty	1	9,10

Tab. 3

nosti v mesiacoch, a štvrtý, veľmi dôležitý, nám ukazuje, ktoré činnosti už musia byť ukončené, aby sa niektorá činnosť mohla začať. Napríklad činnosť 8 — vybudovanie základov, sa môže začať, až keď sú ukončené činnosti 6 a 7, t. j. debnenie základov s armovaním a dovoz potrebného stavebného materiálu.



Obr. 11

Obsah tabuľky 3 sa priam ponúka na to, aby sme ho vyjadrili pomocou grafu. Prvý možný spôsob vidíme na obr. 11, kde ide o tzv. sieťový graf vrcholového typu. O druhom možnom type, hranovom, si povieme neskôr.

Každá činnosť je tu znázornená vrcholom grafu, ktorý je označený zlomkom m/n, kde m je číslo činnosti a n jej trvanie. Vrchol m/n spojíme s p/q orientovanou hranou (šípkou), ak činnosti p-tej musí predchádzať m-tá podľa 4. stĺpca tab. 3. Okrem toho pridáme do grafu pomocné vrcholy z (začiatok) a k (koniec) s nulovým trvaním.

V tomto grafe vrcholového typu sú teda činnosti znázornené vrcholmi a nadväznosti hranami.

Sieťový graf nám nielen umožňuje veľmi názorne vyjadriť nadväznosti jednotlivých činností, ale aj zistiť niektoré časové relácie. Ak začneme čas počítať v mesiacoch od začiatku prác, zistíme postupne, že činnosti 1 a 3 môžu začať v čase 0, č. 2 a 10 v čase 2, č. 4, 5 a 7 v čase 4, č. 6 v čase 6 atď. až činnosť k v čase 12, t. j. o 12 mesiacov by sme mali mať chatu v hrubej stavbe hotovú. Čísla najskoršieho možného začiatku píšeme vľavo hore pri príslušnom vrchole.

Môžeme si však položiť aj ďalšiu otázku: aké sú najneskoršie nutné začiatky jednotlivých činností, ktoré by ešte nespôsobili predĺženie výstavby na čas dlhší, ako 12 mesiacov. Tieto časy si postupne odvodíme od konca. Pre činnosť 11 je to 11, pre č. 10 a 9 je to 10, atď. Údaj o najneskoršom nutnom začiatku píšeme vpravo hore pri príslušnom vrchole.

Rozdiel medzi nejneskorším nutným a najskorším možným začiatkom znamená rezervu, o ktorú možno trvanie tej ktorej činnosti predĺžiť bez toho, že by sa porušil konečný termín. Údaje o rezerve píšeme pod vrchol. Samozrejme, túto rezervu sme vypočítali za predpokladu, že ostatné činnosti prebehnú podľa plánu. Ak by sa totiž napríklad činnosť 2 predĺžila o 1 mesiac, nebude mať činnosť 7 rezervu 4, ale už len 3 mesiace apod.

Činnosti, ktoré nemajú žiadnu rezervu, majú zvláštne postavenie, pretože každé omeškanie sa v nich sa prejaví predĺžením času výstavby. Preto sa usmernená cesta, ktorá nimi prechádza z vrcholu k do z, volá kritická.

V našom prípade sú na kritickej ceste činnosti 3, 9 a 11. Stačí však, aby sme z nejakých dôvodov museli napríklad o 2 mesiace predĺžiť činnosť 1 (dajme tomu, že povolenie na výstavbu príde o dva mesiace neskôr), a už sa na kritickej ceste ocitnú aj činnosti 2, 4, 6, 8.

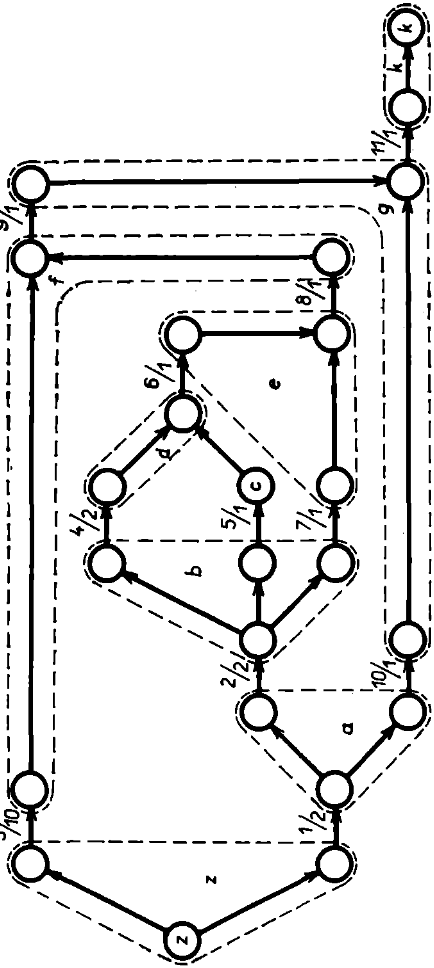
Metóda, ktorú sme si opísali, sa volá metóda kritickej cesty, skrátene CPM, podľa anglického názvu „critical path method", je najjednoduchšou z metód tzv. sieťovej analýzy, ktorá sa zaoberá štúdiom sieťových grafov, ktoré vyjadrujú nadväznosti dielčích činností. Tieto metódy sa už bežne používajú pri zostavovaní plánov výstavby väčších stavieb, plánovaní výskumu a vývoja nových zariadení apod.

Pri práci so sieťovým grafom z obr. 11 pociťujeme jednu nevýhodu, a to že má ohodnotené vrcholy, a nie hrany, ako sme boli zvyknutí, čoho dôsledkom je aj to, že činnosti, ktoré majú pomerne dlhé trvanie, sú znázornené vrcholmi, kým okamžiky prechodov medzi činnosťami sú znázornené hranami, teda útvarmi geometricky dlhšími. Ukážeme si, že od grafu vrcholového typu možno prejsť ku grafu hranového typu, kde činnosti budú vyjadrené ohodnotenými hranami.

Vykonajme dva kroky:

1° Nahraďme každý vrchol, s výnimkou z a k, dvojicou vrcholov, spojených orientovanou hranou (v smere zľava doprava). Hrany, ktoré predtým končili vo vrchole, budú teraz končiť v ľavom zo spomínaných vrcholov a hrany, ktoré predtým vo vrchole začínali, budú začínať v pravom z dvojice vrcholov. Pôvodné označenie vrchola priradíme teraz hrane, ktorou sme vrchol nahradili (obr. 12).

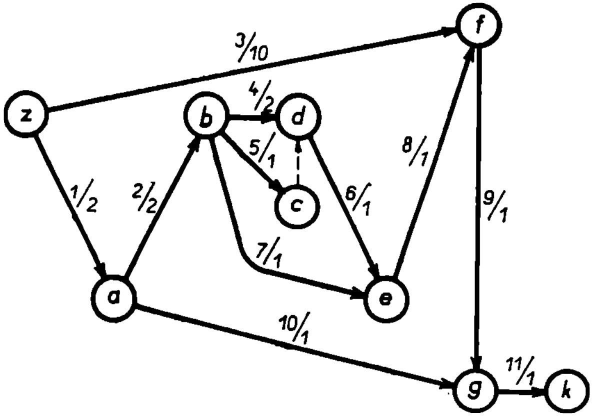
2° Každú dvojicu vrcholov, spojených neohodnotenou hranou, nahradíme postupne jedným vrcholom, ak sa splnia tieto podmienky:



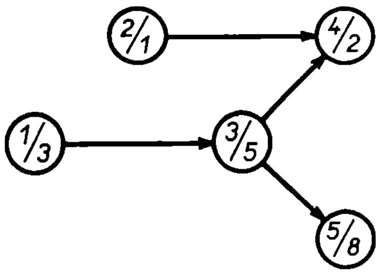
Obr. 12

2a) nepridá sa tým do grafu závislosť medzi takými činnosťami, ktoré predtým boli nezávislé,

2b) nespôsobí sa to, že by niektoré vrcholy boli spojené viac, než jednou hranou.

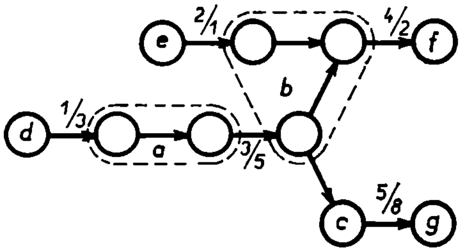


Obr. 13

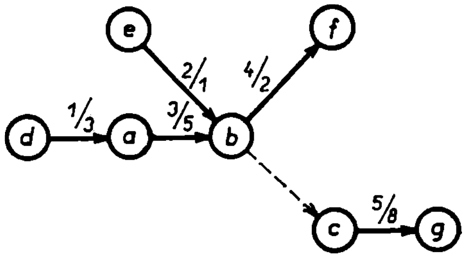


Obr. 14

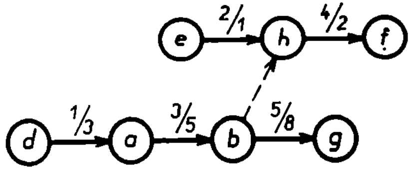
Vrcholy, ktoré po kroku 2° splynú do jedného, sme na obr. 12 čiarkovane ohraničili a pridelili sme im abecedné označenia. Ich spojením vznikne graf z obr. 13. Vrcholy c,



Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17

d nemohli splynúť vzhľadom na pravidlo 2b. Pretože v našom príklade sa neuplatnilo pravidlo 2a, ukážeme si prípad, kedy sa s ním stretneme.

Predstavme si, že na obr. 14 máme časť sieťového grafu vrcholového typu, z ktorej po kroku 1° dostaneme graf z obr. 15. Ak by sme tu chybne zlúčili tri vrcholy do *b*, porušili by sme pravidlo 2a pridaním závislosti činnosti 5 na činnosti 2, ktorá vo východiskovom grafe nie je (obr. 16). Výsledok správneho zlúčenia máme na obr. 17.

3.3. Dopravné siete

Hoci teóriu dopravných sietí si uvádzame ako poslednú, je svojím významom pre aplikácie prvá a preto jej venujeme túto samostatnú časť.

Dopravnou sieťou voláme orientovaný graf $\mathcal{G} = (V, H)$ bez usmernených kružníc, v ktorom

1. každej hrane $h \in H$ je priradené ohodnotenie $k(h) > 0$; toto ohodnotenie sa volá priepustnosť, alebo kapacita hrany h,

2. existuje vrchol $p \in V$, v ktorom nekončí a vrchol $u \in V$, v ktorom nezačína žiadna hrana z H. Vrchol p sa volá prameň a u sa volá ústie siete.

Ak graf $\mathcal{G}$ spĺňa len podmienku 1., volá sa zovšeobecnená dopravná sieť.

Tokom v dopravnej sieti voláme funkciu f, ktorá každej hrane $h \in H$ priradí nezáporné číslo $f(h) \leqq k(h)$, ktoré voláme veľkosťou toku cez hranu h, pričom

$$f_v^+ \underset{\text{df}}{=} \sum_{\{w : (v, w) \in H\}} f(v, w) = \sum_{\{w : (w, v) \in H\}} f(w, v) \underset{\text{df}}{=} f_v^-$$

pre ľubovoľné $v \in V - \{p, u\}$.

Táto podmienka sa podobá na Kirchhoffov zákon, známy z fyziky („čo do vrchola pritečie, musí z neho aj odtiecť“).

Tok f sa volá maximálny v dopravnej sieti $\mathscr{S} = (V, H, k)$, ak pre každý iný tok g v tejto sieti platí $f_v^+ \geqq g_v^+$.

Dopravnú sieť si môžeme predstaviť ako sieť vodných kanálov, do ktorých sa voda dostáva z jediného prameňa p a z ktorých ústi do jediného ústia u.

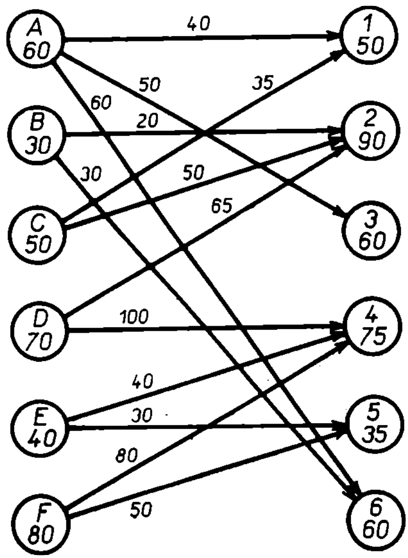
Dopravná sieť s jediným prameňom a jediným ústím by sa mohla zdať matematickým modelom príliš špeciálnym a preto aj málo aplikovateľným. Veď bežné dopravné siete (nie v matematickom zmysle), ako napríklad cestná, alebo železničná sieť, majú viac miest, z ktorých prúdy vozidiel vychádzajú, alebo kam prichádzajú.

V nasledujúcom príklade si ukážeme, že matematický pojem dopravnej siete má predsa len väčšie použitie, než by sa na prvý pohľad zdalo.

Zdroj	Odberateľ	1	2	3	4	5	6
	Požiad. \ Ponuka	50	90	60	75	35	60
A	60	40	0	50	0	0	60
B	30	0	20	0	0	0	30
C	50	35	50	0	0	0	0
D	70	0	65	0	100	0	0
E	40	0	0	0	40	30	0
F	80	0	0	0	80	50	0

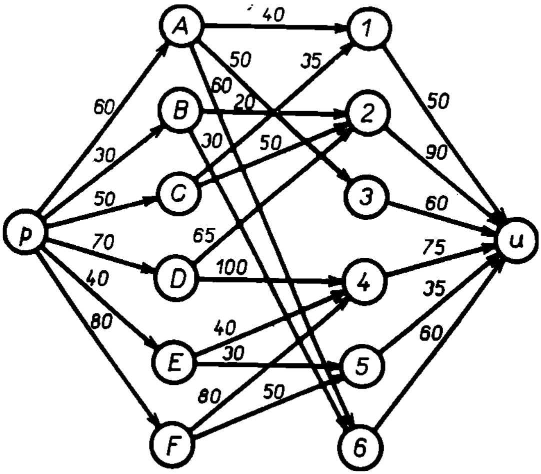
Tab. 4

3.3.1. Príklad. Předpokladajme, že na jednom brehu mora sú zdroje A, B, C, D, E, F niektorej suroviny, ktorej odberatelia číslo 1, 2, 3, 4, 5, 6 sídlia na druhom brehu. Medzi sídlami zdrojov A—F, a odberateľov 1—6 premávajú rôzne lodné linky, ktoré prevážajú prípadne cestujúcich, rôzne tovary a na prepravu našej suroviny môžu vyčleniť kapacitu podľa tabuľky 4 (kapacitu meriame v jednotkách množstva za jednotku časovú). Pri zdrojoch hneď uvádzame ponúkané, pri odberateľoch požadované množstvo. Nula vovnútri tabuľky znamená, že od dodávateľa z príslušného riadku ku odberateľovi z príslušného stĺpca buď lodná linka nepre-



Obr. 18

máva, alebo na prepravu našej suroviny nemá žiadnu voľnú kapacitu. Číslo 50 v treťom riadku, druhom stĺpci napríklad znamená, že od zdroja C k odberateľovi 2 premáva linka s kapacitou 50 pre prepravu našej suroviny.
Túto situáciu môžeme vyjadriť grafom z obr. 18.



