ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

O PRAVDEPODOBNOSTI

37

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

O pravdepodobnosti

BELOSLAV RIEČAN
ZDENA RIEČANOVÁ

PRAHA 1976
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali RNDr. Roman Frič, CSc.,
RNDr. František Zítek, CSc.

PREDSLOV

Obsah tejto knižky v podstate nepresahuje rámec toho, čo sa vyučuje o pravdepodobnosti na gymnáziách. Pravda, osnovy dávajú pravdepodobnosť až do štvrtého ročníka. Okrem toho väčšinou sa tejto partii nevenuje veľká pozornosť.

Preto sme koncipovali knižku ako samostatný a elementárny výklad niektorých základných pravdepodobnostných pojmov. Tento výklad by mal byť prístupný širokému okruhu čitateľov.

Aj dodatky o kombinatorike a nekonečných radoch sú napísané ako samostatný celok. Pravdaže, v nich sme sa sústredili len na tie najnevyhnutnejšie poznatky, použité na niektorých miestach základného textu. Ostatne, pre nádejného matematika by mohlo byť práve zaujímavé samostatne zovšeobecniť to, čo sme vyložili na jednoduchých príkladoch.

Napokon príklady (riešené i neriešené — s pripojenými výsledkami) tvoria kostru celej knižky. Nemali sme v úmysle budovať teóriu, ale príkladmi ilustrovať niektoré myšlienky a problémy teórie pravdepodobnosti. Čitateľom prajeme, aby sa dočkali hodne radosti zo správne rozriešených úloh.

1. kapitola

UDALOSŤ A JEJ PRAVDEPODOBNOSŤ

Pojem pravdepodobnosti je nám známy z bežného života. Ak sme o niečom pevne presvedčení, hovoríme, že je to isté na 100 %. Ak však o niečom prehlásime, že máme 95% istotu, pripúšťame, že zo 100 prípadov asi v piatich dané tvrdenie neplatí.

V matematike vyjadrujeme pravdepodobnosť nejakej udalosti nie v percentách, ale odpovedajúcim číslom z intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Teda nehovoríme o pravdepodobnosti 57 %, 13 %, 20 % a pod., ale 0,57, 0,13, 0,2 a pod. Skutočnosť, že pravdepodobnosť nejakej udalosti je 0,2 intuitívne chápeme tak, že pri „veľkom počte" pokusov nastane tá udalosť asi v 1/5 prípadov.

Spočiatku budeme pracovať s tým azda najjednoduchším modelom: buďeme predpokladať, že daný experiment má len konečný počet možných výsledkov a všetky sú rovnako pravdepodobné. Napr., ak hádžeme kockou, ktorej steny sú očíslované číslami 1 až 6, máme 6 možných výsledkov; označme ich $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$. Ak je tá kocka pravidelná a homogenná, predpoklad, že všetky výsledky sú rovnako pravdepodobné (t. j., že každá číslica bude „rovnako často" padať) je prijateľný.

Definícia 1.1. *Nech* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots. \omega_n\}$ *je neprázdna množina. Podmnožiny množiny* Ω *budeme nazývať tiež udalosťami; špeciálne* $\emptyset$ *sa nazýva nemožná udalosť,* Ω *sa* *nazýva istá udalosť. Pravdepodobnosťou $P(A)$ udalosti A rozumieme číslo*

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

kde m je počet prvkov množiny A (počet prvkov prázdnej množiny $\emptyset$ je 0) a n je počet prvkov množiny Ω.

Príklad 1.1. Vykonajme hod pravidelnou kockou, na stenách ktorej je postupne jedna, dve, tri, ..., šesť bodiek. Aká je pravdepodobnosť udalosti, že na padnutej stene bude párny počet bodiek?

Riešenie. V našom prípade je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$, pričom prvok ω_i odpovedá stene, na ktorej je práve i bodiek. Pýtame sa teda na pravdepodobnosť udalosti

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\},$$

ktorá má tri prvky. Podľa definície platí $P(A) = 3/6 = 1/2$.

Príklad 1.2. V hromade hracích kariet je 32 dobre zamiešaných kariet. Vyberieme tri. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetky tri budú červene?

Riešenie. Prvkov základného priestoru A je toľko, koľko je možných rôznych trojíc kariet vybratých spomedzi 32. Ako je známe (pozri Doplnok I), trojprvkových kombinácií z 32 prvkov možno vytvoriť celkom

$$\binom{32}{3} = \frac{32.31.30}{3.2.1} = 4\,960.$$

Preto $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{4\,960}\}$. Každé ω_i je trojica kariet. Jednou trojicou je napr. trojica (červená sedma, červená osma, zelený túz). Označme ju ω_{i_0}. Udalosť A, ktorej pravdepodobnosť hľadáme pozostáva len z takých trojíc, v ktorých všetky karty sú červené. Uvedená trojica ω_{i_0} nepatrí do A (čo zapisujeme $\omega_{i_0} \notin A$). A obsahuje toľko prvkov (trojíc), koľko trojprvkových kombinácií možno vybrať spomedzi ôsmich prvkov. A to je

$$\binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56 \cdot$$

Preto

$$P(A) = \frac{56}{4\,960} = 0{,}011 \cdot$$

Príklad 1.3. Do stanice vchádza vlak s dvanástimi vozňami. Nastupuje doňho 7 cestujúcich. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetci siedmi pocestujú v rôznych vagónoch (t. j. v žiadnom vagóne nepocestuje viac ako jeden z nich)?

Riešenie. Podobne ako v predošlých príkladoch je $P(A) = m/n$, kde n je počet všetkých možných rozmiestnení 7 cestujúcich do 12 vagónov a m je počet takých rozmiestnení, pri ktorých sú každé dve osoby v dvoch rôznych vagónoch.

Číslo n je vlastne počet variácií s opakovaním 7-ej triedy z 12 prvkov. Prvého cestujúceho môžeme umiestniť do ľubovoľného z 12 vagónov. K ľubovoľnému umiestneniu prvého cestujúceho máme 12 umiestnení druhého, teda prvých dvoch cestujúcich môžeme umiestniť celkom $12.12 = 12^2$ spôsobmi, prvých troch $12.12.12 = 12^3$ spôsobmi atď. Vidíme teda, že $n = 12^7$.

Číslo m je zase počet variácií bez opakovania 7. triedy z 12 prvkov. Prvého cestujúceho môžeme umiestniť do ľubovoľného z dvanástich vagónov, druhého už len do ľubovoľného zo zvyšných jedenástich atď. Teda na umiestnenie všetkých siedmich máme možností celkom

$$m = 12.11.10.9.8.7.6 = \frac{12!}{5!}.$$

Preto

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12.11.10.9.8.7.6}{12.12.12.12.12.12.12} = 0{,}1114.$$

Napriek tomu, že formálne je riešenie príkladu 1.3 v poriadku, zdá sa, že výsledok nie je v súlade so skutočnosťou. Skúsenosti ukazujú, že nemožno akceptovať predpoklad, že nastúpenie cestujúceho do ľubovoľného z vozňov je rovnako pravdepodobné. Okrem toho cestujúci obvykle necestujú nezávisle jeden na druhom, ale vo väčších, či menších skupinkách. Použitý matematický model je nevhodný. (Pravdaže, ťažkosti uvedeného rázu nie sú špecialitou teórie pravdepodobnosti. S podobnými ťažkosťami treba rátať pri aplikovaní ľubovoľného matematického aparátu v praxi.)

Príklad 1.4. Predpokladajme, že v sérii 100 výrobkov je 5 chybných. Vyberme spomedzi tých 100 výrobkov náhodne 10. Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi týmito desiatimi výrobkami budú práve tri chybné?

Riešenie. Počet n všetkých desaťmiestnych výberov zo 100 výrobkov, tj. počet všetkých kombinácií desiatej triedy zo sto prvkov je

$$n = \binom{100}{10}.$$

Skutočnosť, že vyberáme náhodne znamená vlastne to, že každá z týchto desatíc (teda každý prvok základného priestoru) je rovnako pravdepodobná. Tri chybné výrobky spomedzi piatich môžeme vybrať $\binom{5}{3}$ spôsobmi. Zvyšných sedem výrobkov musí byť dobrých, teda vyberáme ich spomedzi 95 dobrých výrobkov. Na výber siedmich spomedzi 95 dobrých výrobkov máme $\binom{95}{7}$ možností. Ku každej z týchto sedmíc dobrých máme $\binom{5}{3}$ trojíc chybných výrobkov. Preto desatíc skúmanej vlastnosti (7 dobrých, 3 chybné) je

$$m = \binom{95}{7}\binom{5}{3},$$

čiže

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\binom{95}{7}\binom{5}{3}}{\binom{100}{10}}.$$

Príklad 1.5. Hádžeme dvoma hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť toho, že súčet bodiek na oboch kockách bude 9?

Riešenie. Tento príklad použijeme aj na to, aby sme si pripomenuli pojem kartézskeho súčinu dvoch množín. Kartézskym súčinom dvoch množín A, B (označenie $A \times B$) rozumieme množinu všetkých takých usporiadaných dvojíc (x, y), že $x \in A$, $y \in B$. V našom príklade je A množina výsledkov na prvej kocke, B je množina výsledkov na druhej kocke. Všetky možné výsledky pri hode dvoma kockami sú charakterizované všetkými dvojicami (i, j), kde $i = 1, 2, \ldots, 6$, $j = 1, 2, \ldots, 6$, teda kartézskym súčinom

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\} \times \{1, 2, \ldots, 6\}.$$

Základný priestor teda pozostáva z $n = 36$ prvkov. Podrobne rozpísané

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6),\\ (2,1), (2,2), \ldots, (2,6),\\ \vdots\\ (6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\}.$$

Napr. prvok (5,2) charakterizuje tú skutočnosť, že na prvej kocke padla stena s piatimi bodkami, na druhej stena s dvoma bodkami.

Udalosť M, ktorej pravdepodobnosť hľadáme pozostáva z týchto prvkov

$$M = \{(6,3), (3,6), (4,5), (5,4)\}.$$

teda $m = 4$ a

$$P(M) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Príklad 1.6. V telefónnej ústredni možno vytáčať trojmiestne čísla (0 môže byť aj na začiatku). Aká je pravdepodobnosť toho, že v náhodne vytočenom trojmiestnom čísle budú všetky cifry rôzne?

Riešenie. Všetkých možností je toľko, koľko je variácií s opakovaním tretej triedy z 10 prvkov 0, 1, 2, ..., 9. teda

$$n = 10^3.$$

Fakt, že sme vytáčali náhodne znamená, že všetky trojice sú rovnako pravdepodobné.

Do skúmanej udalosti A patria tie usporiadané trojice (i, j, k), v ktorých sú i, j, k navzájom rôzne. Počet m takýchto trojíc je počet všetkých variácií (bez opakovania) tretej triedy z 10 prvkov, teda

$$m = 10.9.8.$$

Preto

$$P(A) = \frac{10.9.8}{10.10.10} = 0,72.$$

Cvičenia

1.1. Na otvorenie trezoru je potrebné poznať určité trojmiestne číslo (nula môže byť aj na začiatku). a) Aká je pravdepodobnosť toho, že při 27 náhodno volených trojčísliach otvoríme trezor? b) Koľko volieb treba urobiť, aby pravdepodobnosť toho, že trezor otvoríme bola väčšia ako $1/3^3$?

1.2. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode dvoma hracími kockami padne na oboch to isté číslo?

1.3. V triede je 12 dievčat a 15 chlapcov. Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi prvými desiatimi podľa abecedy je práve 5 dievčat?

1.4. Aká je v Športke pravdepodobnosť výhry tretej ceny na jeden tip? (Zo 49 čísel tipujeme 6 čísel, pričom na tretiu cenu musíme uhádnuť práve štyri čísla.)

1.5. Do výťahu v dvadsaťposchodovej budove vstupuje 5 osôb. Aká je pravdepodobnosť toho, že každý výstúpi na inom poschodí? (Predpokladáme pritom, že vystupujú nezávisle na sebe a pravdepodobnosť vystúpenia na ktoromkoľvek poschodí je rovnaká.)

1.6. Aká je pravdepodobnosť toho, že dvaja náhodne vybratí ľudia nemajú ten istý mesiac a deň narodenia? (Na roku nezáleží, 29. február vylúčime z úvah.)

1.7. Na festivalové predstavenie kúpili si nezávisle po jednom do jedného radu lístky 3 Američania, 5 Francúzi, 2 Poliaci a 5 Sovieti. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetci príslušníci tej istej krajiny budú sedieť spolu?

Pravda, siahať po definícii pravdepodobnosti nemusí byť vždy najschodnejšou cestou. Niekedy je vhodné rozložiť danú udalosť na jednoduchšie, resp. vyjadriť ju pomocou iných udalostí. K tomu slúžia množinové operácie. Budeme používať tri.

Komplement A' množiny A je množina tých prvkov $\omega \in \Omega$, ktoré nepatria do A. Stručne zapísané, $A' = \{\omega \in \Omega; \omega \notin A\}$. V teórii pravdepodobnosti sa A' nazýva aj *opačnou udalosťou* k udalosti A.

Zjednotenie $A \cup B$ *množín* A, B je množina práve tých prvkov $\omega \in \Omega$, ktoré patria aspoň do jednej z množín A, B. (Ale môžu patriť aj do obidvoch!) Teda $A \cup B = \{\omega \in \Omega; \omega \in A$, alebo $\omega \in B\}$.

Konečne *prienik* $A \cap B$ množín A, B je množina práve tých prvkov $\omega \in \Omega$, ktoré patria súčasne do oboch množín A, B; $A \cap B = \{\omega \in \Omega; \omega \in A$ a $\omega \in B\}$.

Nech napr. A je udalosť spočívajúca v tom, že na hracej kocke padne stena s párnym počtom bodiek, B — padne stena s počtom bodiek väčším ako 2. Teda

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}\,, \quad B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}\,.$$

Potom

$$A' = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$

spočíva v tom, že padne stena s nepárnym počtom bodiek,

$$A \cap B = \{\omega_4, \omega_6\}$$

spočíva v tom, že padne stena, na ktorej sú štyri bodky, alebo stena, na ktorej je 6 bodiek; konečne

$$A \cup B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

nastane, ak padne stena s väčším počtom bodiek ako 1.

K tomu, aby sme vedeli vypočítať pravdepodobnosti udalostí A', $A \cap B$, $A \cup B$ je potrebné poznať počty prvkov množín A', $A \cap B$, $A \cup B$. (Označme ich $m(A')$, $m(A \cap B)$, $m(A \cup B)$ resp. $m(A)$, $m(B)$.) Najľahšie je to v prípade udalosti A'.

Ak udalosť A obsahuje $m(A) = m$ prvkov a celý priestor obsahuje n prvkov, tak udalosť A' obsahuje $n - m$ prvkov, totiž tie prvky z Ω, ktoré nepatria do A. Preto

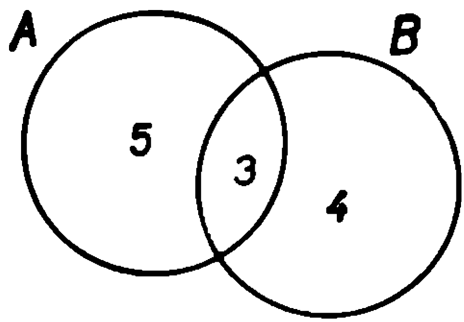
$$m(A') = n - m = n - m(A),$$

$$P(A') = \frac{m(A')}{n} = \frac{n - m(A)}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m(A)}{n} =$$

$$= 1 - P(A).$$

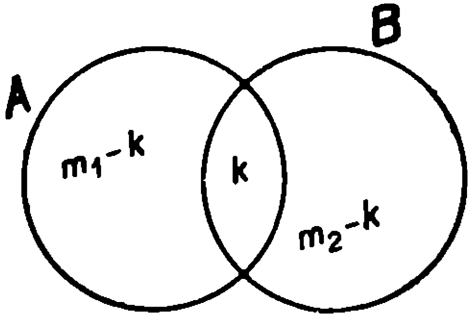
Pravdepodobnosť opačnej udalosti (k udalosti A) je teda číslo $1 - P(A)$.

V prípade udalostí $A \cap B$, $A \cup B$ je situácia komplikovaná tým, že počet prvkov množín $A \cap B$, $A \cup B$ nie je určený počtom prvkov množín A, B. $A \cap B$ môže byť napríklad prázdna množina $\emptyset$, dvojprvková ako v predošlom príklade a pod. Ak je ale známy počet prvkov $A \cap B$, už je známy aj počet prvkov množiny $A \cup B$. Nech napr. $m(A \cap B) = 3$, $m(A) = 8$, $m(B) =$



Obr. 1

$= 7$. Potom „mesiačik" $A \cap B'$ (množina tých ω, ktoré patria do A, ale nie do B; označuje sa tiež $A - B$) obsahuje $8 - 3 = 5$ prvkov. Celá množina A má 8 prvkov; z nich 3 patria aj do B, teda 5 je takých, čo partria do A a nepatria do B. Podobne zistíme, že množina $B \cap A'$ má $7 - 3 = 4$ prvky, teda množina $A \cup B$ má celkom $5 + 3 + 4 = 12$ prvkov.



Obr. 2

Prejdime k všeobecnému prípadu. Nech množina $A \cap B$ má k prvkov, množina A má m_1 prvkov, množina B má m_2 prvkov, t. j. $m(A \cap B) = k$, $m(A) = m_1$, $m(B) = m_2$. Potom množina $A \cap B'$ má $m_1 - k$ prvkov, množina $B \cap A'$ má $m_2 - k$ prvkov, teda počet prvkov množiny $A \cup B$ je

$$m(A \cup B) = (m_1 - k) + k + (m_2 - k) =$$

$$= m_1 + m_2 - k = m(A) + m(B) - m(A \cap B)\,.$$

Ak predelíme uvedenú rovnosť počtom n prvkov základného priestoru Ω, dostaneme

$$P(A \cup B) =$$

$$= \frac{m(A \cup B)}{n} = \frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n} - \frac{m(A \cap B)}{n} =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,.$$

Dokázané rovnosti

$$P(A') = 1 - P(A)\,, \qquad (1)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (2)$$

budú v ďalších príkladoch našim základným pracovným prostriedkom.

Všimnime si špeciálny, ale dôležitý prípad, kedy A, B nemajú spoločné prvky, t. j. $A \cap B = \emptyset$. O takýchto udalostiach hovoríme, že sú disjunktné, alebo, že sa navzájom vylučujú. V takom prípade

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)\,,$$

teda

$$P(A \cup B) = \frac{m(A \cup B)}{n} = \frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n} =$$

$$= P(A) + P(B)\,.$$

Pravdepodobnosť zjednotenia navzájom sa vylučujúcich udalostí sa rovná súčtu ich pravdepodobností:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)\,. \qquad (3)$$

Implikácia (3) je ostatne bezprostredným dôsledkom (2). Ak totiž $A \cap B = \emptyset$, tak $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$, teda

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0 = P(A) + P(B)\,.$$

Príklad 1.7. Hádžeme tromi hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň na jednej bude šesťka?

