Kombinatorika

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

KOMBINATORIKA

45

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ANTONÍN VRBA

KOMBINATORIKA

PRAHA 1980
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali RNDr. Ivan Korec, CSc., a RNDr. Josef Polák

PŘEDMLUVA

Ke čtení této knížky není potřeba téměř žádných předběžných znalostí. Předpokládá se však, že je čtenář seznámen se základními pojmy týkajícími se množin a zobrazení.

Prvních pět kapitolek obsahuje látku, která se z kombinatoriky v tom či onom rozsahu probírá na střední škole — tradiční partie o pořadích, variacích a kombinacích bez opakování i s opakováním. Zařadil jsem je do knížky hlavně proto, že ne všichni čtenáři kombinatoriku ve škole měli. Ale i těm, kteří tuto základní látku znají, může prospět, když si je projdou, uvidí pak možná některé skutečnosti v trochu jiných souvislostech. Studenti gymnázií se zaměřením na matematiku se však v prvních pěti kapitolách mnoho nového nedovědí, podobají se totiž učebnici, kterou jsem pro ně před časem napsal.

Zbytek knížky už do školních osnov nezapadá, i když je přístupný začátečníkům. V šesté, sedmé a osmé kapitole je probrána důležitá kombinatorická metoda — tzv. princip inkluze a exkluze. Devátá kapitola je věnována řešení několika důležitých úloh, které mají svůj význam i pro teorii pravděpodobnosti a statistickou fyziku. Závěrečná kapitola obsahuje vybrané kombinatorické úlohy olympijské povahy, pocházející ze zahraničních pramenů. V knížce je poměrně dost cvičení. Téměř všechna jsou na konci vyřešena.

Když jsem připravoval tuto brožuru, vyšel český překlad pěkné knihy N. J. Vilenkina *Kombinatorika*. Snažil jsem se, abych se s ní pokud možno nepřekrýval, i když jsem se na několika místech (zejména v deváté kapitole) nemohl nezabývat některými důležitými otázkami, které jsou probrány i ve Vilenkinově knížce. Ta je daleko obsáhlejší a je v ní vyřešeno několik set úloh.

Problémy, které zde budeme řešit, lze zhruba charakterizovat asi takto: Kolik existuje podmnožin konečné množiny, které mají určitou vlastnost? Tento okruh otázek je poněkud omezený, do značné míry vyčerpaný a vlastně představuje klasickou část kombinatoriky. Silným prostředkem, který k jejich řešení přispívá, jsou tzv. vytvořující funkce. O nich vyšla už ve Škole mladých matematiků jako 29. svazek knížka F. Zítka *Vytvořující funkce*, proto zde tuto látku znovu neuvádím. Vyšly tu ještě další brožury s kombinatorickými náměty — J. Sedláček: *Faktoriály a kombinační čísla* (sv. 10), L. Bukovský a I. Kluvánek: *Dirichletov princíp* (25), J. Bosák: *Latinské štvorce* (38) a částečně sem patří i brožura B. Riečan, Z. Riečanová: *O pravdepodobnosti* (37).

Kombinatorika se v poslední době bouřlivě rozvíjí, vznikají její nová odvětví a zasahuje i do jiných oblastí matematiky. V současné matematice se totiž věnuje stále větší pozornost tzv. diskrétním otázkám. Aby nedošlo k omylu — toto slovo se kromě všeobecně vžitého významu užívá i ve smyslu nespojitý, nesouvislý. Zájem o diskrétní struktury byl vzbuzen hlavně rozvojem počítačů. Jsou to zařízení, která mohou nabývat — i když obrovského — přece jen konečného počtu stavů. Při konstrukci počítačů, sestavování programů i vymýšlení postupů pro strojové řešení úloh tak nutně narážíme na problémy kombinatorické povahy. I další podněty vyvolaly potřebu zkoumat obecné kombinatorické principy: lingvistika, chemie, biologie, fyzika a spojová technika zvenku, teorie čísel, logika, statistika a pravděpodobnost zevnitř matematiky samotné.

Středoškolákům jsou z moderních směrů přístupné zejména teorie grafů a kombinatorická geometrie. Přehledná elementární knížka o grafech je *Úvod do teorie grafů* od J. Sedláčka a některé partie této teorie jsou hlouběji probrány ve 41. svazku Školy mladých matematiků *Rovinné grafy* od B. Zelinky. Pěkné úlohy z kombinatorické geometrie jsou řešeny v knize D. O. Škljarskij, N. N. Čencov, I. M. Jaglom: *Geometričeskije ocenki i zadači iz kombinatornoj geometrii.*

Prosím čtenáře, aby si své připomínky k této knížce nenechali pro sebe a sdělili mi je na adresu Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, 115 67 Praha 1. Zejména vítám jiná řešení úloh.

Autor

I. KAPITOLA

POŘADÍ, VARIACE A KOMBINACE

Začneme úlohou:

Do školní jídelny přišla skupina 35 žáků. Určete, kolika způsoby se mohli seřadit do fronty u výdeje obědů.

Jednotlivé způsoby se budou lišit pořadím, v němž žáci u okénka stojí. Máme tedy určit počet všech *pořadí* 35 žáků. Úlohu zformulujeme a vyřešíme obecně:

Určete počet všech pořadí prvků neprázdné konečné k-prvkové množiny M. Pořadím se zde míní uspořádaná k-tice navzájem různých prvků množiny M.

Hledaný počet označíme $P(k)$. (V naší konkrétní úloze bude $k = 35$ a M skupina 35 žáků, hledáme $P(35)$.) Počet $P(k)$ bude ovšem záviset jen na čísle k a ne na dalších vlastnostech množiny M a jejích prvků. Počet pořadí 35 žáků je stejný jako počet pořadí 35 parních lokomotiv či počet pořadí 35 bodů v rovině.

Je-li číslo k malé, můžeme najít počet pořadí $P(k)$ tak, že systematicky sestavíme všechna pořadí a pak spočítáme, kolik jich je. Tak např. všechna pořadí prvků čtyřprvkové množiny $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ jsou

(m_1, m_2, m_3, m_4)	(m_1, m_2, m_4, m_3)	(m_1, m_3, m_2, m_4)
(m_1, m_3, m_4, m_2)	(m_1, m_4, m_2, m_3)	(m_1, m_4, m_3, m_2)
(m_2, m_1, m_3, m_4)	(m_2, m_1, m_4, m_3)	(m_2, m_3, m_1, m_4)
(m_2, m_3, m_4, m_1)	(m_2, m_4, m_1, m_3)	(m_2, m_4, m_3, m_1)
(m_3, m_1, m_2, m_4)	(m_3, m_1, m_4, m_2)	(m_3, m_2, m_1, m_4)
(m_3, m_2, m_4, m_1)	(m_3, m_4, m_1, m_2)	(m_3, m_4, m_2, m_1)
(m_4, m_1, m_2, m_3)	(m_4, m_1, m_3, m_2)	(m_4, m_2, m_1, m_3)
(m_4, m_2, m_3, m_1)	(m_4, m_3, m_1, m_2)	(m_4, m_3, m_2, m_1)

a je jich 24. Je tedy $P(4) = 24$. Pro velká k je ovšem tato metoda příliš pracná a hlavně nespolehlivá.

Podívejme se na seznam všech pořadí čtyřprvkové množiny pozorněji: Všechna pořadí v prvních dvou řádcích mají na počátečním místě prvek m_1 a za ním postupně následují všechna pořadí tří prvků m_2, m_3, m_4. Analogicky je tomu i v dalších řádcích. Je tedy $P(4) = 4 . P(3)$. Obecně pro každé přirozené číslo n platí, že

$$P(n + 1) = (n + 1)\, P(n). \tag{1}$$

Vskutku, rozdělíme-li všechna pořadí $n + 1$ prvků na $n + 1$ disjunktních skupin*) podle toho, kterým prvkem začínají, bude každá skupina obsahovat právě $P(n)$ pořadí, neboť vynecháním počátečního prvku ve všech pořadích určité skupiny dostaneme právě všechna pořadí ostatních n prvků.

Vzorec (1) umožňuje odpovědět na otázku, kolik je všech pořadí k prvků. Vzhledem k tomu, že zřejmě $P(1) = 1$, dostáváme podle něho: *Pro každé přirozené číslo k je*

$$P(k) = k(k - 1)\,(k - 2) \ldots 2.1.$$

---

*) Množiny budeme nazývat *disjunktní*, pokud průnik každých dvou z nich je prázdný.

Tento vzorec se snadno pamatuje — vpravo je součin všech přirozených čísel od 1 do k včetně*).
Podle vzorce vychází $P(4) = 4.3.2.1 = 24$ a to se shoduje s tím, co jsme zjistili dříve. Počet různých front, které mohli žáci v jídelně utvořit, činí

$$P(35) = 35.34. \dots .2.1.$$

(Toto číslo má 41 číslic.)

Budeme pokračovat další úlohou:
V noclehárně je 50 lůžek. Určete, kolika způsoby se na ně může uložit 35 nocležníků.

Abychom mohli úlohu vyřešit, musíme ještě vědět, které způsoby uložení nocležníků se pokládají za různé. Z hlediska nocležníků bude podstatné, na které posteli kdo z nich bude ležet; dvě uložení budou pokládat za různá, právě když alespoň jeden nocležník bude spát při jednom z nich na jiné posteli než při druhém. Jinými slovy, je pro ně podstatné, nejen které postele budou obsazeny, ale také uspořádání nocležníků na nich. Hledaný počet tedy bude roven počtu všech uspořádaných 35-tic lůžek, které je možno sestavit ze všech 50 lůžek, která v noclehárně jsou.

Jiné hledisko bude mít správce noclehárny, který musí druhý den převléknout použité postele. Ten bude pokládat za různá taková dvě uložení, že při jednom z nich byla použita postel, která nebyla použita při druhém. Kdo vlastně na které posteli spal, ho vůbec zajímat nebude, tj. nebude brát v úvahu uspořádání nocležníků na postelích. Pro něho bude hledaný počet roven počtu všech neuspořádaných 35-tic lůžek, které je možno sestavit z těch 50 lůžek, jinými slovy počet

*) Je-li $k = 1$, je vpravo 1 (nejde vlastně o součin).

všech 35-prvkových podmnožin 50-prvkové množiny lůžek v noclehárně.

Jak to bývá v matematice obvyklé, při řešení úlohy odhlédneme od noclehárny a zájezdu i od konkrétního počtu postelí a nocležníků a úlohu zformulujeme obecně:

Buď dána neprázdná konečná k-prvková množina M a přirozené číslo $j \leqq k$. Určete

a) *počet všech uspořádaných j-tic navzájem různých prvků množiny M,*

b) *počet všech j-prvkových podmnožin množiny M.*

(V našem konkrétním případě bude M množina všech postelí v noclehárně, k bude 50 a j bude 35. Otázka a) odpovídá hledisku nocležníků a otázka b) hledisku správce.)

Je zřejmé, že i zde budou výsledné počty záviset pouze na číslech j, k a ne na dalších vlastnostech množiny M a jejích prvků.

Uspořádaným j-ticím navzájem různých prvků k-prvkové množiny se říká j-prvkové *variace* z k prvků a j-prvkovým podmnožinám k-prvkové množiny j-prvkové *kombinace* z k prvků.*)

Hledáme tedy

a) *počet $V(j, k)$ všech j-prvkových variací z k prvků,*

b) *počet $K(j, k)$ všech j-prvkových kombinací z k prvků.*

Jsou-li čísla j, k malá, můžeme i zde určit hledané počty tak, že systematicky sestavíme všechny j-prvkové variace nebo kombinace z k prvků a spočítáme je. Tak

---

*) Často se také ještě užívají starší termíny variace (nebo kombinace) j-té třídy z k prvků.

např. pro $k = 4$ a $j = 3$ bude mít množina $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ následující 4 tříprvkové kombinace:

$$\{m_1, m_2, m_3\} \ \{m_1, m_2, m_4\} \ \{m_1, m_3, m_4\} \ \{m_2, m_3, m_4\}$$

a následujících 24 tříprvkových variací:

$$\begin{array}{llll}
(m_1, m_2, m_3) & (m_2, m_1, m_3) & (m_3, m_1, m_2) & (m_4, m_1, m_2) \\
(m_1, m_2, m_4) & (m_2, m_1, m_4) & (m_3, m_1, m_4) & (m_4, m_1, m_3) \\
(m_1, m_3, m_2) & (m_2, m_3, m_1) & (m_3, m_2, m_1) & (m_4, m_2, m_1) \\
(m_1, m_3, m_4) & (m_2, m_3, m_4) & (m_3, m_2, m_4) & (m_4, m_2, m_3) \\
(m_1, m_4, m_2) & (m_2, m_4, m_1) & (m_3, m_4, m_1) & (m_4, m_3, m_1) \\
(m_1, m_4, m_3) & (m_2, m_4, m_3) & (m_3, m_4, m_2) & (m_4, m_3, m_2)
\end{array}$$

Zjistili jsme tak, že $K(3, 4) = 4$ a $V(3, 4) = 24$.

Soustřeďme se nyní na určení počtu j-prvkových variací z k prvků. Všechna pořadí k prvků rozdělme do skupin tak, že v každé skupině budou právě ta pořadí, která se shodují na počátečních j místech. Tyto skupiny budou ovšem disjunktní a bude jich právě $V(j, k)$, neboť počátečních j míst každého pořadí je nějaká j-prvková variace z k prvků a každá j-prvková variace z k prvků je počátkem nějakého pořadí k prvků. Je-li $j = k$, obsahuje každá skupina jediné pořadí a tedy $V(k, k) = P(k)$. (To je přirozené, neboť definice k-prvkové variace z k prvků se shoduje s definicí pořadí k prvků.) Je-li $j < k$, obsahuje každá skupina právě $P(k - j)$ pořadí lišících se uspořádáním zbylých $k - j$ prvků na koncových $k - j$ místech. V tomto případě je tedy $V(j, k) = \dfrac{P(k)}{P(k - j)}$. Vzorec pro počet pořadí již známe a po jednoduché úpravě docházíme k následující větě:

Pro přirozená čísla $j \leqq k$ platí

$$V(j, k) = k(k - 1) \ldots\ldots (k - j + 1).$$

I tento vzorec se snadno pamatuje, vpravo je součin j po sobě následujících přirozených čísel, z nichž největší je k*). Podle něho vychází $V(3, 4) = 4.3.2 = 24$, což se shoduje s výsledkem, který jsme získali předtím. Řešení úlohy a) o noclehárně je číslo $V(35, 50) = 50.49. \ldots . \ldots .17.16$.

Zbývá vyřešit úlohu b) o kombinacích. Z každé j-prvkové kombinace (neuspořádané j-tice) utvoříme právě $P(j)$ j-prvkových variací (uspořádaných j-tic) tak, že její prvky postupně uspořádáme všemi možnými způsoby. Přitom každou j-prvkovou variaci z k prvků takto dostaneme z jediné j-prvkové kombinace z k prvků. Bude tedy $V(j, k) = P(j)\, K(j, k)$. Z vyjádření čísel $P(j)$ a $V(j, k)$ dostaneme tento vzorec:

Pro přirozená čísla $j \leqq k$ je

$$K(j, k) = \frac{k(k-1) \ldots (k-j+1)}{j(j-1) \ldots \quad 1}.$$

(V čitateli i ve jmenovateli je po j činitelích.)

Podle tohoto vzorce vyjde $K(3, 4) = \dfrac{4.3.2}{3.2.1} = 4$, což už víme. Řešením úlohy b) je číslo

$$K(35, 50) = \frac{50.49. \ldots .16}{35.34. \ldots . 1}.$$

Zatím jsme definovali a určili čísla $P(j)$, $V(j, k)$ a $K(j, k)$ jen pro přirozená čísla $j \leqq k$. Vzhledem k tomu, že každá množina obsahuje jedinou 0-prvkovou podmnožinu (prázdnou množinu), je přirozené položit $K(0, k) = V(0, k) = 1$ pro každé celé nezáporné číslo k.

*) Pro $j = 1$ je vpravo k.

Speciálně bude pak $P(0) = V(0, 0) = 1$. Nyní máme čísla $P(j)$, $V(j, k)$ a $K(j, k)$ určena pro všechna celá nezáporná čísla $j \leqq k$.

Všimněme si ještě, že pořadí prvků konečné množiny M si vzájemně jednoznačně odpovídají se zobrazeními množiny M na sebe, tzv. *permutacemi*. Tak např. pořadí $(m_{p_1}, m_{p_2}, \ldots, m_{p_k})$ prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k$ odpovídá permutace, která pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ zobrazuje prvek m_i na prvek m_{p_i}. Proto se často pořadí a permutace ztotožňují a místo „pořadí" se říkává „permutace". V této knížce se permutacemi zabývat nebudeme.

Cvičení

1.1 Kolika způsoby lze rozmíchat hru 32 karet?

1.2 Konference se zúčastnilo 90 delegátů. Zvolili čtyřčlenný výbor (předseda, místopředseda, jednatel a pokladník) a také tříčlennou delegaci na sjezd. Určete, kolik bylo možností

a) pro volbu výboru,

b) pro volbu delegace.

1.3 Kolika způsoby se může 35 cestujících rozesadit v autobuse, kde je 35 míst?

1.4 Sešlo se pět přátel a navzájem si potřásli rukama. Určete počet potřesení.

1.5 V Československu je souvislá železniční síť s 3714 stanicemi. Zjistěte, kolik různých druhů jízdenek za obyčejné jízdné (bez slev a příplatků) by musela nechat natisknout železniční správa, kdyby na každé jízdence byly uvedeny dvě stanice: nejprve výchozí a pak cílová.

1.6 Ve sportce se ze 49 sportů tipuje 6. Kolik je všech možných tipů?

1.7 Kolik čtyřciferných čísel, v nichž se žádná číslice neopakuje, lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

1.8 Kolik slov lze vytvořit ze slova *koupelna* změnou pořadí písmen? (Nebereme ohled na to, zda vzniklá slova mají smysl.)

1.9 V rovině je dáno 7 bodů, z nichž žádnými třemi neprochází přímka a žádnými čtyřmi kružnice. Každými třemi z těchto bodů vedeme kružnici. Kolik kružnic dostaneme?

1.10 V prostoru je dána krychle $0 \leqq x \leqq 5$, $0 \leqq y \leqq 5$, $0 \leqq z \leqq 5$. Určete, kolik jejích bodů má všechny souřadnice celočíselné a zároveň neleží v žádné ze tří rovin $x = y$, $y = z$, $x = z$.

1.11 Na čtverečkovaném papíru zvolte dva průsečíky linek. Určete, kolika různými cestami se můžete dostat z jednoho do druhého tak, že půjdete po linkách jen nahoru nebo doprava.

1.12 Určete všechny dvojice nezáporných celých čísel $j \leqq k$, pro něž $V(j, k) = K(j, k)$.

1.13 Odhadněte, jak velká jsou čísla $V(35, 50)$ a $K(35, 50)$.

1.14 Odvoďte vzorce pro počet pořadí a variací jiným způsobem: Nejprve dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla $m \leqq n$ platí $V(m + 1, n + 1) = (n + 1)\, V(m, n)$. Toho pak využijte při důkazu vzorce pro $V(j, k)$. Z něho nakonec odvoďte vzorec pro $P(k)$.

1.15 Vzorec pro počet kombinací odvoďte jiným způsobem: Nejprve dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla $m < n$ platí

$$K(m + 1, n) = \frac{n - m}{m + 1} K(m, n).$$

1.16 Uvědomte si, že pro konečné množiny $M_1, M_2, \ldots, M_k$ platí: Počet prvků jejich sjednocení je roven součtu počtů jejich prvků, právě když jsou disjunktní.

II. KAPITOLA

FAKTORIÁLY A KOMBINAČNÍ ČÍSLA

Abychom např. nemuseli vypisovat součin p činitelů b, byl zaveden symbol b^p a jeho slovní vyjádření „b na p-tou". Jeho užívání značně zrychlí práci s algebraickými výrazy, které se nadto stanou přehlednými. Tak je tomu i u zavádění jiných matematických symbolů. V kombinatorice (i jinde) se vyplatí označit součin $n(n-1) \ldots 2.1$ prvních n přirozených čísel*) symbolem $n!$, který se čte „*n-faktoriál*". Tak např. $4! = 4.3.2.1 = 24$. Vzorec pro počet všech pořadí k prvků nabude přehledného tvaru

$$P(k) = k!.$$

Už jsme si vysvětlili, proč se pokládá $P(0) = 1$, v souhlase s tím položíme $0! = 1$. Vzorce pro počet variací a kombinací můžeme pomocí faktoriálů zapsat přehledněji ve tvaru

$$V(j, k) = \frac{k!}{(k-j)!},$$

$$K(j, k) = \frac{k!}{j!(k-j)!}.$$

(Na případech $j = k$ a $j = 0$ je zde vidět, jak vhodné

*) Pro $n = 1$ to znamená 1.

bylo položit $0! = 1$. Vzorce platí pro všechny dvojice nezáporných celých čísel $j \leqq k$.)

Užitečné bude nějak označit i často se vyskytující zlomky $\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$, kde $p \geqq q$ jsou nezáporná celá čísla. Značíme je symbolem $\dbinom{p}{q}$, což se čte „p *nad* q", a říká se jim *kombinační čísla**). Tak např. bude $\dbinom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$. Vzorec pro počet kombinací nabude ještě přehlednějšího tvaru

$$K(j, k) = \binom{k}{j}.$$

Dokážeme si nyní dvě důležité vlastnosti kombinačních čísel:

Pro celá nezáporná čísla $p \geqq q$ platí

$$\binom{p}{q} = \binom{p}{p-q} \tag{2}$$

Důkaz. Postupně dostáváme

$$\binom{p}{p-q} = \frac{p!}{(p-q)!(p-(p-q))!} =$$

$$= \frac{p!}{(p-q)!\,q!} = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \binom{p}{q}.$$

Jiný důkaz. Kombinační číslo $\dbinom{p}{q}$ udává počet q-prv-

---

*) V rusky psaných publikacích se místo $\binom{p}{q}$ užívá symbolu C_p^q.

kových kombinací z p prvků. Přiřaďme každé q-prvkové podmnožině p-prvkové množiny její doplněk. To je vzájemně jednoznačné zobrazení všech q-prvkových podmnožin, jichž je $\binom{p}{q}$, na všechny $(p - q)$-prvkové podmnožiny, jichž je $\binom{p}{p-q}$. Je tedy $\binom{p}{q} = \binom{p}{p-q}$.

Pro celá nezáporná čísla $p > q$ platí

(3) $$\binom{p}{q} + \binom{p}{q+1} = \binom{p+1}{q+1}.$$

Důkaz. Postupně dostáváme

$$\binom{p}{q} + \binom{p}{q+1} = \frac{p!}{q!(p-q)!} +$$

$$+ \frac{p!}{(q+1)!\,(p-q-1)!} = \frac{p!(q+1) + p!(p-q)}{(q+1)!\,(p-q)!} =$$

$$= \frac{p!(p+1)}{(q+1)!\,(p-q)!} = \frac{(p+1)!}{(q+1)!\,(p+1-(q+1))!} =$$

$$= \binom{p+1}{q+1}.$$

Jiný důkaz. Všechny $(q + 1)$-prvkové kombinace z $p + 1$ prvků $m_1, m_2, \ldots, m_p, m_{p+1}$, jichž je $\binom{p+1}{q+1}$, rozdělme na dvě disjunktní skupiny: v první budou ty, které obsahují prvek m_{p+1} a ve druhé ty, co ho neobsahují. První skupina zřejmě vznikne tak, že ke každé q-prvkové kombinaci z prvků $m_1, m_2, \ldots, m_p$, jichž je $\binom{p}{q}$, přidáme prvek m_{p+1}. Druhá skupina je tvořena právě všemi $(q+1)$-prvkovými kombinacemi z p prvků $m_1, m_2, \ldots, m_p$, jichž je $\binom{p}{q+1}$. Je tedy $\binom{p+1}{q+1} = \binom{p}{q} + \binom{p}{q+1}$.

V předešlém odstavci jsme pro počet kombinací odvodili vzorec

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{j(j-1)\ldots 1}. \tag{4}$$

Podle (2) je však také

$$\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j} = \frac{k(k-1)\ldots(j+1)}{(k-j)(k-j-1)\ldots 1}. \tag{5}$$

Zatímco ve vzorci (4) je v čitateli i ve jmenovateli součin j činitelů, jsou ve vzorci (5) součiny $(k-j)$ činitelů. Při praktickém výpočtu kombinačního čísla je tedy v případě $j > \frac{k}{2}$ výhodnější postupovat podle vzorce (5). Tak např. podle vzorce (4) je

$$\binom{175}{170} = \frac{175.174.\ \ldots\ .6}{170.169.\ \ldots\ .1},$$

zatímco podle vzorce (5) je

$$\binom{175}{170} = \frac{175.174.\ \ldots\ .171}{5.4.\ \ldots\ .1}.$$

Od prvního zlomku bychom ovšem dospěli ke druhému zkrácením činitelů vyskytujících se současně v čitateli i ve jmenovateli.