Obr. 19

Takýto graf, v ktorom sa množina vrcholov rozpadá na dve časti a hrany vedú len z časti prvej do druhej, sa v literatúre volá prostý graf. Definícii dopravnej siete síce nevyhovuje, ale ukážeme si, ako ho možno jednoduchým obratom upraviť na dopravnú sieť.

Pridajme ku množine vrcholov grafu z obr. 18 „umelý" (fiktívny) prameň p a ústie u (obr. 19). Pritom spojme vrchol p s každým z vrcholov $A, \ldots, F$ orientovanou hranou s kapacitou, ktorá sa rovná ponuke odpovedajúceho dodávateľa. Podobne spojíme vrcholy 1, ..., 6 s vrcholom u hranami s kapacitami, ktoré sa rovnajú požiadavkám odberateľov. Keďže v strednej časti grafu sú hrany v smere voľných lodných liniek s kapacitou, ktorá sa rovná kapacite týchto liniek, určuje každý tok v tejto sieti svojimi hodnotami v strednej časti grafu veľkosť dodávok od dodávateľov k spotrebiteľom. f je tok, a preto žiadnej linke sa neurčí prepraviť viac, než je jej kapacita, do žiadneho z vrcholov A, ..., F nepríde, a teda ani z neho neodíde viac jednotiek toku (= suroviny), než je kapacita hrany, spojujúcej prameň s týmto vrcholom, teda než je ponuka tohto dodávateľa. Z podobných dôvodov ani žiaden odberateľ nedostane viac, než je jeho požiadavka. Maximálny tok v tejto sieti určí potom maximálne úhrnné množstvo suroviny, ktoré možno pri splnení daných podmienok previezť od dodávateľov k spotrebiteľom.

3.3.2. Ford-Fulkersonov algoritmus na vyhľadanie maximálneho toku v dopravnej sieti. Úloha o maximálnom toku má veľa aplikácií a preto nevyhnutne potrebuje efektívny algoritmus, ktorý možno dobre programovať na samočinnom počítači. Obidve tieto vlastnosti má Ford-Fulkersonov algoritmus, ktorý si preberieme podrobnejšie.

Pri použití tohto algoritmu vychádzame z nulového toku, ktorý každej hrane $h \in H$ priraďuje hodnotu $f(h) = 0$. Po konečnom počte krokov dospejeme ku maximálnemu toku.

Pri každom kroku sa nejprv rozhodneme, či tok, ktorý sme dosiahli, je už maximálny, alebo nie. Ak nie, ukážeme si, ako ho zväčšiť.

Predpokladajme, že sme zatiaľ dosiahli tok f, ktorý nie je maximálny, t. j. že ešte existuje niektorý tok g, pre ktorý

$$g_p^+ = \sum_{(p,w)\in H} g(p, w) > f_p^+ = \sum_{(p,w)\in H} f(p, w)$$

Potom musí existovať aspoň jeden vrchol w_1, pre ktorý

$$f(p, w_1) < g(p, w_1) \leqq k(p, w_1)$$

čiže hranou (p, w_1) priteká do vrcholu w_1 väčší tok g, ako f, a teda

1. buď existuje hrana $(w_1, w_2) \in H$, na ktorej

$$f(w_1, w_2) < g(w_1, w_2) \leqq k(w_1, w_2)$$

(t. j. touto hranou aj odteká väčší tok g, ako f,

2. alebo existuje hrana $(w_2, w_1) \in H$, na ktorej

$$f(w_2, w_1) > g(w_2, w_1) \geqq 0$$

(t. j. touto hranou sa nerovnosť z 1. zasa kompenzuje).

V prvom prípade možno vo vrchole w_2 zopakovať úvahu, ktorú sme vykonali vo vrchole w_1.

V druhom prípade z vrchola w_2 vychádza hranou (w_2, w_1) väčší tok f, ako g, a teda buď to kompenzuje iná hrana (w_2, w_3), na ktorej

$$f(w_2, w_3) < g(w_2, w_3) \leqq k(w_2, w_3)$$

alebo po niektorej hrane (w_3, w_2) do w_2 aj väčší tok vchádza, čiže

$$f(w_3, w_2) > g(w_3, w_2) \geqq 0$$

Úvahu, ktorú sme vykonali vo vrchole w_2, môžeme vykonať vo w_3 a definovať w_4, atď. Dostávame tým postupnosť vrcholov $p = w_0, w_1, w_2, \ldots$, ktorá má tú vlastnosť, že ak $(w_{i-1}, w_i) \in H$, tak platí

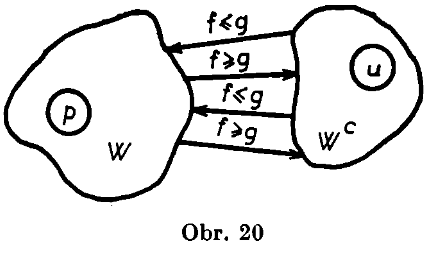
$$f(w_{i-1}, w_i) < g(w_{i-1}, w_i) \leqq k(w_{i-1}, w_i), \text{ čiže}$$
$$f(w_{i-1}, w_i) < k(w_{i-1}, w_i)$$

a ak $(w_i, w_{i-1}) \in H$, tak

$$f(w_i, w_{i-1}) > g(w_i, w_{i-1}) \geqq 0, \text{ čiže}$$
$$f(w_i, w_{i-1}) > 0$$

Uvážme teraz množinu $W \in V$ vrcholov, do ktorých sa takýmito postupnosťami môžeme dostať. Dokážeme si, že za nášho predpokladu $f_p^+ < g_p^+$ platí $u \in W$. Postupujme nepriamo. Nech by $u \in W^C = V - W$. Potom pre hrany $(w, v) \in H$, $w \in W$, $v \in W^C$ by platilo $f(w, v) \geqq g(w, v)$, pretože inak by sme postupnosť, ktorou dosiahneme vrchol w, mohli predĺžiť aj do bodu v a bolo by $v \in W$, $v \notin W^C$.

Ďalej je z podobných dôvodov zrejmé, že ak $(v, w) \in H$, $v \in W^C$, $w \in W$, tak $f(v, w) \leqq g(v, w)$.



Obr. 20

Situáciu, ku ktorej sme dospeli, vidíme na obr. 20. Obsahuje v sebe spor, pretože toky f a g „vyvierajú“ len vo vrchole p, všetky ostatné vrcholy množiny W vyšlú toľko toku, koľko ho prijmú. Pritom $f_p^+ < g_p^+$ a aj pre prítok z množiny W^C platí

$$\sum_{\substack{v \in W^C \\ w \in W}} f(v, w) < \sum_{\substack{v \in W^C \\ w \in W}} g(v, w)$$

Potom ale nevyhnutne

$$\sum_{\substack{w \in W \\ v \in W^C}} f(w, v) < \sum_{\substack{w \in W \\ v \in W^C}} g(w, v)$$

čo je v spore s tým, že na všetkých hranách z W do W^C má platiť $f(w, v) \geqq g(w, v)$. Predpoklad $u \in W^C$ teda vedie k sporu.

Tým sme dokázali, že $u \in W$, t. j. že existuje postupnosť $p = v_0, v_1, \ldots, v_n = u$, na ktorej

$$\text{(D)} \begin{cases} f(w_{i-1}, w_i) < k(w_{i-1}, w_i) & \text{pre } (w_{i-1}, w_i) \in H \text{ („vpred“)} \\ f(w_i, w_{i-1}) > 0 & \text{pre } (w_i, w_{i-1}) \in H \text{ („vzad“)} \end{cases}$$

Označme

$$d = \min \{\min_{(w_{i-1}, w_i) \in H} [k(w_{i-1}, w_i) - f(w_{i-1}, w_i)], \quad \min_{(w_i, w_{i-1}) \in H} f(w_i, w_{i-1})\}$$

a definujme teraz nový tok $\bar{f}$ pomocou postupnosti $p = w_0, w_1, \ldots, w_n = u$ a čísla d:

$$\text{(F)} \qquad \bar{f}(h) = \begin{cases} f(h) + d & \text{pre } h = (w_{i-1}, w_i) \\ f(h) - d & \text{pre } h = (w_i, w_{i-1}) \\ f(h) & \text{v ostatných prípadoch} \end{cases}$$

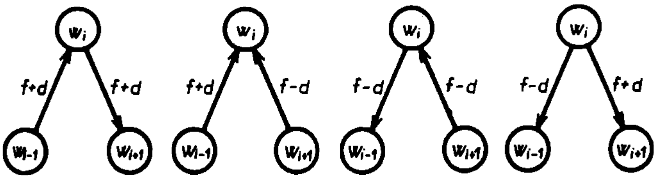
Ukážeme si, že $\bar{f}$ je opäť tok, väčší, ako f.

Z definície čísla d vyplýva, že $0 \leqq \bar{f}(h) \leqq k(h)$ pre všetky $h \in H$.

„Kirchhoffov zákon“ sa tiež nenaruší, pretože pre vrcholy, ktoré nie sú prvkami postupnosti, sa tok f nezmenil, a ak $i = 1, \ldots, n - 1$, tak môže nastať len jeden z prípadov z obrázku 21 a v žiadnom z nich sa táto podmienka nenaruší.

Pretože $w_0 = p$, platí $\bar{f}_p^+ = f_p^+ + d$ a teda tok sa zväčšil.

Postupnosť $p, w_1, \ldots, w_{n-1}, u$ nám teda poslúžila na zväčšenie toku f. Na zväčšenie toku $\bar{f}$ však už poslúžiť nebude môcť, pretože vďaka definícii korekcie d sa jedna z nerovností (D) stane rovnosťou.



Obr. 21

Pretože všetkých ciest na grafe s konečnou vrcholovou množinou je len konečný počet, po konečnom počte krokov už vyradíme všetky takéto korekčné postupnosti. Ford-Fulkersonov algoritmus má teda vždy len konečný počet krokov.

Môžeme teda zhrnúť:

1. Ak východiskový tok f nie je maximálny, tak existuje postupnosť vrcholov $p = w_0, w_1, \ldots, w_n = u$ s vlastnosťou (D) a pomocou nej možno ku f definovať nový tok $\bar{f}$, väčší, ako f.

2. Ak f je maximálny tok, tak takáto postupnosť neexistuje, pretože keby existovala, f by sa dal zväčšiť.

Cestu s vlastnosťami (D) môžeme hľadať viacerými spôsobmi. Napríklad pri ručnom spracovaní môžeme farebnou ceruzkou vyznačiť na jednotlivých hranách, či spĺňajú podmienku (D) vpred, vzad, alebo obidvoma smermi.

Pri spracovaní na počítači sa jeden krok Ford-Fulkersonovho algoritmu s východiskovým tokom f vykoná takto:

3.3.2.1. Vrcholu p priradíme pomocný index 0.

3.3.2.2. Ak vrchol v už pomocný index má a vrchol w nie, pričom $f(v, w) < k(v, w)$, priradíme vrcholu w pomocný index $+v$. Tým si označíme, že pri tvorení cesty s vlastnosťou (D) môže za vrcholom v nasledovať w v zmysle „vpred".

3.3.2.3. Ak vrchol v už pomocný index má a vrchol w nie, pričom $f(w, v) > 0$, priradíme vrcholu w pomocný index $-v$ („vzad").

3.3.2.4. Ak po pridelení pomocných indexov všetkým vrcholom, ktorým sa to dá, zostane vrchol u bez pomocného indexu, je tok f maximálny. Ak má vrchol u pomocný index $+v$, položíme $w_n = u$, $w_{n-1} = v$ (postupnosť konštruujeme od konca a číslo n zatiaľ nepoznáme). w_{n-2} bude potom vrchol, vymenovaný v pomocnom indexe vrchola w_{n-1} atď., až sa dostaneme k vrcholu p.

V prípade, že hľadáme celočíselný tok, a že aj kapacity $k(h)$ sú všetky celočíselné, môžeme súčasne s konštrukciou postupnosti ihneď opravovať tok o jednotku takto:

Ak má vrchol $u = w_n$ index $+w_{n-1}$, pridáme k $f(w_{n-1}, w_n)$ číslo $+1$.

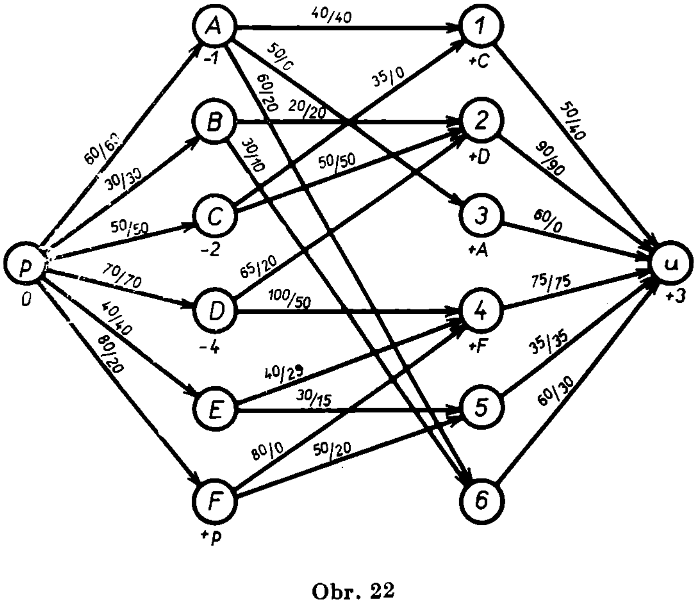
Ak má vrchol w_i index $+w_{i-1}$, pridáme k $f(w_{i-1}, w_i)$ číslo $+1$.

Ak má vrchol w_i index $-w_{i-1}$, odčítame od $f(w_i, w_{i-1})$ číslo 1.

Je zrejmé, že po konečnom počte krokov tento postup skončí, pretože tok je zhora ohraničený a pri každom kroku vzrastie o 1.

V prípade, že nejde o celočíselnú úlohu v tomto zmysle, musíme po skonštruovaní postupnosti vyrátať d a opraviť tok podľa (F).