Riešenie. Ľahšie vypočítame pravdepodobnosť udalosti A: ani na jednej kocke nepadne šesťka. Skutočne

$$P(A) = \frac{5.5.5}{6.6.6} = \frac{5^3}{6^3}\,,$$

pretože všetkých usporiadaných trojíc z čísel 1, 2, ..., 6 je 6^3 a všetkých usporiadaných trojíc z čísel 1, 2, ..., 5 je 5^3. Skúmaná udalosť — aspoň na jednej kocke padne šestka — je opačnou k udalosti A. Preto pre jej pravdepodobnosť platí

$$P(A') = 1 - \frac{5^3}{6^3}.$$

Príklad 1.8. Opäť hádžeme tromi hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť, že padne nanajvýš jedna šestka?

Riešenie. Nech A_0 je udalosť: nepadne žiadna šestka, A_1 — padne práve jedna šestka, A — padne najviac jedna šestka. Potom $A = A_0 \cup A_1$, $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, teda

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1).$$

Zrejme

$$P(A_0) = \frac{5^3}{6^3}.$$

Ďalej, $A_1 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, kde B_i znamená, že na i-tej kocke padne šestka, ale na zvyšných dvoch nie. Teda napr. B_1 pozostáva zo všetkých trojíc $(6, i, j)$, kde $i \neq 6$, $j \neq 6$. Takých trojíc je 5.5 teda

$$P(B_1) = \frac{5^2}{6^3}.$$

Podobne

$$P(B_2) = P(B_3) = \frac{5^2}{6^3},$$

teda (vzhľadom na to, že B_1, B_2, B_3 se navzájom vylučujú)

$$P(A_1) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{3.5^2}{6^3},$$

$$P(A) = \frac{5^3}{6^3} + \frac{3 \cdot 5^2}{6^3} = 0{,}93.$$

Príklad 1,9. Hádžeme dvoma hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň na jednej padne šestka?

Riešenie. Podobnú úlohu sme riešili v príklade 1.7. Tentokrát nepoužijeme opačnú udalosť, ale rovnosť (2). Nech A je udalosť — šestka padne na prvej kocke, B — šestka padne na druhej kocke. Máme vypočítať $P(A \cup B)$;

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,.$$

Ale $P(A) = P(B) = 6/36$, $P(A \cap B) = 1/36$, teda

$$P(A \cup B) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Chvalabohu, pomocou opačnej udalosti výjde ten istý výsledok.

$$P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B') = 1 - \frac{5^2}{6^2} = \frac{11}{36}.$$

Konečne, prvky množiny $A \cup B$ možno systematicky vypísať:

(6,1), (6,2), . . ., (6,5)
(1,6), (2,6), . . ., (5,6)
(6.6)

Skutočne, $P(A \cup B) = \frac{11}{36}$.

Cvičenia

1.8. Aká je pravdepodobnosť toho, že dvaja náhodne výbratí ľudia majú v ten istý deň narodeniny?

1.9. Aká je pravdepodobnosť toho, že z r náhodne vybratých ľudí aspoň dvaja majú v ten istý deň narodeniny?

1.10. Skupinu z koľkých ľudí musíme mať, aby sme s pravdepodobnosťou väčšou ako 1/2 mohli tvrdiť, že aspoň dvaja členovia tej skupiny majú narodeniny v ten istý deň?

1.11. Do výťahu sedemposchodového domu nastupujú 3 osoby. Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň dve z nich vystúpia na tom istom poschodí? (Podobne ako inde predpokladáme, že vystupujú nezávisle na sebe a pravdepodobnosť vystúpenia na ľubovoľnom poschodí je rovnaká.)

1.12. Aká je pravdepodobnosť toho, že pri sedemnásobnom hode hracej kocky padne šestka a) práve dvakrát b) najviac dvakrát c) aspoň dvakrát?

1.13. Z dvanástich predajní mäsa v meste v štyroch predražujú tovar. Náhodne vyberieme na kontrólu 2 predajne mäsa. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) v oboch predražujú tovar b) v oboch predávajú bez predražovania c) aspoň v jednej predražujú tovar?

1.14. Medzi 10 dobrých žiaroviek bolo omylom primiešených 5 chybných. Náhodne vyberieme 3 z tých 15 žiaroviek. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) všetky tri sú dobré b) práve jedna je chybná c) aspoň jedna je chybná?

1.15. Do okresného mesta v okrese, v ktorom je 30 obcí sa schádzajú dvadsiati branci. Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň dvaja budú z tej istej obce?

Vlastnosť (3) môžeme zovšeobecnit na viac činiteľov ako 2. Už v príklade 1.6 sme to použili.

Príklad 1.10. Dokážte: Ak $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sú navzájom sa vylučujúce udalosti (t. j. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$), tak

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Riešenie. Dôkaz urobíme indukciou pomocou (3). Pre $n = 1$ uvedené tvrdenie platí ($P(A_1) = P(A_1)$). Predpo-

kladajme, že platí pre nejaké n. Máme ju dokázať pre $n + 1$. Majme teda $n + 1$ navzájom sa vylučujúcich udalostí $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ (t. j. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$).
Potom udalosti

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n, B = A_{n+1}$$

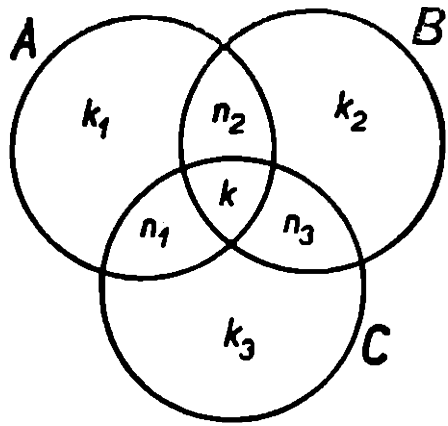
sú tiež disjunktné, t. j. $A \cap B = \emptyset$. Keby totiž existoval prvok $\omega \in A \cap B$, potom by existoval taký index i spomedzi $1, 2, \ldots, n$, že $\omega \in A_i$; súčasne $\omega \in A_{n+1}$, teda $\omega \in A_i \cap A_{n+1}$, čo nie je možné, pretože $i \neq n + 1$. Podľa (3) potom máme

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + P(A_{n+1}),$$

teda, ak použijeme indukčný predpoklad, dostaneme

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) = P(A_1) + \ldots +$$
$$+ P(A_n) + P(A_{n+1}).$$

Príklad 1.11. Skúsme sformulovať a dokázať tvrdenie



Obr. 3

analogické rovnosti (2) pre tri množiny, t. j. vyjadriť $P(A \cup B \cup C)$ pomocou $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ a pravdepodobností prienikov.

Riešenie. Zostrojme Vennov diagram. Máme ($m(E)$ — počet prvkov množiny E)

$$m(A \cup B \cup C) = k_1 + k_2 + k_3 + n_1 + n_2 + n_3 + k = (k_1 + n_1 + n_2 + k) + (k_2 + n_2 + n_3 + k) + (k_3 + n_1 + n_3 + k) - (n_1 + n_2 + n_3 + 2k) = m(A) + m(B) + m(C) - (n_1 + k) - (n_2 + k) - (n_3 + k) + k = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap C) - m(A \cap B) - m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)\,.$$

Dostali sme teda vzorec

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\,.$$

Teraz uvedený vzorec dokážeme pomocou vzťahu (2):

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C))\,.$$

Ale podľa toho istého vzťahu (2) je

$$P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) +$$

$$+ P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)) =$$
$$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)\,.$$

Preto

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$$
$$- P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B) +$$
$$+ P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$$
$$+ P(A \cap B \cap C)\,.$$

Cvičenia

1.16. Dokážte: Ak A, B sú ľubovoľné udalosti, tak $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$.

1.17. Nech A, B sú také udalosti, že $P(A \cup B) = 3/4$, $P(A') = 2/3$, $P(A \cap B) = 1/4$. Nájdite a) $P(A)$ b) $P(B)$ c) $P(A \cap B')$.

1.18. Dokážte: Ak A, B sú ľubovoľné udalosti, potom $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$.

1.19. Vyjadrite podobne ako v príklade 1.11 $P(A \cup B \cup C \cup D \cup E)$ pomocou $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$, $P(E)$ a pravdepodobností prienikov.

1.20. Nájdite vzorec pre výpočet $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ a dokážte ho indukciou.

Príklad 1.12. Na 5 vešiakov si 5 návštevníkov odložilo 5 úplne rovnakých klobúkov. Pri odchode si náhodne vyberajú klobúky. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jeden z návštevníkov odíde v tom istom klobúku ako prišiel?

Riešenie. Nech A_i znamená: i-ty zákazník odchádza s tým istým klobúkom, s ktorým prišiel. Hľadáme

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5)$. Podľa cvičenia 1.19 (resp. 1.20, $n = 5$)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5) = P(A_1) + P(A_2) + \\ + \ldots + P(A_5) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \\ - \ldots - P(A_4 \cap A_5) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \\ + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots + P(A_3 \cap A_4 \cap A_5) - \\ - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \ldots - P(A_2 \cap A_3 \cap \\ \cap A_4 \cap A_5) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) .$$

Počítajme $P(A_1)$. Všetkých rozmiestnení piatich klobúkov na päť vešiakov je 5! (počet permutácií z 5 prvkov). A_1 nastane, ak prvý návštevník vezme svoj klobúk; ostatní štyria sa môžu podeliť o zvyšné klobúky 4! spôsobmi. Preto

$$P(A_1) = \frac{4!}{5!} = \frac{4.3.2.1}{5.4.3.2.1} = \frac{1}{5} .$$

Podobne

$$P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = \frac{1}{5} .$$

Vypočítajme teraz $P(A_1 \cap A_2)$. Všetkých rozmiestnení je opäť 5!, ale „priaznivé" sú len tie, pri ktorých prvý a druhý návštevník natrafili na svoj klobúk. Zvyšní traja sa preto môžu podeliť o ostatné klobúky už len 3! spôsobmi. Preto

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{3!}{5!} = \frac{3.2.1}{5.4.3.2.1} = \frac{1}{5.4} .$$

Podobne

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_4) = \ldots = P(A_4 \cap A_5) = \frac{1}{5.4}$$

a analogicky

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \ldots =$$

$$= P(A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{1}{5.4.3},$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \ldots =$$

$$= P(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{1}{5.4.3.2},$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{1}{5.4.3.2.1}.$$

Ak uvážime, že udalostí $A_1, A_2, \ldots, A_5$ je päť, prienikov $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3, \ldots$ je $\binom{5}{2}$, prienikov $A_1 \cap \cap A_2 \cap A_3$, $A_1 \cap A_2 \cap A_4, \ldots$ je $\binom{5}{3}$, atď. dostaneme

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5) = \binom{5}{1}\frac{1}{5} - \binom{5}{2}\frac{1}{5.4} +$$

$$+ \binom{5}{3}\frac{1}{5.4.3} - \binom{5}{4}\frac{1}{5.4.3.2} + \binom{5}{5}\frac{1}{5!} =$$

$$= 1 - \frac{5.4}{2.1.5.4} + \frac{5.4.3}{3.2.1.5.4.3} -$$

$$- \frac{5.4.3.2}{4.3.2.1.5.4.3.2} + \frac{1}{5!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}.$$

Cvičenia

1.21. Sekretárka náhodným spôsobom rozmiestňuje päť listov do piatich správne napísaných obálok. Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň jeden list sa dostane do správnych rúk?

1.22. 32 kariet rozdali medzi štyroch hráčov. Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň jeden z nich dostane všetky karty rovnakej farby?

1.23. V novostavbe odovzdali šiestim obyvateľom šesť rôznych kľúčikov od šiestich označených listových schránok. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) žiadny nedostal správny kľúčik t. j. kľúčik od svojej schránky b) jediný dostal správny kľúčik c) aspoň jeden dostal správny kľúčik d) aspoň dvaja dostali správny kľúčik?

Zdá se, že je na čase, aby sme upustili od predpokladu, že všetky prvky priestoru Ω sú rovnako pravdepodobné. Budeme predpokladať, že pravdepodobnosti jednotlivých jednoprvkových množín $\{\omega_i\}$ sú dané. Napr. ak hádžeme nepravidelnou kockou, nebudú všetky steny padať s rovnakou pravdepodobnosťou. Príslušné pravdepodobnosti sa v praxi získavajú (odhadujú) experimentálne a v našich príkladoch sú vopred dané. Nech napr. $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 1/9, P(\{\omega_3\}) = P(\{\omega_4\}) = 2/9,$ $P(\{\omega_5\}) = P(\{\omega_6\}) = 1/6$. (Prirodzene, súčet všetkých $P(\{\omega_i\})$ musí byť 1.) Pravdepodobnosť iných udalostí určíme pomocou vzťahu z príkladu 1.10. Všetky $\{\omega_i\}$ sa totiž navzájom vylučujú. Preto je rozumné definovať pravdepodobnosť nejakej udalosti A ako súčet pravdepodobností tých $\{\omega_i\}$, pre ktoré $\omega_i \in A$. Napr., ak A znamená padnutie steny s párnym počtom bodiek, tak

$$P(A) = P(\{\omega_2\} \cup \{\omega_4\} \cup \{\omega_6\}) =$$

$$= P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_4\}) + P(\{\omega_6\}) =$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Pravdepodobnosť toho, že padne stena s počtom bodiek väčším ako 3 je

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\{\omega_4\} \cup \{\omega_5\} \cup \{\omega_6\}) = \\ &= P(\{\omega_4\}) + P(\{\omega_5\}) + P(\{\omega_6\}) = \\ &= \frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Definícia 1.2. *Nech $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ je konečná neprázdna množina, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sú nezáporné čísla, ktorých súčet je 1. Pravdepodobnosťou udalosti $A \subset \Omega$ je číslo*

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Ďalej definujeme $P(\emptyset) = 0$.

Všimnime si, že pojem pravdepodobnosti z definície 1.1 je špeciálnym prípadom pravdepodobnosti z definície 1.2. Skutočne, položme v definícii 1.2 $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$. Potom

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} m(A) = \frac{m(A)}{n},$$

kde $m(A)$ je počet prvkov množiny A.

Tiež si je hodno povšimnúť, že aj pri tomto zovšeobecnení zostanú v platnosti rovnosti (1), (2) t. j.

$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

a teda aj implikácia (3):

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)\,.$$

Príklad 1.13. Dva prístroje pracujú tak, že po celý deň je zapnutý aspoň jeden z nich. Pritom 1. prístroj pracuje 70 % dňa, 2. prístroj 65 % dňa. Aká je pravdepodobnosť, že v určitý časový okamih budú zapojené oba prístroje? (Predpokladáme, že sa zapínajú a vypínajú nezávisle jeden na druhom.)

Riešenie. Nech A je udalosť — v danom okamihu je zapnutý 1. prístroj, B — zapnutý je 2. prístroj. Podľa predpokladu $A \cup B = \Omega$ je istá udalosť. Preto

$$1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 0{,}7 + 0{,}65 - P(A \cap B)$$

odkiaľ

$$P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}65 - 1 = 0{,}35\,.$$

Cvičenia

1.24. V prístroji sú tri súčiastky. Pravdepodobnosť toho, že v určitom okamihu pracuje určitá súčiastka je pre každú z nich 0,5, že pracujú súčasne určité dve spomedzi nich je (pre každú dvojicu) 0,1875, že pracujú všetky tri naraz je 0,0625. Aká je pravdepodobnosť toho, že v danom okamihu nebude pracovať ani jedna súčiastka?

1.25. V skupine tlmočníkov je 90 % takých, čo ovládajú jazyky A, F, R. Pravdepodobnosť, že tlmočník ovláda A je 1/3, pre F tiež 1/3, pre R 2/3, pravdepodobnosť, že ovláda všetky tri uvedené jazyky je 1/30. Aká je pravdepodobnosť toho, že tlmočník ovláda aspoň dva jazyky?

GEOMETRICKÁ PRAVDEPODOBNOSŤ

Čo je to vlastne pravdepodobnosť? Aké sú jej vlastnosti? V kapitole I. sme odpovedali na prvú otázku formálne, a to tak, že sme sa obmedzili len na určitý druh problémov: množina možných výsledkov je konečná.

Ale aj v tomto jednoduchom prípade sme videli, že pravdepodobnosť P je vlastne zobrazenie

$$E \longmapsto P(E)\,,$$

ktoré každej množine E určitého typu (také množiny nazveme merateľnými — v danom prípade to boli ľubovoľné podmnožiny danej konečnej množiny) priraďuje reálne číslo $P(E)$, pričom platí napr. toto:

$P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$;

$P(E) \geqq 0$ pre všetky merateľné množiny E;

$P(E) + P(F) = P(E \cup F) + P(E \cap F)$ pre všetky merateľné množiny E, F.

Aby sme sa v tomto pohľade na vec utvrdili, uvedieme niekoľko jednoduchých a okrem toho veľmi populárnych príkladov iného druhu.

Nech Ω je nejaká rovinná množina, $A \subset \Omega$, pričom vieme vypočítať obsah množín A i Ω. (Nebudeme precizovať, čo to znamená „vieme vypočítať obsah"; pôjde obvykle o množiny ako pravouholník, kruh, jeho časti a pod.) Množiny, ktorých „obsah vieme vypočítať" nazveme opäť merateľnými. Aká je pravdepodobnosť, že nejaký bod, ktorý padne do Ω padne aj do A?

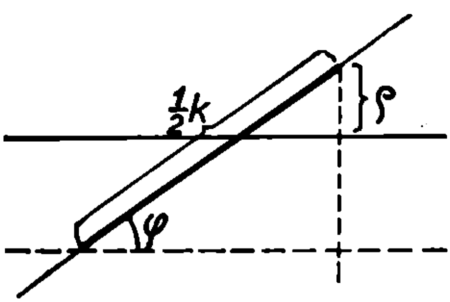
A, Ω bývajú nekonečné množiny. Preto nie je možné definovať pravdepodobnosť pomocou počtu prvkov. Zdá sa byť však prirodzeným definovať pravdepodobnosť udalosti A ako podiel plošných obsahov

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

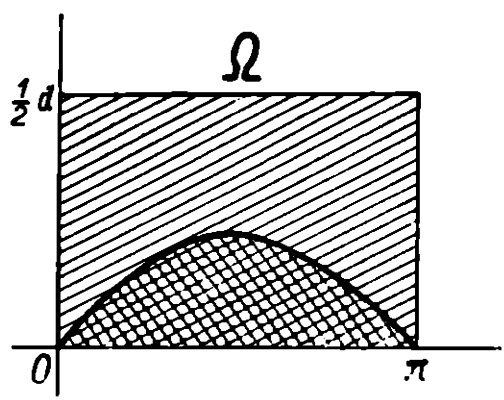
kde $m(A)$ resp. $m(\Omega)$ je obsah množiny A resp. Ω. Odhliadnuc od toho, že sme nedefinovali podrobne všetky pojmy, opäť priraďujeme každej „merateľnej" množine E číslo $P(E)$ a zobrazenie $E \longmapsto P(E)$ má opäť vyššie uvedené vlastnosti.

Príklad 2.1. (Buffonova ihla). V rovine je daný nekonečný systém navzájom rovnobežných priamok vo vzdialenosti d. Na túto rovinu hádžeme ihlu dĺžky $k(k < d)$. Aká je pravdepodobnosť toho, že ihla pretne niektorú z rovnobežiek?

Riešenie. Priraďme každej polohe ihly dve súradnice: vzdialenosť ϱ jej stredu od najbližšej z priamok a uhol



Obr. 4



Obr. 5

φ ihly s daným systémom priamok (ktorý vhodne orientujeme); $0 \leqq \varrho \leqq d/2$, $0 \leqq \varphi < \pi$. Ihla pretne najbližšie položenú priamku, ak $\frac{k}{2} \sin \varphi \geqq \varrho$.