Představme si, že bychom měli vypočíst kombinační číslo $\binom{k}{j}$ z daných hodnot j, k nebo naprogramovat jeho výpočet na počítači. Jedna možnost by byla nejprve rozhodnout, zda použít vzorce (4) nebo (5) a pak spočíst příslušný zlomek. Pokud by se nejprve spočítaly součiny v čitateli a ve jmenovateli a ty se pak vydělily, často by se stávalo, že oba součiny by byly obrovské, což by vedlo k technickým potížím. Tomu bychom se vyhnuli, kdyby se nejprve spočítaly podíly činitelů a ty se pak vynásobily. To má zase tu nevýhodu, že by se mnohokrát dělilo, což je operace časově náročná. Kromě toho by jednotlivé podíly nebyly vždy celá čísla a to by vedlo ke kumulaci chyb způsobených zaokrouhlováním.

Existuje však vhodnější metoda výpočtu kombinačních čísel. Sestavme kombinační čísla do schématu

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\[6pt]
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\[6pt]
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\[6pt]
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\[6pt]
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\[6pt]
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}
\end{array}
$$

atd.

tj.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

atd.

(Říká se mu *Pascalův**) *trojúhelník*). Podle vzorce (2) je schéma souměrné podle svislé osy a podle (3) je součet dvou sousedních čísel v témže řádku roven číslu, které je mezi nimi o řádek níže. To umožňuje rychle dojít podle schématu k hledanému kombinačnímu číslu, přičemž se používá pouze operace sčítání. Souměrnost umožňuje pracovat jen s jednou polovinou schématu a výhodné je i to, že k výpočtu určitého řádku je zapotřebí pouze předchozí řádek, ostatní se nemusejí uchovávat.

Závěrem poznamenejme, že hodnoty faktoriálů $n!$ a kombinačních čísel $\binom{p}{q}$ a jejich logaritmy bývají pro nevelká n, p, q uvedeny v běžných matematických tabulkách.

Cvičení

2.1 Spočtěte: $7!$, $\binom{45}{3}$, $\binom{72}{68}$.

*) Francouzský učenec Blaise Pascal (1623—1662) vynikl v matematice, filozofii a fyzice.

2.2 Doplňte další tři řádky Pascalova trojúhelníka na str. 12 a určete $\binom{8}{4}$.

2.3 Dokažte: $n! + (n-1)!\,n^2 = (n+1)!$

2.4 Sečtěte: $\dfrac{(n+2)!}{n!} - 2\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} + \dfrac{n!}{(n-2)!}$.

2.5 Vyjádřete jedním kombinačním číslem: $\binom{10}{6} + \binom{10}{3}$.

2.6 Nalezněte všechna čísla x, pro něž platí
$$\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9.$$

2.7 Které z kombinačních čísel $\binom{153}{17}$, $\binom{154}{136}$ je větší?

2.8 Které ze dvou čísel $n! + (n+3)!$, $(n+1)! + (n+2)!$ je větší?

2.9 Seřaďte kombinační čísla $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ podle velikosti.

2.10 Dokažte, že pro přirozená čísla $p \geqq q$ platí
$$\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q-1} + \binom{p-2}{q-1} + \ldots + \binom{q-1}{q-1}$$
a) opakovaným použitím vzorce (3),
b) pomocí kombinací,
c) metodou matematické indukce,
d) pomocí cvič. 1.11.

2.11 Dokažte, že pro každé přirozené číslo k platí
$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$
a) metodou matematické indukce,
b) vhodnou organizací sčítání,
c) pomocí kombinací,
d) pomocí vzorce ze cvič. 2.10.

2.12 Dokažte, že pro nezáporná celá čísla $p \geqq q \geqq r$ platí

$$\binom{p}{r}\binom{p-r}{q-r} = \binom{p}{q}\binom{q}{r}$$

a) úpravou levé strany,

b) pomocí kombinací.

2.13 Kolika nulami končí číslo 129!?

2.14 Dokažte, že součin j po sobě následujících celých čísel je vždy dělitelný číslem $j!$.

III. KAPITOLA

BINOMICKÁ VĚTA

Jednou z prvních věcí, kterou jste se učili v algebře, byly vzorečky

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Není těžké odvodit podobné vzorce, vyjadřující n-tou mocninu $(a + b)^n$ dvojčlenu $(a + b)$ i pro exponenty $n > 3$. Tak např.

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) =$$

$$= a^4 + ba^3 + aba^2 + a^2ba + a^3b + b^2a^2 + baba +$$

$$+ ba^2b + ab^2a + abab + a^2b^2 + b^3a + b^2ab + bab^2 +$$

$$+ ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Nejprve jsme roznásobili součin čtyř dvojčlenů (pomocí distributivního zákona) a pak jsme (podle komutativního a asociativního zákona) sečetli členy lišící se pouze pořadím činitelů. Člen $4a^3b$ tedy vznikl sečtením čtyř členů ba^3, aba^2, a^2ba, a^3b. Na roznásobení součinu dvojčlenů však můžeme hledět také takto: Z každého dvojčlenu vezmeme po jednom členu (buď a nebo b) a utvoříme z nich součin; toto provedeme všemi možnými způsoby. U a^3b je pak koeficient 4, neboť lze právě čtyřmi způsoby vzít ze tří dvojčlenů člen a a z jednoho člen b.

Teď už budeme vědět, jak dokázat tzv. *binomickou větu* (binom je cizí název pro dvojčlen).

Pro reálná čísla a, b a pro přirozené číslo n platí

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots$$

(6) $$\ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n .$$

Důkaz. Roznásobíme součin n dvojčlenů $(a + b)$ $(a + b) \ldots (a + b)$. Dostaneme tak součet členů tvaru $a^i b^j$, kde $i + j = n$. Přitom u $a^{n-k} b^k$ bude koeficient, který bude roven počtu způsobů, jak z n dvojčlenů vybrat k dvojčlenů, z nichž se vzal člen b (z ostatních $n-k$ dvojčlenů se vzal člen a). Koeficient bude tedy roven počtu k-prvkových kombinací z n prvků, tj. číslu $K(k, n) = \binom{n}{k}$. Tím je důkaz proveden.

Vzhledem k tomu, že kombinační čísla se vyskytují jako koeficienty v binomické větě, říkává se jim také *binomické koeficienty*. Soustava $n + 1$ koeficientů

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$$

tvoří, jak víme, příslušný řádek Pascalova trojúhelníku.

Dosadíme-li do binomické věty za a, b určitá čísla, dostaneme často zajímavé rovnosti, v nichž vystupují kombinační čísla. Tak např. pro $a = 1$, $b = 1$ dostaneme

(7)
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n,$$

pro $a = 1, b = -1$

$$(8)\qquad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

apod. Dokažme si ještě, že

(9)

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Vyjdeme z toho, že pro každé reálné číslo x platí

$$(10)\qquad (x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n$$

neboli

$$\binom{2n}{0}x^{2n} + \binom{2n}{1}x^{2n-1} + \dots + \binom{2n}{2n-1}x + \binom{2n}{2n} = \left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}\right] \cdot \left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}\right].$$

Pravou stranu ještě roznásobíme. U x^n pak stojí na levé straně koeficient $\binom{2n}{n}$ a na pravé straně koeficient

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}\binom{n}{1} + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\binom{n}{n}$$

(užili jsme vzorce (2)). Oba koeficienty se však musejí rovnat (podle věty o rovnosti polynomů).

Vztah (7) můžeme dokázat také následující kombinatorickou úvahou: Na levé straně je součet počtů všech prázdných, jednoprvkových, dvouprvkových, ..., $(n - 1)$-prvkových a n-prvkových podmnožin n-prvkové množiny, tedy počet všech podmnožin n-prvkové množiny. Přitom se snadno dokáže, že n-prvková množina má právě 2^n podmnožin: Zvolíme jeden prvek $(k + 1)$-prvkové množiny a všechny její podmnožiny rozdělíme na dvě disjunktní skupiny podle toho, obsahují-li ho. Každá skupina pak zřejmě obsahuje právě tolik podmnožin, kolik má podmnožin k-prvková množina. Počet všech podmnožin $(k + 1)$ prvkové množiny je tedy roven dvojnásobku počtu všech podmnožin k-prvkové množiny. Vzhledem k tomu, že jednoprvková množina má právě dvě podmnožiny, má jich n-prvková právě 2^n.

O něco složitější je to u vztahu (8): Na množině všech podmnožin n-prvkové množiny $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ definujme následující zobrazení: Obsahuje-li podmnožina prvek m_1, přiřaďme jí podmnožinu, která z ní vznikne vynecháním tohoto prvku; neobsahuje-li podmnožina prvek m_1, přiřaďme jí podmnožinu, která z ní vznikne přidáním tohoto prvku. To je zřejmě vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech podmnožin na sebe, v němž je každé podmnožině o sudém počtu prvků přiřazena podmnožina o lichém počtu prvků a obráceně. Platí tedy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

Naznačme ještě kombinatorickou úvahu vedoucí ke vztahu (9). Rozdělme $2n$-prvkovou množinu M na dvě

n-prvkové množiny M_1 a M_2. Každá n-prvková podmnožina P množiny M se pak rozpadá na dvě části: první je $P \cap M_1$ a druhá je $P \cap M_2$. Má-li první z nich k prvků, druhá má $n - k$ prvků, a pro každé $k \in \{0, 1, \ldots, \ldots, n\}$ dostáváme právě $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ podmnožin.

Cvičení

8.1 Dokažte binomickou větu metodou matematické indukce.

8.2 Dokažte vzorec (7) metodou matematické indukce.

8.3 Dokažte vzorec (8) opakovaným užitím vzorce (3).

8.4 Dokažte vzorec (8) pro lichá n pomocí vzorce (2).

8.5 Vyčtěte vzorce (7) a (8) z Pascalova trojúhelníka.

8.6 Vypočtěte součet

a) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$

b) $\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - \ldots + (-2)^n\binom{n}{n}$.

8.7 Dokažte, že pro celá nezáporná čísla $m \leq p$ platí

$$\binom{p}{0}\binom{m}{0} + \binom{p}{1}\binom{m}{1} + \ldots + \binom{p}{m}\binom{m}{m} = \binom{m+p}{m}$$

a) pomocí binomické věty,

b) kombinatorickou úvahou.

8.8 Dokažte vzorec (2) pomocí binomické věty.

8.9 Jaký koeficient má u x^8 funkce $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$? Budou všechny členy záviset na x?

8.10 Roznásobte: $(t^3 - u\sqrt{3})^6$.

8.11 Dokažte, že číslo $11^{10} - 1$ má na konci dvě nuly.

8.12 Určete zbytek při dělení čísla 9^{100} osmi.

8.13 Dokažte Bernoulliho nerovnost: Pro přirozené číslo n a nezáporné reálné číslo x platí

$$(1 + x)^n \geqq 1 + nx.$$

8.14 V městské dopravě se často používá tento systém: Cestující si předem zakoupí jízdenky v předprodeji. Po nastoupení do vozu zasunou jízdenku (je znázorněna na

obrázku) do označovacího strojku, který v ní vyperforuje otvory do některých z devíti políček. Určete, kolika způsoby může být jízdenka označena.

8.15 Určete, kolik kladných dělitolů má číslo 2730.

8.16 Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$$

a) úpravou jednotlivých členů levé strany,
b) změnou pořadí sčítanců,
c) metodou matematické indukce,
d) kombinatoricky.

8.17 Do každé mezery mezi číslicemi čísla 14 641 vepište ještě k nul. Napište druhou odmocninu čísla, které jste tak dostali.

IV. KAPITOLA

VARIACE S OPAKOVÁNÍM, KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM A POŘADÍ S OPAKOVÁNÍM

Vraťme se ještě k 35 výletníkům, které jsme v 1. kapitole nechali přespat v noclehárně, a představme si, že jdou kolektivně na večeři. *Na jídelním lístku je celkem 12 druhů jídel a každý výletník si jedno objedná. Kolik různých objednávek může skupina učinit?*

I zde nejdříve musíme stanovit, co budeme rozumět různými objednávkami. Z hlediska číšníka (a samozřejmě i výletníků) bude důležité, kdo si který druh jídla objednal. Půjde tedy o uspořádané 35-tice z 12 druhů jídel. Kuchaři, jenž připravuje porce, bude však lhostejné, kdo objednal které jídlo, podstatné pro něho bude jen kolik porcí kterého jídla má připravit. Z tohoto hlediska půjde o neuspořádané 35-tice z 12 druhů jídel.

Obecně předpokládejme, že je dána neprázdná k-prvková množina M a přirozené číslo j. Budeme hledat

a) *počet všech uspořádaných j-tic prvků množiny M,*

b) *počet všech neuspořádaných j-tic prvků množiny M.*

(Množina M odpovídá množině všech druhů jídel na jídelním lístku.) Od podobné úlohy, kterou jsme řešili v 1. kapitole, se úloha liší v tom, že teď už nepožadujeme, aby se každá j-tice skládala z navzájem různých prvků, prvky se mohou v každé j-tici opakovat. (Zatímco jsme mlčky předpokládali, že na žádné posteli nespal více než jeden nocležník, může si totéž jídlo objednat více strávníků.) Proto se mluví o j-prvkových *variacích s opakováním* (v případě uspořádaných j-tic) a o j-prvkových *kombinacích s opakováním* (v případě neuspořádaných j-tic) z k prvků. Jejich počty budeme značit $V_0(j, k)$ a $K_0(j, k)$. Tam, kde je třeba zdůraznit, že se jedná o variace či kombinace zavedené v 1. kapitole, se užívá názvů *variace* či *kombinace bez opakování*.

Tak např. ze tří prvků množiny $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ můžeme utvořit následujících 27 tříprvkových variací s opakováním

(m_1, m_1, m_1)	(m_2, m_2, m_1)	(m_1, m_3, m_2)
(m_1, m_1, m_2)	(m_1, m_3, m_3)	(m_2, m_2, m_2)
(m_1, m_2, m_1)	(m_3, m_1, m_3)	(m_2, m_2, m_3)
(m_2, m_1, m_1)	(m_3, m_3, m_1)	(m_2, m_3, m_2)
(m_1, m_1, m_3)	(m_1, m_2, m_3)	(m_3, m_2, m_2)
(m_1, m_3, m_1)	(m_2, m_1, m_3)	(m_3, m_3, m_2)
(m_3, m_1, m_1)	(m_3, m_2, m_1)	(m_3, m_2, m_3)
(m_1, m_2, m_2)	(m_2, m_3, m_1)	(m_2, m_3, m_3)
(m_2, m_1, m_2)	(m_3, m_1, m_2)	(m_3, m_3, m_3)

a následujících 10 tříprvkových kombinací s opakováním

(m_1, m_1, m_1)	(m_1, m_2, m_2)	(m_2, m_2, m_3)
(m_1, m_1, m_2)	(m_1, m_2, m_3)	(m_2, m_3, m_3)
(m_1, m_1, m_3)	(m_1, m_3, m_3)	(m_3, m_3, m_3)
	(m_2, m_2, m_2)	

Je tedy $V_0(3, 3) = 27$ a $K_0(3, 3) = 10$.

Rozdělme všechny $(n + 1)$-prvkové variace s opakováním z k prvků na k disjunktních skupin podle toho, který prvek mají na prvním místě. V každé skupině je pak zřejmě právě tolik variací, kolik je všech n-prvkových variací s opakováním z k prvků. Platí tedy $V_0(n + 1, k) = kV_0(n, k)$. Vzhledem k tomu, že existuje právě k jednoprvkových variací s opakováním z k prvků, dostáváme:

Pro každá dvě přirozená čísla j, k je

(11) $$V_0(j, k) = k^j.$$

Podle něho si výletníci mohli objednat večeři (z číšníkova hlediska) celkem $V_0(35, 12) = 12^{35}$ způsoby. Že $V_0(3, 3) = 3^3 = 27$ víme už od dřívějška.

Zbývá nám ještě určit počet všech j-prvkových kombinací s opakováním z k prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Každou takovou kombinaci s opakováním si můžeme znázornit následujícím způsobem: Postupujeme odleva doprava. Nejprve napíšeme tolik teček, kolikrát je v kombinaci s opakováním zastoupen prvek m_1. Pak napíšeme oddělovací čárku/. Dále napíšeme tolik teček, kolikrát je v kombinaci s opakováním zastoupen prvek m_2, a za nimi čárku. Tak pokračujeme dále, až nakonec po čárce následující za tečkami odpovídajícími prvku m_{k-1} bude následovat tolik teček, kolikrát je v kombinaci s opakováním obsažen prvek m_k (za nimi už čárka nebude). (Tak např. schémata

$$\ldots // \qquad . / .. / \qquad / .. / .$$

budou odpovídat prvnímu řádku seznamu tříprvkových kombinací s opakováním ze tří prvků na str. 30). Vždy tak dostaneme schéma obsahující j teček a $k - 1$ čárek. Obráceně, každému řádku složenému z j teček a $k - 1$ čárek zřejmě odpovídá j-prvková kombinace s opakováním z k prvků. Hledaný počet kombinací s opakováním je tedy roven počtu všech řádků složených z $j + k - 1$ znamének, a to z j teček a $k - 1$ čárek. Jde tedy vlastně o to určit, kolika způsoby lze na $j + k - 1$ míst napsat j teček a $k - 1$ čárek. Hledaný počet je ovšem roven počtu všech j-prvkových podmnožin (teček) $(j + k - 1)$-prvkové množiny (znamének), tj. $\binom{j + k - 1}{j}$.

Pro každá dvě přirozená čísla j, k platí

$$K_0(j, k) = \binom{j+k-1}{j}. \tag{12}$$

Kuchař mohl tedy dostat celkem $K_0(35, 12) = \binom{46}{35} = \binom{46}{11}$ různých objednávek, a jak už víme, je $K_0(3, 3) = \binom{5}{3} = 10$.

Závěrem vyřešme ještě jednu úlohu: *Kolik různých slov lze utvořit ze slova* **abrakadabra** *změnou pořadí písmen?* Jedno ze slov, které dostaneme, bude např. *barbaradaka* a jiné těžko vyslovitelné *aabrardaakb*. Jde vlastně o to určit, kolik existuje různých pořadí pěti písmen a, dvou písmen b, jednoho písmene d, jednoho písmene k a dvou písmen r. Kdybychom ještě rozlišovali mezi sebou písmena téhož druhu (např. je graficky odlišili), bylo by celkem $(5 + 2 + 1 + 1 + 2)! = 11!$ různých pořadí těch jedenácti navzájem různých písmen. Přitom by stejné slovo dávala právě pořadí, která se navzájem liší jen tím, že mají zaměněna písmena téhož druhu mezi sebou. V každém uvažovaném slově lze mezi sebou zaměnit písmena a $5!$ způsoby, písmena b $2!$ způsoby, písmeno d $1!$ způsobem, písmeno k také $1!$ způsoby a písmena r $2!$ způsoby. Zřejmě lze provést celkem $5!\ 2!\ 1!\ 1!\ 2!$ záměn písmen téhož druhu mezi sebou a tolik je tedy pořadí těch jedenácti písmen, dávajících stejné slovo. Z daného slova lze tedy sestavit celkem

$$\frac{11!}{5!\ 2!\ 1!\ 1!\ 2!}$$

různých slov.

Obecně se mluví o *pořadích s opakováním p_1 prvků 1. druhu, p_2 prvků 2. druhu, ..., p_k prvků k-tého druhu.* Jsou to vlastně $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)$-prvkové variace s opakováním z k prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k$, v nichž se (pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$) prvek m_i opakuje právě p_i-krát. Jejich počet je

$$(13) \quad P_0(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \frac{(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)!}{p_1! \; p_2! \; \ldots \; p_k!}$$

Cvičení

4.1 Zformulujte podrobně, co rozumí pod různými objednávkami číšník a co kuchař.

4.2 Určete pomocí látky této kapitoly počet všech podmnožin k-prvkové množiny. (Jiným způsobem jsme jej určili při kombinatorickém odvození vzorce (7).)

4.3 Vysvětlete, proč v úvahách o j-prvkových variacích s opakováním a kombinacích s opakováním z k prvků už nevystupuje předpoklad $j \leqq k$, který nás provázel u variací a kombinací bez opakování.

4.4 Platí vzorce (11) a (12) i v singulárních případech $j = 0$ a $k = 0$?

4.5 Vysvětlete souvislost mezi kombinačním číslem a počtem pořadí s opakováním prvků dvou druhů.

4.6 Našich 35 výletníků se před cestou zpět rozdělilo na čtyři skupiny: 17 se jich vracelo vlakem, 8 autobusem, 6 lodí a 4 pěšky. Kolika způsoby se mohli rozdělit?

4.7 Latinská abeceda se skládá z 26 písmen. Kolik šestipísmenových slov z ní lze utvořit?

4.8 V kolika bodech se protínají úhlopříčky konvexního n-úhelníka, neprotínají-li se žádné tři v tomtéž bodě?

4.9 Na jídelním lístku jsou 4 aperitivy, 6 předkrmů, 3 polévky, 23 hlavních jídel, 4 studené nápoje, 5 moučníků, 2 teplé nápoje a 12 vín. Kolika způsoby lze sestavit menu skládající se ze všech osmi součástí?

4.10 V sazce se tipují výsledky 12 zápasů — zda vyhrají domácí, hosté či zápas skončí nerozhodně. Kolik je všech možných tipů?

4.11 Vysvětlete podrobně, co se skrývá za slůvkem „zřejmě" v závěru výkladu o pořadích s opakováním.

4.12 Na seřazovacím nádraží stojí 5 lůžkových, 7 jídelních a 20 obyčejných osobních vagónů. Bude z nich sestavena souprava o pěti vagónech. Kolik různých souprav je možno dostat?

4.13 Z pytlíku, v němž je 73 žlutých, 41 modrých, 50 červených a 19 zelených kuliček, nabereme hrst deseti kuliček. Kolik různých hrstí je možno dostat?

4.14 V průčelní stěně školní budovy je 35 oken. Školník dostal po pěti praporcích sedmi spřátelených států. Kolika způsoby jimi může ozdobit okna tak, aby žádné nezůstalo prázdné?

4.15 Vysvětlete, proč j-prvkových kombinací (resp. variací) z k prvků s opakováním je více než bez opakování, ale pořadí s opakováním p_1 prvků 1. druhu, p_2 prvků 2. druhu, ..., p_k prvků k-tého druhu není více než pořadí $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ prvků bez opakování.

4.16 Dokažte vzorec pro počet pořadí s opakováním tak, že nejprve odvodíte vzorec

$$P_0(p_1, p_2, \ldots, p_k) =$$

$$= \binom{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}{p_1} \binom{p_2 + \ldots + p_k}{p_2} \ldots \binom{p_{k-1} + p_k}{p_{k-1}} \binom{p_k}{p_k}.$$

4.17 Buďte n, k přirozená čísla. Určete, kolik řešení má rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

a) v oboru nezáporných celých čísel,

b) v oboru celých čísel, přičemž $x_1 \geqq c_1$, $x_2 \geqq c_2$, ..., $x_k \geqq c_k$, kde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ jsou daná celá čísla,

c) Kolik řešení má nerovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqq n$$

v oboru celých nezáporných čísel?

4.18 Dokažte *multinomickou*) větu*: Buďte m, n přirozená čísla, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ reálná čísla. Potom

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \Sigma \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m},$$

kde se sčítá přes všechny uspořádané m-tice $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ celých nezáporných čísel takových, že $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. (Mocniny s exponentem 0 klademe rovny 1.) Kolik je na pravé straně sčítanců?

4.19 Sčítáme-li přes všechny uspořádané m-tice $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ celých nezáporných čísel takových, že $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, je

$$\Sigma \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!} = m^n .$$

Dokažte

a) kombinatorickou úvahou,

b) pomocí multinomické věty.

4.20 Dokažte pro nezáporná celá čísla nerovnost

$$a_1!\, a_2! \ldots a_n! \leqq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!.$$

4.21 Jak souvisí kartézský součin s látkou, kterou jsme probrali?

*) Často se také říká *polynomická věta.*

V. KAPITOLA

ŘEŠENÍ KOMBINATORICKÝCH ÚLOH

Při řešení kombinatorických úloh určitého typu kombinujeme základní poznatky odvozené v předešlých odstavcích a případně je doplňujeme dalšími úvahami. Ukážeme si to na několika příkladech.