3.3.3. Príklad (pokračovanie 3.3.1). Predpokladajme, že v sieti z obr. 19 je zatiaľ nulový tok. Vlastnosť (D) má napr. postupnosť p, A, 1, u a môžeme na nej definovať opravu $d = 40$, ktorú pridáme k toku na hranách (p, A), $(A, 1)$ a $(1, u)$. Ďalej môžeme postupovať napr. takto:

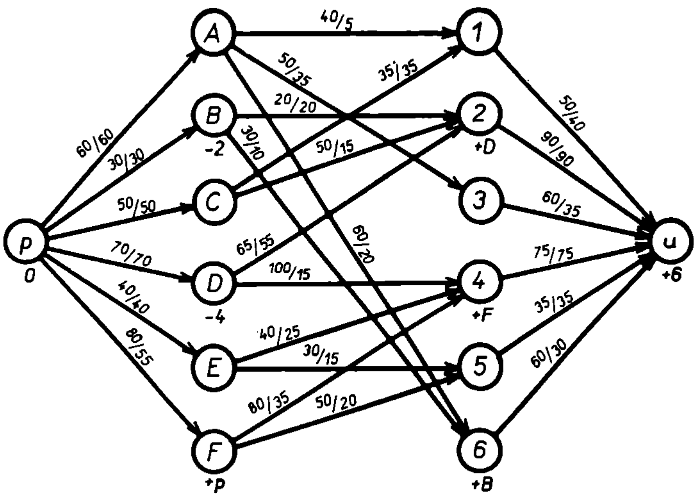


Obr. 22

Postupnosť p, A, 6, u nám dá opravu 20
Postupnosť p, B, 2, u nám dá opravu 20
Postupnosť p, B, 6, u nám dá opravu 10
Postupnosť p, C, 2, u nám dá opravu 50
Postupnosť p, D, 2, u nám dá opravu 20
Postupnosť p, D, 4, u nám dá opravu 50
Postupnosť p, E, 4, u nám dá opravu 25
Postupnosť p, E, 5, u nám dá opravu 15
Postupnosť p, F, 5, u nám dá opravu 20

Pri týchto úpravách pri ktorých sme použili smer vpred dôjdeme k sieti s tokom na obr. 22. Čitateľ zlomku na hrane znamená kapacitu, menovateľ veľkosť toku.

Tu už sa nedá nájsť postupnosť s vlasnosťou (D), ktorá by používala len smer „vpred".



Obr. 23

Pre vyhľadanie korekčnej cesty použijeme pomocné indexy a postupne ich pridelíme takto:

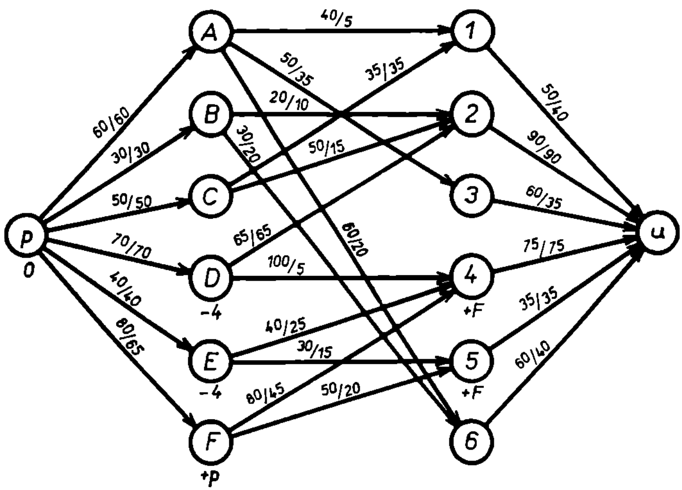
vrcholu	p,	F,	4,	D,	2,	C,	1,	A,	3,	u
index	0,	$+p$,	$+F$,	-4,	$+D$,	-2,	$+C$,	-1,	$+A$,	$+3$

Keďže sme už dosiahli vrchol u, nebudeme prideľovať ďalšie indexy, hoci by to bolo možné.

Na korekčnej ceste p, F, 4, D, 2, C, 1, A, 3, u máme $d = \min\{60, 80, 50, 45, 50, 35, 40, 50, 60\} = 35$

Toto číslo pridáme k toku na hranách (p, F), $(F, 4)$, $(D, 2)$, $(C, 1)$, $(A, 3)$, $(3, u)$ a uberieme na $(D, 4)$, $(C, 2)$, $(A, 1)$.

Dostaneme tok z obr. 23. Pridelíme pomocné indexy



Obr. 24

Zdroj	Odberateľ / Požiad. / Ponuka	1	2	3	4	5	6	spolu	Nevyuž. ponuka
		50	90	60	75	35	60	dodá	
A	60	5	—	35	—	—	20	60	—
B	30	—	10	—	—	—	20	30	—
C	50	35	15	—	—	—	—	50	—
D	70	—	65	—	5	—	—	70	—
E	40	—	—	—	25	15	—	40	—
F	80	—	—	—	45	20	—	65	15
Spolu dostaneme		40	90	35	75	35	40	315	
Neuspokojená požiadavka		10	—	25	—	—	20	Spolu prepravené	

Tab. 5

vrchol	p,	F,	4,	D,	2,	B,	6,	u
index	0,	$+p$,	$+F$,	-4,	$+D$,	-2,	$+B$,	$+6$

a na ceste p, F, 4, D, 2, B, 6, u dostaneme

$$d = \min\{35, 45, 15, 10, 20, 20, 30\} = 10$$

Po pridaní tohto čísla k toku na hranách (p, F), $(F, 4)$, $(D, 2)$, $(B, 6)$, $(6, u)$ a jeho ubraní od $(D, 4)$ a $(B, 2)$ dostaneme tok z obr. 24.

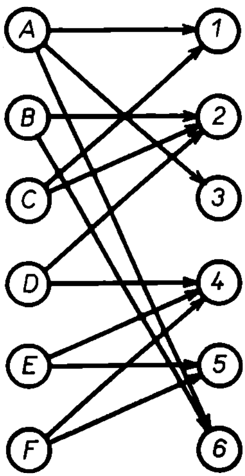
Tu môžeme dať pomocné indexy takto

vrchol	p,	F,	4,	5,	E,	D
index	0,	$+p$,	$+F$,	$+F$,	-4,	-4

a žiadne ďalšie. Vrchol u teda index nedostane, čiže tok je maximálny.

Znamená to potom rozdelenie dodávok jednotlivými linkami podľa tabuľky 5. (napríklad z A do 1 dodávka 5, z A do 3 dodávka 35 atď.). Vidíme, že ponuka zdrojov sa využila temer úplne, kým požiadavka odberateľov (ktorá bola väčšia, než ponuka) zostala u niektorých z nich čiastočne neuspokojená.

3.3.4. Úloha o pridelení pracovníkov na pracoviská. Predpokladajme, že niektorý podnik rozširuje počty svojich pracovníkov, napríklad preto, že zakúpil nové stroje a potrebuje robotníkov na ich obsluhu. Predpokladajme, že ku strojom treba dovedna šesť pracovníkov na pracovné miesta č. 1, 2, ..., 6 a že podnik prijal šesť

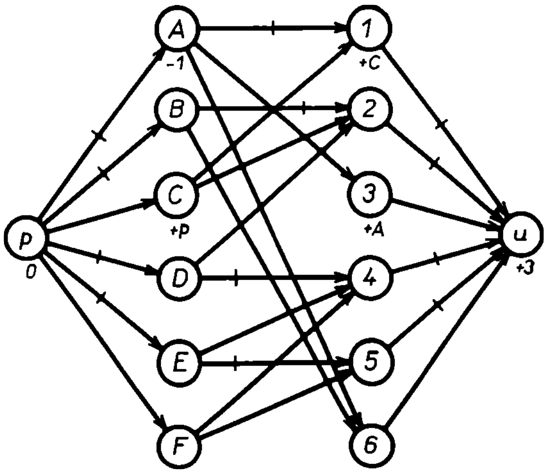


Obr. 25

nových robotníkov Adama, Blažeja, Cyrila, Dušana, Emila a Floriana, ktorých skrátene označíme A, B, C, D, E, F. Predpokladajme, že ide o pracovníkov kvalifikovaných a skúsených, pričom

A	má predpoklady zastať	miesto 1, 3, 6
B	—„—	miesto 2, 6
C	—„—	miesto 1, 2
D	—„—	miesto 2, 4
E	—„—	miesto 4, 5
F	—„—	miesto 4, 5

Vedúci by týchto pracovníkov rád rozmiestil tak, aby sa každý pracovník dostal na miesto, na ktoré už má predpoklady (kvalifikáciu, zapracovanie apod.), aby ho nebolo treba školiť.



Obr. 26

Pretože pracovníkov je pomerne málo, po istej námahe by sa (napríklad postupným preberaním všetkých variantov) vedúcemu podarilo nájsť najlepšie rozmiestenie. Ak by ich však bolo povedzme tridsať, úloha by bola nad jeho sily. Tu môže pomôcť matematika, presnejšie dopravné siete.

Áno, dopravné siete, hoci v zadaní úlohy o žiadnu dopravu nejde. Dostaneme sa k nim takto:

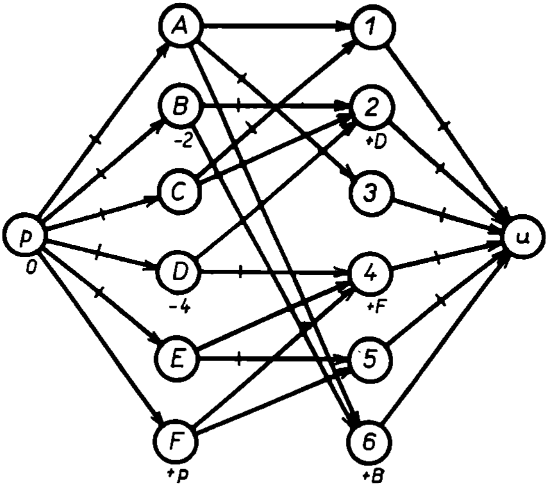
Je celkom prirodzené znázorniť pracovníkov a pracovné miesta vrcholmi grafu (obr. 25) a spojiť každého pracovníka orientovanou hranou s tými pracovnými miestami, pre zastávanie ktorých má predpoklady. Úloha, ktorú treba riešiť, je vybrať čo najväčší počet hrán tohto grafu tak, aby žiadne dve z nich nemali spoločné vrcholy. Táto úloha sa volá úlohou o párovaní vrcholov prostého grafu. No a k dopravným sieťam je už len krôčik. Stačí pridať ku grafu z obr. 25 fiktívny prameň p a ústie u (obr. 26), predpokladať, že všetky hrany majú kapacitu 1 a hľadať maximálny celočíselný tok.

Každý celočíselný tok f v tejto sieti môže na hranách siete nadobúdať len hodnoty 0, alebo 1. Hrany v strednej časti grafu, na ktorých $f = 1$, sú isté také, že žiadne dve z nich nemajú spoločný vrchol (nemôžu to byť napríklad hrany $(A, 1)$ a $(A, 3)$, pretože podľa „Kirchhoffovho zákona" by muselo byť $f(p, A) \geq 2$ čo je spor s tým, že kapacita hrany (p, A) je 1).

Čím väčší je tok f, tým viac je vybraných hrán (= dvojíc) na ktorých $f = 1$. Maximálny tok nám potom dá aj maximálnu vybranú množinu.

Riešme teraz našu úlohu vyhľadaním maximálneho toku v sieti z obr. 26. Postupným výberom korekčných ciest $(p, A, 1, u)$, $(p, B, 2, u)$, $(p, D, 4, u)$, $(p, E, 5, u)$ dostaneme tok f, pre ktorý $f_p^+ = 4$, pričom hrany h, na ktorých $f(h) = 1$ označíme čiaročkou. Tento tok sa už cestami „len vpred" nedá zväčšiť, použijeme preto postupnosti, ktoré idú aj „vpred" aj „vzad" a hľadajme ich pomocou pridavných indexov. Tak postupne pridelíme tieto indexy:

vrchol	p,	C,	1,	A,	3,	u
index	0,	$+p$,	$+C$,	-1,	$+A$,	$+3$

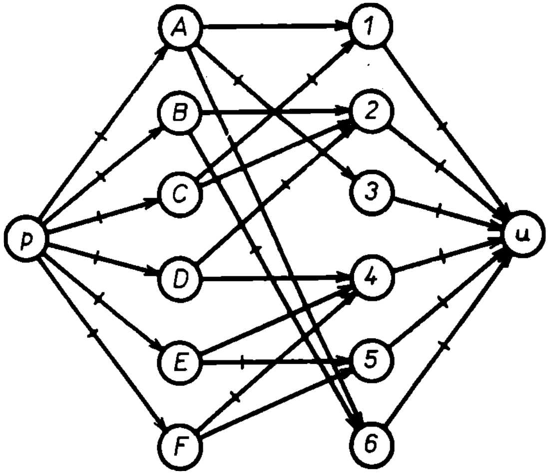


Obr. 27

Čiže pridáme jednotku toku na (p, C), $(C, 1)$, $(A, 3)$, $(3, u)$ a uberieme ju na $(A, 1)$ — obr. 27.
Potom podobne

vrchol	p,	F,	4,	D,	2,	B,	6,	u
index	0,	$+p$,	$+F$,	-4,	$+D$,	-2,	$+B$,	$+6$

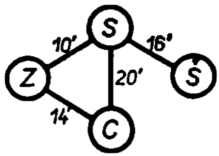
čím dostaneme tok (už maximálny) na obr. 28. Ten nám určuje, že pracovníkovi *A* treba prideliť miesto 3, *B*—6, *C*—1, *D*—2, *E*—5, *F*—4. Existuje aj riešenie v ktorom namiesto *E*—5, *F*—4 je *F*—5, *E*—4.



Obr. 28

3.3.5. Úloha o turnusoch dopravných prostriedkov. Táto úloha na rozdiel od predchádzajúcej, je dopravného charakteru, ale uplatnenie dopravných sietí v nej bude i tak založené na prekvapujúcom obrate.

Predpokladajme napríklad, že istá obec má staré centrum i so žel. stanicou — označíme ho *C*, ďalej nové sídlisko — *S*, závod — *Z* a školu — *Š*, (ktorá je mimo centra i sídliska, pretože slúži aj deťom zo susednej obce). Jazdné doby autobusov medzi týmito miestami sú vidno z obr. 29. Vzhľadom k tomu, že robotníci v závode pracujú od 6,00, administratívni pracovníci tamže o 6,45, v centre od 7,15, vlak odchádza o 6,30 a v škole sa začína dopoludnajšia smena o 7,30, je potrebné, aby chodili tieto autobusové spoje:



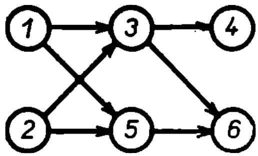
Obr. 29

Spoj. č. 1: centrum 5^{36} závod 5^{50}
Spoj. č. 2: sídlisko 5^{40} závod 5^{50}
Spoj. č. 3: sídlisko 6^{00} centrum 6^{20}
Spoj. č. 4: sídlisko 6^{40} centrum 7^{00}
Spoj. č. 5: centrum 6^{04} sídlisko 6^{24} závod 6^{34}
Spoj. č. 6: centrum 6^{48} sídlisko 7^{08} škola 7^{24}

Otázka je, aký minimálny počet autobusov je potrebný na obslúženie týchto spojov.