Všetkým možným polohám ihly odpovedá pravouholník $\Omega = \langle 0, \pi) \times \langle 0, \frac{d}{2}\rangle$. Polohám ihly, v ktorých ihla pretne niektorú z priamok odpovedá množina A tých bodov (φ, ϱ), pre ktoré je $0 \leqq \varrho \leqq \frac{k}{2} \sin \varphi$. Množina A je ohraničená sinusoidou $\varrho = \frac{k}{2} \sin \varphi$ a priamkou $\varrho = 0$. Pravdepodobnosť, že ihla v nejakej polohe (φ, ϱ) pretne niektorú z priamok, t. j. pravdepodobnosť, že odpovedajúci bod (φ, ϱ) padne do množiny A je pomer plošných obsahov

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Číslo $m(\Omega)$ je obsah obdĺžnika, $m(\Omega) = \frac{d}{2}\pi$. Na druhej strane

$$m(A) = \int_0^\pi \frac{k}{2} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{k}{2} . 2 = k .$$

Preto

$$P(A) = \frac{2k}{\pi d}.$$

Cvičenia

2.1. Hádžeme mincu na stôl, na ktorom je štvorcová sieť (priemer mince je 3/4 strany štvorce). Aká je pravdepodobnosť toho, že minca bude celá obsiahnutá v niektorom štvroci ?

2.2. Na danej kružnici umiestnime náhodne a nezávisle na sebe dva body A, B. Aká je pravdepodobnosť toho, že dĺžka úsečky AB nebude väčšia než polomer tej kružnice?

2.3. Duelanti sa majú stretnúť na súboj v náhodne vybraný čas medzi piatou a šiestou hodinou ráno. Ten, ktorý príde prvý čaká na protivníka len 5 minút, potom odchádza. Aká je pravdepodobnosť toho, že sa súboj uskutoční?

3. kapitola

NEZÁVISLÉ UDALOSTI

Začnime s jednoduchým príkladom.

Príklad 3.1. Hádžeme dvakrát tou istou kockou. Aká je pravdepodobnosť toho, že po oba razy padne šestka (označme túto udalosť znakom $(+, +)$); že prvý raz padne šestka, druhý raz nepadne (udalosť $(+, -)$); že prvý raz nepadne, druhý raz padne (udalosť $(-, +)$); že nepadne ani raz (udalosť $(-, -)$)?

Riešenie. Pri dvojnásobnom hode kockou je možných celkom 36 výsledkov $(1, 1), \ldots, (1, 6), (2, 1), \ldots, (2, 6), \ldots, (6, 1), \ldots, (6, 6)$. Pri prvom hode je totiž možných 6 výsledkov a ku každému z nich máme 6 možných výsledkov pri druhom hode. Základný priestor (istá udalosť) Ω pozostáva teda z 36 prvkov

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}.$$

Udalosť, ktorú sme označili znakom $(+, +)$ nastane vtedy, keď po oba razy padne šestka, teda

$$(+, +) = \{(6, 6)\}.$$

Preto

$$P(+, +) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Ďalej

$$(+, -) = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}.$$

teda

$$P(+, —) = \frac{5}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}.$$

Podobne

$$(—, +) = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\},$$

$$P(—, +) = \frac{5}{36} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Konečne

$$(—, —) = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 5), \ldots, (5, 1), \ldots, (5, 5)\}.$$

teda

$$P(—, —) = \frac{25}{36} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}.$$

Čitateľ si iste pamätá, že 1/6 resp. 5/6 je pravdepodobnosť toho, že pri jednom hode padne resp. nepadne šestka. Preto si ľahko sám z výsledkov

$$P(+, +) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}, \quad P(+, —) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6},$$

$$P(—, +) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}, \quad P(—, —) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

vytvorí hypotézu. Overme si ju najprv na ďalších príkladoch.

Príklad 3.2. Hádžme trikrát po sebe kockou, vypíšme všetky udalosti súvisiace s padnutím resp. nepadnutím šestky a vypočítajme ich pravdepodobnosť.

Riešenie. Základný priestor Ω má teraz $6^3 = 216$ prvkov. Nás zaujíma $8 = 2^3$ udalostí $(+, +, +)$, $(+, +, —)$, $(+, —, +)$, $(—, +, +)$, $(+, —, —)$, $(—, +, —)$,

$(-, -, +)$, $(-, -, -)$. Podobne ako predtým vypočítame

$$P(+,+,+) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6},$$

$$P(+,+,-) = \frac{5}{6^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6},$$

$$P(+,-,+) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6},$$

$$P(-,+,+) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6},$$

$$P(+,-,-) = \frac{5^2}{6^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6},$$

$$P(-,+,-) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6},$$

$$P(-,-,+) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6},$$

$$P(-,-,-) = \frac{5^3}{6^3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}.$$

Cvičenia

3.1. Hádžme trikrát po sebe kockou. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) práve dvakrát padne šestka b) aspoň raz padne šestka c) šestka padne nanajvýš dvakrát?

3.2. Hádžme päťkrát mincou. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) nikdy nepadne znak b) práve trikrát padne znak c) práve dvakrát padne znak d) najviac dvakrát padne znak?

3.3. V desiatich urnách je po deviatich bielych a jednej čiernej guľke. Vytiahneme z každej urny po jednej guľke. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetky budú biele?

3.4. Vyťahujeme guľky z troch urien. V prvej sú 3 biele a 2 čierne guľky, v druhej 5 bielych a 1 čierna, v tretej 3 biele a 4 čierne. Vytiahneme z každej urny po jednej guľke. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetky tri budú biele?

Príklad 3.3. Nech $\Omega = \{x_1, \ldots, x_i\}$ je konečná množina pozostávajúca z i prvkov, $\emptyset \neq A \subset \Omega$, A pozostáva z m prvkov. Nech $\Omega \times \Omega$ je množina všetkých usporiadaných dvojíc (x, y) prvkov z množiny Ω. Aká je pravdepodobnosť toho, že oba prvky x, y patria do množiny A (inak povedané, že v oboch opakovaniach nastane udalosť A); že $x \in A$, $y \notin A$; že $x \notin A$, $y \in A$; že $x \notin A$, $y \notin A$

Riešenie. Spomínané udalosti označíme po rade $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$. Všetkých usporiadaných dvojíc (x, y) prvkov množiny Ω je $i \cdot i = i^2$. Ďalej, počet prvmnožiny $(+, +)$ je $m \cdot m = m^2$, teda

$$P(+, +) = \frac{m^2}{i^2} = \frac{m}{i} \cdot \frac{m}{i}.$$

Počet prvkov množiny $(+, -)$ je $m \cdot (i - m)$, teda

$$P(+, -) = \frac{m}{i} \cdot \frac{i - m}{i} = \frac{m}{i}\left(1 - \frac{m}{i}\right).$$

Podobne

$$P(-, +) = \left(1 - \frac{m}{i}\right)\frac{m}{i},$$

$$P(-, -) = \frac{i - m}{i} \cdot \frac{i - m}{i} = \left(1 - \frac{m}{i}\right)\left(1 - \frac{m}{i}\right)$$

Označme znakom p pravdepodobnosť udalosti A, t. j. $p = P(A) = \frac{m}{i}$, znakom q pravdepodobnosť opačnej udalosti A', t. j. $q = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{m}{i} = 1 - p$. Potom

$$P(+,+) = p.p = p^2\,, \quad P(+,-) = p.q\,,$$
$$P(-,+) = q.p\,, \quad P(-,-) = q.q = q^2\,.$$

Príklad 3.4. Nech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, (takže $P(A) = p = 3/5$). Nech $\Omega^n = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega}_{n\text{-krát}}$ je množina všetkých usporiadaných n-tíc prvkov z Ω (t. j. množina všetkých možných výsledkov pri n-násobnom opakovaní „pokusu“ Ω). Aká je pravdepodobnosť udalosti B, že n-tica $(x_1, x_2$ $\ldots, x_n)$ bude mať prvky z množiny A práve na miestach $j_1, j_2, \ldots, j_k$?

Riešenie. Všetkých prvkov množiny Ω^n je $5.5. \ldots .5 = 5^n$. Do súradníc $j_1, \ldots, j_k$ môžeme dosadiť po 3 prvky, na iné miesta zvyšné dva prvky, takže všetkých prvkov skúmanej množiny je

$$2. \ldots .\underset{j_1}{3}. \ldots .\underset{j_2}{3}. \ldots .\underset{j_k}{3}. \ldots = 3^k.2^{n-k},$$

teda

$$P(B) = \frac{3^k.2^{n-k}}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-k} =$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{n-k} = p^k(1-p)^{n-k}.$$

Cvičenia

3.5. Hoďme 1 000-krát kockou. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) šestka padne práve 200-krát b) padne aspoň 100 krát?

3.6. Hoďme kockou n-krát. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) šestka padne práve k-krát b) padne aspoň k-krát c) najviac k-krát?

3.7. Správca mincovne dáva do každej kazety so 100 mincami jednu falošnú. Kráľ dá preveriť 100 kaziet tak, že z každej vyberie po jednej minci a túto preskúma. Aká je pravdepodobnosť toho, že falšovateľ bude prichytený?

Pojem nezávislosti resp. závislosti si vysvetlíme najprv na nasledujúcich dvoch príkladoch.

Príklad 3.5. Majme v urne 7 bielych a 9 modrých guliek. Vyberieme jednu z nich, vrátime ju späť a zamiešame. Potom znovu vyberieme guľku. Aká je pravdepodobnosť toho, že obe guľky budú biele (udalosť BB), že prvá bude biela, druhá modrá (BM), že prvá bude modrá, druhá biela (MB), že obe budú modré (MM)?

Riešenie. Všetkých možných dvojíc pri ťahaní je $16 . 16$. Pretože prvú môžeme vytiahnuť spomedzi 7 bielych a druhú tak isto, obsahuje množina BB $7 . 7$ prvkov, teda

$$P(BB) = \frac{7 . 7}{16 . 16} = \left(\frac{7}{16}\right)^2.$$

Podobne

$$P(BM) = \frac{7}{16} \cdot \frac{9}{16}, \quad P(MB) = \frac{9}{16} \cdot \frac{7}{16},$$

$$P(MM) = \left(\frac{9}{16}\right)^2.$$

Náš príklad je ostatne špeciálnym prípadom príkladu 3.3, kde $p = 7/16$, $q = 1 - p = 9/16$.

Príklad 3.6. Opäť vyberáme z urny, kde je 7 bielych a 9 modrých guliek. Ale prvú vybratú guľku nevrátime do urny. V urne teda zostáva po prvom ťahu len 15 guliek, z ktorých vyberáme druhú. Opäť sa pýtame na pravdepodobnosti udalostí BB, BM, MB, MM.

Riešenie. Počet všetkých dvojíc vybraných guliek sa zmenší: prvú vyberáme spomedzi 16, druhú spomedzi 15, teda počet všetkých výberov je 16.15. Na to, aby prvá z guliek bola biela je 7 možností, na to aby aj druhá bola biela je už len 6 možností (prvú vytiahnutú — bielu guľku sme nevrátili). Preto

$$P(BB) = \frac{7.6}{16.15}.$$

Podobne

$$P(BM) = \frac{7.9}{16.15}, \quad P(MB) = \frac{9.7}{16.15},$$

$$P(MM) = \frac{9.8}{16.15}.$$

V čom sa líšia príklady 3.5 a 3.6? V prvom prípade bol druhý ťah „nezávislý" od prvého. V druhom prípade závisel výsledok druhého ťahu od výsledku prvého, teda od toho, akej farby bola prvá vytiahnutá guľka. Všimnime si, že vo všetkých príkladoch tejto kapitoly (okrem príkladu 3.6) išlo o „nezávislé" opakovania. Výsledok druhého hodu kockou nezávisí od toho, aké číslo padlo pri prvom hode.

Aké bolo matematické vyjadrenie faktu „nezávislosti"? Vo všetkých príkladoch sme „príslušné" pravdepodobnosti vynásobili. To nás vedie k tejto definícii.

Definícia 3.1. *Udalosti A, B nazývame nezávislé, ak*

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)\,.$$

Ako je to napr. v príklade 3.1? Nech A_1 je udalosť spočívajúca v tom, že pri prvom hode padne šestka, teda

$$A_1 = \{(6,1), (6,2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} =$$
$$= (+, —) \cup (+, +)$$

a nech A_2 je udalosť spočívajúca v tom, že pri druhom hode padne šestka, teda

$$A_2 = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\} =$$
$$= (—, +) \cup (+, +) .$$

Potom

$$A_1 \cap A_2 = \{(6, 6)\} = (+, +) ,$$

$$P(A_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} ,$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A_1)\, P(A_2) ,$$

teda udalosti A_1, A_2 sú nezávislé v zmysle definície 3.1.

Rozoberme podobne príklad 3.6. Nech B_1 je udalosť (v priestore dvojíc (x_1, x_2) guliek, kde $x_1 \neq x_2$) spočívajúca v tom, že prvá vytiahnutá guľka je biela. Ak označíme jednotlivé biele guľky znakmi $b_1, b_2, \ldots, b_7$ a modré znakmi $m_1, m_2, \ldots, m_9$, potom

$$B_1 = \{(b_1, b_2), \ldots, (b_1, b_7), (b_1, m_1), \ldots, (b_1, m_9), \ldots$$
$$\ldots, (b_7, b_1), \ldots, (b_7, b_6), (b_7, m_1), \ldots, (b_7, m_9)\} .$$

Počet prvkov množiny B_1 je $7 . 15$, teda

$$P(B_1) = \frac{7 . 15}{16 . 15} = \frac{7}{16} .$$

(Je to taká istá pravdepodobnosť ako pravdepodobnosť, že vytiahneme bielu guľku pri jedinom ťahu.)

Nech M_2 je množina tých dvojíc, v ktorých na druhom mieste je modrá guľka, t. j.

$$M_2 = \{(b_1, m_1), \ldots, (b_7, m_1), (m_2, m_1), \ldots, (m_9, m_1), \\ \ldots, (b_1, m_9), \ldots, (b_7, m_9), (m_1, m_9), \ldots, (m_8, m_9)\}.$$

Množina M_2 pozostáva z 15.9 prvkov. Preto

$$P(M_2) = \frac{15.9}{16.15} = \frac{9}{16}.$$

Naproti tomu

$$B_1 \cap M_2 = \{(b_1, m_1), \ldots, (b_7, m_1), (b_1, m_2), \ldots, \\ \ldots, (b_7, m_2), \ldots, (b_1, m_9), \ldots, (b_7, m_9)\}.$$

Počet prvkov množiny $B_1 \cap M_2$ je 7.9. Preto

$$P(B_1 \cap M_2) = \frac{7.9}{16.15} \neq \frac{7}{16} \cdot \frac{9}{16} = P(B_1)\, P(M_2).$$

Teda udalosti B_1 a M_2 nie sú nezávislé.

Cvičenia

3.8. Zistite, či sú nezávislé udalosti A — na kocke padne stena s párnym počtom bodiek, B — stena s piatimi alebo šiestimi bodkami.

3.9. Zistite, či sú nezávislé udalosti A — na kocke padne stena s párnym počtom bodiek, C — stena s nepárnym počtom bodiek.

3.10. Dokážte, že $\emptyset$ a A sú nezávislé pre každú udalosť $A \subset \Omega$.

3.11. Dokážte, že A a Ω sú nezávislé pre každú udalosť $A \subset \Omega$.

3.12. Dokážte: Ak A, B sú disjunktné udalosti, tak A, B sú nezávislé práve vtedy, keď aspoň jedna z udalostí A, B má nulovú pravdepodobnosť.

3.13. Z ôsmich tlmočníkov ovládajú R alebo A siedmi, len R šiesti, A štyria. Sú udalosti R, A nezávislé?

3.14. Dokážte: Ak A, B sú nezávislé udalosti, tak sú nezávislé aj A', B'.

3.15. Dokážte: Ak A, B sú nezávislé udalosti, tak sú nezávislé aj A' a B.

Pojem nezávislosti má, pravda, svoj intuitívny obsah a nie je vždy nevyhnutné pristupovať k formalizácii. Úlohou matematika je pritom nájsť primeraný matematický popis danej reálnej situácie.

Príklad 3.7. Predpokladajme, že na terč strieľajú dvaja strelci. Pravdepodobnosť toho, že prvý zasiahne cieľ je 0,8, u druhého je táto pravdepodobnosť 0,9. Aká je pravdepodobnosť toho, že obaja strelci trafia cieľ, ak predpokladáme, že sa navzájom neovplyvňujú.

Riešenie. Označme znakmi A resp. B udalosti spočívajúce v tom, že prvý resp. druhý strelec trafí cieľ, teda $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}9$. Podľa podmienky úlohy sú A, B nezávislé, teda

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = 0{,}8 \,.\, 0{,}9 = 0{,}72\,.$$

Predošlú úvahu sme mohli ešte takto interpretovať: Predpokladajme, že obaja strelci vystrelia 100 krát, teda $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{99}, \omega_{100}\}$, kde každé ω_i je dvojica výstrelov. A pozostáva z tých dvojíc ω_i, v ktorých trafil cieľ prvý strelec, B z tých dvojíc ω_i, v ktorých trafil cieľ druhý strelec. Rovnosť $P(A) = 0{,}8$ môžeme chápať tak, že množina A má 80 prvkov. Pretože B nastáva z každých 10 pokusov približne 9krát (nezávisle na A), spomedzi uvažovaných 80 prvkov (množiny A) nastane $8 \,.\, 9 = 72$-krát. To znamená, že spomedzi 80 prvkov množiny A 72 patrí aj do B, teda

$$P(A \cap B) = \frac{72}{100} = \frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10} = P(A)\,P(B)\,.$$

Príklad 3.8. Urobme tie isté predpoklady ako v predchádzajúcom príklade. Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň jeden z nich trafí cieľ?

Riešenie. Máme vypočítať $P(A \cup B)$. Podľa vzťahu 2) z kapitoly 1. platí

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) =$$
$$= 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 \,.\, 0{,}9 = 0{,}98\,.$$

Iný spôsob riešenia. Keďže A, B sú nezávislé udalosti, nezávislými sú aj udalosti A', B' (cvičenie 3.14) spočívajúce v tom, že prvý resp. druhý strelec netrafí cieľ. Pretože $(A \cup B)' = A' \cap B'$, máme

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)') =$$
$$= 1 - P(A' \cap B') = 1 - P(A')\,P(B') =$$
$$= 1 - 0{,}2 \,.\, 0{,}1 = 0{,}98\,.$$

Alebo ešte iný spôsob. $A \cup B = (A \cap B) \cup \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$, pričom $A \cap B$, $A \cap B'$, $A' \cap B$ sa navzájom vylučujú, teda

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap B') + P(A' \cap B).$$

Ak sú ale A, B nezávislé, tak sú nezávislé aj A, B' resp. A', B (cvičenie 3.15), teda

$$P(A \cup B) = P(A)\,P(B) + P(A)\,P(B') + P(A')\,P(B) =$$
$$= 0{,}8 \,.\, 0{,}9 + 0{,}8 \,.\, 0{,}1 + 0{,}2 \,.\, 0{,}9 = 0{,}98\,.$$

Cvičenia

3.16. V trojčlennej porote sú dvaja členovia seriózni a prijímajú správne rozhodnutie s pravdepodobnosťou p. Tretí člen poroty sa rozhoduje tak, že vyhodí mincu a hlasuje podľa toho, čo mu spadne. Porota prijíma rozhodnutie, za ktoré hlasujú aspoň dvaja jej členovia. Aká je pravdepodobnosť toho, že sa porota rozhodne správne?