Úloha 1. *Kolik různých slov, v nichž nejsou žádná dvě písmena o vedle sebe, je možno získat záměnou pořadí písmen ve slově* lokomotiva*?*

Řešení. Hledáme počet všech uspořádaných desetic písmen a, i, k, l, m, t, v, o, o, o takových, že žádná dvě o nejsou vedle sebe. Rozdělme všechna tato slova na $P(7)$ disjunktních skupin podle toho, v jakém pořadí jsou v nich písmena, vynecháme-li všechna tři o. V každé skupině je pak tolik slov, kolika způsoby lze přidat po písmeni o na tři z následujících osmi míst: do mezer mezi ostatními písmeny (těch je 6), před první písmeno a za poslední písmeno; tedy $K(3, 8)$ slov. Hledaný počet bude

$$P(7)\,K(3, 8) = 7!\binom{8}{3} = 282\,240.$$

Úloha 2. *Kolika způsoby se dá z karetní hry (po osmi kartách čtyř barev) vybrat* 6 *karet tak, aby mezi nimi byly karty všech čtyř barev?*

Řešení. Všechny možnosti se rozpadají na dvě disjunktní podmnožiny M_1, M_2. V první budou všechny šestice karet, v nichž je po dvou kartách dvou barev a po jedné kartě zbylých dvou barev; ve druhé šestici složené z tří karet jedné barvy a po jedné kartě ostatních tří barev. Množina M_1 se rozpadá na $K(2, 4)$ disjunktních skupin podle toho, které barvy mají ony dvě dvojice. Vzhledem k tomu, že dvě karty některé barvy lze vybrat $K(2, 8)$ způsoby a jednu kartu $K(1, 8)$ způsoby, snadno zjistíme, že každá skupina obsahuje právě

$$K(2, 8)^2\, K(1, 8)^2$$

šestic karet. Množina M_1 má tedy právě

$$K(2, 4)\, K(2, 8)^2\, K(1, 8)^2$$

prvků. Analogicky zjistíme, že množina M_2 obsahuje právě

$$K(1, 4)\, K(3, 8)\, K(1, 8)^3$$

šestic karet. Výsledek je pak

$$\binom{4}{2}\binom{8}{2}^2\binom{8}{1}^2 + \binom{4}{1}\binom{8}{3}\binom{8}{1}^3 = 415\,744\,.$$

Ti, kdo jsou v podobných úvahách zběhlejší, postupují většinou rychleji a vyjadřují se stručněji. Řešení předešlé úlohy pak vypadá asi takto:

Jsou dvě možnosti — buď po dvou kartách dvou barev a po jedné ostatních nebo tři karty jedné barvy a po jedné ostatních. V prvním případě lze barvy vybrat $\binom{4}{2}$ způsoby a karty $\binom{8}{2}^2 8^2$ způsoby, ve druhém případě barvy čtyřmi způsoby a karty $\binom{8}{3} 8^3$ způsoby.

Nesporná výhoda takových formulací je jejich přehlednost. Musíme však dbát na to, abychom neztratili ponětí o tom, co za takovými zkratkami ve skutečnosti je, a mít se napozoru, abychom se nedopustili chyby. Ukažme si, jak snadno se můžeme zmýlit, na jiném, na první pohled elegantnějším řešení úlohy.

Nejprve vybereme po jedné kartě každé barvy, což lze provést 8^4 způsoby. Pak vybereme zbývající dvě karty, pro což je $\binom{28}{2}$ možností. Dostaneme tak $8^4\binom{28}{2}$ šestic karet.

Kdybychom číslo, k němuž jsme tak došli, spočetli, ukázalo by se, že je větší než výsledek, který jsme dostali předtím. Je to způsobeno tím, že při druhém řešení jsme některé způsoby započetli vícekrát: tak např. vybereme-li nejprve čtyři esa a pak červeného a kulového krále, dostaneme stejný výsledek, jako když nejprve vybereme žaludské eso, zelené eso, červeného krále a kulového krále a potom přidáme červené a kulové eso. Sečetli jsme totiž počty prvků 8^4 skupin, které nebyly disjunktní.

Úloha 3. *Kolika způsoby je možno rozdělit* 8 *chlapců a* 4 *děvčata na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu bylo alespoň jedno děvče?*

Řešení. Nejprve určíme počet rozdělení, při nichž bude v obou družstvech po dvou děvčatech. Děvčata do prvního družstva lze vybrat $K(2, 4)$ způsoby a přidat k nim chlapce vždy $K(4, 8)$ způsoby. První družstvo lze tedy sestavit $K(2, 4)$ $K(4, 8)$ způsoby, zbývající hráči vytvoří druhé družstvo. Vzhledem k tomu, že nám nezáleží na tom, které družstvo bude první, dostaneme $\frac{1}{2}\binom{4}{2}\binom{8}{4}$ rozdělení, při nichž je po dvou děvčatech v družstvu. Zbývá určit, kolika způsoby lze hráče rozdělit tak, aby v jednom družstvu bylo jediné děvče. Lze je vybrat $K(1, 4)$ způsoby a chlapce k němu vždy $K(5, 8)$ způsoby. Dostaneme tak $4\binom{8}{5}$ rozdělení. Hledaný počet tedy bude

$$\frac{1}{2}\binom{4}{2}\binom{8}{4} + 4\binom{8}{5} = 434.$$

Jiné řešení. Kdybychom nepožadovali, aby v každém družstvu hrálo děvče, mohli by se hráči rozdělit celkem $\frac{1}{2}$ $K(6, 12)$ způsoby. V $K(2, 8)$ případech by byla všechna děvčata v jednom družstvu. Hledaný počet je tedy

$$\frac{1}{2}\binom{12}{6} - \binom{8}{2} = 434.$$

Úloha 4. *K orientačnímu závodu se přihlásilo k závodníků, mezi nimi Kacerovský, Pařízek a Wenig. Závodníci budou vybíhat na trať jednotlivě v určitém intervalu. Kolika způsoby lze sestavit rozvrh startů tak, aby žádní dva z uvedených závodníků nestartovali těsně po sobě?*

Řešení. Všech možných rozvrhů je $P(k)$. Nejprve určeme, v kolika rozvrzích startuje Kacerovský hned po Pařízkovi. Tuto uspořádanou dvojici si můžeme představit jako jediného závodníka a hledaných rozvrhů bude právě tolik, kolik by bylo všech rozvrhů $k — 1$ závodníků, totiž $P(k — 1)$. Ke stejnému počtu dojdeme pro každou z $V(2, 3)$ uspořádaných dvojic uvažovaných závodníků. Celkový počet rozvrhů, při nichž dva z uvažovaných závodníků startují těsně po sobě, není však $V(2, 3)$ $P(k — 1)$, neboť uvažovaných $V(2, 3)$ množin rozvrhů není navzájem disjunktních. Rozvrhy, v nichž startují všichni tři uvažovaní závodníci těsně po sobě (např. v pořadí Kacerovský, Pařízek, Wenig), jsou obsaženy ve dvou množinách rozvrhů (pro dvojice Kacerovský, Pařízek i Pařízek, Wenig). Každou z $P(3)$ uspořádaných trojic uvažovaných závodníků si představme jako jediného závodníka: vidíme, že počet rozvrhů, které by byly započteny dvakrát, je $P(3)\ P(k - 2)$. Ve více než dvou množinách se žádný rozpis nevyskytuje. Hledaný počet je tedy

$$P(k) - V(2, 3)\ P(k - 1) + P(3)\ P(k - 2) = \\ = k! - 6(k - 1)! + 6(k - 2)!$$

(Poznamenejme, že zde i dále zápis $ab!$ znamená $a(b!)$ a ne $(ab)!$.)

Úloha 5. *V zápise o volejbalovém utkání je uvedeno, jak se měnil stav (např.* 0:1, 0:2, 1:2, 2:2 *atd. pro každý set). Kolik je všech možných zápisů zápasu, hraného na tři vítězné sety, pokud každý set skončil patnáctým bodem družstva, které ho vyhrálo (takže druhé družstvo v něm dosáhlo nejvýše 13 bodů)?*

Řešení. Nejprve určíme pro každé $m \in \{0, 1, \ldots, 13\}$, kolik existuje setů, v nichž domácí zvítězili v poměru $15 : m$. Snadno uvážíme, že je jich právě

$$P_0(14, m) = \binom{14 + m}{14},$$

uvědomíme-li si, že patnáctý bod domácích vždy ukončuje set. Je tedy celkem

$$\binom{14}{14} + \binom{15}{14} + \cdots + \binom{27}{14}$$

setů, v nichž vítězí domácí (a ovšem stejný počet setů, v nichž vítězí hosté). Podle cvič. 2.10 je však tento součet kombinačních čísel roven $\binom{28}{15}$. To se dá kombinatoricky snadno vysvětlit. Představíme-li si, že družstvo, které dosáhne patnáctého bodu, dovolí pak ještě (proti pravidlům) soupeři hrát dál a dosáhnout stav na přijatelných 15 : 13, zjistíme, že na počtu všech možných setů se nic nezmění. Při těchto podivných praktikách je však zřejmě počet možností $P_0(15, 13)$.

Analogickým postupem dojdeme k tomu, že pokud jde o průběh zápasu počítaný na sety, je pro každé $m \in \{0, 1, 2\}$ pro vítězství domácích v poměru $3 : m$ právě $\binom{2+m}{2}$ možností.

Celkem tedy existuje

$$2\left[\binom{28}{15}^3 + 3\binom{28}{15}^4 + \binom{4}{2}\binom{28}{15}^5\right]$$

zápasů.

Následující úloha je snad až příliš jednoduchá, její výsledek však budeme později několikrát potřebovat.

Úloha 6. *Kolik je všech pořadí s opakováním p prvků 1. druhu a q prvků 2. druhu, v nichž žádné dva prvky 1. druhu nejsou vedle sebe?*

Řešení. Je jich právě tolik, kolika způsoby lze rozmístit p prvků 1. druhu na $q + 1$ míst, totiž do $q - 1$ mezer mezi prvky 2. druhu a před první a za poslední z nich. Hledaný počet je tedy $\binom{q+1}{p}$ v případě $p \leqq q + 1$ a 0 jinak.

Úloha 7. *Jsou dána přirozená čísla c, m ($c + m \geqq 3$) a $(c + m)$-úhelník $A_1, A_2, \ldots, A_{c+m}$. Kolika způsoby lze obarvit jeho vrcholy tak, aby jich c bylo červených, m modrých a přitom žádné dva sousední vrcholy nebyly červené?*

Řešení. Hledaný počet označme $b(c, m)$. Pro $c > m$ je zřejmě $b(c, m) = 0$. Buď nadále $c \leqq m$. Na první pohled je patrna souvislost s úlohou 6, na niž také úlohu 7 převedeme. Všechna obarvení s popsanou vlastností rozdělme na dvě disjunktní skupiny podle toho, je-li vrchol A_1 červený nebo modrý. Označme ještě $z(p, q)$ výsledek úlohy 6. Potom je zřejmě v první skupině právě $z(c - 1, m - 2)$ a ve druhé $z(c, m - 1)$ obarvení. Je tedy

$$b(c, m) = z(c - 1, m - 2) + z(c, m - 1) =$$

$$= \binom{m-1}{c-1} + \binom{m}{c} = \frac{c+m}{m}\binom{m}{c}.$$

Úloha 8. *Kolik existuje různých vlajek složených z n vodorovných stejně širokých červených a bílých pruhů tak, že žádné dva bílé pruhy nejsou vedle sebe?*

Řešení. Nejprve určeme, kolik lze sestavit vlajek, které mají uvedenou vlastnost a obsahují právě k červených pruhů (a tedy právě $n—k$ bílých pruhů). Podle úlohy 6 jich bude $\binom{k+1}{n-k}$ v případě $k + 1 \geqq$ $\geqq n - k \left(\text{neboli } k \geqq \frac{n-1}{2}\right)$ a 0 v případě $k < \frac{n-1}{2}$. (Stále předpokládáme, že $k \leqq n$.) Celkový počet bude

$$\binom{a+1}{n-a} + \binom{a+2}{n-a-1} + \ldots + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{0},$$

kde $a = \frac{n}{2}$ pro sudá n, $a = \frac{n-1}{2}$ pro lichá n.

Jiné řešení. Hledaný počet vlajek označme v_n. Předpokládejme, že $k > 2$ je přirozené číslo. Všechny vlajky složené z k pruhů, z nichž spodní je červený, lze získat tak, že se ke všem v_{k-1} vlajkám složeným z $k - 1$ pruhů přišije dolů červený pruh. Všechny vlajky složené z k pruhů, z nichž spodní je bílý, lze získat tak, že ke všem v_{k-2} vlajkám složeným z $k - 2$ pruhů přišijeme dolů červený pruh a pod něj bílý pruh. Platí tedy

$$v_k = v_{k-1} + v_{k-2} \tag{14}$$

pro každé přirozené $k > 2$. Zřejmě je $v_1 = 2$ (červená vlajka a bílá vlajka) a $v_2 = 3$ (červenobílá, bíločervená a červená). Podle odvozeného vzorce je dále

$$\begin{aligned} v_3 &= v_2 + v_1 = 3 + 2 = 5, \\ v_4 &= v_3 + v_2 = 5 + 3 = 8, \\ v_5 &= v_4 + v_3 = 8 + 5 = 13 \\ &\text{atd.} \end{aligned}$$

Chceme-li určit číslo v_n pro konkrétní n, pokračujeme tak dlouho, až dojdeme k hledané hodnotě.*)

Tato metoda se často používá. Někdy se nedaří najít bezprostřední vyjádření n-tého členu pomocí n, jako se to podařilo v prvním řešení úlohy 8; většinou se však *rekurentní**) vzorce* (jak se říká obdobám vzorce (14), v nichž se členy nějaké posloupnosti vyjadřují pomocí předcházejících členů) dobře hodí k numerickému vý-

---

*) Možná, že jste poznali tzv. Fibonacciova čísla, se kterými se v matematice často setkáváme.

**) z latinského recurrere — běžet zpět

počtu. S rekurentními vzorci se v této knížce ještě několikrát setkáme a vlastně jsme s nimi už pracovali i v předešlých kapitolách — viz např. (1).

Cvičení

5.1 Kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit 7 stejných hrušek a 5 stejných jablek, aniž by je krájely?

5.2 Kolika způsoby lze postavit na šachovnici pět různých figurek tak, aby dvě stály na bílých a tři na černých polích?

5.3 Kolik různých vět skládajících se ze sedmi slov, lze sestavit ze všech 39 písmen věty *Aequam memento rebus in arduis servare mentem* (bez ohledu na smysl)?*)

5.4 V kupé je 10 míst. Tři pasažéři chtějí sedět ve směru jízdy, jeden proti směru. Ostatním šesti, mezi něž patří Venoušek s maminkou, je to jedno až na to, že Venoušek chce sedět u okna a vedle maminky. Kolika způsoby se mohou cestující usadit, aby byli všichni spokojeni?

5.5 Jak se změní výsledek předchozího cvičení, bude-li cestujících bez nároků

a) o jednoho

b) o dva

méně? (V kupé pak bude jen 9, resp. 8 cestujících.)

5.6 Kolika způsoby lze sestavit rozvrh startů orientačního závodu tak, aby Pařízek vyběhl až po Wenigovi a Kacerovský až po nich.

5.7 Dokažte, že pro číslo v_n z úlohy 8 platí

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right].$$

*) Latinská sentence nás nabádá, abychom se i v kritických situacích řídili rozumem.

5.8 Převrátíme-li vlajku, může vzniknout jiná vlajka. Jaký nejmenší počet vlajek musíme mít, abychom mohli vyvěsit kteroukoli z v_n vlajek z úlohy 8?

5.9 Opravte chybné řešení úlohy 2.

5.10 Kolika způsoby lze ze sedmi chlapců a čtyř dívek vybrat šestičlenné družstvo tak, aby v něm byla alespoň dvě děvčata?

5.11 Je správné následující řešení předcházející úlohy? Nejprve vybereme dvě děvčata, což lze $K(2, 4)$ způsoby. Ze zbylých devíti osob k nim přidáme čtyři, což lze $K(4, 9)$ způsoby. Hledaný počet je tedy $\binom{4}{2}\binom{9}{4}$.

5.12 Kolika způsoby lze dát 20 různých knížek do knihovničky, v níž je 5 polic, vejdou-li se všechny knížky do každé police?

5.13 Kolika způsoby lze z 10 kosmonautů vybrat čtyřčlennou posádku, není-li vhodné, aby jistí dva kosmonauté letěli spolu?

5.14 Kolik různých slov, v nichž žádné dvě samohlásky nejsou vedle sebe, lze získat záměnou pořadí písmen slova *protoplazma*?

5.15 Deset manželských párů nasedá do pěti loděk pro čtyři osoby. Kolika způsoby se mohou rozdělit na pět skupin tak, aby Klímovi jeli spolu v loďce a Podešvovi také a aby v každé loďce byli dva muži a dvě ženy? (Na uspořádání skupin ani osob ve skupinách nebereme zřetel.)

5.16 Kolika způsoby lze postavit do řady 6 Angličanů, 7 Francouzů a 10 Turků tak, aby každý Angličan stál mezi Francouzem a Turkem a žádný Francouz nestál vedle Turka?

5.17 Kolika způsoby si mohou 3 osoby rozebrat 33 různých knih tak, aby dvě měly dohromady dvakrát více než třetí?

5.18 Kolika způsoby lze na šachovnici postavit dvě věže tak, aby se neohrožovaly?

5.19 Kolika způsoby lze na černá pole šachovnice postavit 8 věží, aby se žádné dvě neohrožovaly?

5.20 Kterých čísel je více mezi prvním miliónem přirozených čísel: těch, která mají některou číslici rovnu 5 nebo těch, která číslici 5 neobsahují?

5.21 Kolika způsoby můžete vyběhnout 10 schodů, děláte-li kroky buď o jeden schod, o dva nebo o tři schody?

5.22 Určete počet všech j-prvkových kombinací z k prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k$ takových, že

a) pro žádné $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ neobsahují současně oba prvky m_i, m_{i+1},

b) kromě dvojic uvedených v a) neobsahují ani dvojici m_1, m_k.

5.23 Kolik řešení má rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

v oboru přirozených čísel? Řešte

a) kombinatorickou úvahou,

b) pomocí cvič. 4.17.

5.24 Buďte n, k přirozená čísla.
Pro kolik řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2n$$

v oboru nezáporných celých čísel platí $x_1 > x_k$?

5.25 Obdélník o stranách m, n (přirozená čísla) je rozdělen na mn jednotkových čtverců. Kolik je v něm

a) obdélníků,

b) čtverců?

5.26 Jsou dány dvě různé rovnoběžky. Na jedné z nich je dáno m různých bodů a na druhé n různých bodů. Spojme každý z bodů jedné přímky se všemi body druhé přímky. Kolik dostaneme průsečíků, pokud se žádné tři spojnice neprotínají v jediném bodě?

5.27 Kolika způsoby je možno vylosovat 6 čísel sportky tak, aby rozdíl žádných dvou z nich nebyl roven 1?

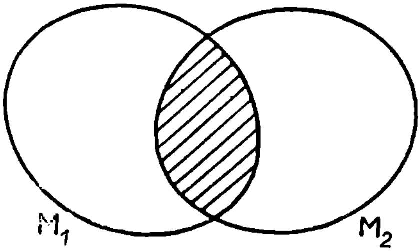
5.28 Řekneme, že číslo je srovnané, platí-li pro každé dvě jeho číslice, že ta, co je více vlevo, není větší. (Např. 4667 je srovnané a 1213 není.) Kolik je všech n-ciferných srovnaných čísel?

VI. KAPITOLA

PRINCIP INKLUZE A EXKLUZE

I nadále se budeme zajímat o počty prvků jistých množin. Bude vhodné, když si pro počet prvků konečné množiny*) M zavedeme označení $|M|$. S absolutní hodnotou si to nespleteme, neboť vždy bude jasné, je-li uvnitř číslo, nebo množina.

Buďte dány konečné množiny $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Jak uvidíme, bude mnohdy velice užitečné vyjádřit počet prvků sjednocení těchto množin — v našem označení $|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k|$ — pomocí počtů prvků těchto množin a jejich průniků.



K schematickému obrázku jistě není třeba nic dodávat.

V případě $k = 2$ takové vyjádření snadno najdeme:

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|,$$

*) Této veličině se říká *mohutnost množiny* nebo *kardinální číslo* a značí se též moh M nebo card M.

V případě tří množin bude situace už trochu složitější, ani zde však není obtížné přesvědčit se o platnosti vztahu

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - \\ - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| + \\ + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|.$$

Obecně pak platí

$$(15) \qquad |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k| = \\ = |M_1| + |M_2| + \ldots + |M_k| - \\ - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - \ldots - |M_{k-1} \cap M_k| + \\ + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + \ldots + |M_{k-2} \cap M_{k-1} \cap M_k| - \\ \ldots\ldots \\ + (-1)^{k+1} |M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k| = \\ = \sum (-1)^{r+1} |M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}|,$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$. Součet jsme uspořádali a napsali tak, že v i-tém řádku jsou sčítance odpovídající i-prvkovým podmnožinám, je tam tedy $\binom{k}{i}$ sčítanců (pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$).

Ještě než se pustíme do důkazu vzorce (15), předvedeme si ho na příkladě.

Tělovýchovná jednota má čtyři oddíly: atletický (A), *kopané* (K), *odbíjené* (O) *a šachový* ($Š$). *Každý člen jednoty sportuje v některém oddílu, někteří v několika najednou. Přehled o členstvu podává tabulka*

A	... 26	*AO*	... 18	*AKO*	... 5
K	... 17	*AŠ*	... 3	*AKŠ*	... 0
O	... 58	*KO*	... 9	*AOŠ*	... 2
Š	... 19	*KŠ*	... 0	*KOŠ*	... 0
AK	... 7	*OŠ*	... 5	*AKOŠ*	... 0

(*např. AO znamená počet všech členů pěstujících atletiku* *i odbíjenou bez ohledu na to, jsou-li případně ještě v dalším oddílu). Kolik členů má jednota?*

Označíme-li M_1 množinu všech atletů, M_2 množinu všech fotbalistů, M_3 množinu všech volejbalistů a M_4 množinu všech šachistů, je potom

$$M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$$

množina všech členů jednoty. Podle vzorce (15) je

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4| = 26 + 17 + 58 + 19 - \\ - 7 - 18 - 3 - 9 - 5 + 5 + 2 = 85$$

a jednota má tedy 85 členů.

Vzorec (15) vypadá na první pohled složitě, ale důkaz je jednoduchý: Zvolme libovolný prvek $m \in M_1 \cup M_2 \cup \cup \ldots \cup M_k$. Nechť $M_{q_1}, M_{q_2}, \ldots, M_{q_s}$ jsou právě všechny z uvažovaných k množin, do nichž prvek m patří. V kterých množinách typu

$$M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r} \tag{16}$$

je prvek m obsažen? Právě v těch, pro něž je

$$\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{q_1, q_2, \ldots, q_s\}.$$

Pro každé $r \in \{1, 2, \ldots, s\}$ je tedy prvek m započten v právě $\binom{s}{r}$ sčítancích typu (16) a pro $r > s$ v žádném. Celkový příspěvek prvku m k pravé straně vzorce (15) tedy činí

$$\binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \ldots + (-1)^{s+1}\binom{s}{s} = 1$$

(podle vzorce (8)). Na levé straně je prvek m započten samozřejmě také právě jednou. Důkaz je proveden.

Poněkud jsme v něm zpřesnili původní názornou ideu, která ke vzorci vedla: V součtu $|M_1| + |M_2| +$

$+ \ldots + |M_k|$ jsou započteny právě jednou právě ty prvky, které leží v jediné z množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$; všechny ostatní prvky jsou tam započteny vícekrát. Odečteme-li $\Sigma|M_i \cap M_j|$, budou uvedeny na pravou míru i prvky ležící právě ve dvou množinách, přičemž počty prvků ležících ve více množinách byly zredukovány příliš. To se u prvků ležících právě v třech množinách napraví přičtením $\Sigma|M_i \cap M_j \cap M_k|$ atd.

Vzorec (15) se nazývá *princip inkluze a exkluze* a z předcházející úvahy je patrno proč*).

Často jsme postaveni před úkol určit počet objektů, které mají alespoň jednu z daných k vlastností. Označíme-li pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ jako M_i množinu všech uvažovaných objektů, které mají i-tou vlastnost, hledáme tedy $|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k|$. Leckdy je přímá cesta neschůdná, zatímco sčítance typu (16) na pravé straně vzorce (15), vyjadřující počet prvků, které mají současně j_1-tou, j_2-tou, ..., j_r-tou vlastnost (a třeba ještě další z uvažovaných vlastností), se dají snadno spočíst. V tom je hlavní význam principu inkluze a exkluze. Předvedeme to na příkladě.

Úloha 9. *Určete počet všech pořadí s opakováním dvou prvků* 1. *druhu, dvou prvků* 2. *druhu, ..., dvou prvků n-tého druhu, v nichž alespoň pro jeden druh jsou oba prvky vedle sebe.*

Řešení. Označme M množinu všech pořadí s opakováním po dvou prvcích n druhů. Dále označme pro každé

*) Latinsky includere — vložit, pojmout, vsadit; excludere — vyloučit, nevpustit, zabránit v přístupu. Někdy se setkáváme i s počeštěným názvem „princip zapojení a vypojení". Přesný překlad odpovídající smyslu by však byl spíše „princip zahrnutí a odstranění" nebo „princip zařazení a vyřazení". Zůstaneme raději u cizích slov.

$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jako M_i množinu všech pořadí z množiny M, v nichž jsou prvky i-tého druhu vedle sebe. Hledaný počet pak bude roven

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n|.$$

Užijeme principu inkluze a exkluze. Buď

$$\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Množina $M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}$ obsahuje právě všechna pořadí z množiny M, v nichž jsou současně vedle sebe prvky j_1-tého, j_2-tého, $\ldots$, j_r-tého druhu (přičemž na to, zda jsou prvky ostatních druhů vedle sebe, nehledíme, což podstatně zjednodušuje situaci). Těchto pořadí je zřejmě právě tolik, kolik je všech pořadí s opakováním po jednom prvku j_1-tého, j_2-tého, $\ldots$, j_r-tého druhu a po dvou prvcích ostatních $n - r$ druhů, tedy

$$|M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}| = \frac{(2n - r)!}{2^{n-r}}.$$

Stejný výsledek dostaneme pro každou z r-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, kterých je $\binom{n}{r}$, a podle vzorce (15) je

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{(2n - r)!}{2^{n-r}}.$$

Sledovali jsme typické využití principu inkluze a exkluze. Zajímavé bylo, že všech $\binom{n}{r}$ sčítanců $|M_{j_1} \cap \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}|$ vyšlo stejně, a tak se do výsledku dostala kombinační čísla. To se stává často, ale ne vždycky, jak hned uvidíme.