Pri riešení tejto úlohy (nielen tejto konkrétnej, ale aj všeobecnej úlohy v turnusoch vozidiel), hrá dôležitú úlohu binárna relácia na množine spojov. Dva spoje sú v tejto relácii, ak jeden dopravný prostriedok po obslúžení jedného spoja stihne obslúžiť aj druhý (táto relácia je zrejme nesymetrická, druhý spoj je vždy v časovej následnosti za prvým).

Jedna možnosť na využitie grafov sa tu priam núka. Zostrojme orientovaný graf, ktorého vrcholmi budú spoje s a orientované hrany budú vyjadrovať reláciu, o ktorej sme si už hovorili. Niektoré hrany však môžeme z grafu vynechať, a to tie, ktoré i tak vyplývajú z tranzitivity našej relácie. Napríklad ak pre tri spoje platí $s_1 \rightarrow s_2$ a $s_2 \rightarrow s_3$, zrejme aj $s_1 \rightarrow s_3$, ale túto hranu môžeme pre jednoduchosť a prehľadnosť vynechať z grafu. Pre náš konkrétny príklad máme tento graf na obr. 30. Postupnosť vrcholov $s_1, s_2, \ldots$, taká, že každá dvojica (s_{i-1}, s_i) je hranou grafu, určuje poradie spojov pre jednotlivé vozidlo, čiže jeho turnus.



Obr. 30

Úlohou je pokryť celú vrcholovú množinu najmenším možným počtom takýchto postupností. Ak by niektorý vrchol (= spoj) bol vo viacerých postupnostiach, jednoducho ho vynecháme zo všetkých postupností, okrem jednej.

Riešiť túto úlohu na grafe z obr. 30 je veľmi jednoduché. Na prvý pohľad nám stačia dve postupnosti, napríklad 1, 3, 4 a 2, 5, 6.

V skutočných úlohách z praxe sa však uvažujú desiatky, ba stovky spojov a tam sa už na intuíciu spoliehať nemožno. Treba mať algoritmus, ktorý zaručene vedie k optimálnemu riešeniu, čiže k minimálnemu počtu potrebných vozidiel, a to taký, ktorý by sa dal použiť aj na počítači.

Žiaľ, priamo pre úlohu v tom znení, o akom sme dosiaľ uvažovali, algoritmus nepoznáme. Tu príde fígeľ o ktorom sme už hovorili a ktorým úlohu prevedieme na dopravné siete.

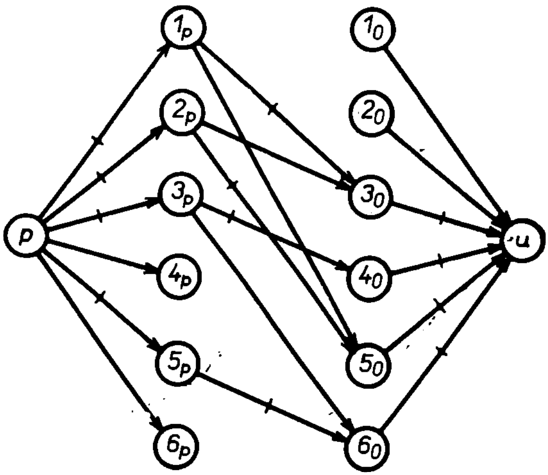
Najprv si uvedomíme, že pre riešenie našej úlohy nemusíme poznať celý spoj, od odchodu z východiska, cez prechod všetkými zastávkami až po príchod do cieľovej stanice. Stačí nám poznať ho v dvoch momentoch: pri odchode a pri príchode. Namiesto jedného spoja s stačí nám uvažovať jeho odchodovú charakteristiku s_o (čas odchodu a východisko) a príchodovú charakteristiku s_p. Čo keby sme teda každému spoju nepridelili jeden vrchol grafu, ale dva — príchodový a odchodový. Podobne, ako v grafe na obr. 18 môžeme dať „príchodové" vrcholy do ľavého a odchodové do pravého stĺpca. Pritom spojíme s_p hranou s vrcholom $\bar{s}_o$, ak jedno vozidlo po vykonaní spoja s môže vykonať spoj $\bar{s}$.

Uvážme teraz úlohu o párovaní v tomto grafe. Ak vyberieme pár, čiže hranu $(s_p, \bar{s}_o)$, znamená to, že to isté vozidlo vykoná spoj s a po ňom $\bar{s}$.

Predpokladajme, že spojov je dovedna m. Ak by sme z grafu nevybrali žiadnu hranu, potrebovali by sme toľko vozidiel, koľko je spojov, čiže m. Vybraním každej hrany sa potrebný počet vozidiel zníži o jedno, pri výbere n hrán je potrebný počet vozidiel $m—n$. Maximálnym možným počtom vybraných hrán minimalizujeme potrebný počet autobusov.

Ak máme vybrané hrany, turnusy už vytvoríme ľahko. Vyhľadáme taký vrchol $s_o^{(1)}$, do ktorého neústi žiadna hrana. Ten nám určí, že spoj $s^{(1)}$ bude prvým v turnuse pre niektoré vozidlo; ak z $s_p^{(1)}$ nevedie vybraná hrana do žiadného $s_o^{(2)}$, vykoná toto vozidlo len jeden spoj $s^{(1)}$. Ak vedie vybraná hrana do $s_o^{(2)}$, vykoná vozidlo po spoji $s^{(1)}$ spoj $s^{(2)}$. Podobne postupujeme ďalej.

Vidíme, že úlohu o optimalizácii turnusov sme previedli na úlohu o maximálnom párovaní vrcholov prostého grafu. No a o tejto úlohe sme si už ukázali, že pridaním fiktívneho prameňa p, ktorý teraz spojíme s každým s_p a ústia u, s ktorým teraz spojíme každý vrchol s_o, dostaneme dopravnú sieť, v ktorej kapacitu každej hrany predpokladáme jednotkovú. Maximálny tok v tejto sieti nám určí maximálne spárovanie a tým



Obr. 31

aj minimálny počet vozidiel. Pre náš jednoduchý príklad dostávame sieť z obr. 31, na ktorom už je aj optimálny tok, ktorý nám vyberá dvojice $(1_p, 3_o)$, $(2_p, 5_o)$, $(3_p, 4_o)$, $(5_p, 6_o)$. Vidíme, že do 1_o a 2_o žiadna vybraná (dokonca vôbec žiadna) hrana neústi a spoje č. 1 a 2 budú začiatkami turnusov. Ďalej je spojené $1_p \to 3_o$ a $3_p \to 4_o$, z čoho vyplýva turnus 1, 3, 4. Zo spojenia $2_p \to 5_o$ a $5_p \to 6_0$ vyplýva zasa turnus 2, 5, 6.

Cvičenia

1. Graf voláme rovinným, ak ho možno zakresliť do roviny tak, aby sa žiadne dve hrany nepretínali v inom bode, ako vo vrchole grafu. Nájdite najmenšie n tej vlastnosti, že existuje rovinný graf, ktorý má n vrcholov a ktorého vrcholy nemožno vyfarbiť troma farbami tak, aby všetky súsedné vrcholy mali rôznu farbu!

2. Vezmite si autoatlas ČSSR, v ktorom je aj tabuľka vzdialeností miest. Preverte, či niektoré vzdialenosti v tabuľke súhlasia so vzdialenosťami podľa mapy! Bolo by vo vašich silách preveriť všetky?

3. Máme daných n tovarov, o ktorých vieme, že niektoré dvojice z nich nesmú byť skladované v jednej miestnosti. Úlohou je do prvej, najväčšej skladovej miestnosti vybrať čo najviac druhov tovarov, ktoré sa môžu spolu skladovať. Ktorú známu úlohu teórie grafov tu možno využiť?

4. kapitola

LINEÁRNE PROGRAMOVANIE — ZBRAŇ V RUKÁCH EKONÓMA

4.1. Základné pojmy a úlohy

Ak c, $c_1, \ldots, c_n$ sú konštanty (u nás budú vždy reálne) a $x_1, \ldots, x_n$ sú nezávisle premenné, voláme funkciu

$$L(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c$$

lineárnou funkciou (n premenných).

Vzťah

$$L(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

sa volá lineárna rovnica. Ak v tejto rovnici nahradíme znamienko $=$ hociktorým zo znamienok $>$, $<$, $\geqq$, $\leqq$, dostaneme lineárnu nerovnicu. Prvé dva prípady („ostré" nerovnosti) nebudeme uvažovať, v praxi sa temer nevyskytujú.

Lineárne rovnice a nerovnice sa volajú lineárne podmienky.

Všeobecná úloha lineárneho programovania sa dá formulovať takto:

Nájsť maximum lineárnej funkcie na množine, určenej lineárnymi podmienkami.

Čo je to isté, ako:

Nájsť maximum funkcie $L(x_1, \ldots, x_n)$ za predpokladu, že sa splnia podmienky

$$
\begin{aligned}
&L_1(x_1, \ldots, x_n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&L_{m_1}(x_1, \ldots, x_n) = 0,\\
&L_{m_1+1}(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&L_{m_1+m_2}(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0.
\end{aligned}
$$

Poznamenávame, že keby išlo o hľadanie minima funkcie $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c$, bolo by to to isté, ako hľadanie maxima funkcie $(-c_1)\,x_1 + (-c_2)\,x_2 + \ldots + (-c_n)\,x_n - c$, ktorá je tiež lineárna. Podobne pri opačnej nerovnici ($\leqq$) stačí previesť všetky členy na jej druhú stranu.

Možno sa pozastaviť nad slovom „programovanie" v názve tejto matematickej disciplíny, pretože tu znamená isto niečo celkom iné, ako programovanie na samočinných počítačoch. Dochádza tu k nežiadúcemu javu, že dva rôzne pojmy sa označujú tým istým názvom (homonymum). Je to dôsledok historického vývoja, pretože vznik lineárneho programovania aj začiatok využívania počítačov spadajú približne do toho istého obdobia.

4.2. Úloha o skladbe výroby

Táto úloha je typickou aplikáciou lineárneho programovania. Stretávame sa s ňou vtedy, keď podnik vyrába viac druhov výrobkov, pričom niektoré z nich vyrába na tých istých strojoch, prípadne z tej istej suroviny. Slovo „surovina" tu chápeme o niečo všeobecnejšie, ako zvyčajne. Za surovinu považujeme napríklad aj elektrický prúd, aj výrobnú kapacitu stroja, proste všetko, čo nám obmedzuje rozsah výroby.

4.2.1. Všeobecná formulácia úlohy. Nech n je počet druhov výrobkov, pri výrobe ktorých sa používa m

druhov surovín. Nech sú disponibilné množstvá surovín $b_1, \ldots, b_m$ a nech na výrobu jednotkového množstva j-teho druhu výrobkov je potrebné množstvo a_{ij} i-tej suroviny. Nech jednotkové množstvo j-teho výrobku prinesie podniku zisk c_j finančných jednotiek. Hľadané množstvá vyrábaných výrobkov si označme $x_1, \ldots, x_n$. Úlohou je nájsť maximum cieľovej funkcie

$$z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \tag{0}$$

za predpokladu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqq b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \geqq b_m, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0. \tag{2}$$

Predpoklad (1) žiada, aby sa nespotrebovalo viac suroviny, než je disponibilná zásoba. Predpoklad (2) zas nevraví nič iné, než aby sa výrobky vyrábali a neničili.

4.2.2. Príklad. I keď zadanie tohto príkladu vyvolá možno úsmev, jeho inštruktívna hodnota je nesporná. Majme dielňu na výrobu krompáčov a lopát. Keby dielňa vyrábala celý deň len lopaty, vyrobila by ich 55, keby len krompáče, tak by ich vyrobila 110. Ďalej je známe, že plechu dostane denne dielňa maximálne na 40 lopát a železa maximálne na 70 krompáčov. Dreva na násady dostane maximálne na 80 kusov denne. Napokon predpokladajme, že s odbytom týchto výrobkov niet ťažkostí a že jeden krompáč prinesie zisk 3 Kčs a jedna lopata 4 Kčs. Otázka, je, koľko krompáčov a koľko lopát treba vyrobiť, aby sa dosiahol maximálny zisk.

Označme počet vyrobených krompáčov x a lopát y. Zisk, ktorý prinesú, je

$$z = 3x + 4y \tag{0a}$$

a tuto funkciu treba teda maximalizovať.

Čísla x, y musia spĺňať tieto podmienky:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{110} + \frac{y}{55} \leqq 1 \Leftrightarrow x + 2y &\leqq 110, \\ x &\leqq 70, \\ y &\leqq 40, \\ x + y &\leqq 80, \end{aligned}\right. \tag{1a}$$

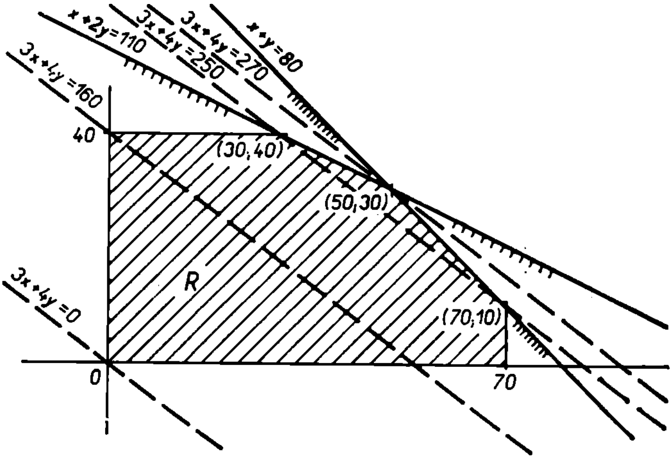
$$\left\{\begin{aligned} x &\geqq 0, \\ y &\geqq 0. \end{aligned}\right. \tag{2a}$$

Prvá nerovnica vyplýva z toho, že na výrobu jedného krompáča treba $1/110$ dňa, teda na x krompáčov $x/110$ dňa. Podobne na y lopát $y/55$ dňa, čo spolu nesmie prevýšiť jeden deň.

Množina bodov roviny (x, y), ktoré vyhovujú lineárnej nerovnici, je polrovina, ohraničená priamkou, ktorej rovnicu dostaneme, keď v nerovnici nahradíme znamienko nerovnosti rovnítkom.

Spoločná časť všetkých šiestich polrovín, určených nerovnicami (1a) je na obr. 32 vyšrafovaná a označená R. Z tejto množiny prípustných riešení treba vybrať taký bod (x, y), v ktorom funkcia $3x + 4y$ nadobúda svoje maximum.