3.17. Otec chce povzbudiť syna v tenisovom tréningu a sľubuje mu odmenu, ak vyhrá dva po sebe nasledujúce zápasy z troch podľa schémy otec, tréner, otec, resp. tréner, otec, tréner. Ktorú z týchto alternatív si má syn vybrať, ak otec hrá horšie ako tréner?

3.18. Koľko ľudí sa musíte opýtať na dátum narodenia, aby ste medzi nimi našli človeka s vašim dátumom narodenia, a to s pravdepodobnosťou väčšou než 1/2?

Príklad 3.9. Dvaja páni X a Y strieľajú proti sebe pri súboji. Pravdepodobnosť toho, že X trafí je 0,6, pravdepodobnosť toho, že Y trafí je 0,8. Pán X strieľa prvý, pretože Y ho vyzval na súboj. Strieľajú striedavo až po prvý zásah. Aká je pravdepodobnosť toho, že X nebude trafený?

Riešenie. Označme udalosť, ktorej pravdepodobnosť hľadáme znakom A. Potom

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots ,$$

pričom A_1 nastane, ak X zasiahne Y pri svojom prvom výstrele, A_2 nastane, ak X ani Y netrafia na prvýkrát, ale X zasiahne Y pri druhom výstrele, A_3 nastane, ak X prvýkrát zasiahne Y až pri treťom výstrele atď. Je zrejmé, že udalosti A_1, A_2, A_3, ... sa navzájom vylučujú, teda

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

Podľa predpokladu $P(A_1) = 0{,}6$. A_2 nastane, ak súčasne X netrafí Y, (pravdepodobnosť čoho je 0,4), potom Y netrafí X (pravdepodobnosť čoho je 0,2), na čo X trafí Y (pravdepodobnosť toho je 0,6), teda (vzhľadom na nezávislosť)

$$P(A_2) = 0{,}4\,.\,0{,}2\,.\,0{,}6\,.$$

Podobne

$$P(A_3) = 0{,}4\,.\,0{,}2\,.\,0{,}4\,.\,0{,}2\,.\,0{,}6 = (0{,}4\,.\,0{,}2)^2\,.\,0{,}6\,,$$
$$P(A_4) = (0{,}4\,.\,0{,}2)^3\,.\,0{,}6 \text{ atď.},$$

teda

$$P(A) = 0{,}6(1 + 0{,}4\,.\,0{,}2 + (0{,}4\,.\,0{,}2)^2 + + (0{,}4\,.\,0{,}2)^3 + \ldots) = = 0{,}6(1 + 0{,}08 + 0{,}08^2 + 0{,}08^3 + 0{,}08^4 + \ldots).$$

V zátvorke je geometrický rad s kvocientom 0,08 a prvým členom 1. Preto (pozri Doplnok II)

$$P(A) = \frac{0{,}6}{1 - 0{,}08} = 0{,}65\,.$$

Cvičenie

3.19. Aká je pravdepodobnosť, že X obíde nasucho, ak prvý začne strieľať Y?

Príklad 3.10. Od akého strelca si môže dovoliť pán X dať sa vyzvať na súboj (t. j. X strieľa prvý), ak chce, aby pravdepodobnosť jeho úspechu bola väčšia ako 0,9?

Riešenie. Nech p je pravdepodobnosť zásahu u pána Y. Položme $q = 1 - p$. Potom

$$P(A) = 0{,}6 + 0{,}4\,.\,q\,.\,0{,}6 + 0{,}4\,.\,q\,.\,0{,}4\,.\,q\,.\,0{,}6 + \ldots =$$

$$= 0{,}6(1 + q.0{,}4 + (q.0{,}4)^2 + \dots) =$$

$$= \frac{0{,}6}{1 - q.0{,}4}.$$

Žiadame, aby $P(A) > 0{,}9$. Riešením nerovnice

$$\frac{0{,}6}{1 - q.0{,}4} > 0{,}9$$

dostaneme, že

$$q > \frac{0{,}3}{0{,}36} = 0{,}8\overline{3}\dots,$$

teda stačí, aby $1 - p = q > 0{,}84$, t. j. $p < 0{,}26$. X má nádej na úspech väčšiu ako 90 %, ak jeho súper triafa s pravdepodobnosťou menšou ako 0,26.

Cvičenia

3.20. Predpokladajme, že X si nemôže vybrať súpera, ale že má dosť času vopred trénovať a zlepšiť svoje strelecké schopnosti. Na aký stupeň dokonalosti sa musí dostať (opäť strieľa prvý), ak chce aby pravdepodobnosť úspechu bola väčšia ako 0,9?

3.21. Aké strelecké schopnosti má mať pán Z, aby pri súboji proti pánovi Y (ktorého pravdepodobnosť zásahu je 0,8), pri ktorom Z strieľa prvý, mal Z nádej na úspech väčšiu ako 0,5?

Príklad 3.11. Aké strelecké schopnosti musí mať pán Z, aby si mohol dovoliť uraziť sa a teda vyzvať pána Y na súboj (v tom prípade Y strieľa prvý), ak pravdepodobnosť úspechu má byť väčšia než 0,5 resp. 0,9?

Riešenie. Nech p je pravdepodobnosť toho, že Z zasiahne cieľ. Pravdepodobnosť úspechu pána Z je

$$0{,}2.p + 0{,}2(1 - p)\,0{,}2p + \dots =$$

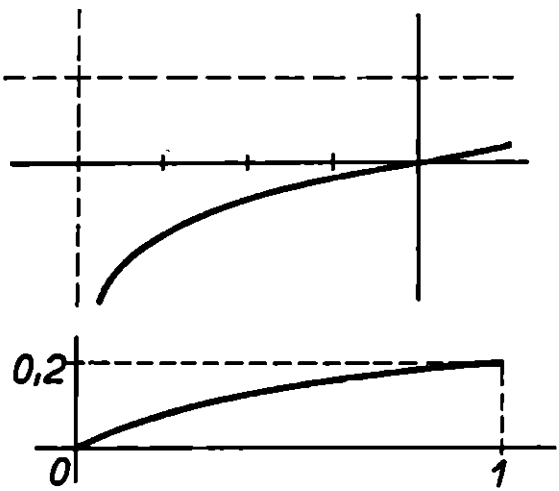
$$= 0{,}2p(1 + 0{,}2(1 - p) + (0{,}2(1 - p))^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{0{,}2p}{1 - 0{,}2(1 - p)}.$$

Máme nájsť také p, aby

$$\frac{0{,}2p}{1 - 0{,}2(1 - p)} > 0{,}5\,.$$

Riešením tejto nerovnice dostaneme $p > 4$. Vidíme teda, že také p neexistuje, pretože $p \leqq 1$. To sa dalo očakávať, pretože nádej na úspech pána Y je aspoň 0,8 (Y strieľa prvý), teda nádej pána Z je nanajvýš 0,2.



Obr. 6

Pozrime sa na graf funkcie $y = \dfrac{0{,}2p}{1 - 0{,}2(1 - p)} =$ $= \dfrac{p}{p + 4}$. Zaujímajú nás hodnoty $p \in \langle 0{,}1 \rangle$. V tomto intervale uvažovaná funkcia rastie. Preto $P(A) \leqq$ $\leqq \dfrac{1}{1 + 4} \leqq 0{,}2$. Najväčšiu šancu má Z, ak strieľa so 100 % istotou, a v tom prípade má nádej na úspech 0,2.

Cvičenie

3.22. Na akého pána U si môže dovoliť uraziť sa pán X(U potom strieľa prvý), aby jeho nádej na úspech bola väčšia ako 0,5 resp. 0,9? Pán X triafa cieľ s pravdepodobnosťou 0,6.

Príklad 3.12. Majme teraz troch pánov A, B, C, ktorí majú vzájomný súboj podľa tohto pravidla: začína strieľať A, môže si vybrať B alebo C. V prípade, že prvýkrát vystrelil na B, strieľa potom B na C, C na A atď. Prirodzene, ak je niektorý z účastníkov vyradený strieľa nasledujúci podľa uvedeného poradia. Ak ale po prvýkrát vystrelil A na C, potom strieľa C na B, B na A atď.

Na ktorého protivníka má A začať strieľať, aby jeho nádej na úspech bola väčšia, ak pravdepodonobsť zásahu je 0,7 u A, 1 u B a 0,4 u C.

Riešenie. 1. Predpokladajme, že A začal strielať na B. Sú dve možnosti:

α) A netrafí B, B trafí C, A trafí B a je po súboji. Pravdepodobnosť tejto udalosti je $0{,}3 . 1 . 0{,}7 = 0{,}21$.

β) A trafí na prvý raz B, načo nasleduje súboj medzi C a A. Pravdepodobnosť, že A v ňom zvíťazí je

$$0{,}7(0{,}6 . 0{,}7 + 0{,}6 . 0{,}3 . 0{,}6 . 0{,}7 + 0{,}6 . (0{,}3 . 0{,}6)^2 . 0{,}7 +$$

$$+ \ldots) = 0{,}6 . 0{,}7^2 \frac{1}{1 - 0{,}18} = 0{,}358 .$$

Teda pravdepodobnosť úspechu A v prípade, že zahájil streľbu na B je

$$0{,}21 + 0{,}358 = 0{,}568 .$$

2. Predpokladajme, že A začal strieľať na C. V tomto prípade má A (nenulovú) nádej na úspech len vtedy, keď C zastrelí B a A vyhrá v nastávajúcom súboji medzi C a A. Pravdepodobnosť toho je

$$0{,}3 \,.\, 0{,}4(0{,}7 + 0{,}3 \,.\, 0{,}6 \,.\, 0{,}7 + (0{,}3 \,.\, 0{,}6)^2 \,.\, 0{,}7 + \ldots) =$$

$$= \frac{0{,}3 \,.\, 0{,}4 \,.\, 0{,}7}{1 - 0{,}3 \,.\, 0{,}6} = 0{,}102 \,.$$

•

Vidíme, že A má väčšiu nádej na úspech, ak začne strieľať na B.

Ešte väčšiu nádej na úspech bude mať A, ak sa bude tváriť, že strieľa na B, ale vystrelí do vzduchu. Potom B zastrelí C a A triafa B s pravdepodobnosťou $0{,}7 > > 0{,}568$.

Keby sa A tváril, že strieľa na C, ale vystrelil by do vzduchu, mal by A nádej, že C zastrelí B a A vyhrá súboj s C takúto:

$$0{,}4(0{,}7 + 0{,}3 \,.\, 0{,}6 \,.\, 0{,}7 + (0{,}3 \,.\, 0{,}6)^2 \,.\, 0{,}7 + \ldots) =$$

$$= \frac{0{,}4 \,.\, 0{,}7}{1 - 0{,}3 \,.\, 0{,}6} = 0{,}34 \,.$$

Cvičenia

3.23. Akú má nádej A, ak začína strieľať C (neovládajúci základy pravdepodobnosti)? Pravdepodobnosť, že C začne strielať na A je taká istá ako pravdepodobnosť, že C začne strieľať na B, t. j. 1/2!

3.24. Akú má nádej A, ak začne strieľať B?

3.25. Čo má robiť A, ak strieľa prvý a chce zachrániť C (trebárs na svoj úkor)?

V predchádzajúcich príkladoch sme mlčky pracovali aj s viac ako dvoma nezávislými udalosťami. Udalosti $A_1, \ldots, A_n$ sa nazývajú nezávislé, ak

$$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1}) P(A_{j_2}) \ldots P(A_{j_k})$$

pre všetky konečné postupnosti $j_1, \ldots, j_k$, kde $1 \leqq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqq n$, $2 \leqq k \leqq n$. Teda 3 udalosti A_1, A_2, A_3 sú nezávislé ($n = 3$), ak

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2), P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3),$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) P(A_3)$$

(tu je $k = 2$) a navyše ($k = 3$)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) .$$

Zaujímavé je uvedomiť si v tejto súvislosti, že napr. v uvedenom prípade ($n = 3$) k nezávislosti A_1, A_2, A_3 nestačí ani podmienka $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$ ani nezávislosť každých dvoch z udalostí A_1, A_2, A_3.

Príklad 3.13. V triede je 24 žiakov. Z nich vie 6 plávať, lyžovať sa aj korčuľovať sa, 6 vie len plávať (a nevie sa lyžovať ani korčuľovať), 6 sa vie len lyžovať a 6 len korčuľovať. Nech A_1 je udalosť spočívajúca v tom, že náhodne vybratý žiak vie plávať, A_2 spočíva v tom, že sa vie lyžovať a A_3 v tom, že sa vie korčuľovať. Dokážte, že A_1, A_2 resp. A_1, A_3, resp. A_2, A_3 sú nezávislé, ale A_1, A_2, A_3 nie sú nezávislé.

Riešenie. Množina A_1 pozostáva z tých žiakov, ktorí ovládajú všetky 3 uvedené športy a navyše zo šiestich špecialistov — plavcov, teda má 12 prvkov, $P(A_1) = 12/24 = 1/2$. Podobne $P(A_2) = P(A_3) = 1/2$. Ďalej

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

je množina pozostávajúca zo šiestich univerzálnych športovcov. Preto

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)\, P(A_2)\,.$$

Podobne sa dokáže nezávislosť A_1 a A_3 resp. A_2 a A_3. Naproti tomu

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1)\, P(A_2) P(A_3)\,.$$

Cvičenia

3.26. Hádžeme dvoma kockami. Nech A_1 je udalosť spočívajúca v tom, že na prvej kocke padne stena s nepárnym počtom bodiek, A_2 spočíva v tom, že na druhej kocke padne stena s párnym počtom bodiek. Konečne nech A_3 spočíva v tom, že súčet bodiek na oboch kockách je nepárny. Dokážte, že A_1, A_2 resp. A_1, A_3 resp. A_2, A_3 sú nezávislé, ale A_1, A_2, A_3 nie sú nezávislé.

3.27. Nech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = 1/4$, $P(\{\omega_4\}) = 1/12$, $P(\{\omega_5\}) = 1/6$. Položme ďalej $A = \{\omega_1, \omega_4, \omega_5\}$, $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5\}$, $C = \{\omega_3, \omega_4\}$. Dokážte, že $P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C)$, ale nie všetky dvojice A, B, C sú nezávislé.

4. kapitola

PODMIENENÁ PRAVDEPODOBNOSŤ

Vráťme sa k príkladu 3.6. V urne sme mali 7 bielych a 9 modrých guliek. Pravdepodobnosť $P(M_1)$ vytiahnutia modrej guľky (pri prvom ťahu) je teda 9/16. Ak však vytiahneme prvú bielu guľku a nevrátime ju, pri druhom ťahu sa pravdepodobnostné pomery menia. Pravdepodobnosť, že bude vytiahnutá modrá guľka (za predpokladu, že prvá vytiahnutá guľka bola biela) je o niečo väčšia — 9/15.

V príklade 3.6 sme, pravda, vypočítali $P(B_1) = 7/16$, $P(M_2) = 9/16$. Ale M_2 je udalosť spočívajúca v tom, že druhá vytiahnutá guľka je modrá, bez ohľadu na to, aká bola prvá. (Základný priestor Ω pozostáva z dvojíc ťahaných guliek a obsahuje celkom 16.15 prvkov.) Tých 9/15 je pravdepodobnosť udalosti M_2 podmienená tým, že sa uskutočnila udalosť B_1; označme ju znakom $P(M_2|B_1)$. Čím je charakterizovaná? Ako ju definovať, resp. vypočítať?

V príklade 3.6. sme zistili, že

$$P(B_1 \cap M_2) = \frac{7.9}{16.15} = \frac{7}{16} \cdot \frac{9}{15} = P(B_1)\, P(M_2|B_1)\,.$$

A práve túto rovnosť použijeme na definíciu podmienenej pravdepodobnosti.

Definícia 4.1. *Nech A, B sú ľubovoľné udalosti, $P(B) > 0$. Potom definujeme*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Číslo $P(A|B)$ nazývame podmienenou pravdepodobnosťou udalosti A za podmienky, že nastala udalosť B.

Príklad 4.1. Mladé dievča má 20 potenciálnych pytačov. Vie porovnať vlastnosti každých dvoch z tých, ktorí ju už popýtali o ruku. Ak sa rozhodne vydať sa, berie si posledného z tých, ktorí ju pýtali (odmietnutí pytači už neprichádzajú do úvahy), a to vtedy, ak je najlepší zo všetkých dovtedajších pytačov. Povedzme, že siedmy pytač v poradí bol úspešný. Aká je pravdepodobnosť toho, že si za muže vzalo najlepšieho spomedzi všetkých dvadsiatich?

Riešenie. Nech A je udalosť — dievčina si vybrala najlepšieho spomedzi dvadsiatich mládencov, B — vybrala si najlepšieho spomedzi prvých siedmich. Vieme teda, že B nastala a pýtame sa na $P(A|B)$.

Sedem prvých pytačov možno usporiadať celkom 7! spôsobmi. Pritom, ak je siedmy pytač najlepší, predošlých 6 pytačov môžeme usporiadať 6! spôsobmi. Preto

$$P(B) = \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}.$$

Podobne

$$P(A) = \frac{1}{20}.$$

Uvážme ešte, že $A \cap B = A$, (Najlepší spomedzi dvadsiatich je najlepším aj spomedzi siedmich.) Teda

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{20}.$$

Cvičenia

4.1. Na Prírodovedeckej fakulte študuje 30 % poslucháčov matematiku, 20 % matematiku aj fyziku. Aká je pravdepodobnosť toho, že študent študujúci matematiku bude študovať aj fyziku?

4.2. Hráč vytiahol 4 karty spomedzi 52 kanastových kariet; všetky sú červené. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetky 4 budú srdcové alebo všetky štyri budú kárové?

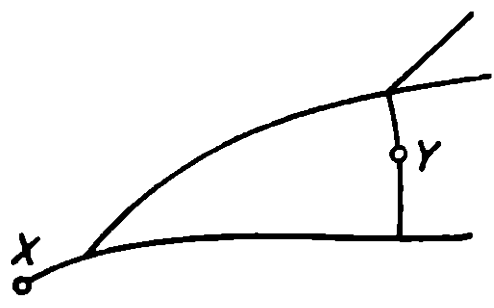
4.3. Dané sú pravdepodobnosti $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(A \cap B) = 1/6$. Vypočítajte $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A'|B')$, $P(B'|A')$.

4.4. Dané sú pravdepodobnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$. Vypočítajte $P(A|B)$.

4.5. Vypočítajte $P(B|A)$ v prípade, že $A \subset B$.

4.6. Vypočítajte $P(B|A)$ v prípade, že $A \cap B = \emptyset$.

Príklad 4.2. Z mesta X do mesta Y sa možno dostať dvomi cestami podľa priloženej mapy. Automobilista, ktorý nepozná cestu sa vydá správnym smerom, ale na každej križovatke sa rozhoduje náhodne; všetky možnosti sú rovnako pravdepodobné. Aká je pravdepodobnosť, že automobilista príde do mesta Y?