V první a ve čtvrté kapitole jsme odvodili vzorce pro počet všech j-prvkových kombinací z k prvků bez opakování a s opakováním. To můžeme chápat jako speciální případy obecnější úlohy:

Úloha 10. *Jsou dána přirozená čísla j, k a nezáporná celá čísla $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Určete počet všech j-prvkových kombinací s opakováním z k prvků, v nichž se pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ opakuje i-tý prvek nejvýše c_i-krát.*

Pro $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 1$ dostáváme kombinace bez opakování, pro $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = j$ všechny kombinace s opakováním.

Řešení. Označme M množinu všech j-prvkových kombinací s opakováním z k prvků a M_i buď pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ množina všech kombinací z množiny M, v nichž se i-tý prvek vyskytuje více než c_i-krát. Hledaný počet bude roven

$$|M| - |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k|.$$

Jak víme (viz vzorec (12) na str. 32), je

$$|M| = \binom{j+k-1}{k-1}.$$

K určení $|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k|$ užijeme principu inkluze a exkluze. Buď $\emptyset \neq \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset \{1, 2, \ldots$ $\ldots, k\}$. Množina $M_{v_1} \cup M_{v_2} \cup \ldots \cup M_{v_r}$ obsahuje právě všechny kombinace z množiny M, v nichž se v_1-tý, v_2-tý, $\ldots$, v_r-tý prvek opakují po řadě alespoň $c_{v_1} + 1, c_{v_2} + 1, \ldots, c_{v_r} + 1$-krát, a těch je zřejmě právě tolik, kolik je všech $\left(j - \sum_{i=1}^{r} (c_{v_i} + 1)\right)$-prvkových kombinací s opakováním z k prvků.

Je tedy

$$|M_{v_1} \cap M_{v_2} \cap \ldots \cap M_{v_r}| = \binom{j - \sum_{i=1}^{r} c_{v_i} - r + k - 1}{k - 1},$$

pokud $j - \sum_{i=1}^{r} c_{v_i} - r \geqq 0$, jinak je

$$|M_{v_1} \cap M_{v_2} \cap \ldots \cap M_{v_r}| = 0.$$

Podle principu inkluze a exkluze je počet všech zakázaných kombinací roven

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k| =$$

$$= \Sigma\, (-1)^{r+1} \binom{j - \sum_{i=1}^{r} c_{v_i} - r + k - 1}{k - 1},$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{r} c_{v_i} + r \leqq j.$$

Hledaný počet pak můžeme psát ve tvaru

$$\Sigma\, (-1)^{r} \binom{j - \sum_{i=1}^{r} c_{v_i} - r + k - 1}{k - 1}, \tag{17}$$

kde se sčítá přes všechny podmnožiny $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset$ $\subset \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{r} c_{v_i} + r \leqq j$$

— tedy i přes množinu prázdnou, pro kterou dostaneme člen

$$|M| = \binom{j+k-1}{k-1}.$$

O tom, jak silný nástroj princip inkluze a exkluze je, se v této knížce ještě mnohokrát přesvědčíme.

Cvičení

6.1 Co říká princip inkluze a exkluze v případě disjunktních množin?

6.2 Dokažte princip inkluze a exkluze matematickou indukcí.

6.3 Dokažte, že pro libovolných k konečných množin M_1, $M_2, \ldots, M_k$ platí

$$|M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k| = \Sigma(-1)^{r+1} |M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup \ldots \\ \ldots \cup M_{j_r}|,$$

kde se sčítá přes všechny $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots \ldots, k\}$. (Tento vzorec vznikne z principu inkluze a exkluze záměnou sjednocení a průniku.)

6.4 Kolika způsoby můžete posadit v kině n manželských párů do poslední řady, kde je $2n$ míst tak, aby žádný manželský pár neseděl vedle sebe?

6.5 Z pytlíku, v němž jsou 3 žluté, 1 modrá, 10 červených a 19 zelených kuliček, nabereme hrst deseti kuliček. Kolik různých hrstí můžeme dostat? (Srv. cvič. 4.13.)

6.6 Všimněte si, že pokud v úloze 10 pro některé $i \in \{1, 2, \ldots \ldots, k\}$ je $c_i \geqq j$, nevyskytuje se c_i v žádném členu vzorce (17) a nemá tedy vliv na výsledek. Vysvětlete to na základě kombinatorické představy.

6.7 a) Buďte j, k přirozená čísla. Označme $m = \min\left(k, \left[\frac{j}{2}\right]\right)$. Dokažte, že součet

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{j-2r+k-1}{k-1}$$

je v případě $j \leq k$ roven $\binom{k}{j}$ a jinak 0.*)

b) Buďte j, k přirozená čísla. Označme $m = \min(j, k)$. Potom

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{j - r + k - 1}{k - 1} = 0 \,.$$

Dokažte.

6.8 Buďte n, k přirozená čísla. Kolik řešení má rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

a) v oboru nezáporných celých jednociferných čísel,

b) v oboru celých čísel, přičemž

$a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $a_2 \leq x_2 \leq b_2$, $\ldots$, $a_k \leq x_k \leq b_k$,

kde $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, $\ldots$, $a_k \leq b_k$ jsou daná celá čísla?

6.9 Na škole pracuje 54 žáků v 11 zájmových kroužcích. Každý kroužek má aspoň 15 členů. Žádný žák nepracuje ve víc než třech kroužcích, ale každé tři kroužky mají alespoň jednoho společného člena. Dokažte, že existují dva kroužky, které mají společných alespoň 6 členů.

*) Symbolem [x] značíme celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které není větší než x.

VII. KAPITOLA

VYUŽITÍ PRINCIPU INKLUZE A EXKLUZE V TEORII ČÍSEL*)

V teorii čísel hraje významnou roli tzv. Eulerova**) funkce $\varphi(n)$, která přiřazuje každému přirozenému číslu $n > 1$ počet všech přirozených čísel, která jsou menší než n a přitom s n nesoudělná. Tak např. $\varphi(28) = 12$, neboť z čísel menších než 28 je s ním nesoudělných právě 12 čísel, totiž 1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27. Známá Fermatova***) věta tvrdí: *Je-li a celé číslo, které není dělitelné prvočíslem p, pak a^{p-1} dává při dělení prvočíslem p zbytek* 1. L. Euler zobecnil tuto větu pro všechna přirozená čísla $p > 1$ a v ní se pak setkáme s Eulerovou funkcí:

Je-li a celé číslo a p přirozené číslo nesoudělné s a, potom při dělení $a^{\varphi(p)}$ číslem p zbude 1. (Je-li p prvočíslo, redukuje se Eulerova věta na Fermatovu větu, neboť pro prvočíslo p platí $\varphi(p) = p - 1$; žádné z čísel $1, 2, \ldots, p - 1$ totiž není soudělné s prvočíslem p.)

Nebudeme zde tyto teorie dále rozvíjet a soustředíme se na problém, jak pro dané přirozené číslo $n > 1$ spočíst příslušnou hodnotu $\varphi(n)$. Je-li n velké, dá vyhledání

---

*) Na tuto kapitolu se dále nenavazuje.

**) L. Euler (1707—1783) — proslulý matematik švýcarského původu. Svými více než osmi sty pracemi ovlivnil téměř všechny oblasti matematiky a teoretické mechaniky.

***) P. Fermat (1601—1665) — francouzský právník, který se úspěšně zabýval matematikou a optikou.

všech menších a s n nesoudělných čísel hodně práce. Pokud však známe všechna prvočísla $p_1, p_2, \ldots, p_k$ vyskytující se v rozkladu čísla n na prvočinitele (jejich násobnosti potřebovat nebudeme), pomůže princip inkluze a exkluze.

Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ označme M_i množinu všech přirozených čísel nejvýše rovných n, která jsou dělitelná prvočíslem p_i. Množina $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ obsahuje všechna přirozená čísla menší než n, která jsou dělitelná některým z prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_k$, tedy která jsou soudělná s číslem n. Je tedy

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n| = n - \varphi(n).$$

Buď $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$. Množina $M_{j_1} \cap \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}$ obsahuje všechna přirozená čísla nejvýše rovná n, která jsou dělitelná každým z prvočísel $p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_r}$ a tedy i jejich součinem $p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}$. Je jich

$$|M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}| = \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}}.$$

Podle principu inkluze a exkluze dostáváme

$$n - \varphi(n) = \Sigma(-1)^{r+1} \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}}$$

neboli

$$\varphi(n) = n\left(1 + \Sigma(-1)^r \frac{1}{p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}}\right), \tag{18}$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$. Výraz v závorce na pravé straně však vznikne, jak se snadno přesvědčíme, roznásobením součinu

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Odvodili jsme tak vzorec

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right). \tag{19}$$

Vraťme se k příkladu, který jsme uvedli na začátku: V rozkladu čísla 28 na prvočinitele se vyskytují prvočísla 2 a 7. Je tedy

$$\varphi(28)=28\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=12,$$

což souhlasí s tím, co jsme zjistili na začátku.

U velkých čísel je význam vzorce zvlášť patrný ve srovnání s bezprostředním hledáním nesoudělných čísel. Například

$$\varphi(221\ 728)=\varphi(2^5.13^2.41)=$$

$$=221\ 728\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\left(1-\frac{1}{41}\right)=99\ 840.$$

Obraťme dále svou pozornost k jiné důležité funkci, která se studuje v číselné teorii. Je to funkce $\pi(n)$, která přiřazuje každému přirozenému číslu n počet všech prvočísel, která jsou nejvýše rovna n. Průběh této funkce tedy vlastně vyjadřuje rozložení prvočísel mezi přirozenými čísly. To je jeden ze základních problémů teorie čísel, jehož zkoumání bylo v průběhu historie matematiky věnováno nemálo úsilí. Leccos se vyjasnilo, ale dost obtížných otázek zůstává ještě otevřených.

Nejprve si připomeňme, že všechna prvočísla menší než dané $n > 1$ lze najít postupem zvaným Eratosthenovo*) síto. Spočívá v tom, že se z čísel 2, 3, ..., n nejprve vynechají všechny násobky čísla 2 větší než 2. Pak se vynechají všechny násobky čísla 3 větší než 3 atd.; v k-tém kroku se tedy ponechá k-té dosud nevynechané číslo odleva a vynechají se všechny jeho další násobky. Nakonec ovšem zbudou právě všechna prvočísla nejvýše rovná n, přičemž stačilo provést $[\sqrt{n}]$ kroků. Každé složené číslo nejvýše rovné n je totiž dělitelno některým prvočíslem nejvýše rovným $\sqrt{n}$. Idea Eratosthenova síta se sleduje i v následující úvaze.

Buď $n > 1$ přirozené číslo a položme $k = \pi([\sqrt{n}])$. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ označme M_i množinu všech přirozených čísel nejvýše rovných n, která jsou dělitelná i-tým (v přirozeném pořadí) prvočíslem p_i. Množina $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ obsahuje všechna složená čísla nejvýše rovná n a kromě nich ještě právě prvních k prvočísel. Obsahuje tedy kromě čísla 1 a prvočísel větších než $\sqrt{n}$ všechna přirozená čísla nejvýše rovná n. Je tedy

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k| = n - 1 - \pi(n) + \\ + \pi([\sqrt{n}]).$$

Je-li $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, obsahuje množina $M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}$ všechna přirozená čísla nejvýše rovná n, která jsou dělitelná každým z prvočísel $p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_r}$ a tedy i jejich součinem $p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}$. Je tedy

$$|M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}| = \left[\frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}}\right].$$

*) Eratosthenes z Kyreny (276—194 př. n. l.) — řecký matematik a astronom.

Podle principu inkluze a exkluze dostáváme

$$n - 1 - \pi(n) + \pi([\sqrt{n}]) = \Sigma\,(-1)^{r+1}\left[\frac{n}{p_{j_1}p_{j_2}\ldots p_{j_r}}\right]$$

neboli

$$\pi(n) = n - 1 + \pi([\sqrt{n}]) + \Sigma(-1)^r\left[\frac{n}{p_{j_1}p_{j_2}\ldots p_{j_r}}\right], \tag{20}$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny

$$\{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, \pi([\sqrt{n}])\}.$$

Vyjádřili jsme tedy $\pi(n)$ pomocí hodnoty funkce pro podstatně menší proměnnou, totiž pomocí $\pi([\sqrt{n}])$. Za to jsme samozřejmě museli něco zaplatit: Potřebujeme znát ještě také všech $\pi([\sqrt{n}])$ prvních prvočísel (tedy nejen jejich počet) a musíme spočíst příslušné zlomky.

Určeme pro ilustraci $\pi(120)$. Je $[\sqrt{120}] = 10$ a prvočísla menší než 10 jsou 2, 3, 5, 7. Vypočítáme $2^4 - 1$ zlomků

$$\left[\frac{120}{2}\right] = 60,\ \left[\frac{120}{3}\right] = 40,\ \left[\frac{120}{5}\right] = 24,\ \left[\frac{120}{7}\right] = 17,$$

$$\left[\frac{120}{2.3}\right] = 20,\ \left[\frac{120}{2.5}\right] = 12,\ \left[\frac{120}{2.7}\right] = 8,\ \left[\frac{120}{3.5}\right] = 8,$$

$$\left[\frac{120}{3.7}\right] = 5,\ \left[\frac{120}{5.7}\right] = 3,$$

$$\left[\frac{120}{2.3.5}\right] = 4, \left[\frac{120}{2.3.7}\right] = 2, \left[\frac{120}{2.5.7}\right] = 1, \left[\frac{120}{3.5.7}\right] = 1,$$

$$\left[\frac{120}{2.3.5.7}\right] = 0.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}\pi(120) = 120 - 1 + 4 - (60 + 40 + 24 + 17) + \\ + (20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3) - \\ - (4 + 2 + 1 + 1) = 30.\end{aligned}$$

K praktickému výpočtu hodnot funkce $\pi(n)$ se, jak je vidět, vzorec (20) příliš nehodí, méně práce dá Eratosthenovo síto. Vzorec má však význam pro teorii.

Cvičení

7.1 Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla $m > 1$, $n > 1$ platí

$$\varphi(m)\,\varphi(n) \leqq \varphi(mn).$$

Kdy nastane rovnost?

7.2 Dokažte, že pro $n > 2$ je $\varphi(n)$ sudé číslo.

7.3 Kolik z čísel 1, 2, ..., 100 000 je mocninou jiného přirozeného čísla?

7.4 V teorii čísel se pracuje také s Möbiovou*) funkcí $\mu(n)$, která je definována pro všechna přirozená čísla n takto: Pokud se v rozkladu čísla $n > 1$ v součin prvočinitelů nevyskytuje žádné prvočíslo ve vyšší než první mocnině, klade se $\mu(n) = (-1)^v$, kde v je počet prvočinitelů. Pro ostatní n se klade $\mu(n) = 0$ s jedinou výjimkou $\mu(1) = 1$. Dokažte

a) $\Sigma\mu(d) = 0$, sčítá-li se přes všechny kladné dělitele d přirozeného čísla $n > 1$.

b) $\varphi(n) = n\,\Sigma \dfrac{\mu(d)}{d}$, sčítá-li se přes všechny kladné dělitele d přirozeného čísla $n > 1$.

---

*) A. F. Möbius (1790—1868) — německý astronom a matematik. Vynikl zejména v geometrii.

c) $\pi(n) = \pi([\sqrt{n}]) - 1 + \Sigma\mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]$, sčítá-li se přes všechny kladné dělitele d součinu všech prvočísel nejvýše rovných $\sqrt{n}$.

d) $\Sigma\mu(d)\left[\frac{n}{d}\right] = 1$, sčítá-li se přes všechny kladné dělitele d součinu všech prvočísel nejvýše rovných přirozenému číslu $n > 1$.

VIII. KAPITOLA

JINÝ POHLED NA PRINCIP INKLUZE A EXKLUZE*)

Mějme dány konečné množiny $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Sjednocení těchto množin označme M a dále označme pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ jako a_j počet prvků množiny M ležících v alespoň j z množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$, jako p_j počet prvků množiny M ležících právě v j z množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$ a konečně položme

$$s_j = \Sigma |M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \ldots \cap M_{r_j}|,$$

kde se sčítá přes všechny j-prvkové podmnožiny $\{r_1, r_2, \ldots, r_j\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$. Definovali jsme tak tři soustavy čísel

$$a_1, a_2, \ldots, a_k,$$
$$p_1, p_2, \ldots, p_k,$$
$$s_1, s_2, \ldots, s_k$$

a budeme se snažit vždy čísla jedné soustavy vyjádřit pomocí druhé soustavy.

Vztah mezi prvními dvěma soustavami je triviální. Z definice je hned vidět, že pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ platí

$$(21) \qquad a_j = p_j + p_{j+1} + \ldots + p_k,$$

$$(22) \qquad p_j = a_j - a_{j+1}$$

(pro $j = k$ se poslední vztah redukuje na $p_k = a_k$).

*) Na tuto kapitolu se dále nenavazuje.

Zajímavější budou souvislosti třetí soustavy s ostatními. Jeden speciální případ už známe. Princip inkluze a exkluze (15) totiž říká, že

$$a_1 = s_1 - s_2 + \ldots + (-1)^{k+1} s_k .$$

Zvolme libovolný prvek m množiny M a $M_{v_2}, M_{v_2}, \ldots,$ $\ldots, M_{v_q}$ buďte právě ty z množin $M_1, M_2, \ldots, M_k,$ v nichž prvek m leží (v ostatních tedy neleží). Buď $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ a spočtěme, v kolika množinách typu

$$M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \ldots \cap M_{r_i} \tag{23}$$

prvek m leží. Leží právě v těch, pro něž platí

$$\emptyset \neq \{r_1, r_2, \ldots, r_i\} \subset \{v_1, v_2, \ldots, v_q\} .$$

Pro $i \leqq q$ leží tedy prvek m v právě $\binom{q}{i}$ množinách typu (23) a pro $i > q$ v žádné takové množině. Vidíme, že každý prvek ležící v právě q z množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$ je v součtu s_j započten právě $\binom{q}{j}$-krát pro každé $q \in$ $\in \{j, j + 1, \ldots, k\}$ a není započten vůbec pro $q < j$. Platí tedy

$$s_j = p_j + \binom{j+1}{j} p_{j+1} + \ldots + \binom{k}{j} p_k \tag{24}$$

pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Vyjádřili jsme tak čísla $s_1, s_2, \ldots, s_k$ pomocí čísel $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

K tomu, abychom odvodili obrácenou souvislost, dívejme se na právě odvozené vztahy

$$
\begin{aligned}
p_1+\binom{2}{1}p_2+\binom{3}{1}p_3+\dots+\binom{k-1}{1}p_{k-1}+\binom{k}{1}p_k &= s_1\\
p_2+\binom{3}{2}p_3+\dots+\binom{k-1}{2}p_{k-1}+\binom{k}{2}p_k &= s_2\\
\dots\\
p_{k-1}+\binom{k}{k-1}p_k &= s_{k-1}\\
p_k &= s_k
\end{aligned}
\tag{25}
$$

jako na soustavu k lineárních rovnic o k neznámých $p_1, p_2, \dots, p_k$. Tu není obtížné vyřešit, postupujeme-li zdola nahoru, neboť má výhodný trojúhelníkový tvar. Z poslední rovnice dostáváme

$$p_k = s_k,$$

z předposlední

$$p_{k-1} = s_{k-1} - \binom{k}{k-1} p_k = s_{k-1} - \binom{k}{k-1} s_k$$

atd. Postupně vyjde pro $j = k, k - 1, \dots, 2, 1$

$$p_j = s_j - \binom{j+1}{j} s_{j+1} + \dots + (-1)^{k-j} \binom{k}{j} s_k. \tag{26}$$

Pro $j = k$ (i pro $j = k - 1$) jsme se o tom už přesvědčili.

Buď $r \in \{2, 3, \dots, k\}$. Platí-li (25) pro všechna $j \in \{r, r + 1, \dots, k\}$, dostaneme z $(r - 1)$-té rovnice

$$p_{r-1} = s_{r-1} - \sum_{v=r}^{k} \binom{v}{r-1} p_v .$$

Dosadíme-li sem za $p_r, p_{r+1}, \dots, p_k$ podle (26) a upravujeme, vychází

$$p_{r-1} = s_{r-1} - \sum_{v=r}^{k} \binom{v}{r-1} \sum_{w=v}^{k} (-1)^{v+w} \binom{w}{v} s_w =$$

$$= s_{r-1} - \sum_{v=r}^{k} \sum_{w=v}^{k} (-1)^{v+w} \binom{v}{r-1} \binom{w}{v} s_w =$$

$$= s_{r-1} - \sum_{v=r}^{k} \sum_{w=v}^{k} (-1)^{v+w} \binom{w}{r-1} \binom{w-r+1}{v-r+1} =$$

$$= s_{r-1} - \sum_{w=r}^{k} \sum_{v=r}^{k} (-1)^{v+w} \binom{w}{r-1} \binom{w-r+1}{v-r+1} =$$

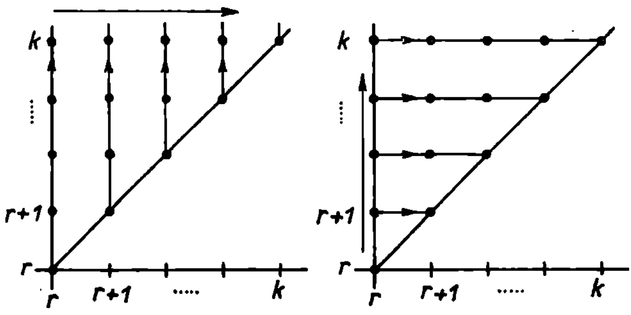
$$= s_{r-1} - \sum_{w=r}^{k} (-1)^{w} \binom{w}{r-1} s_w \sum_{v=r}^{w} (-1)^{v} \binom{w-r+1}{v-r+1} =$$

$$= s_{r-1} - \sum_{w=r}^{k} (-1)^{r+w} \binom{w}{r-1} s_w .$$

Při úpravách jsme mj. užili vztahu

$$\binom{v}{r-1} \binom{w}{v} = \binom{w}{r-1} \binom{w-r+1}{v-r+1}$$

(viz cvič. 2.12), obrátili jsme pořadí sčítání, jak je znázorněno na obrázku, a užili jsme rovnosti



$$\sum_{v=r}^{w} (-1)^v \binom{w-r+1}{v-r+1} = (-1)^r$$

(viz (8)). Dokázali jsme vzorec (26).

Poznámka pro čtenáře, kteří znají základy lineární algebry: K tomu, abychom dokázali, že řešení soustavy lineárních rovnic (25) má tvar (26), stačí ověřit, že matice

$$\begin{pmatrix} 1 & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & \binom{k-1}{1} & \binom{k}{1} \\ 0 & 1 & \binom{3}{2} & \dots & \binom{k-1}{2} & \binom{k}{2} \\ & & & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \binom{k}{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \dots & (-1)^k\binom{k-1}{1} & (-1)^{k+1}\binom{k}{1} \\ 0 & 1 & -\binom{3}{2} & \dots & (-1)^{k+1}\binom{k-1}{2} & (-1)^k\binom{k}{2} \\ & & & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\binom{k}{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jsou navzájem inverzní: Buďte $p \in \{1, 2, \dots, k\}$, $q \in \{1, 2, \dots, k\}$ a vypočtěme skalární součin p-tého řádku první matice a q-tého sloupce druhé matice. Je-li $p > q$, je roven nule z triviálních důvodů. Pro $p = q$ je zřejmě roven 1. V případě $p < q$ vyjde

$$\sum_{s=p}^{q} (-1)^{q+s} \binom{s}{p} \binom{q}{s} = \sum_{s=p}^{q} (-1)^{q+s} \binom{q}{p} \binom{q-p}{q-s} =$$

$$= \binom{q}{p} \sum_{s=p}^{q} (-1)^{q+s} \binom{q-p}{q-s} = 0 .$$

Součin obou matic je tedy skutečně jednotková matice.

To je vidět také z následující skutečnosti: Uvažujme vektorový prostor, jehož prvky jsou všechny mnohočleny nejvýše k-tého stupně s nulovým absolutním členem. Jeho dvě báze jsou

$$x, x^2, \ldots, x^k,$$

$$x, (x+1)^2 - 1, \ldots, (x+1)^k - 1 .$$

Vzhledem k tomu, že pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ platí podle binomické věty

$$(x+1)^j - 1 = \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} x^s - 1 = \sum_{s=1}^{j} \binom{j}{s} x^s ,$$

$$x^j = [(x+1) - 1]^j = \sum_{s=0}^{j} (-1)^s \binom{j}{s} (x+1)^s =$$

$$= \sum_{s=1}^{j} (-1)^s \binom{j}{s} [(x+1)\, s - 1] ,$$

je první matice maticí přechodu od první báze k druhé bázi a druhá matice je maticí přechodu od druhé báze k první bázi. Obě matice jsou proto navzájem inverzní.