Uvážme množinu priamok s rovnicami $3x + 4y = c$, kde c je ľubovoľné číslo. Niektoré z nich sme si vyznačili na obr. 32 čiarkovane. V každom bode (x, y) takejto priamky nadobúda funkcia $3x + 4y$ hodnotu c. Táto hodnota je teda tým väčšia, čím je priamka ďalej od počiatku a maximálnu hodnotu dostane na priamke, ktorá ako posledná má ešte s množinou prípustných riešení R spoločný bod. Na obr. 32 je to priamka $3x + 4y = 270$, ktorá má s R spoločný bod $x = 50$, $y = 30$. To znamená, že optimálne riešenie je vyrábať denne 50 krompáčov a 30 lopát. Toto riešenie prinesie potom zisk 270 Kčs denne.



Obr. 32

Grafická metóda riešenia, ktorú sme použili v tomto prípade, je vhodná len na úlohy s dvoma premennými, i keď šikovný deskriptivár by si mohol trúfnuť i na trojrozmernú úlohu. Pre viac, ako tri premenné je jej použitie prakticky vylúčené. Bolo preto treba vypracovať inú metódu.

4.3. Simplexová metóda

Simplexová metóda na riešenie všeobecnej úlohy lineárneho programovania má v tejto teórii asi také významné postavenie, ako Ford-Fulkersonov algoritmus v teórii dopravných sietí.

Simplexová metóda využíva pri riešení všeobecnej úlohy lineárneho programovania niektoré vlastnosti množiny riešení, ktoré sa dali vycítiť aj v našom predošlom dvojrozmernom prípade.

Podobne, ako v dvojrozmernom priestore, ktorého prvky sú body (x, y), aj v n-rozmernom priestore, ktorého prvky sú body $(x_1, \ldots, x_n)$, platí, že na jednoznačné určenie bodu treba n navzájom nezávislých lineárnych rovníc

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_n + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{gathered}$$

Rovnice voláme lineárne nezávislé, ak žiadnu z nich nemožno dostať ako lineárnu kombináciu ostatných, tj. že žiadnu z nich nedostaneme, ak každú zo zvyšných rovníc vynásobíme nejakým číslom a sčítame ich. Tak napríklad rovnice $x + y + z = 1$; $x - 2y + 2z = 5$; $3x - 3y + 5z = 11$ sú lineárne závislé, pretože tretia je súčet prvej a dvojnásobku druhej.

Podobne, ako v dvojrozmernom prípade, sa dá dokázať, že ak na množine *prípustných* riešení, určených nerovnicami (1) a (2), existuje maximum lineárnej funkcie

$$z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

tak ho táto funkcia nadobudne v jednom z bodov, ktoré dostaneme, ak n nezávislých nerovníc zpomedzi (1) a (2) zmeníme na rovnice.

Simplexová metóda postupuje tak, že

1. Zvolí jeden z takých bodov

2. Rozhodne či tento bod je prípustným (oporným) riešením. Ak áno, prejde ku 3., ak nie, zistí, či je možné voľbou susedného bodu dostať sa bližšie k množine prípustných riešení. Ak áno zvolí ten bod a vykoná znovu krok 2. Ak nie znamená to potom, že množina oporných riešení je prázdna a úloha je sporná.

3. Rozhodne, či oporné (prípustné) riešenie je už optimálne (tj. či maximalizuje cieľovú lineárnu funkciu). Ak áno, je postup skončený. Ak nie, zistí, či sa možno prechodom do susedného bodu dostať bližšie k optimu. Ak áno, zvolí ten bod a znovu vykoná krok 3. Ak nie, znamená to, že cieľová funkcie nemá na množine prípustných riešení maximum, čiže je neohraničená.

Poznamenávame, že ak máme bod, určený tak, že zpomedzi nerovníc (1) a (2) vyberieme n a zameníme rovnicami, za susedný k nemu považujeme bod, ktorý dostaneme vynechaním jednej z určujúcich rovníc a jej nahradením inou (ktorá bola predtým nerovnicou).

Pri pohľade na simplexovú metódu vidíme, že sa vlastne skladá z rozhodovaní a prechodov k susedným bodom. Určenie pravidiel rozhodovania je pomerne jednoduché, ale prechody k susedným bodom treba vykonávať tak, aby boli prehľadné, jednoduché a nespotrebovali príliš veľa operácií. O tom, ako na to, nám povie následujúci odsek.

4.3.1. Modifikovaná Jordanova eliminácia. Násobme nerovnice (1) číslom (—1), odčítajme od nich po rade čísla $-b_1, \ldots, -b_m$ a označíme ľavé strany týchto ne rovníc po rade $y_1, \ldots, y_m$. Dostaneme

$$(3)\quad \begin{cases} y_1 = -a_{11}x_1 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1 \geqq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = -a_{m1}x_1 - \ldots - a_{mn}x_n + b_m \geqq 0 \end{cases}$$

a doplníme k nim

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 \geqq 0 \\ \ldots \\ x_n \geqq 0 \end{cases}$$

Máme teda $m + n$ nezáporných premenných $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$.

	$-x_1$ . . . . $-x_j$ . . . . $-x_n$	1
y_1	a_{11} . . . . a_{1j} . . . . a_{1n}	b_1
y_i	a_{i1} . . . . a_{ij} . . . . a_{in}	b_i
y_m	a_{m1} . . . . a_{mj} . . . . a_{mn}	b_m

Tab. 6

Vzťahy (3) môžeme formálne zapísať v tvare tabuľky 6. Túto tabuľku treba rozumieť tak, že hodnoty, napísané v riadku vľavo od prvej zvislej čiary, sa rovnajú lineárnej kombinácii hodnôt, uvedených nad tabuľkou, pričom koeficienty sú v príslušnom riadku tabuľky. Teda napríklad

$$(4)\quad y_i = -a_{i1}x_1 - \ldots - a_{ij}x_j - \ldots - a_{in}x_n + b_i.$$

Predpokladajme, že číslo $a_{ij} \neq 0$. Potom ním môžeme vydeliť rovnosť (4) a vyjadriť z nej x_j:

$$(5)\quad x_j = -\frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 - \ldots - \frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}}x_{j-1} - \frac{1}{a_{ij}}y_i - \\ - \frac{a_{i,i+1}}{a_{ij}}x_{i+1} - \ldots - \frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n + \frac{b_i}{a_{ij}}.$$

Po dosadení (5) do všetkých rovníc, okrem j-tej, a po nahradení j-tej rovnice rovnicou (5) dostaneme v (3)

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
& y_1 = -\left(a_{11} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{ij}}\right)x_1 - \ldots - \frac{a_{1j}}{a_{ij}}\,y_i - \ldots - \\
& -\left(a_{1n}\,\frac{a_{in}a_{1j}}{a_{ij}}\right)x_n + \left(b_1 - \frac{b_i a_{1j}}{a_{ij}}\right), \\
& \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
& x_j = -\frac{a_{i1}}{a_{ij}}\,x_1 - \ldots - \frac{1}{a_{ij}}\,y_i - \ldots - \frac{a_{in}}{a_{ij}}\,x_n + \frac{b_i}{a_{ij}}, \\
& \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
& y_m = -\left(a_{m1} - \frac{a_{i1}a_{mj}}{a_{ij}}\right)x_1 - \ldots + \frac{a_{mj}}{a_{ij}}\,y_i - \ldots - \\
& -\left(a_{mn} - \frac{a_{in}a_{mj}}{a_{ij}}\right)x_n + \left(b_m - \frac{b_i a_{mj}}{a_{ij}}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

a (samozrejme)

$$
(7)\qquad \begin{aligned} & x_1 \geqq 0, \ldots, y_i \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, y_1 \geqq 0, \ldots, \\ & \qquad x_j \geqq 0,\ \ldots, y_m \geqq 0. \end{aligned}
$$

Podobne ako vzťahy (3), môžeme i (6) zapísať do tabuľky (tab. 7).

Pre priamy prechod od tab. 6 ku tab. 7 platia teda tieto pravidlá:

1. Ak chceme navzájom zameniť premenné y_i a x_j, musí byť $a_{ij} \neq 0$. Tento prvok nazveme riešiaci prvok; podobne riadok a stĺpec, u ktorých sa tento prvok nachádza, voláme riešiace a orámujeme ich čiarkovane.

2. Nahradíme riešiaci prvok jeho obrátenou hodnotou.

3. S výnimkou riešiaceho prvku nahradíme každý prvok riešiaceho riadku ním samým, podeleným riešiacim prvkom.

4. S výnimkou riešiaceho prvku nahradíme každý prvok riešiaceho stĺpca ním samým, podeleným riešiacim prvkom s opačným znamienkom.

5. Pri nahradzovaní prvku a_{pr} mimo riešiaci riadok a stĺpec použijeme ešte tri prvky, ktoré spolu s ním tvoria obdĺžnik, a síce tieto:

	$-x_1$	$-y_i$	$-x_n$	1
y_1	$\left(a_{11}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{ij}}\right), \ldots$	$-\frac{a_{1j}}{a_{ij}}; \ldots$	$\left(a_{1n}-\frac{a_{in}a_{1j}}{a_{ij}}\right)$	$b_1-\frac{b_i a_{1j}}{a_{ij}}$
x_j	$\frac{a_{i1}}{a_{ij}}, \ldots$	$\frac{1}{a_{ij}}; \ldots$	$\frac{a_{in}}{a_{ij}}$	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
y_m	$\left(a_{m1}-\frac{a_{i1}a_{mj}}{a_{ij}}\right), \ldots$	$-\frac{a_{mj}}{a_{ij}}; \ldots$	$\left(a_{mn}-\frac{a_{in}a_{mj}}{a_{ij}}\right)$	$b_m-\frac{b_i a_{mj}}{a_{ij}}$

Tab. 7

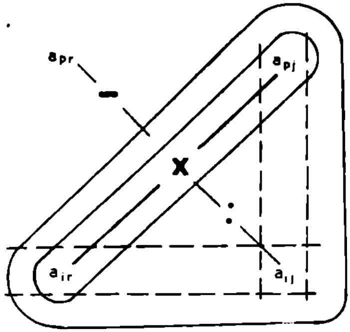
a_{pj} — prvok v riešiacom stĺpci a v tom istom riadku ako nahradzovaný

a_{ir} — prvok v riešiacom riadku a v tom istom stĺpci, ako nahradzovaný

a_{ij} — riešiaci prvok.

Vytvoríme súčin $a_{ir}a_{pj}$ prvkov v druhej uhlopriečke než je riešiaci prvok, tento súčin podelíme riešiacim prvkom a výsledok odčítame od nahradzovaného prvku.

Schématicky:



Prechod od tab. 6 ku tab. 7 sa volá modifikovaná Jordanova eliminácia.

Hoci modifikovanú Jordanovu elimináciu využijeme najmä pri simplexovej metóde, možno ju použiť aj na iné ciele. Majme napríklad systém štyroch rovníc o štyroch neznámych

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 + 11 &= 0 \\
-x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2 &= 0 \\
-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 1 &= 0 \\
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Tieto rovnice môžeme prepísať do tabuľky

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
0	—3	—2	5	—1	11
0	1	—1	—2	—2	2
0	1	—2	—1	1	—1
0	—2	—1	—1	—1	—1

Zvoľme si za riešiaci prvok $a_{21} = 1$ a zameňme druhú nulu za x_1:

	0	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
0	3	—5	—1	—7	17
x_1	1	—1	—2	—2	2
0	—1	—1	1	3	—3
0	2	—3	—5	—5	3

prvý stĺpec môžeme vynechať, pretože násobením nulou dostaneme len nulu. Podobne zameníme x_3 za tretiu nulu:

	$-x_2$	$-x_4$	1
0	—6	—4	14
x_1	—3	4	— 4
x_3	—1	3	— 3
0	—8	10	—12

x_4 za poslednú nulu:

	$-x_2$	1
0	—9,2	9,2
x_1	0,2	0,8
x_3	1,4	0,6
x_4	—0,8	—1,2

a napokon x_2 za prvú nulu

	1
x_2	—1
x_1	1
x_3	2
x_4	—2

Teda riešenie je $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. Záverom treba poznamenať, že modifikovaná Jordanova eliminácia je len málo odlišná od obyčajnej Jordanovej eliminácie. Jediný rozdiel je v tom, že pri prechode premennej zhora na bok sa mení znamienko a vďaka tomu sú opačné znamienka v riešiacom riadku a stĺpci.

	$-x_1$ . . . . $-x_j$ . . . . $-x_n$	1
y_1 y_i y_m	a_{11} . . . . a_{1j} . . . . a_{1n} a_{i1} . . . . a_{ij} . . . . a_{in} a_{m1} . . . . a_{mj} . . . . a_{mn}	b_1 b_i b_m
z	$-c_1$ . . . . $-c_j$ . . . . $-c_n$	0

Tab. 8

4.3.2. Simplexová tabuľka. Podmienku (3), ako aj cieľovú funkciu (0) zapíšeme do tabuľky 8. Táto tabuľka nám nielen ukáže závislosť premenných $y_1, \ldots, y_m$ a z na $x_1, \ldots, x_n$. Súčasne vyjadrí tých n nerovnice spomedzi nerovníc (2) a (3), tj. spomedzi nerovníc

$$(7) \qquad x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0\,, \quad y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0\,,$$

ktoré sa menia na rovnice pri určovaní riešenia (= bodu v n-rozmernom priestore). Vždy to budú tie, ktorých premenné sú nadpísané nad tabuľkou (teda na začiatku $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$). Za tohto predpokladu budú hodnoty v poslednom stĺpci vyjadrovať hodnoty zvyšných premenných $y_1, \ldots, y_m, z$.

4.3.3. Vyhľadanie prípustného riešenia. Simplexová tabuľka 8 nám vyjadruje riešenie

$$(8) \qquad x_1 = 0, \ldots, x_n = 0, \; y_1 = b_1, \ldots, y_m = b_m,$$

pri ktorom cieľová funkcia nadobúda hodnotu $z = 0$. Toto riešenie je prípustným riešením práve vtedy, keď vyhovuje nerovniciam (7), tj. keď $b_1 \geqq 0, \ldots, b_m \geqq 0$. Ak toto platí, máme už prípustné riešenie a prejdeme k hľadaniu optimálneho riešenia, ktoré si opíšeme neskôr. Ak je niektoré $b_i < 0$, nie je riešenie (8) prípustné a pokusíme sa prechodom k susednému bodu dosiahnúť prípustné riešenie, alebo sa k nemu aspoň priblížiť.

Predpokladáme pritom, že žiadne číslo z $b_1, \ldots, b_m$ sa nerovná nule. Ak niektoré $b_k = 0$, volá sa tento prípad degenerovaný a treba ho riešiť niektorou špeciálnou metódou; jednou z nich je ten fígeľ, že namiesto $b_k = 0$ položí sa $b_k = \varepsilon > 0$. ε je tu číslo o niekoľko rádov menšie, ako čísla $b_1, \ldots, b_n$ a teda toto malé posunutie nemôže ovlivniť výsledok riešenia; tejto metóde sa hovorí ε-nová metóda na odstránenie degenerácie.