Obr. 7

Riešenie. Označme znakom A udalosť — automobilista príde do Y, B_1 — automobilista sa vybral po dolnej (pravej) ceste, B_2 — po hornej (ľavej) ceste. Podľa podmienok úlohy, $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$. Ak sa ale vydal po hornej ceste, potom pravdepodobnosť, že nájde Y je 1/3 (má 3 rovnako pravdepodobnosé možnosti), teda $P(A|B_2) = 1/3$. Podobne dostaneme, že $P(A|B_1) = 1/2$. Uvážme, že

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$$

Skutočne, ak $\omega \in A$ (automobilista prišiel do Y), tak alebo $\omega \in B_1 \cap A$ (prišiel do Y po dolnej ceste), alebo $\omega \in B_2 \cap A$ (prišiel do Y po hornej ceste), teda $A \subset \subset (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$; podobne sa dokáže opačná inklúzia. Pretože $A \cap B_1$, $A \cap B_2$ sa navzájom vylučujú (cesty B_1, B_2 sa pretnú až v Y), máme

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) =$$
$$= P(B_1)\, P(A|B_1) + P(B_2)\, P(A|B_2) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

Postup, ktorý sme použili v príklade 4.2 možno zovšeobecniť. Nech

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i\,, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j)\,.$$

Potom

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)\,,$$

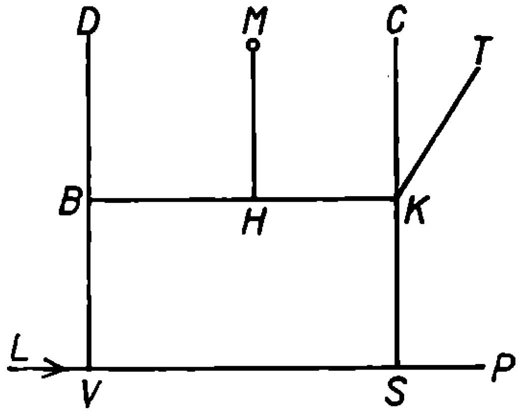
teda

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n) =$$
$$= P(B_1)\, P(A|B_1) + P(B_2)\, P(A|B_2) + \ldots +$$
$$+ P(B_n)\, P(A|B_n)\,,$$

alebo krátko zapísané

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A|B_i)\,.$$

Príklad 4.3. Matematický pavilon v Mlynskej doline v Bratislave stojí na dosť neznámom mieste M. Aká je pravdepodobnosť, že študent motorista ho nájde? Pritom z hlavnej cesty na vedľajšiu odbočuje s pravdepodobnosťou 1/3; pri križovatke ciest rovnakého významu má každá z možností rovnakú pravdepodobnosť. Študent začne hľadať pri Lafranconi L smerom von z mesta ($L \longrightarrow V$) a prestane hľadať, ak prejde dvakrát po tom istom mieste, alebo ak príde na Pražskú cestu (P), Devínsku cestu (D), pred televízne štúdio (T) alebo na cintorín v Slávičom údolí (C). (Prirodzene prestane hľadať aj vtedy, keď nájde Matematický pavilón M.)



Obr. 8(Hlavnými su cesty $LVSP$ a $LVBD$.)

Riešenie. Študent má dve možnosti B_1, B_2. Buď pôjde vľavo (V, B), alebo vpravo (V, S). Ak sa dá po ceste B_1, pravdepodobnosť, že nájde M je $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (najprv odbočuje na vedľajšiu cestu pri botanickej záhrade B, potom prechádza križovatkou H ciest rovnakého významu). Ak sa dá po ceste B_2, pravdepodobnosť, že nájde M (t. j., že pôjde po ceste S, K, H, M) je $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$. Preto (označme nájdenie M na prvý pokus znakom M_1)

$$P(M_1) = P(B_1)\, P(M_1|B_1) + P(B_2)\, P(M_1|B_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{9}.$$

Uvedený výsledok je v súlade s našou skúsenosťou. Nájsť Matematický pavilón v Mlynskej doline je dosť ťažké.

Príklad 4.4. Povedzme, že po uvedomení si neúspechu študent pokus nájsť M zopakuje podľa tých istých pravidiel. Aká je pravdepodobnosť toho, že študent nájde Matematický pavilón pri týchto dvoch pokusoch?

Riešenie. Označme znakom M_2 udalosť: študent nájde M pri druhom pokuse. Potom

$$\begin{aligned} P(M_2) &= P(M_2 \cap P) + P(M_2 \cap T) + P(M_2 \cap C) + \\ &\quad + P(M_2 \cap D) + P(M_2 \cap L) = \\ &= P(P)\, P(M_2|P) + P(T)\, P(M_2|T) + \ldots + \\ &\quad + P(L)\, P(M_2|L)\,. \end{aligned}$$

(Do L sa dostáva, ak pri prvom pokuse prejde dvakrát to isté miesto t. j. V. V tom prípade odchádza k L a otočí sa.) Vidno, že treba najprv vypočítať pravdepodobnosti P, T, C, D, L (pri prvom pokuse). Podobne ako pri výpočte $P(M_1)$ dostaneme

$$P(P) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}_{L,V,S,P} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}_{L,V,B,H,K,S,P} = \frac{25}{72};$$

$$P(T) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}_{L,V,S,K,T} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}_{L,V,B,H,K,T} = \frac{1}{12}; \quad P(C) = \frac{1}{12};$$

$$P(D) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}_{L,V,B,D} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{L,V,S,K,H,B,D} = \frac{25}{72};$$

$$P(L) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}_{L,\ V,\ B,\ H,\ K,\ S,\ V} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{L,\ V,\ S,\ K,\ H,\ B,\ V} = \frac{1}{36}$$

(Všimnime si, pre kontrólu, že $P(M_1) + P(P) + \ldots + P(L) = 1$.) Počítajme teraz podmienené pravdepodobnosti

$$P(M_2|P) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{9},$$

$$P(M_2|T) = P(M_2|C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{72},$$

$$P(M_2|D) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{27},$$

$$P(M_2|L) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{9}.$$

Po dosadení dostaneme

$$P(M_2) = \frac{25}{72}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{12}\cdot\frac{13}{72} + \frac{1}{12}\cdot\frac{13}{72} + \frac{25}{72}\cdot\frac{5}{27} + \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{9} \doteq 0{,}135.$$

Pri dvoch pokusoch ($M_1 \cap M_2 = \emptyset$) je teda

$$P(M_1 \cup M_2) = 0{,}111 + 0{,}135 = 0{,}246\,.$$

Príklad 4.5. Predpokladajme teraz, že študent podnikne len jeden pokus, ale nekončí ho v prípade, že prechádza dvakrát po tom istom mieste. Aká je pravdepodobnosť toho, že nájde M?

Riešenie. Študent má v podstate dve možnosti: Točiť sa v smere hodinových ručičiek a pritom hľadať M, alebo točiť sa naopak. (Predpokladajme, že nemôže otočiť automobil do protismeru.) Pravdepodobnosť jednej ľavotočivej otáčky (začíname medzi H a B) je

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{72}\,.$$

Podobne pravdepodobnosť jednej pravotočivej otáčky (začneme medzi H a K) je

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{72}\,.$$

Preto

$$P(M_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{72} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{72}\right)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{72} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{72}\right)^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{36}\left(1 + \frac{1}{72} + \frac{1}{72^2} + \cdots\right) +$$

$$+ \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{72} + \frac{1}{72^2} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{36} \frac{1}{1 - \frac{1}{72}} + \frac{1}{12} \frac{1}{1 - \frac{1}{72}} = \frac{8}{71}.$$

Vidíme teda, že pravdepodobnosť úspechu sa zvýši celkom nepatrne. Neoplatí sa teda motať dvakrát (dokonca nekonečne veľakrát) po tom istom mieste.

Cvičenia

4.7. Majme 4 urny. V prvej sú 3 biele a 2 čierne guľôčky, v druhej 2 biele a 2 čierne, v tretej 1 biela 4 čierne a vo štvrtej 5 bielych a jedna čierna. Náhodne vyberieme jednu urnu a z nej guľôčku. Aká je pravdepodobnosť toho, že bude biela?

4.8. Prvý stroj vyrába 50 % výrobkov určitého druhu, druhý stroj 30 % a tretí stroj 20 %. Z toho chybných výrobkov je u prvého stroja 3 %, u druhého 4 %, u tretieho 5 %. Aká je pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý výrobok bude chybný?

Príklad 4.6. Predpokladajme, že v určitom mieste počas sezóny pätinu dní prší, inokedy je pekne. Predpoveď dážďa býva chybná v polovici prípadov, predpoveď pekného počasia v desatine prípadov. Aká je pravdepodobnosť toho, že predpoveď počasia na niektorý deň bude správna?

Riešenie. Nech udalosť A_1 znamená, že prší, A_2 — je pekne, B_1 — predpovedali dážď, B_2 — predpovedali pekné počasie. Máme vypočítať $P((A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2)) =$

$P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_2)$. Pritom vieme, že $P(A_1) = 1/5$, $P(A_2) = 4/5$, $P(A_1|B_1) = 1/2$, $P(A_1|B_2) = 1/10$, $P(A_2|B_2) = 9/10$. Zrejme

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1 \cap B_1) + P(A_1 \cap B_2) = \\ &= P(A_1|B_1)\, P(B_1) + P(A_1|B_2)\, P(B_2) = \\ &= P(A_1|B_1)\, P(B_1) + P(A_1|B_2)\, (1 - P(B_1)), \end{aligned}$$

teda

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2} P(B_1) + \frac{1}{10} (1 - P(B_1)) .$$

Odtiaľ dostávame

$$P(B_1) = \frac{1}{4}, \quad P(B_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Preto

$$P(A_1 \cap B_1) = P(B_1)\, P(A_1|B_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$P(A_2 \cap B_2) = P(B_2)\, P(A_2|B_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{10} = \frac{27}{40},$$

$$P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_2) = \frac{1}{8} + \frac{27}{40} = \frac{4}{5}.$$

Príklad 4.7. V herni hrá hráč, ktorý má 50 Kčs. Pri každej hre môže s rovnakou pravdepodobnosťou vyhrať resp. prehrať 1 Kčs. Zaumienil si hrať dovtedy, kým nebude mať 100 Kčs. Aká je pravdepodobnosť toho, že príde o všetky peniaze?

Riešenie. Nech $p(x)$ je pravdepodobnosť toho, že hráč, ktorý má x korún príde pri daných pravidlách (a predsavzatí mať 100 Kčs) o všetky. Zrejme $p(0) = 1$, $p(100) = 0$.

Pri prvej hre sú dve možnosti. Buď vyhrá 1 Kčs (potom má $x + 1$ Kčs) a vtedy je pravdepodobnosť bankrotu $p(x + 1)$, alebo prehrá 1 Kčs a pravdepodobnosť bankrotu je $p(x - 1)$. Vzhľadom na to, že pravdepodobnosť výhry i prehry je 1/2, máme

$$p(x) = \frac{1}{2} p(x + 1) + \frac{1}{2} p(x - 1) .$$

Riešenie tejto rovnice nájdeme skusmo: každá lineárna funkcia $p(x) = cx + d$ je jej riešením. Z podmienok $p(0) = 1$, $p(100) = 0$ dostávame

$$1 = d , \quad 0 = 100c + 1 ,$$

teda

$$p(x) = 1 - \frac{x}{100} .$$

V našom prípade je $x = 50$, teda $p(50) = 1 - \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

Príklad 4.8. Opitý človek stojí krok od priepasti a pohybuje sa po jednej priamke (kolmej na smer priepasti), pričom pravdepodobnosť toho, že urobí krok k priepasti je p ($p < 1/2$). Aká je pravdepodobnosť toho, že spadne do priepasti?

Riešenie. Označme znakom K_1 resp. K_2 udalosť spočívajúcu v tom, že opitý spadne do priepasti, ak je jeden resp. dva kroky od nej. Máme vypočítať $P(K_1)$. Pretože pravdepodobnosť toho, že opitý urobí krok k priepasti resp. od priepasti je p resp. $1 - p$, máme

$$P(K_1) = p + (1 - p) P(K_2) .$$

K_2 sa môže uskutočniť len tak, že opitý sa dostane zo vzdialenosti 2 krokov do vzdialenosti 1 kroku od priepasti (pravdepodobnosť čoho je taká istá ako $P(K_1)$) a potom zo vzdialenosti 1 kroku do vzdialenosti 0 krokov (to je udalosť K_1), teda

$$P(K_2) = P(K_1)\,P(K_1)\,.$$

Odtiaľ dostávame kvadratickú rovnicu

$$P(K_1) = p + (1 - p)\,(P(K_1))^2$$

alebo

$$(1 - p)\,(P(K_1))^2 - P(K_1) + p = 0\,.$$

Jej riešenie je

$$(P(K_1))_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1 - p)}}{2(1 - p)} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(1 - 2p)^2}}{2(1 - p)} = \frac{1 \pm |1 - 2p|}{2(1 - p)}\,.$$

Pretože $p < 1/2$, platí $|1 - 2p| = 1 - 2p$, teda

$$(P(K_1))_{1,2} = \frac{1 \pm (1 - 2p)}{2(1 - p)} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{p}{1 - p} \end{cases}$$

Pravdepodobnosť toho, že opitý spadne do priepasti je $p/(1 - p)$.

Rozmanité úlohy možno riešiť aj pomocou tzv. Bayesovej formule. Skôr ako by sme ju odôvodnili vo všeobecnosti vysvetlíme ju na príklade.

Príklad 4.9. Na fakulte študuje 60 % dievčat. Spomedzi chlapcov študuje matematiku 25 %, spomedzi dievčat 10 %. Aká je pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý študent matematiky bude dievča?

Riešenie. Vieme, že $P(D) = 0{,}6$, $P(Ch) = 0{,}4$, $P(M|Ch) = 0{,}25$, $P(M|D) = 0{,}1$. Máme vypočítať $P(D|M)$. Výjdeme z rovností

$$P(D \cap M) = P(M)\,P(D|M)\,,$$
$$P(D \cap M) = P(D)\,P(M|D)\,.$$

Odtiaľ

$$P(D|M) = \frac{P(D)\,P(M|D)}{P(M)} = \frac{0{,}6\,.\,0{,}1}{P(M)} = \frac{0{,}06}{P(M)}\,.$$

Pravdepodobnosť $P(M)$ vypočítame obvyklým spôsobom.

$$\begin{aligned} P(M) &= P(D \cap M) + P(Ch \cap M) = \\ &= P(D)\,P(M|D) + P(Ch)\,P(M|Ch) = \\ &= 0{,}6\,.\,0{,}1 + 0{,}4\,.\,0{,}25 = 0{,}16\,. \end{aligned}$$

Preto

$$P(D|M) = \frac{0{,}06}{0{,}16} = \frac{3}{8}\,.$$

Uvedenú úvahu môžeme urobiť aj vo všeobecnejšom prípade. Nech $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, pričom D_i sú navzájom disjunktné. (V predošlom príklade bolo $n = 2$, $D_1 = D$, $D_2 = Ch$.) Potom

$$P(D_j|M) = \frac{P(D_j)\,P(M|D_j)}{P(M)}\,,$$

pričom

$$P(M) = \sum_{i=1}^{n} P(M \cap D_i) = \sum_{i=1}^{n} P(D_i)\,P(M|D_i)\,,$$

teda

$$P(D_j|M) = \frac{P(D_j)\,P(M|D_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(D_i)\,P(M|D_i)}\,.$$

A to je už Bayesov vzorec.

Cvičenia

4.9. Majme 3 urny. V prvej sú 3 biele a 2 červené guľky, v druhej 1 biela a 4 červené, v tretej 2 biele a 3 červené. Náhodne vyberieme guľku z niektorej náhodne vybratej urny. Vidíme, že je biela. Aká je pravdepodobnosť toho, že bola vytiahnutá z prvej urny?

4.10. Prvý stroj vyrába 50 % výrobkov určitého druhu, druhý stroj 30 %, tretí 20 %. Chybných výrobkov sa na prvom stroji vyrobí 3 %, na druhom 4 %, na treťom 5 %. Vyberieme jeden výrobok a zistíme že je chybný. Aká je pravdepodobnosť toho, že bol vyrobený na prvom stroji?

4.11. V určitej oblasti je 60 % žien. Vyšších ako 180 cm je pritom 4 % mužov a 1 % žien. Niektorá osoba je vyššia ako 180 cm. Aká je pravdepodobnosť toho, že je to žena?

4.12. V urne sú tri guľky. Sú biele a čierne, ale nevieme, ktorých je koľko. Všetky hypotézy (3 biele, 2 biele a 1 čierna, 1 biela a 2 čierne, 3 čierne) sú rovnako pravdepodobné. Vytiahneme jednu guľku a vidíme, že je biela. Aké sú podmienené pravděpodobnosti jednotlivých hypotéz?

4.13. Pri vyšetrovaní pacienta je podozrenie na tri navzájom sa vylučujúce choroby s pravdepodobnosťou výskytu 0,3 resp. 0,5 resp. 0,2. Laboratórna skúška dáva kladný výsledok u 15 % chorých na prvú chorobu, u 30 % na druhú a 20 % na tretiu. Aké sú pravdepodobnosti jednotlivých chorôb po vykonaní laboratórnej skúšky s kladným výsledkom?

4.14. Riešte podobnú úlohu ako v 4.13 s tým rozdielom, že laboratórna skúška je urobená päťkrát a dáva v štyroch prípadoch kladný v jednom záporný výsledok.

5. kapitola

AXIÓMY TEÓRIE PRAVDEPODOBNOSTI

Už dvakrát sme spomenuli, že pravdepodobnosť je vlastne zobrazenie, ktoré každej množine E z nejakého systému množín $\mathcal{S}$ priraďuje reálne číslo $P(E)$. V prvej kapitole pozostával $\mathcal{S}$ zo všetkých podmnožín danej konečnej množiny. V druhej kapitole pozostával $\mathcal{S}$ zo všetkých množín v danej rovinnej oblasti, ktorých „obsah sa dá vypočítať".

Teraz sa postavíme na axiomatické stanovisko. Pre teóriu pravdepodobnosti nie je natoľko dôležitá konštrukcia systému $\mathcal{S}$ resp. zobrazenia P, ako ich vlastnosti. Úlohou teórie pravdepodobnosti je potom odvádzať z jednoduchých, axiomaticky vymedzených vlastností, zložitejšie a tak vytvárať účinný aparát pre riešenie praktických úloh.

Ostatne, axiomatická metóda je čitateľovi iste známa. Už tradične sa axiomaticky vymedzujú pojmy bod, priamka, rovina. Najjednoduchšie je tiež postaviť sa na axiomatické stanovisko pri vymedzení pojmu čísla. Iný dosť známy príklad pojmu, ktorý sa definuje axiomaticky (aj keď zatiaľ možno nie zo školskej praxe) je pojem grupy.

V našom prípade máme teda zobrazenie $P: \mathcal{S} \to R$ a chceme vymedziť niektoré vlastnosti, ktoré budú určovať pojem pravdepodobnosť. Najprv sa budeme zaoberať definičným oborom $\mathcal{S}$ zobrazenia P. $\mathcal{S}$ pozostáva z podmnožín danej množiny Ω. Nemusí však pozostávať zo všetkých jej podmnožín.

Definícia 5.1. *Systém $\mathscr{S}$ podmnožín neprázdnej množiny Ω sa nazýva σ-algebrou, ak má tieto vlastnosti:*

1. *$\mathscr{S}$ je neprázdny.*
2. *Ak $E \in \mathscr{S}$, tak aj $E' = \Omega - E \in \mathscr{S}$.*
3. *Ak $E_i \in \mathscr{S}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, tak aj $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup \cup E_n \cup \ldots \in \mathscr{S}$. Množiny patriace do $\mathscr{S}$ nazývame udalosťami, alebo merateľnými množinami.*

Množinu $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \cup \ldots$ označujeme obvykle znakom $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Je to množina tých $x \in \Omega$, ktoré patria aspoň do jednej z množín E_n. Podobne znakom $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ alebo $E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n \cap \ldots$ označujeme množinu tých $x \in \Omega$, ktoré patria do všetkých množín E_n.