Zbývá ještě vyjádřit čísla a_j pomocí čísel $s_1, s_2, \ldots, s_k$ a obráceně. Podle (21) a (26) je pro každé $j \in \{1, 2, \ldots . k\}$

$$a_j = \sum_{v=j}^{k} p_v = \sum_{v=j}^{k} \sum_{w=v}^{k} (-1)^{v+w} \binom{w}{v} s_w =$$

$$= \sum_{w=j}^{k} \sum_{v=j}^{w} (-1)^{v+w} \binom{w}{v} s_w = \sum_{w=j}^{k} (-1)^w s_w \sum_{v=j}^{w} (-1)^v \binom{w}{v} =$$

$$= \sum_{w=j}^{k} (-1)^{w+j} \binom{w-1}{w-j} s_w \,.$$

Pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tedy platí

$$a_j = s_j - \binom{j}{1} s_{j+1} + \ldots + (-1)^{k-j} \binom{k-1}{k-j} s_k.$$

Pro $j = 1$ to není nic jiného než princip inkluze a exkluze (15).

Cvičení

8.1 Kolik sportovců z příkladu na str. 49 pěstuje
a) právě dva sporty,
b) alespoň dva sporty?

8.2 Při testování jedné série televizorů jich bylo deset shledáno vadnými. Přitom vadná součástka byla v sedmi z nich, vadný kontakt v pěti a poškozená skříň u čtyř. Vadnou součástku i kontakt a přitom bezvadnou skříň měl jeden televizor, jeden měl vadný kontakt i skříň a přitom bezvadné součástky a dva měly vadnou součástku i skříň a přitom bezvadné kontakty.
a) U kolika televizorů byly všechny tři závady?
b) Kolik televizorů mělo pouze poškozenou skříň?

8.3 Vyjádřete čísla $s_1, s_2, \ldots, s_k$ pomocí soustavy $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

8.4 Kolik tlumočníků je zaměstnáno ve středisku, víme-li, že 36 jich umí anglicky, 32 německy, 31 rusky, 30 francouzsky, 28 polsky a 26 španělsky, přičemž 53 z nich zná více než jeden z uvedených jazyků. 24 tlumočníci znají alespoň tři jazyky, 9 alespoň čtyři, 3 alespoň pět a 1 všech šest.

8.5 Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou konečné množiny. Každému prvku $m \in M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ přiřaďme nějaké číslo $f(m)$. Každé množině $T \subset M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ je pak přiřazeno číslo $f(T) = \sum\limits_{m \in T} f(m)$. Definujme čísla s'_j, p'_j, a'_j podobně jako byla definována čísla s_j, p_j a a_j, jen místo $|T|$ všude bereme $f(T)$. Projděte příslušné úvahy a uvědomte si, že celá teorie platí i pro čárkovaná čísla. Pro které f se čárkovaná čísla rovnají nečárkovaným?

8.6 Mějme v rovině (prostoru) konečný počet množin M_1, $M_2, \ldots, M_k$, které mají konečné obsahy (objemy). Označíme-li obsah (objem) množiny M symbolem $|M|$, platí vzorec (15) i výsledky 8. kapitoly. Důkazy však nemají smysl, jde-li o nekonečné množiny (konečné množiny mají nulový obsah (objem) a vzorce platí triviálně). Vysvětlete, proč vzorce platí.

8.7 Dokažte, že matice

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{k-2}{0} & \binom{k-1}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{k-2}{1} & \binom{k-1}{1} \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \binom{k-2}{k-2} & \binom{k-1}{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{k-1}{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & (-1)^k\binom{k-2}{0} & (-1)^{k-1}\binom{k-1}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \dots & (-1)^{k-1}\binom{k-2}{1} & (-1)^k\binom{k-1}{1} \\ & & \dots\dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \binom{k-2}{k-2} & -\binom{k-1}{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \binom{k-1}{k-1} \end{pmatrix}$$

jsou navzájem inverzní

a) pomocí čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$ a $s_1, s_2, \dots, s_k$,

b) přímým výpočtem.

IX. KAPITOLA

NĚKOLIK DŮLEŽITÝCH ÚLOH

V této kapitole vyřešíme několik obtížnějších úloh. Významné jsou jejich výsledky, protože souvisejí s jinými zajímavými problémy v kombinatorice, teorii pravděpodobnosti, teorii informace a statistické fyzice, a také typické postupy, jimiž budou odvozeny.

Úloha 11. *Kolik je všech pořadí n prvků $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_n$, v nichž není pro žádné $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ prvek m_i na i-tém místě?*

1. *řešení.* Hledaný počet označme d_n. Buď $n > 1$. Všechna pořadí, která nemají požadovanou vlastnost, rozdělme na disjunktní skupiny podle toho, pro kolik $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je v nich prvek m_i na i-tém místě. Skupina, v níž to platí právě pro s prvků, obsahuje, jak snadno uvážíme, právě $\binom{n}{s} d_{n-s}$ pořadí pro každé $s \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$. Je tedy

$$d_n = n! - \binom{n}{1} d_{n-1} - \binom{n}{2} d_{n-2} - \ldots - \binom{n}{n-1} d_1 - 1 \,.$$

(Jednička na konci odpovídá jedinému pořadí, v němž je právě n prvků m_i na i-tém místě, totiž pořadí $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.) Vyjdeme-li od zřejmé počáteční hodnoty $d_1 = 0$, můžeme postupně počítat podle právě odvozeného rekurentního vzorce hodnoty d_n pro $n = 2, 3, \ldots$.

2. *řešení*. Buď $n > 2$. Rozdělme všech d_n uvažovaných pořadí podle toho, který prvek je v nich na prvním místě, na $(n - 1)$ disjunktních skupin (prvek m_1 na začátku být nemůže). Dále se zabývejme skupinou pořadí, která mají na prvním místě prvek m_k (je tedy $k > 1$). Ta se dále rozpadá na dvě disjunktní podskupiny: V první jsou pořadí, která mají prvek m_1 na k-tém místě, a těch je zřejmě d_{n-2}. Kolik je pořadí ve druhé podskupině, složené ze všech pořadí, v nichž prvek m_1 není na k-tém místě? Právě tolik, kolik je všech pořadí $n - 1$ prvků

$$m_2, \ldots, m_{k-1}, m_1, m_{k+1}, \ldots, m_n, \tag{27}$$

v nichž žádný prvek není na tom místě, kde je napsán v (27), totiž d_{n-1}. Celkem je tedy

$$d_n = (n - 1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

Tento rekurentní vzorec umožňuje, vyjdeme-li od počátečních hodnot $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, postupně počítat d_n pro další n. K praktickým účelům se hodí lépe než vzorec, ke kterému jsme došli v 1. řešení.

3. *řešení*. Užijeme principu inkluze a exkluze. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ označme M_i množinu všech pořadí n prvků $m_1, m_2, \ldots, m_n$, v nichž je na i-tém místě prvek m_i. Bude tedy

$$d_n = n! - |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n|.$$

Pro každou neprázdnou podmnožinu $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ je, jak snadno uvážíme,

$$|M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}| = (n - r)!.$$

Podle principu inkluze a exkluze pak

a tedy

$$d_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \tag{28}$$

Podařilo se nám tak přímo vyjádřit závislost čísla d_n na hodnotě n. Pro numerický výpočet jsou výhodnější rekurentní vzorce, zejména vzorec z 2. řešení nebo vzorec ze cvič. 9.7. Vyjádření (28) zase umožňuje odhadnout d_n pro velká n a najít přibližně jeho hodnotu.

Poznámka pro vzdělanější čtenáře. Součet v závorce na pravé straně (28) je částečný součet nekonečné řady, která konverguje k součtu $\frac{1}{\mathrm{e}}$ (kde $\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$ je konstanta, s níž se v matematice setkáváme na každém kroku). Je tedy

$$\frac{d_n}{n!} = \frac{1}{\mathrm{e}} + c_n\,,$$

kde pro chybu c_n platí

$$|c_n| < \frac{1}{(n+1)!}\,.$$

Vidíme, že přesnost přibližného vyjádření

$$d_n \doteq \frac{n!}{\mathrm{e}}$$

se rychle zlepšuje s rostoucím n, neboť chyba je menší než $\frac{1}{n+1}$.

V jiné souvislosti je úloha 11 řešena v 38. svazku Školy mladých matematiků, brožuře J. Bosáka *Latinské štvorce.*

Cvičení

9.1 Tajná abeceda spočívá v tom, že se každé z 26 písmen zamění určitým jiným písmenem, přičemž samozřejmě písmena přiřazená různým písmenům jsou různá. Kolik je všech možných tajných abeced?

9.2 Vojenský lékař a vojenský zubař mají prohlédnout 360 nováčků. Každý svede prohlídku za 10 vteřin. Kolika způsoby si mohou rozdělit práci, aby byla celá akce za hodinu hotova?

9.3 Kolika způsoby lze k dlouhému stolu s n židlemi po každé straně posadit n manželských párů tak, aby všichni muži seděli na jedné straně a aby žádní manželé neseděli proti sobě?

9.4 Do třídy chodí z žáků a v knihovničce je k různých knížek. Každý žák si vypůjčil právě jednu knížku. Pak si žáci knížky navzájem vyměnili, takže nikomu nezůstala stejná knížka. Kolik je všech možností?

9.5 Kolika způsoby lze vybarvit n barvami pole šachovnice o $n \times n$ polích tak, aby v každé vodorovné řadě byly všechny barvy a přitom v žádné svislé řadě nebyla dvě sousední pole vybarvena stejnou barvou?

9.6 Dokažte vzorec (28) matematickou indukcí.

9.7 Odvoďte rekurentní vzorec

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

a porovnejte ho s ostatními rekurentními vzorci, které jsme pro d_n odvodili, pokud jde o vhodnost pro numerický výpočet.

9.8 Kolik je všech pořadí $2n$ prvků $m_1, m_2, \ldots, m_{2n}$, v nichž pro žádné liché $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ není prvek m_i na i-tém místě?

9.9 Kolik je všech pořadí k prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k$, v nichž pro žádné $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ není prvek m_i na i-tém místě a přitom prvky m_1, m_2 jsou vedle sebe?

Úloha 12. *Kolik je všech pořadí $n > 1$ prvků $m_1, m_2, \ldots, m_n$, v nichž pro žádné $i \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ není prvek m_{i+1} bezprostředně za prvkem m_i?*

1. *řešení.* Množinu všech uvažovaných pořadí označme C_n a jejich počet c_n. Buď $n > 2$. Pro každé pořadí z C_n platí: Odstraníme-li z něho prvek m_n, dostaneme pořadí $n - 1$ prvků $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$, v němž buď pro žádné nebo pro jediné $i \in \{1, 2, \ldots, n - 2\}$ je prvek m_{i+1} hned za prvkem m_i. Množina C_n se podle toho rozpadá na dvě disjunktní podmnožiny. Z každého pořadí první z nich — označme ji C'_n — dostaneme vynecháním prvku m_n nějaké pořadí z množiny C_{n-1}. Přitom každé pořadí p z množiny C_{n-1} takto dostaneme právě z $n - 1$ pořadí z C'_n (totiž právě z pořadí vzniklých přidáním prvku m_n k pořadí p na některé z n míst (dopředu, dozadu a do mezer) s jedinou výjimkou; ne za m_{n-1}). Je tedy

$$|C'_n| = (n - 1)\,|C_{n-1}| = (n - 1)\,c_{n-1}.$$

Každé pořadí druhé skupiny — označme ji C''_n — obsahuje trojici za sebou bezprostředně následujících prvků m_j, m_n, m_{j+1} pro nějaké $j \in \{1, 2, \ldots, n - 2\}$. Proveďme následující transformaci: odstraňme prvky m_n a m_{j+1} a prvky m_i zaměňme prvky m_{i-1} pro všechna

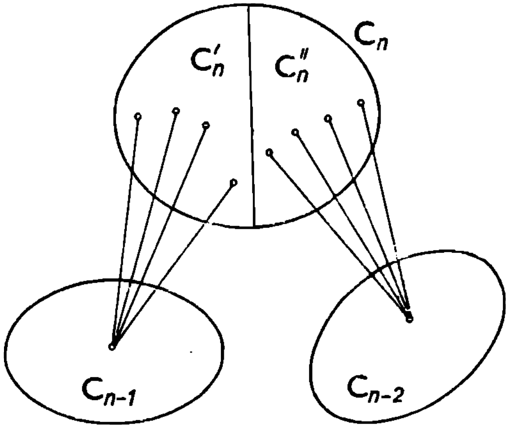
$i \in \{j + 2, \ldots, n - 1\}$. Tak dostaneme pořadí $n - 2$ prvků $m_1, m_2, \ldots, m_{n-2}$, které patří do množiny C_{n-2}. Přitom každé pořadí p z C_{n-2} takto dostaneme právě z $n - 2$ pořadí z C''_n (totiž právě z pořadí vzniklých z p přidáním prvku m_n za některý z $n - 2$ prvků m_j, záměnou prvků m_i za m_{i+1} pro všechna $i \in \{j + 1, \ldots, n - 2\}$ a přidáním prvku m_j za prvek m_n). Je tedy

$$|C''_n| = (n - 2)\,|C_{n-2}| = (n - 2)\,c_{n-2}.$$

Celkem dostáváme

(29) $$c_n = (n - 1)\,c_{n-1} + (n - 2)\,c_{n-2}.$$

Snadno zjistíme počáteční hodnoty: $c_1 = 1$, $c_2 = 1$.



2. *řešení.* Užijeme principu inkluze a exkluze. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ označíme M_i množinu všech

pořadí n prvků $m_1, m_2, \ldots, m_n$, v nichž je prvek m_{i+1} hned za prvkem m_i. Buď

$$\emptyset \neq \{r_1, r_2, \ldots, r_v\} \subset \{1, 2, \ldots, n-1\},$$

přičemž $r_1 < r_2 < \ldots < r_v$. Množina $M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \ldots \cap M_{r_v}$ obsahuje tedy všechna pořadí oněch n prvků, v nichž prvek m_{r_i+1} následuje hned za prvkem m_{r_i} pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, v\}$. Tyto dvojice po sobě bezprostředně následujících prvků se však někdy mohou skládat v delší bloky po sobě následujících prvků; tak např. pro $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 4, r_4 = 7, r_5 = 10, r_6 = 11$ dostáváme tři bloky (m_2, m_3, m_4, m_5), (m_7, m_8), (m_{10}, m_{11}, m_{12}). Všechna tato pořadí dostaneme zřejmě tak, že utvoříme všechna pořadí takovýchto bloků a prvků, které v nich nejsou. Je-li bloků b, je v nich celkem $b + v$ prvků a není v nich tedy $n - b - v$ prvků, takže

$$|M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \ldots \cap M_{r_v}| = (b + n - b - v)! = \\ = (n - v)!,$$

a to naštěstí nezávisí na počtu bloků.

Podle principu inkluze a exkluze je pak počet všech pořadí n prvků obsahujících alespoň jednu zakázanou dvojici sousedů roven

$$|M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{n-1}| = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r+1} \binom{n-1}{r} (n-r)! = \\ = (n-1)! \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r+1} \frac{(n-r)}{r!}.$$

Hledaný počet dostaneme odečtením tohoto součtu od $n!$, vyjde

$$c_n = (n-1)! \left(n - \frac{n-1}{1!} + \frac{n-2}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right).$$

Cvičení

9.10 Police je běžným způsobem naplněna knihami. Kolika způsoby je můžeme přerovnat tak, aby žádné dvě desky, které se dříve stýkaly, už nebyly vedle sebe?

9.11 Dokažte, že pro každé přirozené $n > 1$ je
$c_n = d_n + d_{n-1}$.

9.12 Pokuste se vyřešit variantu úlohy 12, jestliže jsou zakázány nejen dvojice sousedů (m_i, m_{i+1}), ale i (m_{i+1}, m_i). Pokud nebudete úspěšní, uvědomte si, proč jste ztroskotali, zatímco v úloze 12 vše prošlo.

Úloha 13. *Kolik existuje j-prvkových variací s opakováním z k prvků takových, že každá obsahuje všech k prvků?*

1. *řešení.* Hledaný počet označme $z(j, k)$. Je zřejmé, že pro $j < k$ je $z(j, k) = 0$. Předpokládejme nadále, že $j \geqq k > 1$. Všechny uvažované variace se rozpadají na k disjunktních skupin podle toho, který prvek mají na prvním místě. Každá skupina se dále rozpadá na dvě disjunktní podskupiny podle toho, vyskytuje-li se prvek stojící na prvním místě ještě na některém jiném místě nebo ne. První podskupina zřejmě obsahuje právě $z(j-1, k-1)$ variací a ve druhé je jich právě $z(j-1, k)$. Platí tedy

$$z(j, k) = k[z(j-1, k-1) + z(j-1, k)]. \tag{30}$$

To umožňuje vyjít od počátečních hodnot

$$z(1, 1) = z(2, 1) = z(3, 1) = \ldots = 1$$

a postupně vypočítat

$$z(2, 2), z(3, 2), z(3, 3), z(4, 2), z(4, 3), z(4, 4), z(5, 2)$$

atd.

2. *řešení.* Rozdělíme-li uvažované variace na disjunktní skupiny podle toho, kolikrát se v nich každý z prvků vyskytuje, dostaneme

$$z(j, k) = \sum \frac{j!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!} ,$$

kde se sčítá přes všechny uspořádané k-tice přirozených (tedy nenulových) čísel $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$, pro něž $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = j$. Vzhledem k tomu, že sčítanci nezávisejí na uspořádání čísel $r_1, r_2, \ldots, r_k$, dostaneme sečtením stejných sčítanců

$$z(j, k) = \sum \frac{j!\, k!}{s_1!\, s_2! \ldots s_k!\, c_1!\, c_2! \ldots c_j!} ,$$

kde se sčítá přes všechny k-tice přirozených čísel

$$s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_k ,$$

pro něž $s_1 + s_2 + \ldots + s_k = j$.

Čísla c_i jsou přitom pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, j\}$ definována jako počet čísel $s_1, s_2, \ldots, s_k$, která jsou rovna i. (Tak např. pro

$$(s_1, s_2, \ldots, s_5) = (7, 5, 5, 5, 2)$$

je $c_7 = 1$, $c_5 = 3$, $c_2 = 1$ a ostatní z čísel $c_1, \ldots, c_{24}$ jsou rovna nule.) Koeficient

$$\frac{k!}{c_1!\, c_2! \ldots c_j!}$$

tedy pro každou k-tici $s_1, \ldots, s_k$ udává počet všech uspořádaných k-tic $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$, z nichž vznikla srovnáním členů podle velikosti, tedy počet příslušných stejných sčítanců.

To můžeme vyjádřit ještě jiným způsobem:

$$(31)\quad z(j, k) = \sum \frac{j!\, k!}{(t_1!)^{d_1}\, (t_2!)^{d_2} \ldots (t_m!)^{d_m}\, d_1!\, d_2! \ldots d_m!},$$

kde se sčítá přes všechny uspořádané m-tice $(d_1, d_2, \ldots$ $\ldots, d_m)$ a přes všechny m-tice

$$t_1 > t_2 > \ldots > t_m$$

přirozených čísel, pro něž

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_m = k$$

a

$$d_1t_1 + d_2t_2 + \ldots + d_mt_m = j\,.$$

Není těžké si uvědomit, jak jsme sčítance přepsali. Např. sčítanci odpovídajícímu

$$(s_1, s_2, \ldots, s_m) = (7, 5, 5, 5, 2)$$

bude nyní odpovídat

$$t_1 = 7,\, t_2 = 5,\, t_3 = 2\,,$$
$$d_1 = 1,\, d_2 = 3,\, d_3 = 2\,.$$

3. *řešení*. Užijeme princip inkluze a exkluze. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ označme M_i množinu všech j-prvkových variací z k prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k$, které neobsahují prvek m_i. Pro každou neprázdnou podmnožinu $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ $\subset \{1, 2, \ldots, k\}$ je tedy $M_{v_1} \cap M_{v_2} \cap \ldots \cap M_{v_r}$ množina všech j-prvkových variací s opakováním z $(k - r)$ prvků $(\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} - \{m_{v_1}, m_{v_2}, \ldots, m_{v_r}\})$ a proto

$$|M_{v_1} \cap M_{v_2} \cap \ldots \cap M_{v_r}| = (k - r)^j\,.$$

Podle principu inkluze a exkluze je

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k| = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r+1} \binom{k}{r} (k - r)^j\,.$$

Odečtením od počtu k^j všech j-prvkových variací s opakováním z k prvků dostaneme:

$$(32) \qquad z(j, k) = k^j - \binom{k}{1}(k-1)^j + \binom{k}{2}(k-2)^j - \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}.$$

Cvičení

9.13 V každém z p podniků má být současně provedena kontrola. Kolika způsoby se na to může rozdělit k kontrolorů?

9.14 Vysvětlete, proč pro každé přirozené číslo p platí

a) $$\binom{p}{0}p^p - \binom{p}{1}(p-1)^p + \binom{p}{2}(p-2)^p + \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1} = p!$$

b) $$\binom{p+1}{0}(p+1)^p - \binom{p+1}{1}p^p + \binom{p+1}{2}(p-1)^p + \ldots + (-1)^p\binom{p+1}{p-1} = 0\,.$$

9.15 Dokažte vzorec (32) matematickou indukcí.

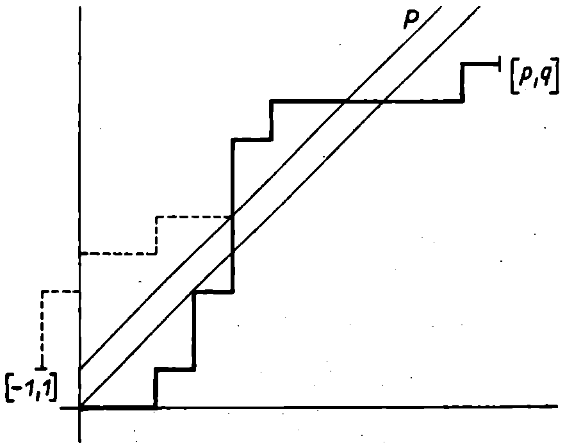
9.16 Jsou dány dvě neprázdné konečné množiny P, Q. Určete počet všech

a) zobrazení množiny P do množiny Q,
b) prostých zobrazení množiny P do množiny Q,
c) zobrazení množiny P na množinu Q,
d) prostých zobrazení množiny P na množinu Q,
e) zobrazení z množiny P do množiny Q,
f) prostých zobrazení z množiny P do množiny Q,
g) zobrazení z množiny P na množinu Q,
h) prostých zobrazení z množiny P na množinu Q.

9.17 Jak se změní součet na pravé straně (31), připouštějí-li se i nulová t_i?

Úloha 14. *Jsou dána dvě nezáporná celá čísla p, q. Kolik existuje pořadí s opakováním p prvků* 1. *druhu a q prvků* 2. *druhu, která mají pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, p + q\}$ na počátečních i místech alespoň tolik prvků* 1. *druhu jako* 2. *druhu?*

Řešení. Hledaný počet označíme $f(p, q)$. Pro $p < q$ je zřejmě $f(p, q) = 0$. Předpokládejme nadále, že $p \geqq q$. Na čtverečkovaném papíru zvolme dvě kolmé linky a zaveďme tak přirozeným způsobem souřadnou soustavu s jednotkou délky rovnou rozměru čtverečku.



Využijeme toho, že pořadí s opakováním p prvků 1. druhu a q prvků 2. druhu si vzájemně jednoznačně odpovídají s lomenými čarami, které vedou po linkách z počátku do bodu $[p, q]$ bez oklik, tj. buď doprava nebo vzhůru (srovnej cvič. 1.11). Jak uvidíme, geometrické znázornění podstatně přispěje k řešení úlohy.

Pořadím, jejichž počet hledáme, odpovídají právě ty čáry (stále budeme mít na mysli lomené čáry bez oklik), které nezasahují nad přímku určenou body $[0, 0]$ a $[1, 1]$, tj. které nemají žádný společný bod s přímkou P určenou body $[0, 1]$ a $[1, 2]$. Nalezneme počet $a(p, q)$ čar vedoucích z bodu $[0, 0]$ do bodu $[p, q]$, které uvedenou vlastnost nemají.

Každé z těchto čar L přiřaďme čáru L' následujícím způsobem: Úsek mezi počátkem a prvním průsečíkem čáry L s přímkou P nahradíme čarou, která je s ním souměrná podle přímky P; zbývající část čáry L necháme beze změny. Čára L', kterou jsme dostali, vede z bodu $[-1, 1]$ do bodu $[p, q]$. Celou transformaci jsme dělali proto, že *každá* čára L' vedoucí z bodu $[-1, 1]$ do bodu $[p, q]$ vznikne popsaným způsobem z některé z $a(p, q)$ uvažovaných čar L, a to z jediné. Totiž z té, která vznikne nahrazením úseku čáry L' mezi body $[1, 1]$ a prvním jejím průsečíkem s přímkou P (ten vždy existuje, neboť body $[-1, 1]$ a $[p, q]$ leží v opačných polorovinách určených přímkou P) jeho obrazem v souměrnosti podle přímky P. Zjistili jsme, že $a(p, q)$ je rovno počtu *všech* čar vedoucích z bodu $[-1, 1]$ do bodu $[p, q]$, tedy

$$a(p, q) = \binom{p+q}{p+1}.$$

Odtud dostáváme

$$f(p, q) = \binom{p+q}{p} - \binom{p+q}{p+1}.$$

9.18 Alenka dostává každý den od maminky korunu. Někdy si koupí nanuka, jindy si korunku schová. Tatínek ji nabádá, aby si polovinu peněz šetřila na něco pořádného. Občas se podívá do pokladničky, a není-li tam alespoň polovina korun, řeční. Kolika způsoby si může Alenka během prvních 30 dnů kupovat nanuky, aby jich snědla co nejvíc a přitom měla klid? Maminka jí víc než jeden nanuk denně nedovolí.