Vráťme sa teda k predpokladu, že $b_i < 0$ a žiadne z čísel $b_1, \ldots, b_m$ nie je nulové. Pripomeňme si, že za susedný bod (ktorý určuje susedné riešenie) považujeme ten, v ktorom jednu z rovností (8) vynecháme a nahradíme inou, ktorá bola predtým nerovnosťou.

To ale znamená, že jedna z premenných nad tabuľkou sa zamení s niektorou z premenných vľavo od tabuľky (samozrejmé okrem z), čiže nevykoná sa nič iné, ako modifikovaná Jordanova eliminácia. Treba len určiť, ktorú zámenu vykonať, tj. ktorý prvok zvoliť za riešiaci.

4.3.3.1. Voľba riešiaceho stĺpca. Ak $b_i < 0$, zvolíme za riešiaci stĺpec ten, ktorý má s i-tým riadkom spoločný záporný prvok. Ak je takých stĺpcov viac, volíme ktorýkoľvek. Prípad, že by taký stĺpec neexistoval si rozoberieme neskôr.

4.3.3.2. Voľba riešiaceho riadku. Ak už máme zvolený j-tý stĺpec za riešiaci, všímame si v každom riadku podiel člena v poslednom a riešiacom stĺpci. Za riešiaci riadok vezmeme k-ty, ak b_k/a_{kj} je najmenší spomedzi tých spomínaných podielov, ktoré sú kladné, a pritom aj $b_k > 0$. Ak takého niet, vezmeme za riešiaci ten prvok, pre ktorý je $b_k < 0$ $a_{kj} < 0$, ale b_k/a_{kj} najväčšie.

Po vykonaní modifikovanej Jordanovej eliminácie s riešiacim prvkom a_{kj} dostaneme v poslednom stĺpci v k-tom riadku číslo $b_k/a_{kj} > 0$ a pre $r \neq k$ v r-tom riadku číslo

$$b_r - \frac{b_k a_{rj}}{a_{kj}}$$

Ak $a_{kj} < 0$, $b_k < 0$ (a teda všetky $b_r < 0$) tak

$$b_r - \frac{b_k a_{rj}}{a_{hj}} = -a_{rj}\left(\frac{b_k}{a_{kj}} - \frac{b_r}{a_{rj}}\right) \geq 0$$

pretože $\dfrac{b_k}{a_{kj}}$ bolo najväčšie možné.

Ak $a_{kj} > 0$, $b_k > 0$, uvážme dva prípady

a) $b_r > 0$; vtedy

$$b_r - \frac{b_k a_{rj}}{a_{kj}} \begin{cases} \geqq b_r > 0 & \text{ak} \quad a_{rj} < 0 \\ = a_{rj}\left(\dfrac{b_r}{b_{rj}} - \dfrac{b_k}{a_{kj}}\right) \geqq 0 & \text{ak} \quad a_{rj} > 0. \end{cases}$$

b) $b_r < 0$; vtedy pri $a_{rj} < 0$ (čo isto platí pre $r = i$)

$$b_r - \frac{b_k a_{rj}}{a_{kj}} > b_r\,.$$

Vidíme, že po vykonaní eliminácie zostane nezáporné číslo všade tam, kde bolo $b_r > 0$. Naopak, počet záporných absolútnych členov buď poklesne, alebo ak zostane, vybraný i-tý absolútny člen sa zväčší a po konečnom počte krokoy sa nutne stane nezáporným. Po konečnom počte krokov sa teda napokon dostaneme k tabuľke, kde všetky $b_r > 0$ (prípadnú nulu odstránime ε-metódou) a takto postupne odstránime všetky záporné čísla z posledného stĺpca. Tým dostaneme prípustné riešenie, ktoré vyjadríme tak, že premenné nad tabuľkou položíme rovné nule a premenné vľavo položíme rovné číslam z posledného stĺpca.

Zostáva nám objasniť prípad, keď pri kroku 4.3.3.1 dôjdeme k riadku, napríklad i-temu, v ktorom $b_i < 0$, ale $a_{i1} \geqq 0, \ldots, a_{in} \geqq 0$. To však znamená, že pre $x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$ platí

$$y_i = -a_{i1}x_1 - \ldots - a_{in}x_n + b_i < 0$$

čo je v spore s predpokladom $y_i \geqq 0$. Úloha je teda sporná, nemá riešenie a nemusíme ju ďalej riešiť. Býva to zväčša svedectvom chyby pri jej formulácii.

4.3.4. Prechod k optimálnemu riešeniu. Podľa toho, čo sme si povedali, za optimálne považujeme to riešenie, pri ktorom cieľová funkcia nadobúda maximum. Bude to prípustné riešenie, pre ktoré v pravom dolnom rohu tabuľky máme najväčšie číslo. Lenže, ako poznáme, že niektoré iné riešenie nebude mať túto hodnotu ešte väčšiu?

	$-\eta_1 \ldots\ldots -\eta_j \ldots\ldots \eta_n$			1
η_{n+1}	$\alpha_{11} \ldots\ldots$	$\alpha_{1j} \ldots\ldots$	α_{1n}	β_1
η_{n+i}	$\alpha_{i1} \ldots\ldots$	$\alpha_{ij} \ldots\ldots$	α_{in}	β_i
η_{n+m}	$\alpha_{m1} \ldots\ldots$	$\alpha_{mj} \ldots\ldots$	α_{mn}	β_m
z	$\gamma_1 \ldots\ldots$	$\gamma_j \ldots\ldots$	γ_n	δ

Tab. 9

Predpokladajme, že sme už dospeli k tabuľke 9, v ktorej $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_m > 0$ a teda riešenie

$$\eta_1 = 0, \ldots, \eta_n = 0, \eta_{n+1} = \beta_1, \ldots, \eta_{n+m} = \beta_m$$

je prípustné. O tom, či je aj optimálne, rozhodne posledný riadok:

ak $\gamma_1 \geqq 0, \ldots, \gamma_n \geqq 0$ je riešenie optimálne, pretože

$$z = -\gamma_1\eta_1 - \ldots - \gamma_n\eta_n + \delta \leqq \delta$$

pričom rovnosť nastane pre $\eta_1 = 0, \ldots, \eta_n = 0$.

Ak je naopak niektorý člen záporný, napríklad $\gamma_j < 0$, tak zrejme $-\gamma_j\eta_j > 0$, $\eta_j > 0$ nám dá vyššiu hodnotu z ako $\eta_j = 0$ a teda riešenie nie je optimálne.

V tomto prípade volíme j-ty stĺpec ako riešiaci a riešiaci k-ty riadok volíme podľa pravidla 4.3.3.2.

Tak isto, ako v 4.3.3, aj tu všetky prvky posledného stĺpca (prípadne okrem δ) zostanú nezáporné, riešenie teda zostane oporné a namiesto člena δ budeme mať (pretože $\gamma_j < 0$, $(b_k/a_k) > 0$)

$$\delta - \frac{b_k\gamma_j}{a_{kj}} > \delta$$

čiže hodnota cieľovej funkcie vzrastie, priblížime sa k optimu.

Po konečnom počte krokov buď dosiahneme optimum, alebo prídeme k situácii, že $\gamma_j < 0$, ale v celom zvyšnom j-tom stĺpci niet kladného prvku. To však znamená, že pre všetky i vo výraze

$$\eta_i = -\alpha_{i1}\eta_1 - \ldots - \alpha_{ij}\eta_j - \ldots - \alpha_{in}\eta_n + \beta_n$$

je aj člen $-\alpha_{ij}\eta_j$, ktorý je nezáporný pre všetky η_j a teda $\eta_j > 0$ môže byť ľubovoľné veľké a i tak splní všetky ohraničenia. Keďže aj výraz pre z obsahuje člen $-\gamma_j\eta_j > 0$, môže jeho hodnota vzrastať nad všetky medze, funkcia z je tak na množine prípustných riešení neohraničená a teda jej maximum neexistuje.

I toto zvyčajne znamená, že pri zostavovaní úlohy došlo k chybe.

4.3.5. Príklad s krompáčmi a lopatami. Pre premenné x a y z tohto príkladu platia ohraničenia

$$\begin{aligned} y_1 &= -x - 2y + 110 \geq 0, \\ y_2 &= -x - y + 80 \geq 0, \\ y_3 &= -x + 70 \geq 0, \\ y_4 &= - y + 40 \geq 0, \end{aligned}$$

$$x \geqq 0\,, \quad y \geqq 0$$

pri ktorých treba maximalizovať cieľovú funkciu

$$z = 3x + 4y.$$

Tabuľka 10 predstavuje simplexovú tabuľku pre túto úlohu. Vidíme, že $x = 0$, $y = 0$ je prípustné, ale nie optimálne riešenie. Za riešiaci stĺpec si vezmeme napríklad prvý stĺpec (ale mohli by sme aj druhý). Riešiaci riadok je potom tretí ($70/1 < 80/1 < 110/1$) a modifikovanou

	$-x$	$-y$	1
y_1	1	2	110
y_2	1	1	80
y_3	1	0	70
y_4	0	1	40
z	-3	-4	0

Tab. 10

	$-y_3$	$-y$	1
y_1	-1	2	40
y_2	-1	1	10
x	1	0	70
y_4	0	1	40
z	3	-4	210

Tab. 11

	$-y_3$	$-y_2$	1
y_1	1	-2	20
y	-1	1	10
x	1	0	70
y_4	1	-1	30
z	-1	4	250

Tab. 12

	$-y_1$	$-y_2$	1
y_3	1	-2	20
y	1	-1	30
x	-1	2	50
y_4	-1	1	10
z	1	2	270

Tab. 13

Jordanovou elimináciou prejdeme k tabuľke 11, ktorá predstavuje prípustné riešenie $x = 70$, $y = 0$ s hodnotou $z = 210$. Ďalšími elimináciami sa cez tabuľku 12 dostaneme k tabuľke 13, ktorá má už všetky prvky v poslednom riadku kladné a teda riešenie $x = 50$, $y = 30$, pri ktorom $z = 270$ je optimálne.

4.3.6. Príklad. Nájsť maximum funkcie $z = x + 2y$ na množine, určenej podmienkami:

$$\begin{aligned} y_1 &= x + y - 10 \geqq 0, \\ y_2 &= -x + y + 1 \geqq 0, \\ y_3 &= {-y} + 8 \geqq 0, \end{aligned}$$

$$x \geqq 0\,, \quad y \geqq 0.$$

	$-x$	$-y$	1
y_1	-1	-1	-10
y_2	1	-1	1
y_3	0	1	8
z	-1	-2	0

Tab. 14

	$-y_2$	$-y$	1
y_1	1	-2	-9
x	1	-1	1
y_3	0	1	8
z	1	-3	1

Tab. 15

	$-y_2$	$-y_3$	1
y_1	1	2	7
x	1	1	9
y	0	1	8
z	1	3	25

Tab. 16

Tab. 14 je simplexovou tabuľkou pre tieto rovnice. Príslušné riešenie nie je ani prípustné, pretože medzi absolútnymi členmi je -10. Po dvoch elimináciach dostaneme tab. 16, ktorej zodpovedajúce riešenie $x = 9$, $y = 8$ je už nielen prípustné, ale aj optimálne. Cieľová funkcia pri ňom nadobúda hodnotu $z = 25$.

4.3.7. Príklad o rezných plánoch. Predpokladajme, že v továrni, kde sa vyrábajú dvere do bytov v novostavbách sa vyrábajú rámy (zárubne) týchto dverí z tyčí s profilom U, ktoré sú dlhé 6,5 m. Takýchto tyčí je k dispozícii 100. Treba určiť, ako tyče rezať, keď na rám jedných dverí sú potrebné dva kusy dlhé 2 m, a jeden kus dlhý 0,9 m pričom chceme dosiahnuť, aby sa zo spomínaných 100 tyčí vyrobilo čo najviac rámov (a teda odpad bol minimálny).

Jednu tyč môžeme rozrezať týmito spôsobmi:

1. na 3 kusy po 2 m, 0 kusov po 0,9 m a zvyšok 0,5 m,
2. na 2 kusy po 2 m, 2 kusov po 0,9 m a zvyšok 0,7 m,
3. na 1 kus po 2 m, 5 kusov po 0,9 m a zvyšok 0 m,
4. na 0 kusy po 2 m, 7 kusov po 0,9 m a zvyšok 0,2 m.

Rezný plán musí určiť čísla

x_1 — počet tyčí, ktoré sa budú rezať 1. spôsobom,
x_2 — počet tyčí, ktoré sa budú rezať 2. spôsobom,
x_3 — počet tyčí, ktoré sa budú rezať 3. spôsobom,
x_4 — počet tyčí, ktoré sa budú rezať 4. spôsobom.

Pre neznáme x_1, x_2, x_3, x_4 musí platiť

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 100$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0$$

x_1, x_2, x_3, x_4 sú celé čísla.

Tieto podmienky nestačia na plné určenie dovolenej množiny riešení a chýba nám aj cieľová funkcia.

Pri hľadaní cieľovej funkcie by sme mali vychádzať z toho, že našou snahou je dosiahnuť, aby sa z narezaných kusov dalo vyrobiť maximálne množstvo rámov. Lenže počet vyrobiteľných rámov nie je možné vyjadriť, ako lineárnu funkciu premenných x_1, x_2, x_3, x_4. Túto ťažkosť prekonáme istým šikovným obratom, ktorý sa v rôznych obmenách veľmi často používa pri aplikáciách lineárneho programovania.

Označme y počet rámov, ktoré môžeme z narezaných tyčí zhotoviť. Na tento počet rámov budeme potrebovať $2y$ kusov 2 m dlhých a y kusov 0,9 m dlhých. Pritom

x_1 tyčí, porezaných 1. spôsobom dá $3x_1$ ks 2 m a 0 ks 0,9 m,
x_2 tyčí, porezaných 2. spôsobom dá $2x_2$ ks 2 m a $2x_2$ ks 0,9 m,
x_3 tyčí, porezaných 3. spôsobom dá x_3 ks 2 m a $5x_3$ ks 0,9 m,
x_4 tyčí, porezaných 4. spôsobom dá 0 ks 2 m a $7x_4$ ks 0,9 m.

Teda musí platiť

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\geqq 2y, \\ 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 &\geqq y. \end{aligned}$$

Tieto a predchádzajúce nerovnice môžeme upraviť na tvar nasledovných podmienok

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2y \geqq 0, \\ y_2 &= 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 - y \geqq 0, \\ y_3 &= -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 100 \geqq 0, \end{aligned}$$

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0,$$

pri ktorých treba maximalizovať cieľovú funkciu $z = y$.