Príklad 5.1. Nech $E_n = \langle 2^{-n}, 2^{-n+1}\rangle$. Nájdime množiny $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

Riešenie. Znázornime si situáciu na obrázku. Zdá sa, že platí rovnosť $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0,1\rangle$. Dokážme ju.

Nech $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, potom existuje také n, že $x \in E_n = \langle 2^{-n}, 2^{-n+}\rangle \subset (0,1\rangle$, teda $x \in (0, 1\rangle$. Naopak, nech $x \in (0, 1\rangle$, t. j. $0 < x \leqq 1$. Potom existuje také n, že $2^{-n} < x$. Vezmime z týchto n najmenšie a označme ho znakom n_0. Potom

$$\frac{1}{2^{n_0}} < x\,, \quad \frac{1}{2^{n_0-1}} \geqq x$$

metože $n_0 - 1 < n_0$ a n_0 je najmenšie spomedzi spoprenutých prirodzených čísel. Vidíme teda, že existuje také prirodzené číslo n_0, že

$$x \in (2^{-n_0}, 2^{-n_0+1}\rangle \subset \langle 2^{-n_0}, 2^{-n_0+1}\rangle$$

teda

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle 2^{-n}, 2^{-n+1}\rangle \,.$$

Dokázali sme teda skutočne, že

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle 2^{-n}, 2^{-n+1}\rangle = (0, 1\rangle \,.$$

Čo sa týka prieniku $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, je to prázdna množina $\emptyset$. Keby totiž existoval prvok $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, potom by $x \in E_1 = \langle 1/2, 1\rangle$ t. j. $x \geqq 1/2$ a súčasne $x \in E_3 = \langle 1/8, 1/4\rangle$ t. j. $x \leqq 1/4$, ale to nie je možné.

Príklad 5.2. Nech $\Omega = \langle 0, 1\rangle$ a nech $\mathscr{S}_1 = \{\emptyset, \langle 0,1/2), \langle 1/2,1\rangle, \langle 0,1\rangle\}$, $\mathscr{S}_2 = \{\emptyset, \langle 0, 1/2\rangle, \langle 1/2,1\rangle, \langle 0,1\rangle\}$. Zistite, či $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ sú σ-algebry.

Riešenie. Uvažujme najprv o $\mathscr{S}_1$. $\mathscr{S}_1$ je neprázdny, $\mathscr{S}_1$ je uzavretý vzhľadom na komplementy. Konečne, $\mathscr{S}_1$ je uzavretý vzhľadom na spočítateľné zjednotenia. Vidíme teda, že $\mathscr{S}_1$ je σ-algebra. Na druhej strane $\mathscr{S}_2$ nie je σ-algebra, pretože $\langle 0,1/2\rangle \in \mathscr{S}_2$, ale $\langle 0,1\rangle - \langle 0,1/2\rangle = (1/2,1\rangle \notin \mathscr{S}_2$.

Cvičenia

5.1. Dokážte tzv. de Morganove pravidlá

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)' = \bigcap_{n=1}^{\infty} E'_n \,, \quad \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)' = \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n \,.$$

5.2. Nech $E_n = \langle 1 - 1/n, 1 + 1/n\rangle$. Vypočítajte $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

5.3. Zistite, či systém $\mathscr{S}$ všetkých intervalov na číselnej osi je σ-algebrou.

5.4. Uvažujme o systéme $\mathscr{S}$ pozostávajúcom z $\emptyset$, $\langle 0,1\rangle$ všetkých intervalov tvaru $\langle 0, 1/n)$ a všetkých intervalov tvaru $\langle 1/n, 1\rangle$. Zistite, či je $\mathscr{S}$ σ-algebrou.

5.5. Dokážte, že každá σ-algebra $\mathscr{S}$ je uzavretá vzhľadom na spočítateľné prieniky tj. ak $E_n \in \mathscr{S} (n = 1, 2, \ldots)$, tak aj $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{S}$.

5.6. Dokážte, že každá σ-algebra $\mathscr{S}$ je uzavretá vzhľadom na konečné zjednotenia a prieniky.

5.7. Ak $\mathscr{S}$ je σ-algebra, tak $\emptyset, \Omega \in \mathscr{S}$.

5.8. Ak $\mathscr{S}$ je σ-algebra a $E, F \in \mathscr{S}$, tak aj $E - F = \{x \in \Omega; x \in E, x \notin F\} \in \mathscr{S}$.

5.9. Neprázdny systém $\mathscr{S}$ podmnožín danej množiny Ω je σ-algebrou práve vtedy, keď je uzavretý vzhľadom na komplementy a vzhľadom na spočítateľné prieniky.

5.10. Dokážte, že systém $\mathscr{S}$ podmnožín množiny Ω je σ-algebrou práve vtedy, keď má tieto vlastnosti: 1. $\Omega \in \mathscr{S}$. 2. $E, F \in \mathscr{S} \Rightarrow E - F = \{x \in \Omega; x \in E, x \notin F\} \in \mathscr{S}$. 3. $E_n \in \mathscr{S}$ $(n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{S}$.

Teraz pristúpime k axiomatickej definícii pravdepodobnosti.

Definícia 5.2. *Nech $\mathscr{S}$ je σ-algebra podmnožín neprázdnej množiny Ω, $P: \mathscr{S} \to R$ je zobrazenie, ktoré každej množine $E \in \mathscr{S}$ priraďuje reálne číslo $P(E)$. Zobrazenie P nazývame pravdepodobnosťou, ak má tieto vlastnosti:*

1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

2. $P(E) \geqq 0$ *pre všetky* $E \in \mathscr{S}$.

3. *Ak* $E_n \in \mathscr{S}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *a* $E_n \cap E_m = 0$ $(n \neq m)$, *tak*

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \cup \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) .$$

Vlastnosť uvedená pod číslom 3 sa nazýva σ-aditívnosť zobrazenia P.

Príklad 5.3. Ilustrujme si σ-aditívnosť na tomto príklade: $E_n = (2^{-n}, 2^{-n+1}\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$, $P((a, b\rangle) = b - a$.

Riešenie. Podobne ako v príklade 5.1 zistíme, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0, 1\rangle$, teda

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 1 .$$

Na druhej strane $P(E_n) = 2^{-n+1} - 2^{-n} = 2^{-n}$, teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

je geometrický rad s kvocientom 1/2. Preto

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 .$$

Vidíme teda, že

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) .$$

Příklad 5.4. Ilustrujme teraz σ-aditívnosť na inom príklade: Hádžeme kockou dovtedy, kým nepadne šesťka. Nech E_0 je udalosť spočívajúca v tom, že šesťka nepadne nikdy, E_n je udalosť spočívajúca v tom, že šesťka padne prvýkrát pri n-tom hode.

Riešenie. V tomto prípade je rozumné položiť $\Omega = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Potom $E_n = \{x_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Udalosti E_m sú zrejme navzájom disjunktné ($E_n \cap E_m = \emptyset$ pre $n \neq m$), $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = \Omega$, teda

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = 1 .$$

Na druhej strane pre $n \geqq 1$ je

$$P(E_n) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} ,$$

teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \cdots$$

je geometrický rad s kvocientem 5/6. Preto

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = 1 .$$

Zo σ-aditívnosti dostávame

$$1 = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(E_n) = P(E_0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) =$$

$$= P(E_0) + 1 ,$$

teda

$$P(E_0) = 0 .$$

Pravdepodobnosť toho, že šesťka nepadne nikdy je 0.

Cvičenia

5.11. Dokážte, že pravdepodobnosť je konečne aditívna, tj.

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i), \text{ ak } E_i \cap E_j = \emptyset \ (i \neq j).$$

5.12. Dokážte, že pravdepodobnosť je subtraktívna, t. j. $P(E - F) = P(E) - P(F)$, v prípade, že $F \subset E$.

5.13. Dokážte, že pravdepodobnosť je monotónna, t. j. z inklúzie $F \subset E$ vyplýva, že $P(F) \leqq P(E)$.

5.14. Ak $P: \mathscr{S} \to R$ je nezáporná a σ-aditívna, tak $P(\emptyset) = 0$. Dokážte.

5.15. Dokážte, že $P(E') = 1 - P(E)$.

5.16. Dokážte, že pre všetky $E, F \in \mathscr{S}$ je $P(E) + P(F) = P(E \cup F) + P(E \cap F)$.

5.17. Dokážte, že pre všetky $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{S}$ platí

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i \cap E_j \cap E_k) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) .$$

Nakoniec si dokážeme dve zložitejšie tvrdenia.

Príklad 5.5. Nech $E_n \in \mathscr{S}$, $E_n \subset E_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Potom

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} P(E_n) .$$

Riešenie. Položme $F_1 = E_1$, $F_n = E_n - E_{n-1}$ $(n = 2, \ldots)$. Najprv dokážeme, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Na jednej strane totiž $F_n \subset E_n \subset E$, teda $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset E$. Nech na druhej strane $x \in E$. Potom sú dve možnosti:

1) x patrí do všetkých E_i, teda aj do $E_1 = F_1$, čiže $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

2) x nepatrí do všetkých E_i. Označme znakom n najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré $x \in E_n$. Potom $n > 1$ (inak by x patrilo do všetkých E_i) a $x \notin E_{n-1}$. Preto $x \in E_n - E_{n-1} = F_n$, teda $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Zo σ-aditívnosti pravdepodobnosti P dostávame

$$P(E) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)\,.$$

Podľa definície je súčet nekonečného radu limitou postupnosti čiastočných súčtov s_n,

$$s_n = P(F_1) + P(F_2) + \ldots + P(F_n)\,.$$

Podľa cvičenia 5.12 ($E_{i-1} \subset E_i$) je však pre $i > 1$ $P(F_i) = P(E_i - E_{i-1}) = P(E_i) - P(E_{i-1})$. Preto

$$s_n = P(E_1) + (P(E_2) - P(E_1)) + (P(E_3) -$$
$$- P(E_2)) + \ldots + (P(E_n) - P(E_{n-1})) = P(E_n)\,.$$

Odtiaľ dostávame

$$P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} P(E_n)\,.$$

Príklad 5.6. Nech $E_n \in \mathscr{S}$, $E_n \supset E_{n+1}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

Potom

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} P(E_n) .$$

Riešenie. Položme $F_n = E'_n$. Potom $F_n \in \mathscr{S}$, $F_n \subset \subset F_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, teda podľa príkladu 5.5 a cvičenia 5.15 je

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - P((\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)') =$$

$$= 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n) = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) =$$

$$= 1 - \lim_{n \to \infty} P(F_n) = 1 - \lim_{n \to \infty} P(E'_n) =$$

$$= 1 - \lim_{n \to \infty} (1 - P(E_n)) = 1 - 1 + \lim_{n \to \infty} P(E_n) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} P(E_n) .$$

Dodatok I.

KOMBINATORIKA

Uvažujme o množine $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Permutáciou z n prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazývame taký prvok množiny $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ činiteľov}}$ (t. j. usporiadanú n-ticu), ktorý obsahuje každý z prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$ práve raz.

Príklad D 1.1. Všetky permutácie z prvkov 1, 2, 3 sú

$$
\begin{array}{lll}
 & 1 < \begin{array}{l} 2 - 3 \\ 3 - 2 \end{array} & \begin{array}{l} 1, 2, 3 \\ 1, 3, 2 \end{array} \\
 & 2 < \begin{array}{l} 1 - 3 \\ 3 - 1 \end{array} & \begin{array}{l} 2, 1, 3 \\ 2, 3, 1 \end{array} \\
 & 3 < \begin{array}{l} 1 - 2 \\ 2 - 1 \end{array} & \begin{array}{l} 3, 1, 2 \\ 3, 2, 1 \end{array}
\end{array}
$$

Zrejme prvý prvok môžeme vybrať tromi rôznymi spôsobmi, druhý prvok už len dvomi rôznymi spôsobmi, tretí prvok už len jedným spôsobom. Spolu máme

$$3 . 2 . 1 = 3! \text{ možností.}$$

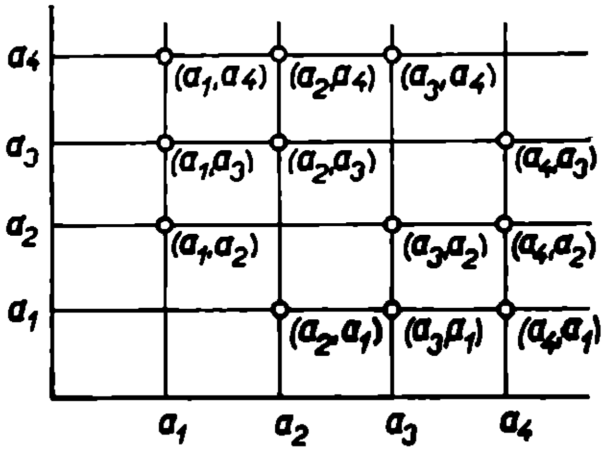
Teda všetkých permutácií z troch prvkov je $3! = 6$.

Všeobedne platí: Počet všetkých permutácií z n prvkov je $P_n = n!$

Variáciou r-tej triedy z n prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(r \leqq n)$

nazývame taký prvok množiny $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{r \text{ činiteľov}}$(t. j. usporiadanú r-ticu), ktorý obsahuje každý z prvkov $a_1, a_2, \ldots, a_n$ najviac raz.

Príklad D 1.2. Variácie druhej triedy zo štyroch prvkov a_1, a_2, a_3, a_4 sú:



Obr. 9

resp.

$$a_1 \left\langle \begin{array}{l} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \right. \qquad (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4)$$

$$a_2 \left\langle \begin{array}{l} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \right. \qquad (a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_2, a_4)$$

$$a_3 \left\langle \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{array} \right. \qquad (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_4)$$

$$a_4 \left\langle \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right. \qquad (a_4, a_1), (a_4, a_2), (a_4, a_3)$$

Celkom máme $4 . 3 = 12$ variácií.

Príklad D 1.3. Nájdime počet všetkých variácií tretej triedy zo šiestich prvkov a, b, c, d, e, f.

Zrejme prvý prvok môžeme vybrať šiestimi rôznymi spôsobmi, druhý prvok už len piatimi rôznymi spôsobmi a tretí prvok štyrmi rôznymi spôsobmi. Spolu máme 6.5.4 možností. Teda počet všetkých variácií tretej triedy zo šiestich prvkov je

$$6.5.4 = \frac{6!}{3!}.$$

Všeobecne platí: Počet $V(n, r)$ všetkých variácií r-tej triedy z n prvkov je $V(n, r) = n(n - 1) \dots (n - r + 1) = n!/(n - r)!$

Kombináciou r-tej triedy z n prvkov $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($r \leqq n$) nazývame ľubovoľnú r-prvkovú podmnožinu množiny $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Príklad D 1.4. Kombinácie tretej triedy zo štyroch prvkov a, b, c, d sú:

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

Príklad D 1.5. Porovnajme počet $C(4, 3)$ všetkých kombinácií tretej triedy zo štyroch prvkov a, b, c, d s počtom $V(4, 3)$ všetkých variácií tretej triedy zo štyroch prvkov a, b, c, d.

Kombinácie	Variácie
$\{a, b, c\}$	$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c)$ $(b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$
$\{a, b, d\}$	$(a, b, d), (a, d, b), (b, a, d)$ $(b, d, a), (d, a, b), (d, b, a)$
$\{a, c, d\}$	$(a, c, d), (a, d, c), (c, a, d)$ $(c, d, a), (d, a, c), (d, c, a)$

$\{b, c, d\}$ $\quad$ $(b, c, d), (b, d, c), (c, b, d)$
$(c, d, b), (d, b, c), (d, c, b)$

Teda $V(4, 3) = C(4, 3).3!$ a z toho $C(4, 3) = V(4, 3)/3!$
Všeobecne platí:

$$V(n, r) = C(n, r).r!$$

a z toho

$$C(n, r) = \frac{V(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r},$$

kde $C(n, r)$ je počet všetkých kombinácií r-tej triedy z n prvkov. Symbol $\binom{n}{r}$ sa nazýva kombinačné číslo.

Variácia r-tej triedy s opakovaním z n prvkov $a_1, a_2, \dots, a_n$ (r, n sú ľubovoľné prirodzené čísla) je každý prvok množiny $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{r \text{ činiteľov}}$, kde $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Príklad D 1.6. Utvorme všetky variácie tretej triedy s opakovaním z dvoch prvkov a, b. Vieme, že sú to všetky prvky množiny $A \times A \times A$, kde $A = \{a, b\}$. Keďže pre kartézsky súčin platí asociatívny zákon, je $A \times A \times A = (A \times A) \times A$. Prvky $A \times A$ sú

$$a < \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (a, a) \\ (a, b) \end{matrix}$$

$$b < \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (b, a) \\ (b, b) \end{matrix}$$

$A \times A$ má teda $2.2 = 2^2$ prvkov.

Prvky $(A \times A) \times A$ sú

$$(a, a) < \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (a, a, a) \\ (a, a, b) \end{matrix}$$

$$
\begin{array}{lll}
(a, b) & \begin{smallmatrix} \nearrow a \\ \searrow b \end{smallmatrix} & \begin{array}{l}(a, b, a) \\ (a, b, b)\end{array} \\
(b, a) & \begin{smallmatrix} \nearrow a \\ \searrow b \end{smallmatrix} & \begin{array}{l}(b, a, a) \\ (b, a, b)\end{array} \\
(b, b) & \begin{smallmatrix} \nearrow a \\ \searrow b \end{smallmatrix} & \begin{array}{l}(b, b, a) \\ (b, b, b)\end{array}
\end{array}
$$

$(A \times A) \times A$ má teda $2^2 . 2 = 2^3$ prvkov. Preto počet všetkých variácií tretej triedy s opakovaním z dvoch prvkov je 2^3.

Všeobecne platí: Počet všetkých variácií r-tej triedy z n prvkov s opakovaním je n^r.

Príklad D 1.7. Ak chceme v Sazke obsiahnuť všetky možnosti, musíme utvoriť všetky variácie dvanástej triedy z troch prvkov 0, 1, 2. Teda ako tipy musíme vsadiť všetky prvky množiny $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{12 \text{ činiteľov}}$, kde

$$A = \{0, 1, 2\} \text{ a tých je } 3^{12} = 531\,441.$$

Často nás zaujíma počet tzv. permutácií s opakovaním z prvkov, z ktorých niektoré sú rovnaké.

Příklad D 1.8. Majme 3 prvky, z ktorých 2 sú rovnaké: a, a, b. Ak by sme rovnaké prvky očíslovali a utvorili všetky permutácie z prvkov a_1, a_2, b, dostali by sme

$$
\begin{array}{ll}
(a_1, a_2, b), & (a_2, a_1, b) \\
(a_2, b, a_1), & (a_1, b, a_2) \\
(b, a_1, a_2), & (b, a_2, a_1)
\end{array}
$$

teda celkom 3! permutácií. Pretože však a_1, a_2 sú rovnaké, je vždy 2! usporiadaní (tie, ktoré vzniknú len permutovaním prvkov a_1, a_2) rovnakých. Rôznych je teda len 3!/ 2! permutácií. Sú to (a, a, b), (a, b, a), (b, a, a).