9.19 V poledne byly všechny schránky automatické úschovny zavazadel obsazeny. Během odpoledne si jednotlivě přišlo v lidí vyzvednout a u lidí uložit zavazadlo. Kolika způsoby mohli přicházet (bez ohledu na to, kdy jim jede vlak), aby nikdo nemusel čekat, než se některá schránka uvolní?

9.20 Podívejte se do Vilenkinovy Kombinatoriky, kde je rozebráno několik variant úlohy 14 a jiné s ní související úlohy.

Úloha 15. *Kolika způsoby lze kolem kulatého stolu rozesadit na* $2n$ *židlí* n *manželských párů tak, aby se muži střídali se ženami a žádný pár neseděl vedle sebe?*

Řešení. Nejprve se musíme rozhodnout, která rozesazení budeme pokládat za různá. Pokládejme tedy dvě rozesazení za různá, existuje-li židle, na níž při nich sedí různé osoby. (Pokud bychom nerozlišovali rozesazení, která se liší jen pootočením celé společnosti o několik míst, dostali bychom $2n$-krát méně různých rozesazení. Nebylo by nepřirozené ani kdybychom za stejná pokládali taková dvě rozesazení, při nichž má každá osoba tytéž sousedy. Pak bychom dostali — pokud $n > 1$ — ještě dvakrát méně různých rozesazení.)

Všechna rozesazení, jejichž počet hledáme, rozdělme do $2 \, . \, n!$ disjunktních skupin podle toho, jak jsou v nich rozesazeny ženy. Abychom našli počet rozesazení v jedné ze skupin, je třeba najít pro pevné rozesazení žen počet m_n všech rozesazení mužů, při nichž žádný z nich nesedí vedle své ženy. K tomu užijeme princip inkluze a exkluze.

Označme M_i množinu všech rozesazení mužů, při nichž i-tý z nich sedí vedle své ženy.

Podle principu inkluze a exkluze pak bude

$$
(33) \qquad n! - m_n = |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n| = \\
= \Sigma(-1)^{r+1} \, |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_r}| \, ,
$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny

$$
\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}.
$$

Pro každou takovou podmnožinu označme $q(i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_r)$ počet rozesazení mužů, při nichž příslušných r mužů sedí vedle svých žen (a o ostatních se nic netvrdí). Je tedy

$$
|M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_r}| = \\
= (n - r)! \, q(i_1, i_2, \ldots, i_r) .
$$

Pro různé r-prvkové podmnožiny se však hodnoty $q(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ mohou značně lišit (sedí-li příslušné ženy pohromadě, je pro muže méně možností, než jsou-li rozptýleny) a jejich chování je obtížné postihnout. Jednotlivé sčítance v (33) vpravo se tedy nedají dobře zvládnout. Naštěstí lze celkem snadno spočíst jejich částečné součty

$$
s_r = \Sigma \, |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_r}| = \\
= (n - r)! \, \Sigma q(i_1, i_2, \ldots, i_r) ,
$$

kde se sčítá přes všechny r-prvkové podmnožiny $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Potom bude

$$
n! - m_n = s_1 - s_2 + \ldots + (-1)^{r+1} s_r .
$$

Přistupme k výpočtu čísla

$$q_r = \Sigma q\,(i_1, i_2, \dots, i_r),$$

které znamená souhrnný počet všech rozesazení všech r-tic mužů vedle jejich žen. Představme si proto, jak nějaká r-tice mužů sedí vedle svých žen, a označme mezery mezi židlemi, na nichž sedí manželské páry. Tak bude označeno právě r mezer, přičemž žádné dvě nebudou vedle sebe. To by totiž znamenalo, že buď nějaký muž sousedí z obou stran se svou ženou, nebo nějaká žena se svým mužem. Obráceně: označme r mezer mezi židlemi tak, aby žádné dvě nebyly vedle sebe. Označené mezery pak budou mezi r páry sousedních židlí, z nichž po jedné je obsazeno ženami a na zbývající se vedle nich mohou posadit jejich manželé.

Číslo q_r je tedy rovno počtu způsobů, jak z $2n$ mezer vybrat r-prvkovou podmnožinu tak, aby žádné dvě vybrané mezery nebyly vedle sebe. Teď si jen stačí vzpomenout na úlohu 7. Podle ní je

$$q_r = \frac{2n}{2n-r}\binom{2n-r}{r}.$$

Manželské páry lze tedy rozesadit právě

$$2n!\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,(n-r)!\,\frac{2n}{2n-r}\binom{2n-r}{r} \tag{34}$$

způsoby.

I tato úloha se v jiné souvislosti vyskytuje v již citované knížce J. Bosáka *Latinské štvorce.*

Cvičení

9.21 Dosadíte-li do vzorce (34) $n = 1$, vyjde -2. Vysvětlete, proč pro $n = 1$ vzorec neplatí.

X. KAPITOLA

JEŠTĚ NĚKOLIK ÚLOH

Úloha 16. *Kolika způsoby můžete z tabulky*

$$
\begin{array}{c}
M\\
M\,A\,M\\
M\,A\,T\,A\,M\\
M\,A\,T\,E\,T\,A\,M\\
M\,A\,T\,E\,M\,E\,T\,A\,M\\
M\,A\,T\,E\,M\,A\,M\,E\,T\,A\,M\\
M\,A\,T\,E\,M\,A\,T\,A\,M\,E\,T\,A\,M\\
M\,A\,T\,E\,M\,A\,T\,I\,T\,A\,M\,E\,T\,A\,M\\
M\,A\,T\,E\,M\,A\,T\,I\,K\,I\,T\,A\,M\,E\,T\,A\,M\\
M\,A\,T\,E\,M\,A\,T\,I\,K\,A\,K\,I\,T\,A\,M\,E\,T\,A\,M
\end{array}
$$

přečíst název svého nejoblíbenějšího koníčka?

Řešení. Pokud není vaším nejoblíbenějším koníčkem matematika, je hledaný počet roven 0. Pokud ano, jistě si všimnete, že jednotlivé způsoby si vzájemně jednoznačně odpovídají s lomenými čarami, které vedou z písmen M na ramenech trojúhelníka do písmene A ve středu základny a směřují vždy buď dolů nebo doprava (u cest začínajících na levém rameni) či doleva (u cest začínajících na pravém rameni). Pro každé z obou krajních M v i-tém řádku zdola tak dostaneme právě $\binom{9}{i-1}$ způsobů (srv. cvičení 1.11). Celkem dostaneme

$$\binom{9}{9} + 2\sum_{j=0}^{8}\binom{9}{j} = 2\sum_{j=0}^{9}\binom{9}{j} - 1 = 2 . 2^9 - 1 = 2^{10} - 1 =$$
$$= 1023$$

způsobů.

Úloha 17. *Najděte všechny řádky Pascalova trojúhelníka, ve kterých jsou jen lichá čísla.*

Řešení. Nejprve ukážeme, že pro každé celé nezáporné číslo k se 2^k-tý řádek Pascalova trojúhelníka skládá jen z lichých čísel. V tomto řádku jsou kombinační čísla

$$(35) \quad \binom{2^k - 1}{j} = \frac{(2^k - 1)(2^k - 2) \dots (2^k - j)}{1 . 2 . \dots . j} .$$

Vzhledem k tomu, že pro každá dvě přirozená čísla $n \leqq k$, r je $2^k - r$ dělitelno číslem 2^n, právě když je r dělitelno číslem 2^n, je v rozkladech čitatele i jmenovatele kombinačního čísla (35) na prvočinitele prvočíslo 2 ve stejné mocnině a číslo (35) je tedy liché.

Ještě ukážeme, že každý jiný řádek Pascalova trojúhelníka obsahuje sudé číslo. To plyne z toho, že pokud v-tý řádek obsahuje samá lichá čísla, je uprostřed $(v + 1)$-tého řádku $v - 1$ sudých čísel, která vznikla jako součty sousedních čísel v-tého řádku, uprostřed $(v + 2)$-tého řádku je $v - 2$ sudých čísel pocházejících ze sudých čísel $(v - 1)$-tého řádku, atd. Tento klín sudých čísel zasahuje až do $(2v - 1)$-tého řádku, kde je uprostřed sudé číslo. Vidíme, že jsou-li ve v-tém řádku jen lichá čísla, pak první další řádek, kde to může opět nastat, je až $2v$-tý řádek.

Úloha 18. *V kocourkovském generálním štábu je* 13 *generálů. Rozhodli se, že si na tajné materiály pořídí trezor,* *který půjde otevřít, právě když bude přítomna nadpoloviční většina generálů. Jaký je nejmenší možný počet zámků, které budou na trezoru? Jaký je nejmenší možný počet klíčů, které s sebou bude nosit kocourkovský generál?*

Řešení. Předpokládejme, že existuje systém zámků a klíčů, který splňuje požadavky úlohy. Sejde-li se jen 6 generálů, trezor neotevřou. Pro každou šestici generálů tedy existuje zámek, od kterého nemá žádný z nich klíč. Pro různé šestice jsou tyto zámky různé. Kdyby totiž dvě různé šestice generálů nedokázaly otevřít tentýž zámek, nedokázali by to ani generálové ze sjednocení obou šestic, jichž je alespoň 7 a tvoří tedy nadpoloviční většinu, což odporuje požadavkům úlohy. Vidíme, že na trezoru je alespoň $\binom{13}{6}$ zámků.

K tomu, aby jakákoliv sedmice generálů otevřela všechny zámky, je nutné, aby každý generál měl pro každou šestici generálů klíč od zámku, který těmto šesti generálům schází. Každý generál má tedy alespoň $\binom{12}{6}$ klíčů.

Ukážeme, že více než $\binom{13}{6}$ zámků potřeba nebude. Každé sedmici generálů přiřaďme jeden zámek tak, aby různým sedmicím byly přiřazeny různé zámky, a dejme právě jim od něho po klíči. Je hned vidět, že sejde-li se pak méně než 7 generálů, existuje zámek, ke kterému nemají klíč, totiž zámek přiřazený některé sedmici z ostatních generálů. Sejde-li se 7 generálů, otevřou kterýkoliv zámek. Kdyby se jim to totiž u některého zámku nepodařilo, znamenalo by to, že je přiřazen nějaké sedmici z ostatních generálů. Ostatních generálů je však jen 6. Systém tedy splňuje podmínky úlohy a přitom je na trezoru právě $\binom{13}{7} = \binom{13}{6} = 1716$ zámků. Každý generál dostal právě tolik klíčů, kolika sedmic je členem, tedy $\binom{12}{6} = 964$ klíčů.

Úloha 19. *Dřevěnou krychli natřeli na červeno a pak ji rozřezali na n^3 stejně velkých krychliček. Kolika způsoby je možno z krychliček složit červenou krychli původních rozměrů?*

Řešení. K tomu, aby byl povrch složené krychle celý červený, je nutné a stačí, aby se pro žádnou krychličku nedostala při skládání červená stěna dovnitř. Tak tomu bude, právě když se 8 krychliček se třemi červenými stěnami dostane do vrcholů skládané krychle, $12(n - 2)$ krychliček s právě dvěma červenými stěnami na ostatní místa na hranách, $6(n - 2)^2$ krychliček s jedinou červenou stěnou na zbylá místa na stěnách a $(n - 2)^3$ bezbarvých krychliček přijde dovnitř. Krychli můžeme tedy složit právě

$$8![12(n - 2)]!\,[6(n - 2)^2]!\,[(n - 2)^3]!$$

způsoby, pokud nerozlišujeme způsoby, které se liší jen různými polohami krychličky na stejném místě. Pokud bychom takové způsoby rozlišovali, dostali bychom vzhledem k tomu, že počet poloh, při nichž jsou všechny červené stěny na povrchu, je u krychliček 1. druhu 3, u 2. druhu 2, u 3. druhu 4 a u 4. druhu 24,

$$3^8 2^{12(n-2)}\, 4^{6(n-2)^2}\, 24^{(n-2)^3}$$

-krát více způsobů.

Na druhé straně není nepřirozené nerozlišovat způsoby, při nichž krychle složená jedním způsobem se dostane z krychle složené jiným způsobem změnou polohy celé složené krychle. Pak bychom museli počet způsobů vydělit číslem 24.

Úloha 20. *Je dáno prvočíslo $p > 2$ a přirozené číslo n. Kolika způsoby lze obarvit vrcholy pravidelného p-úhelníka pomocí n barev? Způsoby, při nichž se po otočení p-úhelníka barvy shodují, nepokládáme za různé.*

Řešení. Neřekneme-li nic jiného, budeme pokládat za různé i způsoby, u nichž je to v textu úlohy vyloučeno. Dostaneme tak n^p obarvení. Množinu všech $n^p - n$ obarvení alespoň dvěma barvami označme M. Množinu všech obarvení alespoň dvěma barvami různých podle úlohy označme M'. Otáčením p-úhelníka obarveného alespoň dvěma barvami dostaneme právě $p - 1$ dalších různých obarvení. Pokud by totiž po otočení o nenulový úhel obarvení splynula, snadno bychom ukázali, že p není prvočíslo. Každému prvku $o \in M'$ tedy odpovídá p-prvková podmnožina množiny M složená ze všech obarvení, která nejsou ve smyslu úlohy různá od o. Různým prvkům množiny M' přitom odpovídají disjunktní podmnožiny a každý prvek množiny M do některé z nich patří. Je tedy

$$|M'| = \frac{|M|}{p} = \frac{n^p - n}{p}.$$

Připočteme-li ještě n obarvení jedinou barvou, dojdeme k výsledku

$$\frac{n^p - n}{p} + n.$$

(Všimněte si, že jsme vlastně dokázali Fermatovu větu, o které byla zmínka na str. 57.)

Úloha 21. *Je dáno přirozené číslo $n > 2$ a množina M, jejíž prvky jsou slova složená z písmen X a Y, přičemž každé slovo má právě n písmen a jakákoliv dvě různá slova se liší alespoň na třech místech. Dokažte nerovnost*

$$|M| \leqq \frac{2^n}{n+1}.$$

Řešení. Označme $|M| = m$. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ sestrojme množinu M_i, jejíž prvky budou i-té slovo z množiny M a všechna slova, která z něho vzniknou změnou jediného písmene. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ je tedy $|M_i| = n + 1$. Množiny $M_1, M_2, \ldots, M_m$ jsou disjunktní, neboť libovolná dvě slova patřící do různých z těchto množin se liší alespoň na jednom místě. Uvědomíme-li si, že existuje právě 2^n slov délky n složených ze dvou písmen, dostáváme

$$2^n \geqq |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_m| = |M_1| + |M_2| + \\ + \ldots + |M_m| = m(n+1)$$

čili

$$m \leqq \frac{2^n}{n+1}.$$

Úloha 22. *Uvažujme všechna slova složená z n písmen X a n písmen Y. Diferencí slova budeme rozumět číslo, které udává, kolikrát v něm jsou vedle sebe různá písmena. Dokažte, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ je počet slov s diferencí $n - k$ roven počtu slov s diferencí $n + k$.*

Řešení. Budeme se zabývat jen slovy složenými z n písmen X a n písmen Y. V každém slově se střídají bloky písmen X s bloky písmen Y. Počet slov, která se skládají z x bloků X a y bloků Y a začínají písmenem X, je $\binom{n-1}{x-1}\binom{n-1}{y-1}$, neboť každému takovému slovu přirozeným způsobem odpovídá vzájemně jednoznačně rozdělení n písmen X na x bloků a n písmen Y na y bloků. Stejný je počet slov, která začínají písmenem Y.

Dále určíme, kolik slov má diferenci d. Je-li d liché číslo, $d = 2c + 1$, skládá se každé takové slovo z $c + 1$ bloků X a $c + 1$ bloků Y. Celkem je jich tedy právě $2\binom{n-1}{c}^2$. Je-li d sudé, $d = 2c$, skládá se každé slovo s diferencí d z $c + 1$ bloků počátečního písmene a z c bloků druhého písmene. V tomto případě tedy existuje právě $2\binom{n-1}{c-1}\binom{n-1}{c}$ slov.

Čísla $n - k$, $n + k$ mají stejnou paritu, neboť se liší o $2k$. Jsou-li lichá, existuje právě

$$2\binom{n-1}{\frac{n-k-1}{2}}^2$$

slov s diferencí $n - k$ a právě

$$2\binom{n-1}{\frac{n+k-1}{2}}^2$$

slov s diferencí $n + k$. Oba tyto počty jsou stejné, protože podle vzorce (2) je

$$\binom{n-1}{\frac{n-k-1}{2}} = \binom{n-1}{\frac{n+k-1}{2}}.$$

Jsou-li čísla $n - k$, $n + k$ sudá, existuje právě

$$2\binom{n-1}{\frac{n-k}{2}-1}\binom{n-1}{\frac{n-k}{2}}$$

slov s diferencí $n - k$ a právě

$$2\binom{n-1}{\frac{n+k}{2}-1}\binom{n-1}{\frac{n+k}{2}}$$

slov s diferencí $n + k$. I v tomto případě jsou oba počty stejné, protože podle (2) je

$$\binom{n-1}{\frac{n-k}{2}-1} = \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}},$$

$$\binom{n-1}{\frac{n-k}{2}} = \binom{n-1}{\frac{n+k}{2}-1}.$$

Úloha 23. *Je dáno přirozené číslo $n > 2$. Uvažujme všechna slova složená z n písmen X a n písmen Y. Slovům, která nelze rozdělit na dvě slova, z nichž každé obsahuje stejně X i Y, budeme říkat slova 1. druhu. Slovům, která lze takto rozdělit jediným způsobem, budeme říkat slova 2. druhu. Dokažte, že slov 2. druhu je dvakrát tolik než slov 1. druhu.*

Řešení. Množina všech slov 1. druhu se rozpadá na dvě disjunktní podmnožiny podle toho, kterým písmenem začínají. Obě tyto podmnožiny zřejmě mají stejný počet prvků. Množina všech slov 2. druhu se rozpadá na čtyři disjunktní podmnožiny podle toho, kterým písmenem začíná první část a kterým druhá část. Všechny čtyři podmnožiny mají zřejmě stejný počet prvků. Stačí tedy dokázat, že počet všech slov 1. druhu začínajících písmenem X (nazveme je slova typu A) je roven počtu všech slov 2. druhu, v nichž obě části začínají písmenem X (slova typu B). Provedeme to tak, že sestrojíme vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech slov typu B na množinu všech slov typu A.

Každému slovu typu A a B přiřaďme uspořádanou $2n$-tici přirozených čísel, ve které je pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ na i-tém místě rozdíl počtu prvků X a počtu prvků Y na prvních i místech slova. Této pomocné $2n$-tici budeme říkat charakteristika slova. Pro každé slovo typu A a B začíná zřejmě charakteristika číslem 1 a končí číslem 0, je složena z celých nezáporných čísel a sousední čísla se liší o 1. Podle definice typů A a B se v charakteristice slova kromě koncové už žádná jiná 0 nevyskytuje, právě když jde o slovo typu A, a vyskytuje se na jediném jiném místě, právě když jde o slovo typu B.

Definujme na množině všech slov typu B zobrazení z jako přesunutí prvního písmene (X) druhé části slova na začátek slova. Bylo-li přesunuté písmeno na p-tém místě a mělo-li původní slovo s charakteristiku

$$(c_1, c_2, \ldots, c_{2n})$$

(takže $c_{p-1} = 0$), bude mít obraz $z(s)$ charakteristiku

$$(1, c_1 + 1, c_2 + 1, \ldots, c_{p-1} + 1, c_{p+1}, \ldots, c_{2n}).$$

Vidíme, že v ní je nula jen na posledním místě a slovo $z(s)$ je tedy typu A. Snadno zjistíme, že zobrazení z je prosté, tj. že různým vzorům přiřazuje vždy různé obrazy. Zbývá ještě ukázat, že zobrazení z zobrazuje množinu všech slov typu B na množinu všech slov typu A, tj. že každé slovo typu A je obrazem některého slova typu B. Zvolme libovolné slovo t typu A. Jeho charakteristika je $(d_1, d_2, \ldots, d_{2n})$. Nechť $r > 1$ je nejmenší index, pro který je $d_r = 1$. Ze slova t utvořme slovo t' tak, že první písmeno (X) přesuneme mezi r-té a $(r + 1)$-té písmeno slova t. Slovo t' bude mít charakteristiku

$$(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{r-1} - 1, 0, 1, d_{r+1}, \ldots, d_{2n}).$$

Vidíme, že slovo t' je typu B a přitom $z(t') = t$.

Úloha 24. *Je dáno přirozené číslo n. Pro kolik pořadí $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ čísel $1, 2, \ldots, n$ nabývá součet*

$$|p_1 - 1| + |p_2 - 2| + \ldots + |p_n - n|$$

maximální hodnoty?

Řešení. Nahradíme-li pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ člen $|p_j - j|$ rozdílem $p_j - j$ nebo $j - p_j$ podle toho, který z nich je nezáporný, dostaneme pro každé pořadí součet $2n$ sčítanců

$$1, 1, 2, 2, \ldots, n, n, \tag{36}$$

přičemž právě u n z nich bude znaménko minus. Upravíme-li tento součet na tvar

$$1 + 1 + 2 + 2 + \ldots + n + n + 2z = \\ = n(n + 1) + 2z,$$

kde z je součet zmíněných n záporných sčítanců, vidíme, že je maximální právě když záporné znaménko je u prvních n sčítanců (36) — pokud to však pro nějaké pořadí nastane. Pro pořadí $(n, n - 1, \ldots, 1)$ to tak skutečně je. Snadno zjistíme, že pro lichá n je maximální součet roven $\dfrac{n^2-1}{2}$ a pro sudá n je $\dfrac{n^2}{2}$, což můžeme souhrnně vyjádřit jako $\left[\dfrac{n^2}{2}\right]$.

My však máme určit, pro kolik ze všech $n!$ pořadí příslušný součet tohoto maxima nabývá. Budeme uvažovat zvlášť pro sudá a lichá n.

Je-li $n = 2k$, maximum se nabývá právě pro všechna pořadí, kterým odpovídají součty, v nichž jsou záporná znaménka u sčítanců $1, 1, 2, 2, \ldots, k, k$. Ukážeme, že to jsou právě všechna pořadí, pro která je

$$\begin{aligned} &\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} = \{k+1, k+2, \ldots, 2k\},\\ (37)\qquad &\{p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_{2k}\} = \{1, 2, \ldots, k\}. \end{aligned}$$

Kdyby totiž pro nějaké $r \in \{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ bylo $p_r > k$, dostalo by se ze členu $|p_r - r|$ do součtu buď p_r nebo r se záporným znaménkem a součet by pak nebyl maximální. Aby byl součet maximální, musí tedy platit (37). Pro každé pořadí, které vyhovuje podmínce (37), však součet zřejmě maximální je. Dostáváme tak právě $(k!)^2$ pořadí.

V případě $n = 2k + 1$ je součet maximální, právě když záporná znaménka jsou u sčítanců

$$1, 1, 2, 2, \ldots, k, k, k+1.$$

Analogicky jako v předešlém případě zjistíme, že nutná podmínka pro maximalitu součtu je

$$\{p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots, p_{2k+1}\} \subset \{1, 2, \ldots, k+1\}.$$

Aby byl součet maximální, musí tedy platit

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}\} = \{k+2, k+3, \ldots, 2k+1\} \cup \{v\},$$
(38)
$$\{p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots, p_{2k+1}\} = \{1, 2, \ldots, k+1\} - \{v\},$$
kde $v \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$.

Vyšetříme každou z $k + 1$ disjunktních skupin pořadí, která splňují (38). Nejjednodušší situace je pro $v = k + 1$. Je totiž zřejmé, že pro každé pořadí, pro něž

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}\} = \{k+1, k+2, \ldots, 2k+1\},$$
$$\{p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots, p_{2k+1}\} = \{1, 2, \ldots, k\}$$

a kterých je právě $k!(k+1)!$, je součet maximální.

Dále předpokládejme, že $v < k + 1$. Aby byl součet maximální, musí být $p_{k+1} = v$. Jinak by totiž bylo $v = p_j$ pro některé $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ a z členu $|p_j - j| = |v - j|$ by se do součtu dostalo buď v nebo j s kladným znaménkem, takže by součet nebyl maximální. Nutná podmínka pro maximalitu je v tomto případě tedy

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} = \{k+2, k+3, \ldots, 2k+1\},$$
$$p_{k+1} = v,$$
$$\{p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots, p_{2k+1}\} = \{1, 2, \ldots, k+1\} - \{v\}.$$

Ihned je však vidět, že tato podmínka je pro maximalitu také postačující. Pro každé $v \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tak dostáváme právě $(k!)^2$ pořadí.