Túto úlohu máme zapísanú v tab. 17. Vidíme, že riešenie $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = y = 0$ je prípustné, ale nie optimálne. Ďalej vidíme že ide o degenerovaný prípad, pretože absolútne členy v 1. a 2. riadku sú nulové. Tu by sme mohli použiť ε-novú metódu na odstránenie degenerácie. V tab. 17 však nastala tá šťastná okolnosť, že napr.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-y$	1
y_1	-3	-2	-1	0	2	0
y_2	0	-2	-5	-7	1	0
y_3	1	1	1	1	0	100
z	0	0	0	0	-1	0

Tab. 17

v 2. stĺpci je v 1. aj 2. riadku záporné číslo. Ak v tomto prípade zvolíme druhý stĺpec za riešiaci, môžeme riešiaci riadok v súlade s 4.3.3.1 voliť tak, ako keby namiesto núl na konci 1. a 2. riadku boli malé kladné čísla ε, bez toho, že by sme ich tam museli písať. Riešiacim prvkom je potom $a_{32} = 1$ a elimináciou dostaneme tab. 18.

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	$-x_4$	$-y$	1
y_1	-1	2	1	2	2	200
y_2	2	2	-3	-5	1	200
x_2	1	1	1	1	0	100
z	0	0	0	0	-1	0

Tab. 18

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	$-x_4$	$-y_1$	1
y	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	100
y_2	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{7}{2}$	-6	$-\frac{1}{2}$	100
x_2	1	1	1	1	0	100
z	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	100

Tab. 19

	$-y_2$	$-y_3$	$-x_3$	$-x_4$	$-y_1$	1
y	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	120
x_1	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	40
x_2	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{17}{5}$	$\frac{1}{5}$	60
z	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	120

Tab. 20

Ďalšími elimináciami, ktoré sú našími pravidlami jednoznačne určené, prejdeme k tabuľkám 19 a 20. O prechode k tab. 21 však treba povedať viac.

	$-y_2$	$-y_3$	$-x_2$	$-x_4$	$-y_1$	1
y						125
x_1						75
x_3						25
z	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	125

Tab. 21

V poslednom riadku sú dve záporné čísla $\gamma_3 = \gamma_4 = -1/5$ v 3. a 4. stĺpci. Keby sme si hociktorý z nich zvolili za riešiaci, pravidlo 4.3.3.1 nám určí za riešiaci tretí riadok. Máme teda dve možnosti voľby riešiaceho prvku: $a_{33} = 12/5$, alebo $a_{34} = 17/5$. Keby sme však boli zvolili druhú možnosť, dostali by sme v poslednom riad ku a 3. stĺpci číslo

$$-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{5}{17}=-\frac{1}{5}+\frac{12}{85}<0$$

a teda riešenie by nebolo optimálne (kým pri prvej možnosti sme už optimum dosiahli).

Ďalej si všímame, že tabuľku 21 sme začali vypĺňať od posledného riadku a stĺpca. Keď totiž zistíme, že prvý až predposledný prvok posledného riadku sú nezáporné, je jasné, že sme dosiahli optimálne riešenie, ďalšie eliminácie už nebudú potrebné a netreba teda vypĺňať ani vnútro tabuľky.

Optimálnym riešením je $x_1 = 75$, $x_2 = 0$, $x_3 = 25$, $x_4 = 0$, $y = 125$. To znamená, že treba rozrezať 75 tyčí prvým a 25 tyčí tretím spôsobom. Dostaneme tak $75.3 + 25 = 250$ kusov dĺžky 2 m a $25.5 = 125$ kusov dĺžky 0,9 m. Tieto práve stačia na zhotovenie 125 rámov, čo je maximálny dosiahnuteľný počet.

Treba ešte poznamenať, že sme mali šťastie, že riešenie vyšlo celočíselné (vždy to tak nemusí byť!). Inak by sme museli hľadať riešenie odhadom v blízkosti neceločíselného optimálneho riešenia, pretože žiadnu z metód na riešenie celočíselnej úlohy sme nepreberali.

Mnohí čitatelia by mohli tiež namietať, že prvá nerovnica medzi našimi podmienkami by sa mohla nahradiť rovnicou. Majú pravdu a výsledné riešenie by muselo vyjsť rovnaké. Išlo by o tzv. zmiešanú úlohu s rovnicami a nerovnicami. Pri zostavovaní tabuľky pre ňu by sme pre žiadnu rovnicu nenapísali vľavo od tabuľky premennú, ale nulu. Potom by sme prvými elimináciami tieto nuly zľava eliminovali a vynechali každý stĺpec, nad ktorý sa elimináciou dostane nula. Tým by sa tabuľka vlastne zúžila, čo by najmä pri „ručnom“ spracovaní bola výhoda.

4.4. Dopravný problém

Majme, podobne, ako v kap. III, m dodávateľov toho istého tovaru, ktorí ponúkajú množstvá $a_1, \ldots, a_m$; ďalej n spotrebiteľov, ktorí tohto tovaru požadujú $b_1, \ldots, b_n$. Zvyčajne sa predpokladá, že

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = b$$

hoci metódou, ktorú si ukážeme, možno riešiť aj úlohu v ktorej sa tento predpoklad nesplní.

Ďalej predpokladajme (na rozdiel od kap. III), že niet kapacitných obmedzení. To znamená, že pri ľubovoľných i, j možno ľubovoľné množstvo tovaru (pokiaľ ho má dodávateľ k dispozícii a odberateľ ho požaduje) dopraviť od i-tého dodávateľa j-temu spotrebiteľovi. Predpokladajme tiež, že preprava jednotkového množstva tovaru na tomto smere stojí c_{ij} Kčs. Treba určiť množstvá x_{ij} tovaru, ktoré sa dopravia od i-tého dodávateľa j-temu spotrebiteľovi ($i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$) tak, aby sa prepravilo celé požadované množstvo b a dopravné náklady boli minimálne.

Toto je formulácia klasického dopravného problému, ktorý patrí do lineárneho programovania, pretože pri ňom treba minimalizovať lineárnu cieľovú funkciu

$$z = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} c_{ij} x_{ij}$$

za predpokladov

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n).$$

Riešiť túto úlohu simplexovou metódou by však bolo dosť zdĺhavé. Už napríklad pri štyroch dodávateľoch a piatich spotrebiteľoch by sme mali 9 rovníc pre 20 neznámych.

Vzhľadom na túto skutočnosť vypracovali matematici iné metódy, ktoré sú určené špeciálne pre túto úlohu a vedú k cieľu oveľa rýchlejšie, ako metóda simplexová. My si preberieme jednu z nich, metódu sovietskeho profesora A. L. Lurje.

Vychádzame pri nej z tabuľky 22, keď má táto najmenej toľko stĺpcov, ako riadkov. Ak nemá, tak vychádzame z preklopenej tabuľky 23. Pre metódu je proste výhodnejšie, keď má tabuľka viac stĺpcov, ako riadkov. Pretože tabuľka 23 sa od tabuľky 22 formálne vôbec nelíši, stačí, keď si riešenie popíšeme iba pre prvú z nich.

Dodávateľ \ Odberateľ	1 . . . . n	ponuka
1	c_{11} . . . . c_{1n}	a_1
.	. .	.
.	. .	.
.	. .	.
m	c_{m1} . . . . c_{mn}	a_m
požiadavka	b_1 . . . . b_n	b / spolu

Tab. 22

Odberateľ \ Dodávateľ	1 . . . . m	požiadavka
1	c_{11} . . . . c_{m1}	b_1
.	. .	.
.	. .	.
.	. .	.
m	c_{1n} . . . . c_{mn}	b_n
ponuka	a_1 . . . . a_m	b / spolu

Tab. 23

Metóda sa zakladá na nasledujúcej vete:

Veta. Ak $x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}$ je optimálne riešenie dopravného problému z tabuľky 22, zostane optimálnym aj pre dopravný problém, ktorý zodpovedá tabuľke, ktorá vznikne z tabuľky 22 tak, že k prvkom niektorého riadku vovnútri tabuľky pripočítame číslo d.

Dôkaz si vykonáme pre k-ty riadok. Po pripočítaní v ňom budeme mať prvky $\bar{c}_{k1} = c_{k1} + d, \ldots, \bar{c}_{kn} = c_{kn} + d$. V ostatných riadkoch budeme mať prvky $\bar{c}_{ij} = c_{ij}$. Hodnota cenovej funkcie, ak v tejto novej úlohe si zvolíme pôvodné riešenie, bude

$$\bar{z} = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}} \bar{c}_{ij}x_{ij} = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}} c_{ij}x_{ij} + d\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = z + da_k\,.$$

Pretože hodnota da_k nezávisí od voľby riešenia x_{ij}, hodnota $\bar{z}$ bude minimálna práve vtedy, kedy z, čiže optimálne riešenie pre jednu úlohu je takým i pre druhú a veta je dokázaná.

Postup algoritmu je takýto:

1. Pre každé j si vyhľadáme minimálny prvok μ_j v j-tom stĺpci tabuľky čísel c_{ij}.

2. Zakrúžkujeme si minimálne prvky v stĺpcoch. Pritom ak je v jednom stĺpci viac (rovnakých) minimálnych prvkov, zakrúžkujeme si každý z nich.

3. Vyhľadáme pseudooptimálne riešenie x_{ij}, ktoré má tieto vlastnosti:

I. $x_{ij} > 0 \Rightarrow c_{ij}$ je zakrúžkované (t. j. odberateľ odoberá len od dodávateľov, od ktorých sú dopravné náklady minimálne).

II. Súčet všetkého dodaného množstva

$$t = \sum_{i,j} x_{ij}$$

je maximálny možný.

Pri úlohách malého rozsahu vyhľadáme pseudooptimálne riešenie priamo odhadom, pri väčších postupujeme pomocou grafu z obrázku 22, v ktorom hrany z p do u budú konštruované podľa nezmenených zásad a v prostrednej časti spojíme hranou i-teho dodávateľa s j-tym spotrebiteľom, ak c_{ij} sme zakrúžkovali pri kroku 2. Tejto hrane pridelíme potom nekonečnú kapacitu (alebo rovnajúcu sa a_i). Maximálny tok v takejto sieti nám určí pseudooptimálne riešenie.

4. Ak $t = b$, je pseudooptimálne riešenie aj optimálne (vozíme len cez najlacnejšie cesty) a sme hotoví. Ak nie, znamená to, že sa nám nepodarilo previezť všetko množstvo tovaru a prejdeme ku kroku 5.

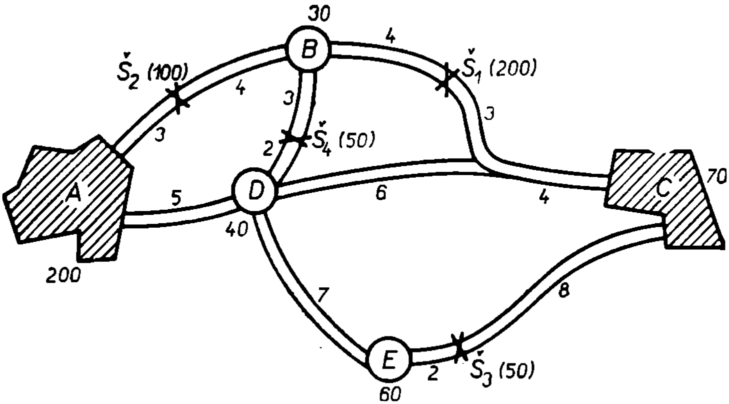
5. (teraz využijeme tvrdenie našej vety, zmeníme maticu $\|c_{ij}\|$ pripočítaním vhodného čísla d ku vhodným riadkom tak, aby sme dostali výhodnejšie položené zakrúžkované prvky). Ak pre niektorého dodávateľa platí, že existuje také $\varepsilon > 0$, že pri zvýšení jeho ponuky z a_k na $a_k + \varepsilon$, bolo by možné zvoliť taký pseudooptimálny plán, že by sme namiesto t mali $t + \varepsilon$ (t. j. mali by sme kam dodať i o niečo zvýšené ponúkané množstvo od k-teho dodávateľa), voláme k-ty riadok nedostatkovým. Riadky, ktoré nie sú nedostatkové, voláme dostatkové. Ku každému nedostatkovému riadku potom pripočítame istú hodnotu d, ktorú si určíme v kroku 6. Dostatkové riadky ponecháme bez zmeny (alebo, čo je to isté, necháme bez zmeny nedostatkové riadky a od dostatkových hodnotu d odčítame).

6. Pre všetky j vyhľadáme v j-tom stĺpci prvok δ_j, minimálny zpomedzi prvkov j-teho stĺpca, ktoré sa nachádzajú v dostatkových riadkoch. Ďalej vypočítame $d_j = \delta_j - \mu_j$. Napokon vezmeme všetky kladné čísla d_i a definujeme opravu d ako najmenšie z nich, t. j.

$$d = \min \{d_j : d_j > 0\}$$

S číslom d, ktoré sme si takto určili, vykonáme úpravy matice $\|c_{ij}\|$, ktoré sme opísali v kroku 5. S novo upravenou maticou sa zasa vrátime ku kroku 1.

Dá sa dokázať (dôkaz vynecháme, možno ho nájsť napríklad v [5]), že po konečnom počte úprav dospejeme k tomu, že pseudooptimálny plán bude už optimálny.



Obr. 33

4.4.1. Príklad. Na obr. 33 je cestná sieť, na ktorej sú mestá A, C a dediny B, D, E, v ktorých stavebný podnik stavia rôzne objekty. Na ich výstavbu potrebuje štrkopiesok, a to v denných množstvách v tonách podľa čísel, ktoré sme pripísali k jednotlivým obciam. Štrkopiesok dodávajú štrkoviská $Š_1$ — $Š_4$ v denných množstvách, ktoré sú v zátvorkách (taktiež v tonách). Čísla pri cestných úsekoch znamenajú ich dĺžky. Treba určiť, koľko štrku z ktorého štrkoviska na ktorú stavbu treba voziť, tak, aby celkový počet tonokilometrov bol minimálny.

Pokúsme sa najprv určiť rozvozný plán odhadom (bolo by vhodné, aby sa každý čitateľ pokúsil aj sám). Zvoľme napríklad

z $Š_2$ 100 t do A
z $Š_4$ 50 t do A
z $Š_1$ 50 t do A, 30 t do B, 70 t do C, 40 t do D a 10 t do E
z $Š_3$ 50 t do E.

Úhrnom sa pri týchto prepravách dosiahne nasledovný počet tonokilometrov:

$$3.100 + 7.50 + 11.50 + 4.30 + 7.70 + 9.40 + 16.10 + 2.50 = 300 + 350 + 550 + 120 + 490 + 360 + 160 + 100 = 2430 \text{ tkm}.$$

Prikročme teraz k určeniu optimálneho rozvozného plánu metódou Lurje.