Permutáciou s opakovaním z n prvkov, z ktorých n_1 je rovných a_1, n_2 rovných a_2, ..., n_k prvkov rovných a_k $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$ rozumieme taký prvok množiny $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ činiteľov}}$, v ktorom je n_1 súradníc rovných a_1, n_2 rovných a_2, ..., n_k rovných a_k.

Počet všetkých takých permutácií s opakovaním je

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}.$$

Dodatok II.

NEKONEČNÉ RADY

V teórii nekonečných radov je základným pojmom pojem (nekonečnej) postupnosti. (Nekonečná) postupnosť je funkcia definovaná na množine všetkých prirodzených čísel. Hodnotu postupnosti f v čísle n označujeme znakom f_n (teda $f_n = f(n)$), celú postupnosť znakmi

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

alebo

$$\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots\}.$$

Príklad D 2.1. Napíšte niekoľko členov nasledujúcich postupností

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Inak zapísané

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\},$$

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\right\},$$

$$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots\},$$

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}.$$

Označme $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{n+1}{n}$, $c_n = (-1)^n$, $d_n = \frac{1}{2^n}$. Potom napr. $a_{10} = \frac{1}{10}$, $b_{100} = \frac{101}{100}$, $d_5 = \frac{1}{2^5}$, $c_{22} = 1$, $c_{57} = -1$ a pod.

Vidíme, že niektoré postupnosti majú tendenciu ustáliť sa, blížiť sa (v matematike používame termín konvergovať) k určitej hodnote, iné nie. V prvom prípade hovoríme, že postupnosť má limitu, čo označujeme znakom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Zdá sa napr., že by malo platiť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Prirodzene najprv musíme presne formulovať, čo znamená, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má za limitu číslo a ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), alebo, čo je to isté, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k číslu a.

Definícia D 2.1. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má za limitu číslo a, ak k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také reálne číslo n_0, že pre všetky prirodzené čísla $n > n_0$ je

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

alebo, čo je isté,

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon .$$

Príklad D 2.2. Dokážme, že $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Nech $\varepsilon > 0$. Položme $n_0 = 1/\varepsilon$. Nech $n > n_0$. Potom $1/n < 1/n_0 = \varepsilon$, teda

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n} < \varepsilon .$$

Príklad D 2.3. Dokážme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

Opäť by sme mohli rovno udať n_0, od ktorého počnúc je $|a_n - a| < \varepsilon$. Ukážeme si však, ako sa také n nájde. Treba odhadnúť rozdiel

$$|a_n - a| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}.$$

Rozdiel $1/n$ bude menší ako ε práve vtedy, keď $n > 1/\varepsilon$. Preto opäť položíme $n_0 = 1/\varepsilon$. Ak je $n > n_0$, tak

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \varepsilon .$$

Príklad D 2.4. Dokážme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

Má byť

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon .$$

To bude vtedy, keď

$$n \log \frac{1}{2} < \log \varepsilon ,$$

teda keď $\left(\text{pozor!} \quad \log \dfrac{1}{2} < 0\right)$

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log \dfrac{1}{2}} .$$

Položme teda $n_0 = \log \varepsilon / \log (1/2)$. Ak $n > n_0$, tak postupne

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log \dfrac{1}{2}} ,$$

$$n \log \frac{1}{2} < \log \varepsilon ,$$

$$\log \left(\frac{1}{2}\right)^n < \log \varepsilon ,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon ,$$

teda

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon .$$

Tak isto ako v príklade D 2.4 sa dokáže, že $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, ak len $|q| < 1$, t. j. $-1 < q < 1$.

Základnou úlohou teórie nekonečných radov je, zhruba povedané, spočítať nekonečne veľa čísel

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nejaká postupnosť. Napr. treba spočítať všetky čísla

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} .$$

Prirodzene, aj v tomto prípade treba najprv presne povedať, čo taký súčet znamená, ako je definovaný.

Definícia D 2.2. Nekonečný rad

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konverguje, ak existuje

$$\lim_{n\to\infty} s_n,$$

kde

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \; (n = 1, 2, \ldots).$$

Súčtom nekonečného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame potom túto limitu. Symbolom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ označujeme aj nekonečný rad, aj jeho súčet.

Príklad D 2.5. Zistite, či konverguje nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ a vypočítajte jeho súčet.

V tomto prípade je

$$s_1 = \frac{1}{2},$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{2^2},$$

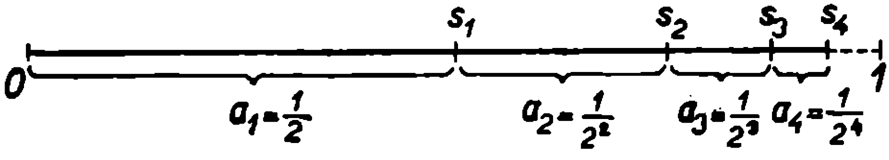
$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{2^3},$$

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Preto

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Vidíme teda, že nekonečný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konverguje a jeho súčet je 1. Táto skutočnosť sa dá znázorniť aj na číselnej osi.



Obr. 10

Podobne ako v príklade D 2.5, dá sa rozhodnúť o konvergencii každého geometrického radu.

Rad $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ sa nazýva geometrický, ak existuje také číslo q (tzv. kvocient), že pre všetky n je

$$a_n = qa_{n-1} ,$$

teda

$$a_2 = qa_1, a_3 = qa_2 = q^2a_1, a_4 = q^3a_1, \ldots,$$
$$a_n = q^{n-1}a_1.$$

Príklad D 2.6. Každý geometrický rad, ktorého kvocient $q \in (-1, 1)$ je konvergentný, pričom

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1} + \ldots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Máme dokázať, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a_1/(1-q)$. Vynásobme najprv rovnosť

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}$$

kvocientom q. Máme

$$s_nq = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n .$$

Po odčítaní dostaneme

$$s_n - s_nq = a_1 - a_1q^n ,$$

teda

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Pretože $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pre $q \in (-1, 1)$, dostávame, že

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1(1-0)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Príklad D 2.7. Zistite, či konverguje nekonečný rad

$$0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}4^2 + 0{,}7 \cdot 0{,}4^3 + \ldots + \\ + 0{,}7 \cdot 0{,}4^{n-1} + \ldots$$

Pretože ide o geometrický rad s kvocientom 0,4, rad konverguje a pre jeho súčet platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0{,}7 \cdot 0{,}4^{n-1} = 0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}4^2 + \ldots = \\ = \frac{0{,}7}{1 - 0{,}4} = 1{,}1\overline{6}.$$

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1.1. a) $\frac{27}{10^3} = 0{,}027$ b) $\frac{m}{10^3} > \frac{1}{3^3} \Rightarrow m > 37$

1.2. $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

1.3. $\frac{\binom{12}{5}\binom{15}{5}}{\binom{27}{10}}$

1.4. $\frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$

1.5. $\frac{20.19.18.17.16}{20.20.20.20.20} = 0{,}5814$

1.6. $\frac{365.364}{365.365} = \frac{364}{365}$

1.7. Štyri skupiny môžu sedieť napr. zľava doprava 4! spôsobmi. Pritom môže sedieť Američania 3!, Sovieti 5!, Francúzi 5! a Poliaci 2! spôsobmi. Teda priaznivých možností je 4!3!5!5!2!. Všetkých možností je zrejme 15!. Preto

$$P = \frac{4!3!5!5!2!}{15!}.$$

1.8. $1 - \frac{364}{365} = \frac{1}{365}$

1.9. $1 - \dfrac{365.364.363.\ \dots\ .(365 - r + 1)}{365^r}$

1.10. Má byť $p = 1 - \dfrac{365.364.\ \dots\ .(365 - r + 1)}{365^r} > \dfrac{1}{2}$.

Pre $r = 22$ je $p = 0{,}4757$, pre $r = 23$ je $p = 0{,}5073$.

1.11. $1 - \dfrac{7.6.5}{7^3}$

1.12. a) $\dbinom{7}{2}\dfrac{5^5}{6^7}$ b) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^5 \cdot \dfrac{9}{4}$ c) $1 - 2\left(\dfrac{5}{6}\right)^6$

1.13. a) $\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{1}{11}$ b) $\dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{14}{33}$ c) $1 - \dfrac{14}{33} = \dfrac{19}{33}$

1.14. a) $\dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{24}{91}$ b) $\dfrac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{45}{91}$ c) $1 - \dfrac{24}{91} = \dfrac{67}{91}$

1.15. $1 - \dfrac{30.29.28.\ \dots\ .12.11}{30^{20}} = 0{,}9998$

1.16. Pretože $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, platí $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$.

1.17. $P(A) = \dfrac{1}{3}$ b) $P(B) = \dfrac{2}{3}$ c) $P(A - B) = \dfrac{1}{12}$

1.18. $B = (B \cap A) \cup (B \cap A')$, pričom $(B \cap A) \cap (B \cap A') = \emptyset$. Preto $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$.

1.19. $P(A \cup B \cup C \cup D \cup E) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - \dots - P(D \cap E) + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap C \cap D) + \dots + P(C \cap D \cap E) - P(A \cap B \cap C \cap D) - \dots - P(B \cap C \cap D \cap E) + P(A \cap B \cap C \cap D \cap E)$.

1.20. $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i<j} P(A_i \cap A_j) +$

$$+ \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

Dôkaz. Predpokladajme, že veta platí pre nejaké n; máme ju dokázať pre $n + 1$. Majme $n + 1$ množín $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$. Podľa indukčného predpokladu

$$P(\bigcup_{i=2}^{n+1} A_i) = \sum_{i=2}^{n+1} P(A_i) - \sum_{2 \leq i < j} P(A_i \cap A_j) +$$
$$+ \sum_{2 \leq i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots,$$

$$P(\bigcup_{i=2}^{n+1} (A_1 \cap A_i)) = \sum_{i=2}^{n+1} P(A_1 \cap A_i) - \sum_{2 \leq i < j \leq n+1} P(A_1 \cap A_i \cap A_j) +$$
$$+ \sum_{2 \leq i < j < k \leq n+1} P(A_1 \cap A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}).$$

Ale

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(A_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n+1} A_i) = P(A_1) + P(\bigcup_{i=2}^{n+1} A_i) - P(\bigcup_{i=2}^{n+1} (A_1 \cap A_i)) =$$

$$= P(A_1) + \sum_{i=2}^{n+1} P(A_i) - \sum_{2 \leq i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j) - \sum_{i=2}^{n+1} P(A_1 \cap A_i) +$$

$$+ \sum_{2 \leq i < j < k \leq n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \sum_{2 \leq i < j \leq n+1} P(A_1 \cap A_i \cap A_j) - \ldots$$

$$\ldots - (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots$$
$$+ (-1)^{n+2} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1})$$

1.21. $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$

1.22. Nech A_i je udalosť spočívajúca v tom, že i-tý hráč dostane všetky karty rovnakej farby. Potom $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = 4/\binom{32}{8}$, $P(A_1 \cap A_2) =$

$$= P(A_1 \cap A_3) = \ldots = P(A_3 \cap A_4) = 4.3/\binom{32}{8}\binom{24}{8},$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \ldots = P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$$
$$= 4.3.2/\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4),$$

teda hľadaná pravdepodobnosť je

$$4 \cdot \frac{4}{\binom{32}{8}} - \binom{4}{2}\frac{4.3}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}} + \binom{4}{3}\frac{4.3.2}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}} -$$
$$- \frac{4.3.2}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}}.$$

1.23. Najprv rozriešime c). Podobne ako v príklade 1.21 zistíme, že hľadaná pravdepodobnosť P_1 je

$$P_1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}.$$

a) Udalosť „nikto nedostal správny kľúčik" je komplementom k udalosti „aspoň jeden dostal správny kľúčik". Preto pre pravdepodobnosť P_0 toho, že nikto nedostal správny kľúčik platí

$$P_0 = 1 - P_1 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}.$$

b) Nech B_i je udalosť spočívajúca v tom, že i-tý obyvateľ obdržal správny kľúčik, ale ostatní obyvatelia nie. Máme vypočítať vlastne $P(\bigcup_{i=1}^{6} B_i) = \sum_{i=1}^{6} P(B_i)$. Počítajme najprv $P(B_1)$.

$$P(B_1) = P(A_1 - (A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_6)) =$$
$$= P(A_1) - P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup \ldots$$
$$\ldots \cup (A_1 \cap A_6)).$$

Podľa cvičenia 1.20 (pozri príklad 1.11) je však

$$P(\bigcup_{i=2}^{6}(A_1 \cap A_i)) = \sum_{i=2}^{6} P(A_1 \cap A_i) - \sum_{2 \le i < j \le 6} P(A_1 \cap A_i \cap A_j) +$$
$$+ \ldots + P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6).$$

Ľahko zistíme ďalej, že $P(A_1 \cap A_i) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{6.5}$,
$P(A_1 \cap A_i \cap A_j) = \frac{1}{6.5.4}, \ldots, P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6) =$
$= \frac{1}{6!}$. Preto

$$P(B_1) = \frac{1}{6} - 5.\frac{1}{6.5} + \binom{5}{2}\frac{1}{6.5.4} - \binom{5}{3}\frac{1}{6.5.4.3} +$$

$$+ \binom{5}{4}\frac{1}{6!} - \frac{1}{6!} = \frac{1}{6.2!} - \frac{1}{6.3!} + \frac{1}{6.4!} - \frac{1}{6.5!}.$$

Pretože $P(B_1) = P(B_2) = \ldots = P(B_6)$, pravdepodobnosť P_1' toho, že práve jeden obyvateľ obdržal správny kľúčik sa rovná číslu

$$P_1' = 6P(B_1) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}.$$

d) Nech udalosť A znamená — aspoň dvaja dostali správny kľúčik, B — práve jeden dostal správny kľúčik, C — aspoň jeden dostal správny kľúčik. Potom $C = A \cup B$, $A \cap B = 0$, teda (podľa c) a b))

$P(C) = P(A) + P(B)$,

$$P(A) = P(C) - P(B) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} -$$

$$-\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) =$$

$$= 1 - \frac{2}{2!} + \frac{2}{3!} - \frac{2}{4!} + \frac{2}{5!} - \frac{1}{6!}.$$

Inak zapísané

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} -$$

$$-\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}\right) - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}\right)=$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}-\frac{4}{5!}+\frac{5}{6!}.$$

1.24. Nech A, resp. B, resp. C sú udalosti spočívajúce v tom, že prvá, resp. druhá, resp. tretia súčiastka pracuje. Máme vypočítať $P(A' \cap B' \cap C')$. Ale $A' \cap B' \cap C' = (A \cup B \cup C)'$, teda

$$P(A' \cap B' \cap C') = 1 - P(A \cup B \cup C) =$$
$$= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) +$$
$$+ P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) =$$
$$= 1 - 3.0{,}5 + 3.0{,}1875 - 0{,}0625 = 0.$$

Pravdepodobnosť toho, že žiadna súčiastka nebude pracovať je teda 0.

1.25. Podľa príkladu 1.11, ktorého tvrdenie je v poriadku aj v zovšeobecnenej schéme, platí

$$0{,}9 = P(A \cup F \cup R) = P(A) + P(F) + P(R) - P(A \cap F) -$$
$$- P(A \cap R) - P(F \cap R) + P(A \cap F \cap R) =$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - P(A \cap F) - P(A \cap R) - P(F \cap R) + \frac{1}{30}.$$

Odtiaľ

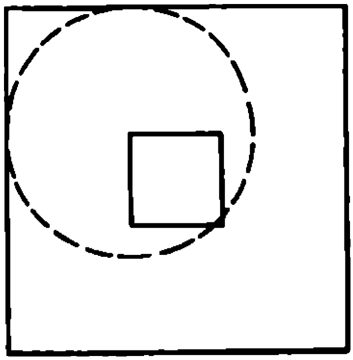
$$P(A \cap F) + P(A \cap R) + P(F \cap R) = \frac{7}{15}.$$

Nás, pravda, zaujíma

$$P((A \cap F) \cup (A \cap R) \cup (F \cap R)) = P(A \cap F) + P(A \cap R) +$$
$$+ P(F \cap R) - P(A \cap F \cap R) - P(A \cap F \cap R) -$$
$$- P(A \cap F \cap R) + P(A \cap F \cap R) =$$
$$= \frac{7}{15} - 2P(A \cap F \cap R) = \frac{7}{15} - 2.\frac{1}{30} = \frac{2}{5}.$$

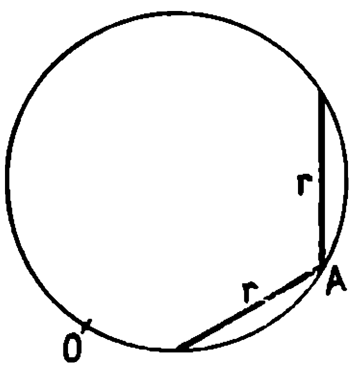
2.1. Skúmajme polohy stredu mince. Všetky možnosti polohy sú charakterizované štvorcom (obr. 11), polohy, pri ktorých je minca obsiahnutá v niektorom očku danej siete sú charakterizované štvorčekom, ktorého strana je 1/4 strany veľkého štvorca. Preto

$$p = \frac{\left(\frac{1}{4}a\right)^2}{a^2} = \frac{1}{16}.$$

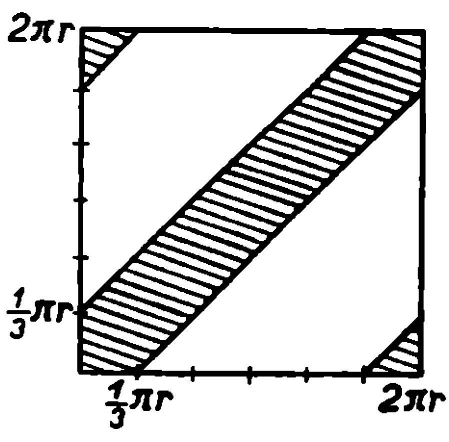


Obr. 11

2.2. Zvoľme na kružnici (s polomerom r) pevne bod O, na os x-ovú nanášajme polohu bodu A (dĺžku oblúka $\widehat{OA}$), na os y-ovú polohu bodu B. Hľadaná pravdepodobnosť je pomer „vyšrafovaného obsahu" k obsahu štvorca, teda



Obr. 12

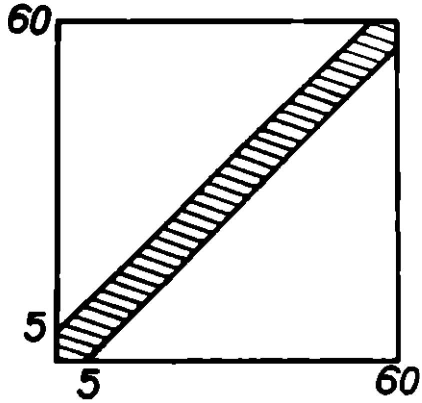


Obr. 13

$$p = \frac{2 \cdot \frac{\pi r}{3} \cdot 2\pi r}{(2\pi r)^2} = \frac{1}{3} \cdot$$

2.8. Na súradnicové osi nanášajme možný čas príchodu jednotlivých duelantov. Vzhľadom na to, že A čaká na B najviac 5 min. a takisto B na A, je hľadaná pravdepodobnosť podiel „vyšrafovaného" obsahu a obsahu štvorca, teda

$$p = \frac{575}{3\,600} = \frac{23}{144} \cdot$$



Obr. 14

3.1. a) $\dfrac{\binom{3}{2} \cdot 5}{6^3} = \dfrac{15}{216}$ b) Najjednoduchšie cez komplement:

$1 - \dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{91}{216}$ c) $\dfrac{5^3}{6^3} + \dfrac{3 \cdot 5^2}{6^3} + \dfrac{3 \cdot 5}{6^3} = 1 - \dfrac{1}{6^3} = \dfrac{215}{216}$

3.2. a) $\dfrac{1}{2^5}$ b) $\dfrac{\binom{5}{3}}{2^5}$ c) $\dfrac{\binom{5}{2}}{2^5}$ d) $\dfrac{1}{2^5} + \dfrac{\binom{5}{1}}{2^5} + \dfrac{\binom{5}{2}}{2^5}$

3.3. $\dfrac{9^{10}}{10^{10}}$

3.4. $\dfrac{3 \cdot 5 \cdot 3}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{14}$

3.5. a) $\binom{1000}{200}\left(\frac{1}{6}\right)^{200}\left(\frac{5}{6}\right)^{800}$ b) $\sum\limits_{k=100}^{1000}\binom{1000}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{1000-k}$

3.6. a) $\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$ b) $\sum\limits_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^{i}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}$

c) $\sum\limits_{i=1}^{k}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^{i}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}$

3.7. Pravdepodobnosť, že pri jednej kazete objaví falošnú mincu je 1/100, že je neobjaví je 1 — 1/100, že ju neobjaví ani v jednom prípade, je

$$\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100}.$$

3.8. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$; udalosti A, B sú teda nezávislé.