Zjistili jsme, že pro liché n je součet maximální právě pro

$$k!(k+1)! + k(k!)^2 = (2k+1)(k!)^2$$

pořadí.

Úloha 25. *Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí*

$$2^{4n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1}.$$

Řešení. Podle vzorců (2), (3) a (6) postupně dostáváme

$$2^{4n-1} = (1+1)^{4n-1} = \sum_{i=0}^{4n-1} \binom{4n-1}{i} = \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{4n-1}{2j} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{4n-1}{2j+1} = \sum_{j=0}^{2n-1} \left[\binom{4n-1}{2j} + \binom{4n-1}{2j+1} \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{4n}{2j+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4(n-1-i)+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{4n}{4j+1} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1.}.$$

Úloha 26. *Řekneme, že systém $\mathcal{S}$ podmnožin nějaké množiny je dokonalý, jestliže pro žádné dvě podmnožiny $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ neplatí $A \subset B$. Jaký je největší možný počet podmnožin tvořících dokonalý systém podmnožin n-prvkové množiny?*

Řešení. Budeme mluvit jen o podmnožinách dané n-prvkové množiny. Pro každé přirozené $k \leq n$ je zřejmě systém všech k-prvkových podmnožin dokonalý. Vzhledem k tomu, že z kombinačních čísel $\binom{n}{k}$ je největší $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ pro sudé n a $\binom{n}{\frac{n+1}{2}} = \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ pro liché n (viz cvič. 2.9), existuje dokonalý systém podmnožin, který se skládá z $\binom{n}{\frac{n}{2}}$, resp. $\binom{n}{\frac{n+1}{2}}$ podmnožin (souhrnně řečeno z $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ podmnožin). Ukážeme, že větší dokonalé systémy neexistují.

Předpokládejme, že $\mathscr{S}$ je dokonalý systém podmnožin a největší jeho podmnožina je $k + 1$-prvková. Vynechme z něho všechny $k + 1$-prvkové podmnožiny (jejich počet označme t) a nahraďme je všemi jejich k-prvkovými podmnožinami (jejich počet označme t'). Dostaneme tak systém $\mathscr{S}'$, o němž se snadno přesvědčíme, že je také dokonalý. Z každé z t podmnožin $k + 1$-prvkových vznikne právě $k + 1$ podmnožin k-prvkových. Každá z těchto k-prvkových podmnožin přitom může vzniknout nejvýše z $n - k$ podmnožin $k + 1$-prvkových. Platí tedy

$$t' \geqq \frac{k+1}{n-k}\, t\,.$$

Vidíme, že pro $k + 1 \geqq \frac{n+1}{2}$ platí $t' \geqq t$ a tedy $|\mathscr{S}'| \geqq |\mathscr{S}|$; pro $k + 1 > \frac{n+1}{2}$ platí dokonce $|\mathscr{S}'| > > |\mathscr{S}|$.

Analogickou úvahu provedeme pro nejmenší podmnožiny. Nechť jsou m — 1-prvkové a je jich s. Nahradíme-li je všemi jejich m-prvkovými nadmnožinami, jejichž počet označíme s', bude platit

$$s' \geqq \frac{n-m+1}{m}\, s\,,$$

neboť z každé $m - 1$-prvkové podmnožiny vznikne právě $n - m + 1$ nadmnožin m-prvkových a každá z nich takto vznikne nejvýš z m podmnožin $n - 1$-prvkových. Pro $m - 1 \leqq \frac{n-1}{2}$ bude pak platit $s' \geqq s$ a pro $m - 1 < \frac{n-1}{2}$ dokonce $s' > s$.

Z nerovností, které jsme právě odvodili, ihned vyplývá: Obsahuje-li dokonalý systém $\mathscr{S}$ p-prvkovou podmnožinu, kde $p > \frac{n+1}{2}$ nebo $p < \frac{n-1}{2}$, existuje dokonalý systém $\mathscr{S}'$, který se skládá z většího počtu podmnožin než $\mathscr{S}$. Je-li tedy n sudé, je největší dokonalý systém určen jednoznačně a je to systém všech $\frac{n}{2}$-prvkových podmnožin. Pro liché n platí, že každý největší dokonalý systém se skládá jen z $\frac{n+1}{2}$-prvkových a $\frac{n-1}{2}$-prvkových podmnožin a žádný z nich neobsahuje více podmnožin než systém všech $\frac{n+1}{2}$-prvkových podmnožin nebo systém všech $\frac{n-1}{2}$-prvkových podmnožin.

Tím je úloha vyřešena. Prozkoumejme však ještě podrobněji případ lichého n a ptejme se, existují-li kromě zmíněných dvou ještě jiné největší dokonalé systémy. Takový systém $\mathscr{S}$ by, jak víme, obsahoval nenulový počet $\frac{n-1}{2}$-prvkových množin, ale ne všechny. K tomu, aby se při popsaném přechodu od

$\frac{n-1}{2}$-prvkových k $\frac{n+1}{2}$-prvkovým množinám jejich počet nezvětšil, je nutné, aby každá nová $\frac{n+1}{2}$-prvková množina vznikla ze všech svých $\frac{n+1}{2}$ podmnožin $\frac{n-1}{2}$-prvkových. Vezměme dvě $\frac{n-1}{2}$-prvkové podmnožiny M_1 a M_2, z nichž jedna leží v systému $\mathcal{S}$ a druhá ne. Označme M průnik obou množin (může být i prázdný). Množinu M_1 můžeme z množiny M_2 dostat tak, že postupně zaměňujeme prvky množiny $M_1 - M$ jeden po druhém za prvky množiny $M_2 - M$. Tak vznikne konečná posloupnost $\frac{n-1}{2}$-prvkových množin, z nichž každé dvě sousední se liší v jediném prvku, tj. jejich sjednocení je $\frac{n+1}{2}$-prvková množina. V této posloupnosti zřejmě existují dvě sousední množiny, z nichž jedna patří do systému $\mathcal{S}$ a druhá ne, takže jejich sjednocení nemůže při dříve zmíněném přechodu vzniknout z druhé množiny. Přechodem se proto počet množin zvětší. Zjistili jsme, že v případě lichého n existují právě dva největší dokonalé systémy.

Jiné řešení. Nechť dokonalý systém podmnožin n-prvkové množiny se skládá z s podmnožin. Počty prvků těchto podmnožin označme $i_1, i_2, \ldots, i_s$. Uvažujme všechna pořadí n prvků, která mají na počátečních i_r místech prvky r-té podmnožiny — těch je $i_r!(n - i_r)!$. Vzhledem k tomu, že jde o dokonalý systém podmnožin, nemá žádné takové pořadí na počátečních místech všechny prvky jiné z podmnožin systému, takže

$$i_1!(n - i_1)! + i_2!(n - i_2)! + \ldots + i_s!(n - i_s)! \leqq n!,$$

neboť v součtu vlevo není žádné pořadí započteno víckrát než jednou. To můžeme přepsat

$$\frac{1}{\binom{n}{i_1}} + \frac{1}{\binom{n}{i_2}} + \ldots + \frac{1}{\binom{n}{i_s}} \leqq 1.$$

Poněvadž ze všech kombinačních čísel $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ je největší $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$, je

$$\frac{s}{\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}} \leqq 1$$

a tedy

$$s \leqq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Úloha 27. *Jsou dána reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taková, že $|x_i| \geqq 1$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a libovolné reálné číslo r. Dokažte, že v otevřeném intervalu $(r, r + 2)$ neleží víc než $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ čísel tvaru $\sum_{i=1}^{n} e_i x_i$, kde pro každé $i \in \{1, 2, \ldots \ldots n\}$ je $e_i = 1$ nebo $e_i = -1$.*

Řešení. Uvažujme dvě n-tice $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ a $(e'_1, e'_2, \ldots, \ldots, e'_n)$ a dva příslušné součty s, s'. Označme M množinu všech $i \in\{1, 2, \dots n\}$, pro která mají čísla e_i, x_i stejná znaménka. Analogicky definujeme množinu indexů M'. Jestliže $M \subset M'$, je

$$s' - s = 2 \sum_{i \in M' - M} |x_i| \geqq 2$$

a tedy v intervalu $(r, r + 2)$ leží nanejvýš jeden ze součtů s, s'. Jsou-li tedy $s_1, s_2, \dots, s_k$ všechny součty uvažovaného tvaru, které padnou do intervalu $(r, r + 2)$, tvoří příslušné množiny $M_1, M_2, \dots, M_k$ dokonalý systém podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$. Podle úlohy 26 je $k \leqq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

Poznamenejme ještě, že např. pro $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ jsou všechny součty, v nichž je právě $\left[\frac{n}{2}\right]$ koeficientů e_i rovno $+1$, stejné, takže hranici $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ dál zmenšit nemůžeme.

Úloha 28. *Dokažte, že pro každé prvočíslo p je číslo*

$$[(2 + \sqrt{5})^p] - 2^{p+1}$$

dělitelné číslem p. (Hranaté závorky označují celou část.)

Řešení. Z binomických rozvojů vidíme, že číslo

$$(\sqrt{5} + 2)^p - (\sqrt{5} - 2)^p$$

je celé, a protože

$$0 < (\sqrt{5} - 2)^p < 1,$$

je

$$[(2+\sqrt{5})^p] = (2+\sqrt{5})^p - (\sqrt{5}-2)^p =$$

$$= 2\left(2^p + \binom{p}{2} 2^{p-2}.5 + \ldots + \binom{p}{p-1} 2.5^{\frac{p-1}{2}}\right).$$

Je tedy

$$[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1} = \binom{p}{2}c_2 + \binom{p}{4}c_4 + \ldots + \binom{p}{p-1}c_{p-1},$$

kde $c_2, c_4, \ldots, c_{p-1}$ jsou přirozená čísla. Teď už stačí jen dokázat pomocnou větu, která je zajímavá a užitečná sama o sobě: *Je-li p prvočíslo a $j < p$ přirozené číslo, je číslo $\binom{p}{j}$ dělitelné číslem p.* Kombinační číslo $\dfrac{p(p-1)\ldots(p-j+1)}{j!}$ je číslo celé a tedy $j!$ dělí číslo $p(p-1)\ldots(p-j+1)$. Protože $p > j$, je prvočíslo p nesoudělné s $j!$ a tedy $j!$ dělí $(p-1)\ldots(p-j+1)$. Důkaz je proveden.

Úloha 29. *Dokažte, že pro libovolná dvě přirozená čísla m, n platí*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{m} + \binom{n}{2m} + \ldots = \frac{2^n}{m}\sum_{k=1}^{m} \cos^n \frac{k\pi}{m} \cos\frac{nk\pi}{m}.$$

(Na levé straně je součet kombinačních čísel $\binom{n}{km}$, kde se sčítá přes k, dokud $km \leq n$.)

Řešení. Dvěma způsoby sečteme

$$A = (1+e_1)^n + \ldots + (1+e_m)^n,$$

kde $e_1, e_2, \ldots, e_m$ jsou komplexní jednotky

$$e_k = \cos \frac{2k\pi}{m} + \mathrm{i} \sin \frac{2k\pi}{m}.$$

Využijeme přitom aparátu komplexních čísel, zejména Moivreovy věty.

I. Podle binomické věty je

$$A = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (e_1^r + \ldots + e_m^r)$$

a dále

$$e_1^r + \ldots + e_m^r = e_1^r + \ldots + e_1^{(m-1)r} + 1.$$

Odtud vidíme, že je-li r dělitelné m, je

$$e_1^r + \ldots + e_m^r = m,$$

a není-li r dělitelno m, je $e_1^r \neq 1$ a

$$e_1^r + \ldots + e_m^r = \frac{1-(e_1^r)^m}{1-e_1^r} = \frac{1-e_1^{rm}}{1-e_1} = 0.$$

Je tedy

$$A = m\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{m} + \binom{n}{2m} + \ldots\right).$$

II. Pro každé přirozené k je

$$(1 + e_k) = 1 + \cos \frac{2k\pi}{m} + \mathrm{i} \sin \frac{2k\pi}{m} =$$

$$= 1 + \left(\cos \frac{k\pi}{m} + \mathrm{i} \sin \frac{k\pi}{m}\right)^2 =$$

$$= \cos^2 \frac{k\pi}{m} + \sin^2 \frac{k\pi}{m} + \cos^2 \frac{k\pi}{m} - \sin^2 \frac{k\pi}{m} +$$

$$+\ 2\,\mathrm{i}\cos\frac{k\pi}{m}\sin\frac{k\pi}{m} = 2\cos\frac{k\pi}{m}\left(\cos\frac{k\pi}{m} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{m}\right)$$

a tedy

$$A = 2^n \sum_{k=1}^{m} \cos^n\frac{k\pi}{m}\left(\cos\frac{nk\pi}{m} + \mathrm{i}\sin\frac{nk\pi}{m}\right).$$

Podle I je A reálné číslo a tedy

$$A = 2^n \sum_{k=1}^{m} \cos^n\frac{k\pi}{m}\cos\frac{nk\pi}{m}\,.$$

Porovnáme-li obě vyjádření pro A, dostaneme dokazovaný vzorec.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1.1 $P(32) = 32.31 \ldots\ldots 2.1$

1.2 a) $V(4, 90) = 90.89.88.87$, b) $K(3, 90) = \dfrac{90.89.88}{3.2.1} =$

$= 117480$

1.3 $P(35) = 35.34. \ldots . 2.1$

1.4 $K(2, 5) = \dfrac{5.4}{2.1} = 10$

1.5 $V(2, 3714) = 3714.3713$

1.6 $K(6, 49) = \dfrac{49.48.47.46.45.44}{6.5.4.3.2.1}$

1.7 $V(4, 7) = 7.6.5.4 = 840$

1.8 $P(8) = 8.7. \ldots .2.1 = 40320$

1.9 $K(3, 7) = \dfrac{7.6.5}{3.2.1} = 35$

1.10 $V(3, 6) = 6.5.4 = 120$

1.11 Čtverečky považujme přirozeným způsobem za souřadnicovou soustavu. Ten z bodů, který není více vpravo než druhý bod, považujeme za počátek, druhý bod má pak souřadnice $[m, n]$. Je-li $n < 0$, neexistuje žádná cesta, je-li $n \geqq 0$, existuje právě $K(n, m + n)$ cest.

1.12 $[0, k]$ a $[1, k]$ pro všechna nezáporná celá k.

1.13 Logaritmováním zjistíme, že $V(35, 50)$ má 53 číslic a $K(35, 50)$ má 13 číslic.

2.1 $7! = 5040, \binom{45}{3} = 14190, \binom{72}{68} = \binom{72}{4} = 1028790$

2.2 $\quad 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$

$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$

$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$

2.3 $n! + (n - 1)!\, n^2 = (n - 1)!\,(n + n^2) = (n - 1)!\, n(n + 1) = (n + 1)!$

2.4 2

2.5 $\binom{11}{4}$

2.6 5

2.7 Druhé

2.8 První je rovno $n!\,[1 + (n + 1)(n + 2)(n + 3)]$, zatímco druhé jen $n!\,[(n + 1) + (n + 1)(n + 2)] = n!\,[(n + 1)(n + 3)]$.

2.9 Pro sudá n: $\binom{n}{n} < \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} < \binom{n}{2} =$

$$= \binom{n}{n-2} < \ldots < \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k+1} < \binom{n}{k},$$

kde $k = \dfrac{n}{2}$,

pro lichá n: $\binom{n}{n} < \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} < \binom{n}{2} =$

$$= \binom{n}{n-2} < \ldots < \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k}, \text{ kde } k = \frac{n+1}{2}.$$

2.10 b) Rozdělte množinu všech q-prvkových kombinací z čísel $1, 2, \ldots, p$ na disjunktní podmnožiny podle největšího čísla, které obsahují.

2.11 c) Rozdělte množinu všech dvojic čísel $1, 2, \ldots, k + 1$ na disjunktní podmnožiny podle většího z čísel, které obsahují.

2.12 b) Ke každé r-prvkové kombinaci z p prvků postupně přidejte všechny $(q - r)$-prvkové kombinace z ostatních

$p - r$ prvků. Dostanete tak všechny q-prvkové kombinace z p prvků, každou $K(r, q)$-krát.

2.13 31

2.14 Jsou-li čísla kladná, je jejich součin dělený číslem $j!$ roven kombinačnímu číslu $\binom{k}{j}$, kde k je největší z nich. Vzhledem ke svému kombinatorickému významu je $\binom{k}{j}$ celé číslo. Je-li některé z čísel rovno 0, je součin také 0 a je dělitelný jakýmkoli přirozeným číslem. Jsou-li čísla záporná, je jejich součin dělený číslem $j!$ - až na znaménko v případě lichého j - opět roven $\binom{k}{j}$, kde k je absolutní hodnota nejmenšího z nich.

3.5 Součet kombinačních čísel $\binom{n}{k}$ je pro lichá k roven součtu prvků $(n - 1)$-tého řádku Pascalova trojúhelníka. Totéž platí pro sudá k.

3.6 a) 2^{n-1}
b) $(-1)^n$

3.7 a) $(a + b)^{m+p} = (a + b)^p (a + b)^m$
b) Množinu všech m-prvkových podmnožin $(m + p)$-prvkové množiny rozdělte podle toho, kolik z určitých p prvků obsahují.

3.8 $(a + b)^p = (b + a)^p$

3.9 $3^6 \binom{10}{4} = 153090$, ano

3.10 $t^{18} - 6\sqrt{3}\, t^{15} u + 45t^{12}u^2 - 60\sqrt{3}\, t^9u^3 + 135t^6u^4 - 54\sqrt{3}\, t^3u^5 + 27u^6$

3.11 $(10 + 1)^{10} - 1$

3.12 1

3.13 Pravá strana jsou první dva členy mnohočlenu na levé straně, ostatní jeho členy jsou nezáporné.

3.14 $2^9 - 1 = 511$

3.15 $2730 = 2.3.5.7.13$, $2^5 = 32$ dělitelů
(Prázdné množině odpovídá dělitel 1.)

3.16 d) Jde o součet počtů prvků všech podmnožin n-prvkové množiny. Jeho dvojnásobek dostaneme tak, že ke každé podmnožině přidáme její doplněk a počty prvků sečteme; vyjde $n\, 2^n$.

3.17 Vepsáním nul vzniklo číslo $(10^{k+1} + 1)^4$. Jeho druhá odmocnina vznikne vepsáním k nul do každé mezery mezi číslicemi čísla 121.

4.2 Uspořádejme prvky k-prvkové množiny. Její podmnožiny si vzájemně jednoznačně odpovídají s uspořádanými k-ticemi znamének + a — tak, že na j-tém místě je + právě když j-tý prvek množiny je obsažen v příslušné podmnožině; je jich $V_0(k, 2) = 2^k$.

4.4 Platí až na to, že pro $k = 0$ není pravá strana vzorce (12) definována.

4.5 $K(j, k) = \binom{k}{j} = \dfrac{k!}{j!\,(k-j)!} = P_0(j, k-j)$. Za situace popsané v řešení 4.2 si j-prvkové kombinace odpovídají s uspořádanými k-ticemi znamének obsahujícími právě j znamének +.

4.6 $P_0(17, 8, 6, 4) = \dfrac{35!}{17!\,8!\,6!\,4!}$

4.7 $V_0(6, 26) = 26^6$

4.8 Pro $n \geqq 4$ si průsečíky úhlopříček vzájemně jednoznačně odpovídají se čtveřicemi vrcholů a je jich tedy $\binom{n}{4}$.

4.9 $4.6.3.23.4.5.2.12 = 794880$

4.10 $V_0(12, 3) = 3^{12} = 531441$

4.12 Přihlížíme-li k pořadí vagonů, $V_0(5, 3) = 3^5 = 243$.

4.13 $K_0(10,4) = \binom{13}{10} = 286$

4.14 $P_0(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5) = \dfrac{35!}{(5!)^7}$

4.15 Pořadí rozdělíme na $\binom{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}{p_1}$ disjunktních skupin podle toho, na kterých místech se vyskytují prvky 1. druhu. Je tedy

$$P_0(p_1, p_2, \ldots, p_k) =$$
$$= \binom{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}{p_1} P_0\,(p_2, \ldots, p_k).$$

Opakováním tohoto postupu dostaneme vzorec ze cvič. 4.16. Ten přejde ve vzorec (13) zkrácením faktoriálů.

4.17 a) $K_0(n, k) = \binom{n + k - 1}{n}$. Řešení $x_1, x_2, \ldots, x_k$ si totiž vzájemně jednoznačně odpovídají s n-prvkovými kombinacemi s opakováním z prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k$, v nichž se pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ prvek m_i opakuje právě x_i-krát.

b) Ekvivalentní rovnice

$$(x_1 - c_1) + (x_2 - c_2) + \ldots + (x_k - c_k) =$$
$$= n - c_1 - c_2 - \ldots - c_k$$

má v daném oboru právě tolik řešení jako rovnice

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n - c_1 - c_2 - \ldots - c_k$$

v oboru nezáporných celých čísel, totiž

$\binom{n + k - c_1 - c_2 - \ldots - c_k - 1}{k - 1}$ v případě $c_1 + c_2 + \ldots + c_k \leq n$ a žádné v případě $c_1 + c_2 + \ldots + c_k > n$.

c) Právě tolik jako rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = n$$

v oboru celých nezáporných čísel, tedy podle a) $\binom{n+k}{n}$.

4.18 Věta se dokazuje analogicky k důkazu binomické věty, jejímž je zobecněním: Roznásobíme-li nm členů $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \ldots (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$, dostaneme sčítanec $a_1^{k_1}a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$ tolikrát, kolik je pořadí s opakováním k_1 prvků a_1, k_2 prvků $a_2, \ldots, k_m$ prvků a_m, totiž $\dfrac{n!}{k_1!\,k_2! \ldots k_m!}$ -krát.

Vpravo je $\binom{n+m-1}{m}$ sčítanců.

4.19 a) Jde o součet všech počtů pořadí s opakováním k_1 prvků 1. druhu, k_2 prvků 2. druhu, $\ldots$, k_m prvků m-tého druhu, čili o počet všech $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$-prvkových variací s opakováním z m prvků.

b) Dosaďte do multinomické věty $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 1$.

4.20 Vzhledem ke kombinatorickému významu je

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!}{a_1!a_2! \ldots a_n!} \geq 1.$$

4.21 j-prvkové variace s opakováním z prvků množiny $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ jsou právě prvky kartézského součinu $\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{j\text{-krát}}$.

5.1 $K_0(7, 3)\, K_0(5, 3) = \binom{9}{2}\binom{7}{2} = 756$

5.2 $P(5)\, K(2, 32)\, K(3, 32) = 5!\binom{32}{2}\binom{32}{3}$

5.3 $P_0(8, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)\, K(6, 38) =$

$$= \frac{39!}{8!5!(4!)^2\,(3!)^3\,(2!)^2}\binom{38}{6}$$

5.4 $P(3) \cdot P(5) + K(2, 4)\, P(3)\, P(5) = 3!\, 5! + \binom{4}{2} 3!\, 5! = 5040$

5.5 a) nezmění se,
b) bude poloviční.

5.6 $\dfrac{P(k)}{P(3)} = V(k-3, k) = \dfrac{k!}{3!}$ (k je počet závodníků)

5.7 Metodou matematické indukce.

5.8 Označme s_n počet vlajek, které se nezmění obrácením. Hledaný počet bude $s_n + \frac{1}{2}(v_n - s_n) = \frac{1}{2}(v_n + s_n)$. Pro sudá n je $s_n = v_{\frac{n}{2}-1}$ a pro lichá n je $s = v_{\frac{n-1}{2}} +$
$+ v_{\frac{n-1}{2}-1} = v_{\frac{n+1}{2}}$.

5.9 V prvním případě je každá šestice počítána čtyřikrát a ve druhém případě třikrát. Výsledek má tedy být

$$8^4\left[\frac{1}{4}\binom{4}{2}\binom{7}{1}^2 + \frac{1}{3}\binom{4}{1}\binom{7}{2}\right] = 415\,744$$

5.10 $K(2, 4)\, K(4, 7) + K(3, 4)\, K(3, 7) + K(4, 4)\, K(2, 7) =$
$= \binom{4}{2}\binom{7}{4} + \binom{4}{3}\binom{7}{3} + \binom{4}{4}\binom{7}{2} = 371$

5.11 Není. Vybereme-li nejprve Petru a Pavlu a pak k nim přidáme Janu, Karla, Frantu a Vaška, dostaneme totéž, jako když nejprve vybereme Pavlu a Janu a pak k nim přidáme Petru a ty tři chlapce.