Dodávateľ \ Odberateľ	A	B	C	D	E	ponuka
$Š_1$	11	4	$(7)^{70}$	9	16	200 dost.
$Š_2$	$(3)^{100}$	4	15	8	15	100 ned.
$Š_3$	14	14	8	9	$(2)^{50}$	50 ned.
$Š_4$	7	$(3)^{30}$	12	$(2)^{20}$	9	50 ned.
pož.	200	30	70	40	60	400
d_j	8	1	0	7	14	sp

Tab. 24

Zapíšeme si úlohu do tab. 24. Vyznačme krúžkom*) minimálne prvky μ_j v stĺpcoch a určme si maximálny možný rozvozný plán cez zakrúžkované smery (pseudooptimálne riešenie). Rozvážané množstvá si pripíšeme ku krúžkom vpravo hore. Vidíme, že $Š_1$ je dostatkový dodávateľ (ponúka 200, rozvezie len 70), kým zvyšné riadky sú nedostatkové, pretože keby mal $Š_2$ 101 namiesto 100, alebo $Š_3$ 51 namiesto 50, alebo $Š_4$ 51 namiesto 50, mali by ich kam dodať v rámci pseudooptimálneho riešenia cez zakrúžkované trasy.

Čísla δ_j sú teda všetky prvkami prvého riadku. Rozdiely d_j máme pod tabuľkou a vidíme, že $d = 1$, čo odčítame od 1. riadku. Dostaneme tab. 25, v ktorej pseudooptimálne riešenie znamená rozvoz o 20 väčší, ako v tab. 24. Nedostatkovými sú 2. a 3. riadok. Čísla δ_j vyznačíme štvorcovým orámovaním, vypočítame d_j a z nich $d = 4$, čo pripočítame k 2. a 3. riadku. Dostaneme tab. 26, kde je rozvozný plán opäť väčší, už 300. Zvyčajným spôsobom určíme $d = 3$, čo odčítame od 1. riadku. Dostaneme tab. 27, v ktorej celkové rozvezené množstvo, 390, je už len o 10 menšie, než je treba. Opakovaným použitím krokov 1 až 6 zistíme $d = 3$, čo pripočítame k 3. riadku. Dostaneme tab. 28, v ktorej už pseudooptimálny plán rozmiesťuje všetok šterkopiesok, je to teda riešenie optimálne. Určuje nám, aby išlo

z $Š_1$ 100 t do A, 30 t do B a 70 t do C
z $Š_2$ 100 t do A
z $Š_3$ 50 t do E
z $Š_4$ 40 t do D a 10 t do E

---

*) Z technických dôvodov nebolo možné dodržať v tab. 24 až 32 označenie uvedené v texte. V tab. sú vysadené miesto krúžku guľaté zátvorky a miesto štvorčeka hranaté zátvorky.

Ak chceme zistiť úhrnné tonokilometre, musíme ich vypočítať z východiskovej tab. 24 (prechody k ďalším tabuľkám zachovávali optimálne riešenie, ale nie jeho cenu!):

Odberateľ / Dodávateľ	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	ponuka
$Š_1$	10	$[(3)]^{30}$	$[(6)]^{70}$	8	15	200 d
$Š_2$	$(3)^{100}$	4	15	8	15	100 n
$Š_3$	14	14	8	9	$(2)^{50}$	50 n
$Š_4$	[7]	(3)	12	$[(2^{40})]$	[9]	50 d
pož.	200	30	70	40	60	400
d_j	4	0	0	0	7	sp

Tab. 25

Odberateľ / Dodávateľ	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	ponuka
$Š_1$	10	$(3)^{30}$	$(6)^{70}$	8	15	200 d
$Š_2$	$(7)^{100}$	8	19	12	19	100 n
$Š_3$	18	18	12	13	$(6)^{50}$	50 n
$Š_4$	$(7)^{10}$	(3)	12	$(2)^{40}$	9	50 n
pož.	200	30	70	40	60	400
d_j	3	0	0	6	9	sp

Tab. 26

$11.100 + 4.30 + 7.70 + 3.100 + 2.50 + 2.40 + 9.10 = 1100 + 120 + 490 + 300 + 100 + 80 + 90 = 2280$ tkm

čím sme oproti riešeniu, ktoré sme získali odhadom, získali 150 tonokilometrov denne, čo je približne 6 %.

Dodávateľ \ Odberateľ	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	ponuka
$Š_1$	$[(7)]^{90}$	$[(0)]^{30}$	$[(3)]^{70}$	5	12	200 d
$Š_2$	$(7)^{100}$	9	19	12	19	100 d
$Š_3$	18	18	12	13	$(6)^{50}$	50 n
$Š_4$	$(7)^{10}$	3	12	$[(2)]^{40}$	[9]	50 d
pož.	200	30	70	40	60	400 / sp
d_j	0	0	0	0	3	

Tab. 27

Dodávateľ \ Odberateľ	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	ponuka
$Š_1$	$(7)^{100}$	$(0)^{30}$	$(3)^{70}$	5	12	200
$Š_2$	$(7)^{100}$	9	19	12	19	100
$Š_3$	21	21	15	16	$(9)^{50}$	50
$Š_4$	(7)	3	12	$(2)^{40}$	$(9)^{10}$	50
pož.	200	30	70	40	60	400 / sp

Tab. 28

4.4.2. Priraďovací problém. V kap. III sme sa stretli s úlohou priraďovania pracovných miest pracovníkom. Vhodnosť priradenia miesta pracovníkovi sme hodnotili len „dvojstupňovo": vhodné — nevhodné.

Mohli by sme však použiť aj jemnejšie hodnotenie a priradiť každej dvojici pracovník — miesto nezáporné číselné ohodnotenie jeho vhodnosti, a to systémom záporných bodov, t. j. nula by znamenala najvhodnejšie priradenie a čím väčšie číslo, tým horšie. Celkové riešenie by sme potom považovali za optimálne, ak by súčet ohodnotení vybraných dvojíc bol minimálny. Problém vyhľadania tohto optimálneho riešenia je špeciálnym prípadom priraďovacieho problému, ktorého všeobecná formulácia je nasledovná:

Nech $\{D_1, \ldots, D_n\}$ a $\{O_1, \ldots, O_n\}$ sú dve rovnako početné množiny. Nech $\|c_{ij}\|$ je štvorcová matica s n riadkami a stĺpcami, ktorej všetky prvky sú nezáporné čísla. Treba určiť dvojice $(D_1, O_{j_1}), \ldots, (D_n, O_{j_n})$ tak, aby $(j_1, \ldots, j_n)$ bola permutácia čísel $(1, \ldots, n)$ a aby súčet

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_{ij_i}$$

bol minimálny.

Ľahko sa presvedčíme, že priraďovací problém je špeciálnym prípadom dopravného problému, v ktorom máme dodávateľov $D_1, \ldots, D_n$, pričom každý dodáva jednotku „produkcie" a odberateľov $O_1, \ldots, O_n$, z ktorých každý odoberá zasa jednotku produkcie. Ďalej máme cenovú maticu $\|c_{ij}\|$. Treba zvoliť čísla $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $i, j = 1, \ldots, n$ tak, aby súčet

$$z = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

bol minimálny, za predpokladu

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	
D_1	$(1)^1$	2	3	(2)	(1)	(0)	n
D_2	4	7	7	6	6	5	d
D_3	[2]	$[(1)]^1$	[(2)]	4	4	[3]	d
D_4	6	6	4	4	7	5	d
D_5	4	4	$(2)^1$	[3]	4	5	d
D_6	3	2	4	4	[2]	5	d
d_j	1	0	0	1	1	3	$d = 1$

Tab. 29

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	
D_1	(2)	3	4	(3)	(2)	$(1)^1$	n
D_2	4	7	7	6	6	5	d
D_3	(2)	(1)	$(2)^1$	4	4	3	n
D_4	6	6	4	4	7	5	d
D_5	4	4	(2)	$(3)^1$	4	5	n
D_6	[3]	[2]	[4]	[4]	$[(2)]^1$	[5]	d
d_j	1	1	2	1	0	4	$d = 1$

Tab. 30

Uvážme napríklad úlohu z tab. 29. Tu sa môžu čitatelia pokúsiť odhadnúť riešenie sami, prv, než ho nájdeme Lurjeho metódou.

Postupným prechodom až k tab. 32 dospejeme k optimálnemu priradeniu (D_1, O_6), (D_2, O_1), (D_3, O_2), (D_4, O_4), (D_5, O_3), (D_6, O_5), ktorého cena, podľa tabuľky 29, je $0 + 4 + 1 + 4 + 2 + 2 = 13$.

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	
D_1	(3)	4	5	(4)	3	$(2)^1$	n
D_2	[4]	7	7	6	6	5	d
D_3	$(3)^1$	(2)	(3)	5	5	4	n
D_4	6	6	4	$(4)^1$	7	[5]	d
D_5	5	[5]	$[(3)]^1$	[(4)]	[5]	6	d
D_6	(3)	(2)	4	(4)	$(2)^1$	5	n
d_j	1	3	0	0	3	3	$d = 1$

Tab. 31

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
D_1	(4)	5	6	5	4	$(3)^1$
D_2	$(4)^1$	7	7	6	6	5
D_3	(4)	$(3)^1$	4	6	6	5
D_4	6	6	4	$(4)^1$	7	5
D_5	5	5	$(3)^1$	(4)	5	6
D_6	(4)	(3)	5	5	$(3)^1$	6

Tab. 32

Cvičenia

1. Zistite, ktoré z úloh teórie grafov možno sformulovať ako úlohy lineárneho programovania.

2. Cestovné na električke je 1 Kčs, pokuta za cestovanie bez lístka 50 Kčs, náklady na skontrolovanie jedného cestujúceho revízorom sú 0,10 Kčs. Určete grafickou metódou optimálny pomer x počtu kontrolovaných cestujúcich ku všetkým cestujúcim! (Návod: označte po rade $f_1(x)$, $f_2(x)$ strednú hodnotu zisku dopravného podniku na jedného platiaceho, resp. neplatiaceho cestujúceho. Treba nájsť také x, pre ktoré je min $[f_1(x), f_2(x)]$ najväčšie. Riešenie je $x = 0{,}0197$, čiže kontrolovať treba 1,97 % cestujúcich).

DOSLOV

Končí sa naša malá prechádzka po niektorých častých aplikáciách matematiky v oblasti ekonomiky, organizácie a riadenia.

Neberte ju, milí čitatelia, iba ako pokus ukázať Vám niektoré matematické metódy, ktoré sa v praxi často používajú. Snažte sa v nej nájsť viac, urobiť si obraz o tom, ako pracujú aplikovaní matematici, ako uskutočňujú prechod od praktického problému k jeho matematickému riešeniu a v nie poslednom rade, ako riešenie praktických úloh stimuluje aj rozvoj „čistej" matematiky. Veď väčšina pojmov a metód čisto matematických, ktoré ste stretli v tejto knižke, bola pred niekoľkými desaťročiami ešte celkom neznáma.

Aplikovaná matematika je aj v súčasnom období stimulátorom pokroku v mnohých teoretických matematických disciplínach. Nie sú to len tie, o ktorých sme hovorili v tejto knižke, ale aj mnohé ďalšie, ako napríklad teória pravdepodobnosti, teória jazykov, teória automatov, teória optimalizácie a mnohé iné. Ak sa teda mnohí nematematici pýtajú: „Čo môžete v matematike stále nového vymýšľať, veď jedna a jedna sú stále dve?", tak nemalú zásluhu na neopodstatnenosti tejto otázky má aj aplikovaná matematika.

A vy, čo premýšľate o voľbe aplikovanej matematiky za svoje budúce povolanie, ste snáď získali presnejší obraz o ceste, ktorá by vás čakala. Je to iste cesta neľahká, ale pestrá a zaujímavá, pravdepodobne zaujímavejšia, než pri väčšine iných povolaní.

POUŽITÁ LITERATÚRA

[1] Černý, J. - Hejný, M.: Optimalizácia rytmu siete hromadnej dopravy vzhľadom na úhrnnú čakaciu dobu cestujúcich pre sieť typu Y. Doprava 1965, č. 6, 437—443.

[2] Černý, J. - Hejný, M.: Matematické riešenie optimalizácie rytmu siete typu Y. Sborník prací VŠD a VÚD 1967, č. 5, 5—15.

[3] Černý, J.: Úlohy o sústavách pravidelných mnohouholníkov na kružnici a ich aplikácie v doprave. Matematické obzory 1 (1972), č. 1, 51—59.

[4] Berge, C.: The theory of graphs and its applications. London 1962, (kniha je aj v ruskom preklade).

[5] Lurje, A. L.: Algoritm rešenija transportnoj zadači metodom približenija uslovno-optimaľnymi planami. Linejnoje programirovanije (zborník), IAN SSSR, Moskva 1961.

OBSAH

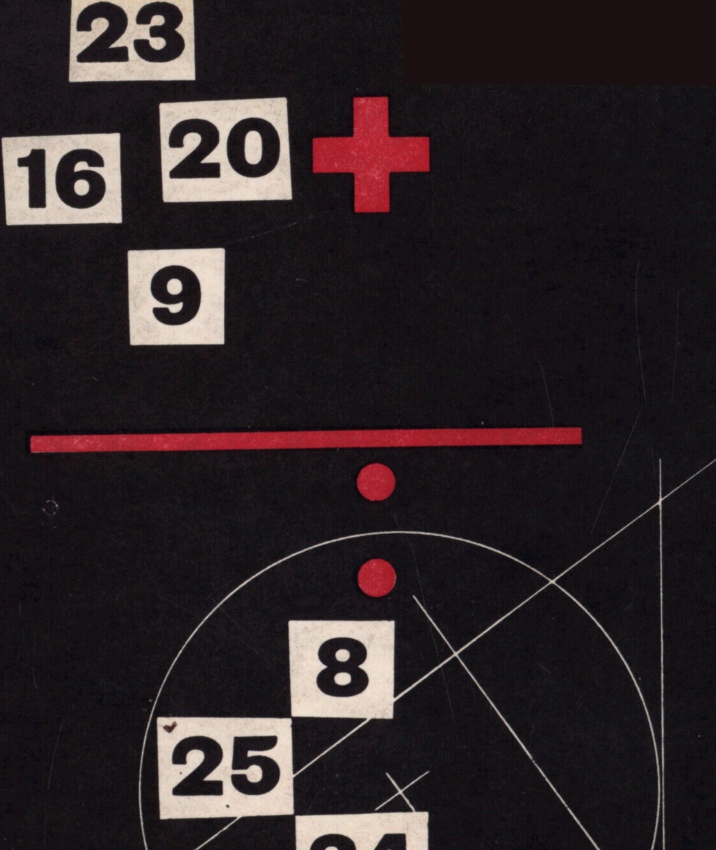
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JÁN ČERNÝ

O aplikáciach matematiky

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Praha 1, Panská 8
Řídí akademik Josef Novák
K tisku připravil Vladimír Doležal
Odpovědný redaktor Jiří Sixta
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 3657
Edice Škola mladých matematiků,
svazek 36
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
4,82 AA. 5,19 VA. 120 stran
Náklad 6000 výtisků. 1. vydání.
Praha 1976 508/21/82.5

23-053-76 03/2 Cena brož. výt. 7,— Kčs



23-053-76
03/2
Cena brož.
Kčs 7,—