3.9. $P(A) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap C) = 0 \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, teda udalosti A, C nie sú nezávislé.

3.10. $P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(A)\,P(\emptyset)$.

3.11. $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A).1 = P(A)\,P(\Omega)$.

3.12. Ak $P(A) = 0$, alebo $P(B) = 0$, tak $P(A \cap B) = P(\emptyset) = P(A)\,P(B)$. Naopak, nech sú A, B nezávislé. Potom $0 = P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$, teda $P(A) = 0$, alebo $P(B) = 0$.

3.13. $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(A \cap R) = \frac{3}{8}$, $P(R) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, pričom $P(A \cap R) = \frac{3}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = P(A)\,P(R)$.

3.14. $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)\,P(B) = (1 - P(A)\,(1 - P(B)) = P(A')\,P(B')$.

3.15. $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A)\,P(B) + P(A' \cap B)$. Preto $P(A' \cap B) = P(B) - P(A)\,P(B) = P(B)\,(1 - P(A)) = P(B)\,P(A')$.

3.16. Tu sú tieto navzájom sa vylučujúce udalosti: všetci traja hlasujú správne, prví dvaja správne, tretí nesprávne, prvý a tretí správne, druhý nesprávne, prvý nesprávne, druhý a tretí správne.

$$p \cdot p \cdot \frac{1}{2} + p \cdot p \cdot \frac{1}{2} + p \cdot (1 - p) \cdot \frac{1}{2} + (1 - p) \cdot p \cdot \frac{1}{2} = p$$

Porota prijíma teda správne rozhodnutie s pravdepodobnosťou p.

3.17. Nech p_1 je pravdepodobnosť toho, že syn vyhrá nad otcom, p_2 — že vyhrá nad trenérom. V alternatíve otec, tréner, otec je pravdepodobnosť úspechu

$$p_1 p_2 p_1 + p_1 p_2 (1 - p_1) + (1 - p_1) p_2 p_1 = p_1 p_2 (2 - p_1).$$

v druhej alternatíve

$$p_2 p_1 p_2 + p_2 p_1 (1 - p_2) + (1 - p_2) p_1 p_2 = p_1 p_2 (2 - p_2).$$

Pretože $p_1 > p_2$, t. j. $p_1 p_2 (2 - p_1) < p_1 p_2 (2 - p_2)$, druhá alternatíva je pre syna výhodnejšia.

3.18. Pravdepodobnosť toho, že niekto bude mať vaše dátum narodenia je 1/365, že nebude je 1 — 1/365. Pravdepodobnosť toho, že z n osôb žiadna nebude mať to isté dátum narodenia čo vy, je

$$\left(1 - \frac{1}{365}\right)^n,$$

že aspoň jedna bude mať to dátum, je

$$1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^n.$$

Hľadáme teda najmenšie také prirodzené číslo n aby

$$1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^n > \frac{1}{2}; \quad n > \frac{-\log 2}{\log 364 - \log 365}, \quad n \geqq 251.$$

3.19. Nech A je udalosť spočívajúca v tom, že v súboji X nebude zasiahnutý. Potom

$$P(A) = 0{,}2 \,.\, 0{,}6 + 0{,}2 \,.\, 0{,}4 \,.\, 0{,}2 \,.\, 0{,}6 + \ldots =$$
$$= 0{,}2 \,.\, 0{,}6(1 + 0{,}4 \,.\, 0{,}2 + (0{,}4 \,.\, 0{,}2)^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{0,12}{1 - 0,08} = 0,13 \cdot$$

8.20. Nech p je pravdepodobnosť toho, že vytrénovaný X trafí cieľ. Potom

$$P(A) = p + (1 - p).0,2.p +$$
$$+ (1 - p).0,2.(1 - p).0,2.p + \ldots =$$
$$= p(1 + (1 - p).0,2 + ((1 - p).0,2)^2 + \ldots) =$$
$$= \frac{p}{1 - (1 - p).0,2} > 0,9 ,$$

ak $p > 36/41 = 0,878 \ldots$, teda X bude úspešný, ak $p \geqq 0,88$.

8.21. Nech p je pravdepodobnosť toho, že Z trafí cieľ, B je udalosť spočívajúca v tom, že Z v celom súboji nebude zasiahnutý. Potom

$$P(B) = p + (1 - p).0,2.p + \ldots = \frac{p}{1 - (1 - p).0,2} > 0,5,$$

ak $p > 49/99 = 0,49 \ldots$, teda stačí, aby $p \geqq 0,5$.

8.22. $(1 - p).0,6 + (1 - p).0,4.(1 - p).0,6 + \ldots =$

$$= \frac{0,6(1 - p)}{1 - (1 - p).0,4}$$

Pritom

$$\frac{0,6.(1 - p)}{1 - (1 - p).0,4} > 0,9 , \quad \text{ak } p < \frac{1}{16} ,$$

$$\frac{0,6.(1 - p)}{1 - (1 - p).0,4} > 0,5 , \quad \text{ak } p < \frac{3}{8}$$

Teda X má nádej väčšiu ako 0,9 na strelcov s pravdepodobnosťou zásahu menšou ako 1/16; na strelcov s pravdepodobnosťou zásahu menšou ako 3/8 má X nádej na úspech väčšiu ako 0,5.

8.23. Ak C začne strieľať na A, sú dve možnosti pre úspech A:
1. C netrafí A, A netrafí B, B zastrelí C a A trafí B; pravdepodobnosť toho je $0,6.0,3.0,7 = 0,126$.
2. C netrafí A, A trafí B a vyhrá nastávajúci súboj s C. Pravdepodobnosť toho je

$$0{,}6.0{,}7(0{,}6.0{,}7 + 0{,}6.0{,}3.0{,}6.0{,}7 + \ldots) =$$
$$= 0{,}6.0{,}7\,\frac{0{,}6.0{,}7}{1 - 0{,}3.0{,}6} = 0{,}2151.$$

Ak C začne strieľať na B, potom je len jedna nádej: C trafí B, na čo A vyhrá súboj s C; pravdepodobnosť toho je

$$0{,}4(0{,}7 + 0{,}3.0{,}6.0{,}7 + \ldots) = \frac{0{,}4.0{,}7}{1 - 0{,}3.0{,}6} = 0{,}3414.$$

Preto pravdepodobnosť toho, že A výjde zo súboja víťazne je

$$0{,}5(0{,}126 + 0{,}2151) + 0{,}5.0{,}3414 = 0{,}3412.$$

3.24. Tu je jediná možnosť: B začne strielať na C (pravdepodobnosť čoho je 0,5), pravdaže, trafí ho, na čo A trafí B, teda pravdepodobnosť úspechu A je $0{,}5.0{,}7 = 0{,}35$.

3.25. Keďže A chce zachrániť C bude namiesto mierenia na C strieľať vždy do vzduchu (pravdepodobnosť, že A trafí C je teda 0, pravdepodobnosť, že A trafí B je, pravda, 0,7). Sú dve možnosti: 1. A začína strieľať smerom na C. Aby C vyšiel zo súboja bez úrazu musí trafiť B a vyhrať súboj s A. Pravdepodobnosť toho je

$$0{,}4(1.0{,}4 + 1.0{,}6.1.0{,}4 + \ldots) = \frac{0{,}4.0{,}4}{1 - 0{,}6} = 0{,}4.$$

2. A začne strieľať smerom na B. Ak má C vyhrať, musí A trafiť B, načo C vyhrá súboj s A. Pravdepodobnosť toho je

$$0{,}7(0{,}4 + 0{,}6.1.0{,}4 + \ldots) = \frac{0{,}7.0{,}4}{1 - 0{,}6} = 0{,}7.$$

Ak chce teda A zachrániť C, musí (okrem toho, že ho bude šanovať) začať strieľať na B a mieriť pri tom zvlášť pozorne.

3.26. $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/2$, $P(A_1 \cap A_2) =$ $= P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$ $= 1/4$. Teda $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(A_j)$ pre $i \neq j$, ale $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)$.

3.27. $P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$,

$P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$. Ďalej, $A \cap B \cap C = \{\omega_4\} = A \cap C$.

Teda

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{12} = P(A)\,P(B)\,P(C)\,,$$

ale

$$P(A \cap C) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = P(A)\,P(C).$$

Podobne $P(B \cap C) \neq P(B)\,P(C)$. Naproti tomu $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

4.1. $P(F|M) = P(F \cap M)/P(M) = 0{,}2/0{,}3 = 2/3$.

4.2. Hľadáme $P(S \cup K|Č) = P(S|Č) + P(K|Č)$, kde S znamená, že všetky štyri sú srdcové, K — kárové, $Č$ — červené. Máme $P(S|Č) = P(S \cap Č)/P(Č)$; $P(Č) = \binom{26}{4}/\binom{52}{4}$, $P(S \cap Č) = P(S) = \binom{13}{4}/\binom{52}{4}$, teda $P(S|Č) = \binom{13}{4}/\binom{26}{4} = 0{,}047$. Pretože $P(K|Č) = P(S|Č)$, je $P(S \cup K|Č) = 2.\,P(S|Č) = 0{,}094$.

4.3. Podľa definície $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{1}{6}\Big/\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Podobne $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = \frac{1}{6}\Big/\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Lahko sa zistí, že $P(A') = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $P(B') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. K tomu, aby sme vedeli vypočítať $P(A'|B')$ však potrebujeme poznať $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$. Ale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$. Preto $P(A' \cap B') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, teda $P(A'|B') = P(A' \cap B')/P(B') = \frac{1}{3}\Big/\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$. Podobne $P(B'|A') = \frac{2}{3}$.

4.4. Pretože $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ a $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, platí

$$P(A|B) = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)}.$$

4.5. $P(B|A) = 1$.

4.6. $P(B|A) = 0$.

4.7. $P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(B \cap U_i) = \sum_{i=1}^{4} P(U_i) P(B|U_i) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} P(B|U_i) =$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{5}{6}\right) = \frac{8}{15}.$$

4.8. $P(Ch) = \Sigma\, P(A_i \cap Ch) = \Sigma\, P(Ch|A_i)\, P\,(A_i) = 0{,}03\,.\,0{,}5 + 0{,}04\,.\,0{,}3 + 0{,}05\,.\,0{,}2 = 0{,}037$.

4.9. $$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)\,P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)\,P(B|A_i)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}.$$

4.10. $$P(A_1|Ch) = \frac{P(A_1)\,P(Ch|A_1)}{\Sigma\,P(A)\,P(Ch|A_i)} =$$

$$= \frac{0{,}5\,.\,0{,}03}{0{,}5\,.\,0{,}03 + 0{,}3\,.\,0{,}04 + 0{,}2\,.\,0{,}05} = \frac{15}{37}.$$

4.11. $$P(\check{Z}|V) = \frac{P(\check{Z})\,P(V|\check{Z})}{P(\check{Z})\,P(V|\check{Z}) + P(M)P(V|M)} =$$

$$= \frac{0{,}6\,.\,0{,}01}{0{,}6\,.\,0{,}01 + 0{,}4\,.\,0{,}04} = \frac{3}{11}.$$

4.12. Označme jednotlivé hypotézy H_1 (3 biele), H_2 (2 biele, jedna čierna), H_3 (1 biela, 2 čierne), H_4 (3 čierne). Potom

$$P(H_1|B) = \frac{P(H_1)\,P(B|H_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(H_i)\,P(B|H_i)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot 0} = \frac{1}{2}.$$

Podobne

$$P(H_2|B) = 1/3, \quad P(H_3|B) = 1/6, \quad P(H_4|B) = 0.$$

4.13. Dané sú $P(D_1) = 0{,}3$, $P(D_2) = 0{,}5$, $P(D_3) = 0{,}2$, $P(L|D_1) = 0{,}15$, $P(L|D_2) = 0{,}3$, $P(L|D_3) = 0{,}2$. Podľa Bayesovej formule

$$P(D_1|L) = \frac{P(L|D_1)\,P(D_1)}{\Sigma\,P(L|D_i)\,P(D_i)} =$$

$$= \frac{0{,}15\,.\,0{,}3}{0{,}15\,.\,0{,}3 + 0{,}3\,.\,0{,}5 + 0{,}2\,.\,0{,}2} = \frac{9}{47}.$$

Podobne $P(D_2|L) = 30/47$, $P(D_3|L) = 8/47$.

4.14. V tomto prípade $P(L|D_1) = \binom{5}{1}\,0{,}15^4\,.\,0{,}85 = 0{,}002$, $P(L|D_2) = 5\,.\,0{,}3^4\,.\,0{,}7 = 0{,}028$, $P(L|D_3) = 5\,.\,0{,}2^4\,.\,0{,}8 = 0{,}006$.

$$P(D_1|L) = \frac{P(L|D_1)\,P(D_1)}{\Sigma P(L|D_i)\,P(D_i)} =$$

$$= \frac{0{,}002\,.\,0{,}3}{0{,}002\,.\,0{,}3 + 0{,}028\,.\,0{,}5 + 0{,}006\,.\,0{,}2} = \frac{3}{79},$$

$P(D_2|L) = 70/79$, $P(D_3|L) = 6/79$.

5.1. $x \in (\bigcup E_n)' \Leftrightarrow x \notin \bigcup E_n \Leftrightarrow \forall n,\ x \notin E_n \Leftrightarrow \forall n,\ x \in E_n' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in \bigcap E_n'$. Druhú rovnosť môžeme dokázať aj pomocou prvej takto: $\bigcap E_n = \bigcap (E_n')' = (\bigcup E_n')'$; preto $(\bigcap E_n)' = ((\bigcup E_n')')' = \bigcup E_n'$.

5.2. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \langle 0,2\rangle$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \{1\}$.

5.3. Nie je, pretože $\langle a, b\rangle' = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \notin \mathscr{S}$.

5.4. $\mathscr{S}$ je uzavretý vzhľadom na komplementy, ale nie je uzavretý vzhľadom na spočítateľné zjednotenia, pretože $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \langle 1/n, 1\rangle = (0,1\rangle \notin \mathscr{S}$.

5.5. Ak $E_n \in \mathscr{S}$, tak aj $E_n' \in \mathscr{S}$, teda $\bigcap E_n = (\bigcup E_n')' \in \mathscr{S}$.

5.6. Nech $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{S}$. Položme $F_i = E_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $F_i = E_n$ $(i = n + 1, n + 2, \ldots)$. Potom $F_i \in \mathscr{S}$ $(i = 1, 2,$

...), teda $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathscr{S}$. Tvrdenie o prienikoch vyplýva aj z de Morganovho pravidla

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i = (\bigcup_{i=1}^{n} E'_n)'.$$

5.7. Nech $E \in \mathscr{S}$. Potom aj $E' \in \mathscr{S}$, teda $\Omega = E \cup E' \in \mathscr{S}$. Odtiaľ $\emptyset = \Omega' \in \mathscr{S}$.

5.8. $E - F = E \cap F' \in \mathscr{S}$.

5.9. Ak je $\mathscr{S}$ σ-algebrou, tak je uzavretý vzhľadom na spočítateľné prieniky podľa cv. 5.5. Naopak, aj $\mathscr{S}$ je uzavretý vzhľadom na komplementy a spočítateľné prieniky, tak je $\mathscr{S}$ uzavretý aj vzhľadom na spočítateľné zjednotenia, pretože $\bigcup E_n = (\bigcap E'_n)'$.

5.10. Každá σ-algebra $\mathscr{S}$ má uvedené vlastnosti vzhľadom na cv. 5.7 a 5.8. Naopak, nech sú splnené uvedené podmienky. Potom je systém $\mathscr{S}$ (podľa 1) neprázdny a (podľa 3) uzavretý vzhľadom na spočítateľné zjednotenia. Konečne, ak $E \in \mathscr{S}$, tak (podľa 1 a 2) aj $E' = \Omega - E \in \mathscr{S}$, teda $\mathscr{S}$ je uzavretý vzhľadom na komplementy.

5.11. Položme $F_i = E_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $F_i = \emptyset$ $(i = n + 1, n + 2, \ldots)$. Potom $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) = \sum_{i=1}^{n} P(F_i) + 0 = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$.

5.12. Ak $F \subset E$, tak $E = F \cup (E - F)$, pričom E, $E - F$ sú navzájom disjunktné. Preto podľa 5.11 $P(E) = P(F) + P(E - F)$.

5.13. Podľa 5.12 je $0 \leqq P(E - F) = P(E) - P(F)$, teda $P(F) \leqq P(E)$.

5.14. Položme $E_n = \emptyset$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, E_n sú navzájom disjunktné. Preto $P(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$, teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$ konverguje. Pre čiastočné súčty s_n nekonečného radu $\sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$ platí: $s_n = P(\emptyset) + \ldots + P(\emptyset) = nP(\emptyset)$. Ale $\lim_{n \to \infty} nP(\emptyset)$ existuje práve vtedy, keď $P(\emptyset) = 0$.

5.15. Podľa cv. 5.12 je $P(E') = P(\Omega - E) = P(\Omega) - P(E) = 1 - P(E)$.

5.16. Zrejme $E \cup F = (E - F) \cup (E \cap F) \cup (F - E)$, $E = (E - F) \cup (E \cap F)$, $F = (F - E) \cup (E \cap F)$. Odtiaľ $P(E) = P(E - F) + P(E \cap F)$, $P(F) = P(F - E) + P(E \cap F)$, $P(E \cup F) = P(E - F) + P(E \cap F) + P(F - E) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$.

5.17. Dôkaz je ten istý ako v cv. 1.20.

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

BELOSLAV RIEČAN, ZDENA RIEČANOVÁ

O pravdepodobnosti

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
K tisku připravil Vladimír Doležal
Odpovědný redaktor Jiří Sixta
Publikace číslo 3683
Edice Škola mladých matematiků, svazek 37
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
4,17 AA, 4,51 VA. 104 stran
Náklad 6500 výtisků. 1. vydání
Praha 1976. 508/21/82.5
23-081-76 03/2

Cena brožovaného výtisku Kčs 6,—

OBSAH

23-081-76
03/2
Cena brož.