5.12 $\dfrac{P(20 + 4)}{P(4)} = \dfrac{24!}{4!}$

5.13 $K(4, 10) - K(2, 8) = \binom{10}{4} - \binom{8}{2} = 182.$

5.14 $P_0(2, 1, 1, 1, 1, 1)\, P_0(2, 2)\, K(4, 8) = \dfrac{7!}{2!}\dfrac{4!}{(2!)^2}\binom{8}{4}$

5.15 $\dfrac{P(8)^2}{2^8 P(4)} + V(2, 8)^2 \dfrac{P(6)^2}{2^6\, P(3)} = \dfrac{17(8!)^2}{2^8\, 4!}$

5.16 V úvahu přicházejí případy *FaTaFaTaFaTaF* nebo *TaFaTaFaTaFaT*, kde *a* označuje Angličana, *F* blok Francouzů a *T* blok Turků. Hledaný počet bude

$$P(6)P(7)\ P(10)\ [K(3,6)\ K(2,9) + K(2,6)\ K(3,9)] =$$

$$6!\ 7!\ 10!\left[\binom{6}{3}\binom{9}{2} + \binom{6}{2}\binom{9}{3}\right] = 6!\ 7!\ 10!\,.\,1980$$

5.17 $K(1, 3)\ K(11, 33)\ V_0(22, 2) - 2P_0(11, 11, 11) =$

$$= \binom{3}{1}\binom{33}{11} 2^{22} - 2\,.\,\frac{33!}{(11!)^3}$$

Jiné řešení:

$$P(3) \sum_{u=0}^{10} P_0(11, u, 22 - u) + P_0(11, 11, 11) =$$

$$= 6 \sum_{u=0}^{10} \frac{33!}{11!\ u!\ (22 - u)!}\,.$$

5.18 1568

5.19 $(4!)^2$

5.20 Číslic neobsahujících pětku; je jich $9^6 = 531\,441$.

5.21 Pro n schodů označme počet způsobů s_n. Zřejmě $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 4$. Pro $n > 4$ platí rekurentní vzorec

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3}.$$

Odtud po několika krocích dostaneme

$$s_{10} = 274.$$

5.22 a) Je jich právě tolik, jako je všech řádků složených z j znamének + a $k - j$ znamének —, přičemž žádná dvě + nejsou vedle sebe. Podle úlohy 6 je jich $\binom{k - j + 1}{j}$ pro $2j \leqq k + 1$, 0 jinak.

b) Podobně jako v a) převedeme problém na úlohu 7.

5.23 Pro $n \geqq k$ právě $\binom{n-1}{k-1}$ řešení, jinak žádné.

a) Řešení si vzájemně jednoznačně odpovídají s n-prvkovými kombinacemi s opakováním z k prvků, v nichž se každý prvek opakuje alespoň jednou. Ty si vzájemně jednoznačně odpovídají se všemi pořadími s opakováním n teček a $k-1$ čárek takovými, že žádné dvě čárky nejsou vedle sebe. Dále viz úlohu 6.

b) Ve cvič. 4.17b) položíme $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 1$.

5.24 Je-li $k = 1$, žádné takové řešení neexistuje. Pro $k = 2$ existuje jediné takové řešení. Dále buď $k > 2$. Řešení, pro něž $x_1 < x_k$, je stejný počet jako těch, pro něž $x_1 > x_k$. Všech řešení je právě $\binom{2n+k-1}{k-1}$ (viz cvič. 4.17).

Určíme, pro kolik z nich je $x_1 = x_k$. Uvažujme rovnici

$$x_2 + \ldots + x_{k-1} = 2(n-x)$$

o neznámých $x_2, \ldots, x_{k-1}$. To má pro každé celé $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$ právě

$$\binom{2(n-x)+k-3}{k-3}$$

řešení. Počet všech řešení, pro něž $x_1 = x_k$, je tedy

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{2(n-x)+k-3}{k-3}.$$

Hledaný počet je pak

$$\frac{1}{2}\left[\binom{2n+k-1}{k-1} - \sum_{x=0}^{n} \binom{2(n-x)+k-3}{k-3.}\right].$$

5.25 a) $\binom{m+1}{2}\binom{n+1}{2}$

b) $\displaystyle\sum_{r=1}^{\min(m,n)} (m-r+1)(n-r+1)$

5.26 $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$

5.27 Pokud $a + 1 < b$, budeme psát $a \ll b$.
Jestliže

$$1 \leqq a_1 \ll a_2 \ll \ldots \ll a_6 \leqq 49,$$

potom

$$1 \leqq a_1 < a_2 - 1 < \ldots < a_6 - 5 \leqq 44.$$

Obráceně: Jestliže

$$1 \leqq b_1 < b_2 < \ldots < b_6 \leqq 44,$$

je

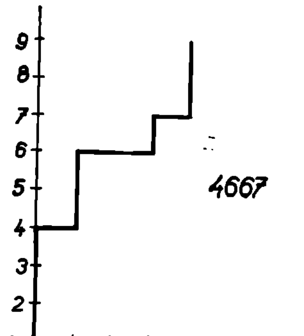
$$1 \leqq b_1 \ll b_2 + 1 \ll \ldots \ll b_6 + 5 \leqq 49.$$

Šestic, které vyhovují podmínce, je tedy právě tolik jako všech šestic z $\{1, 2, \ldots, 44\}$, totiž $\binom{44}{6}$.

5.28 Je jich právě tolik jako všech desetiprvkových kombinací s opakováním z n prvků (nulu ale nepočítáme), tedy

$\binom{n+9}{9} - 1$.

Také je to vidět z obrázku (srovnej cvič. 1.11).



6.1 $|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k| = |M_1| + |M_2| + \ldots + |M_k|$, všechny ostatní členy vypadnou.

6.2 Pro $k = 1$ je tvrzení triviální. Pro $k = 2$ princip platí. Buď $n > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro n množin vzorec (15) platí. Dokážeme, že pak platí i pro $n + 1$ množin:

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n \cup M_{n+1}| = |(M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n) \cup M_{n+1}| = |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n| + |M_{n+1}| - |(M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n) \cap M_{n+1}| = |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n| + |M_{n+1}| - |(M_1 \cap M_{n+1}) \cup (M_2 \cap M_{n+1}) \cup \ldots \cup (M_n \cap M_{n+1})|$$

Podle indukčního předpokladu odtud dostaneme

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_{n+1}| = \Sigma(-1)^{r+1} |M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}| + |M_{n+1}| - \Sigma(-1)^{r+1}|(M_{j_1} \cap M_{n+1}) \cap (M_{j_2} \cap M_{n+1}) \cap \ldots \cap (M_{j_r} \cap M_{n+1})|,$$

kde se sčítá přes všechny $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Vzhledem k tomu, že

$$(M_{j_1} \cap M_{n+1}) \cap (M_{j_2} \cap M_{n+1}) \cap \ldots \cap (M_{j_r} \cap M_{n+1}) = M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r} \cap M_{n+1},$$

dostáváme

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_{n+1}| = \Sigma(-1)^{r+1} |M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}|,$$

kde se sčítá přes všechny $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n + 1\}$, což jsme měli dokázat.

6.3 Buď $m \in M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$. Všechny z uvažovaných množin, do nichž prvek m patří, buďte $M_{q_1}, M_{q_2}, \ldots, M_{q_v}$. Na pravé straně je prvek m započten právě v těch sčítancích, které odpovídají podmnožinám $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ majícím neprázdný průnik s množinou $\{q_1, q_2, \ldots, q_v\}$. Každá taková podmnožina je tedy sjednocením neprázdné podmnožiny $P \subset \{q_1, q_2, \ldots, q_v\}$ a podmnožiny $P' \subset \{1, 2, \ldots, k\} - \{q_1, q_2, \ldots, q_v\}$, a obráceně. Prvek m je tedy na pravé straně započten právě v $(2^v - 1)\, 2^{k-v}$ sčítancích, vždy se znaménkem $(-1)^{|P|+|P'|+1}$. Rozdělíme-li množiny P, P' podle počtu prvků, vidíme, že příspěvek prvku m k pravé straně tedy je

$$p(m) = \Sigma(-1)^{i+j+1} \binom{v}{i} \binom{k-v}{j},$$

kde se sčítá přes všechny uspořádané dvojice (i, j) takové, že $i \in \{1, 2, \ldots, v\}$ a $j \in \{0, 1, \ldots, k-v\}$. To přepíšeme a upravíme:

$$p(m) = \sum_{j=0}^{k-v} (-1)^j \binom{k-v}{j} \sum_{i=1}^{v} (-1)^{i+1} \binom{v}{i} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-v} (-1)^j \binom{k-v}{j}.$$

Poslední sčítanec je roven nule s výjimkou $v = k$ (tj. $m \in \in M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k$), kdy je roven 1. Tím je důkaz proveden.

Jiné řešení: Všechny sčítance na pravé straně rozvineme podle principu inkluze a exkluze. Analogickými úvahami jako předtím zjistíme, že se pak všechny členy tvaru $|M_{q_1} \cap M_{q_2} \cap \ldots \cap M_{q_v}|$ vyruší s výjimkou členu $|M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k|$.

Ještě jiné řešení dostaneme, postupujeme-li matematickou indukcí analogicky ke cvič. 6.2.

6.4 $2^n \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \dfrac{(2n-r)!}{2^{n-r}}$

6.5 V úloze 10 bude $k = 4$, $j = 10$, $c_1 = 3$, $c_2 = 1$, $c_3 = 10$, $c_4 = 19$, vyjde

$$\binom{13}{3} - \binom{9}{3} - \binom{11}{3} + \binom{7}{3} = 72\,.$$

6.7 Plyne ze vzorce (17) pro

a) $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 1$.

b) $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

6.8 a) Právě tolik, kolik je n-prvkových kombinací s opakováním z k prvků, přičemž se žádný prvek neopakuje více než devětkrát. Podle vzorce (17) je hledaný počet

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{n - 10r + k - 1}{k - 1},$$

kde $m = \min\left(k, \left[\frac{n}{10}\right]\right)$.

b) Právě tolik, kolik řešení má rovnice

$$(x_1 - a_1) + (x_2 - a_2) + \ldots + (x_k - a_k) =$$
$$= n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$$

v daném oboru. Stejný počet řešení má rovnice

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$$

v oboru nezáporných celých čísel takových, že

$$y_1 \leqq b_1 - a_1,\ y_2 \leqq b_2 - a_2,\ \ldots,\ y_k \leqq b_k - a_k.$$

Těch je právě tolik jako všech $\left(n - \sum_{i=1}^{k} a_i\right)$-prvkových kombinací s opakováním z k prvků, přičemž pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ se i-tý prvek opakuje nejvýše $(b_i - a_i)$-krát.

Podle vzorce (17) je jich

$$\Sigma(-1)^{|M|} \binom{n - \sum\limits_{i \in M'} a_i - \sum\limits_{i \in M} b_i - |M| + k - 1}{k - 1},$$

kde se sčítá přes všechny $M \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že

$$|M| + \sum_{i \in M'} a_i + \sum_{i \in M} b_i \leqq n$$

(symbolem M' jsme označili množinu $\{1, 2, \ldots, k\} - M$).

6.9 Označme $M_1, M_2, \ldots, M_{11}$ množiny žáků v kroužcích. Podle podmínek v úloze je $|M_1 \cup \ldots \cup M_{11}| = 54$, $|M_i| \geqq 15$, $|M_i \cap M_j \cap M_k| \geqq 1$, $|M_i \cap M_j \cap M_k \cap M_l| = 0$. Podle principu inkluze a exkluze je $|M_1 \cup \cup \ldots \cup M_{11}| = \Sigma|M_i| - \Sigma|M_i \cap M_j| + \Sigma|M_i \cap M_j \cap M_k|$ (ostatní členy jsou nulové). Je tedy

$$54 \geqq 11 . 15 - \Sigma|M_i \cap M_j| + \binom{11}{3} . 1$$

a odtud

$$\Sigma|M_i \cap M_j| \geqq 276 .$$

Vlevo je $\binom{11}{2} = 55$ sčítanců a aspoň jeden z nich tedy musí být větší než 5.

7.1 Ze vzorce (19) je patrno, že se obě strany liší tím, že na levé straně jsou činitele $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ ve druhé mocnině, právě když se prvočíslo p vyskytuje v rozkladech obou čísel m, n na prvočinitele. Protože uvedený činitel je menší než 1, platí dokazovaná nerovnost. Rovnost nastane, právě když jsou čísla m, n nesoudělná.

7.2 Plyne ze vzorce (19).

Je-li $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_h^{k_h}$, můžeme ho totiž přepsat na tvar

$$\varphi(n) = p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} \ldots p_h^{k_h-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_h - 1).$$

Je-li $n > 2$, vyskytuje se v rozkladu čísla n lichý prvočinitel a činitel $p_i - 1$ je sudý.

Jiné řešení: Je-li k přirozené číslo, $k < n$ a čísla k, n jsou nesoudělná, je $0 < n - k < n$ a čísla $n - k$, k jsou také nesoudělná a přitom různá. Z toho vidíme, že počet přirozených čísel menších než n a zároveň nesoudělných s n je sudý.

7.3 Číslo 1 je mocninou jen sebe sama a tak je můžeme vynechat. Označme M_i množinu všech i-tých mocnin mezi čísly 2, 3, ..., 100 000. Vzhledem k tomu, že $2^{16} < 100\,000 < 2^{17}$, jsou od M_{17} počínaje množiny M_i prázdné. Je-li přirozené číslo mocninou jiného přirozeného čísla, je též prvočíselnou mocninou nějakého přirozeného čísla. Úloha se tedy redukuje na spočtení $|M_2 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7 \cup M_{11} \cup M_{13}|$. Ještě si uvědomme, že pro navzájem různá prvočísla $p, q, \ldots, r$ platí $M_p \cap M_q \cap \ldots \cap M_r = M_{pq\ldots r}$. Zkusmo nebo pomocí logaritmických tabulek zjistíme

$|M_2| = 315$, $|M_3| = 45$, $|M_5| = 9$, $|M_7| = 4$, $|M_{11}| = 1$, $|M_{13}| = 1$,

$|M_2 \cap M_3| = |M_6| = 5$, $|M_2 \cap M_5| = |M_{10}| = 2$,

$|M_2 \cap M_7| = |M_{14}| = 1$, $|M_3 \cap M_5| = |M_{15}| = 1$,

a ostatním kombinacím prvočísel odpovídají prázdné množiny. Podle principu inkluze a exkluze je hledaný počet

$315 + 45 + 9 + 4 + 1 + 1 - 5 - 2 - 1 - 1 = 366.$

7.4 a) Je-li $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ rozklad na prvočinitele, jsou nenulové právě sčítance $\mu(p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r})$, kde $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ a $\mu(1) = 1$. Pro každé $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$ dostáváme $\binom{k}{r}$ sčítanců rovných $(-1)^r$, celkem tedy $1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \ldots + (-1)^k \binom{k}{k} = 0.$

b) Jiný tvar vzorce (18).

c) Jiný tvar vzorce (20).

d) Analogicky jako u vyšetřování funkce $\pi(n)$ dostaneme

$$n - 1 = \Sigma\, (-1)^{r+1} \left[\frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}} \right],$$

kde se sčítá přes všechny $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots$ $\ldots, \pi(n)\}$. To je jiná forma dokazovaného vztahu.

8.1 a) $p_2 = s_2 - \binom{3}{2} s_3 + \binom{4}{2} s_4$, kde $s_2 = 7 + 18 + 3 +$ $+ 9 + 5 = 42$, $s_3 = 5 + 2 = 7$ a $s_4 = 0$, tedy $p_2 = 21$

b) $a_2 = s_2 - \binom{2}{1} s_3 + \binom{3}{2} s_4 = 28$

8.2 a) M_i buďte televizory s i-tou vadou. Známe $a_1 = 10$, $s_1 = 7 + 5 + 4 = 16$ a $p_2 = 1 + 1 + 2 = 4$. Hledáme $p_3 (= a_3 = s_3)$. Z rovnic

$$a_1 = s_1 - s_2 + s_3,$$
$$p_2 = s_2 - 3s_3$$

dostaneme sečtením

$$s_3 = \frac{1}{2}(s_1 - a_1 - p_2) = 1.$$

b) M_i buďte televizory s poškozenou skříní a i-tou další vadou (pro $i \in \{1, 2\}$). Známe $p_1 = 1 + 2 = 3$ a z a) $p_2 = 1$. Odtud $a_1 = p_1 + p_2 = 4$. Každý ze čtyř televizorů s poškozenou skříní měl tedy ještě nějakou další vadu, takže pouze poškozenou skříň neměl žádný televizor.

8.3 Podle (24), (22), (3) a (2) dostáváme

$$s_j = p_j + \binom{j+1}{j} p_{j+1} + \ldots + \binom{k}{j} p_k = (a_j - a_{j+1}) +$$
$$+ \binom{j+1}{j}(a_{j+1} - a_{j+2}) + \ldots + \binom{k}{j} a_k = a_j +$$
$$+ \left[\binom{j+1}{j} - 1\right] a_{j+1} + \left[\binom{j+2}{j} - \binom{j+1}{j}\right] a_{j+2} +$$
$$+ \ldots + \left[\binom{k}{j} - \binom{k-1}{j}\right] a_k = a_j + \binom{j}{j-1} a_{j+1} +$$

$$+\binom{j+1}{j-1}a_{j+2}+\ldots+\binom{k-1}{j-1}a_k = a_j + \binom{j}{1}a_{j+1}+$$
$$+\binom{j+1}{2}a_{j+2}+\ldots+\binom{k-1}{k-j}a_k\,.$$

8.4 Označme M_i množinu tlumočníků, kteří znají i-tý jazyk ($i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$). Známe $s_1 = 36 + 32 + 31 + 30 + 28 + 26 = 183$, $a_2 = 53$, $a_3 = 24$, $a_4 = 9$, $a_5 = 3$ a $a_6 = 1$, hledáme a_1. Podle cvič. 8.3 je

$$a_1 = s_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6 = 93.$$

8.5 Rovnají se, pokud $f(m) = 1$ pro všechna $m \in M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$.

8.6 Obsah (objem) množiny M budeme nyní raději značit $o(M)$. Pro každou $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ označme $M_{j_1 j_2 \ldots j_r}$ množinu všech bodů roviny (prostoru), které leží právě ve všech množinách $M_{j_1}, M_{j_2}, \ldots, M_{j_r}$ (a ne v ostatních). (Pro koláčovité množiny M_i, jaké se ve škole obvykle pro názornost malují, odpovídají množiny $M_{j_1 j_2 \ldots j_r}$ jednotlivým políčkům, na něž se rozpadá obrázek). V těch, které jsou neprázdné, zvolme bod $B_{j_1 j_2 \ldots j_r}$ a položme $f(B_{j_1 j_2 \ldots j_r}) = o(M_{j_1 j_2 \ldots j_r})$. Názorně: do bodů $B\ldots$ je soustředěn obsah (objem) množiny $M\ldots$ podobně jako ve fyzice hmota tělesa do hmotného bodu. Pro každou množinu $T \subset M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ definujme jako T' množinu všech $B\ldots \in T$ a položme $f(T') = \sum_{B \in T'} f(B)$.

(Všimněte si, že množiny T' jsou konečné a že pro množiny M_i, jejich průniky a sjednocení platí $f(M') = o(M)$.) Vzorce platí podle cvič. 8.5.

Poznamenejme ještě, že místo s body $B\ldots$ jsme mohli pracovat přímo s množinami $M\ldots$ a chápat je jako prvky množin T'.

8.7 a) První matice je matice soustavy lineárních rovnic vyjadřujících čísla s_j pomocí čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Druhá matice je maticí soustavy lineárních rovnic vyjadřujících čísla a_j pomocí čísel $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Obě matice jsou proto inverzní.

b) Skalární součin p-tého řádku první matice a q-tého sloupce druhé matice je zřejmě pro $p > q$ roven 0 a pro $p = q$ roven 1. Pro $p < q$ je roven

$$\sum_{s=p}^{q} (-1)^{q+s} \binom{s-1}{p-1} \binom{q-1}{s-1} =$$

$$= \sum_{s=p}^{q} (-1)^{q+s} \binom{q-1}{p-1} \binom{q-s}{s-p} =$$

$$= \binom{q-1}{p-1} \sum_{s=p}^{q} (-1)^{q+s} \binom{q+s}{s-p} = 0.$$

9.1 d_{26}

9.2 $360!\, d_{360}$

9.3 $2n!\, d_n$

9.4 $z! \binom{k}{z} d_z$ pro $k \geqq z$

9.5 $n!\, d_n^{n-1}$

9.6 Užijte rekurentního vzorce z 2. řešení úlohy 11.

9.7 Vzorec plyne z (28) i z odvozených rekurentních vzorců, z nichž je pro numerický výpočet nejvýhodnější.

9.8 $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (2n-j)!$

9.9 Rozdělme uvažovaná pořadí na disjunktní skupiny podle toho, kde v nich jsou prvky m_1, m_2. Jsou-li na 2. a 1. místě, dostáváme d_{k-2} pořadí, jsou-li na 2. a 3. místě, dostáváme podle principu inkluze a exkluze

$$\sum_{j=0}^{k-3} (-1)^j \binom{k-3}{j} (k-2-j)!$$

pořadí, a pro každou z dalších $2(k-3)$ možností opět podle principu inkluze a exkluze

$$\sum_{j=0}^{k-4} (-1)^j \binom{k-4}{j} (k-2-j)!$$

pořadí.

Celkem

$$\sum_{j=0}^{k-4} (-1)^j \left[\binom{k-2}{j} + \binom{k-3}{j} + \right.$$

$$\left. + 2(k-3)\binom{k-4}{j}\right] (k-2-j)! + (-1)^{k-3} (k-2)$$

pořadí.

9.10 Je-li knížek n, c_n způsoby.

9.11 Plyne to srovnáním výsledků úloh 11 a 12. Pokuste se o kombinatorické vysvětlení.

9.13 $z(k, p)$

9.14 a) Na obou stranách je $z(p, p)$.

b) $z(p, p + 1) = 0$.

9.15 Použijte vzorce (30).

9.16 Označme p, q počty prvků množin P, Q.

a) q^p

b) $\dfrac{q!}{(q-p)!}$ pro $p \leq q$

c) $z(p, q)$

d) $p!$ pro $p = q$

e) $(q + 1)^p - 1$

f) $$\binom{p}{1} \frac{q!}{(q-1)!} + \binom{p}{2} \frac{q!}{(q-2)!} + \ldots +$$

$$+ \binom{p}{m} \frac{q!}{(q-m)!}, \text{ kde } m = \min(p, q)$$

g) $\binom{p}{q}z(q, q) + \binom{p}{q+1}z(q+1, q) + \ldots +$

$+ \binom{p}{p} z(p, q)$ pro $p \geqq q$

h) $\frac{p!}{(p-q)!}$ pro $p \geqq q$

9.17 Vyjde k^j.

9.18 $\binom{30}{15} - \binom{30}{16}$

9.19 V případě $u \leqq v$ $\quad u!\,v!\left[\binom{u+v}{u} - \binom{u+v}{u+1}\right]$

způsoby.

9.21 Pro $n = 1$ je jen jedna mezera mezi dvěma židlemi.

OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

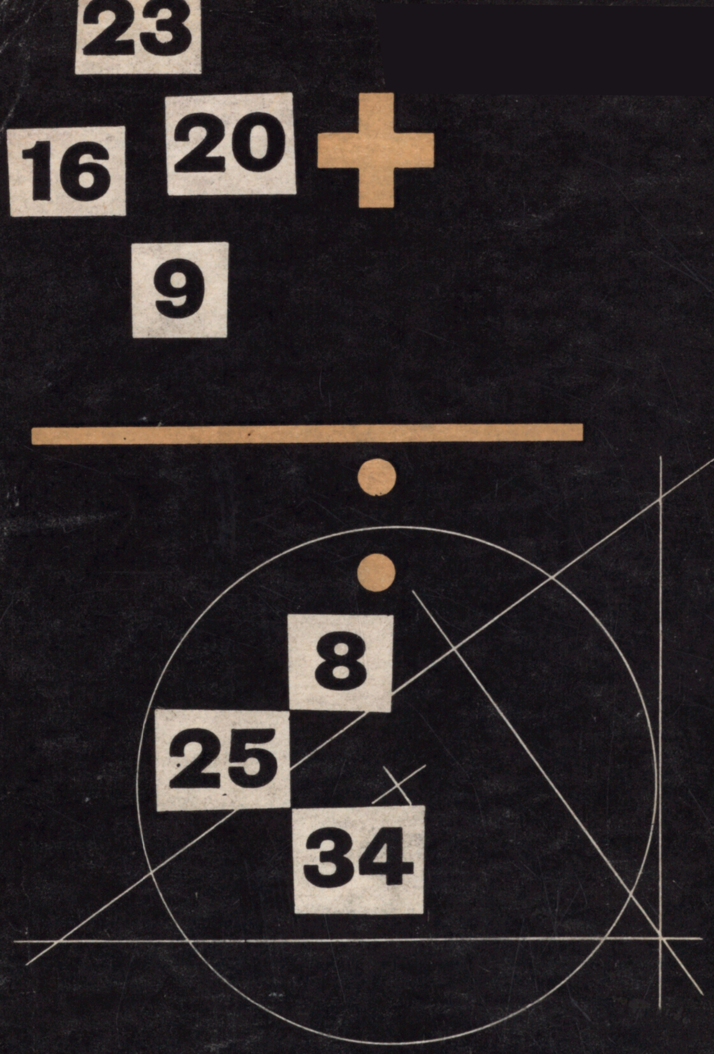
ANTONÍN VRBA

KOMBINATORIKA

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
K tisku připravil Vladimír Doležal
Odpovědná redaktorka Libuše Rousková
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 4178
Edice Škola mladých matematiků,
svazek 45
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
5,67 AA, 6,13 VA. 136 stran
Náklad 6500 výtisků. 1. vydání
Praha 1980. 508/21/82.5

23-034-80 03/2 Cena brož. výt. Kčs 8,—

[redacted]



23-034-80
03/2
Cena brož.
Kčs 8,—