Zajímavé dvojice trojúhelníků

ZAJÍMAVÉ DVOJICE TROJÚHELNÍKŮ

47

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ARNOŠT NIEDERLE

Zajímavé dvojice trojúhelníků

EPIZODA Z PLANIMETRIE

PRAHA 1980
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.,
a Jiří Šmelhaus

ÚVOD

Nedílnou součástí řešení matematických úloh, v jejichž zadání se vyskytují parametry, je diskuse úlohy. Podstata diskuse úlohy je v tom, že vymezíme obor pravdivosti příslušných výroků. S tím se setkáváme u úloh z různých oborů matematiky. V planimetrii jde především o konstrukční úlohy zadané obecně, tedy s parametry, kde rozhodujeme, má-li úloha vůbec řešení, kolik řešení má a jaké jsou vlastnosti existujících řešení. Jde-li o úlohy důkazové, zpravidla od diskuse upouštíme, protože se na první pohled zdá, že po provedení důkazu už není o čem diskutovat. Chci v této práci ukázat, že naopak úvahy, které navážeme na provedený důkaz, mohou být někdy velmi zajímavé a nikoliv bezúčelné.

Za příklad poslouží tato známá úloha:

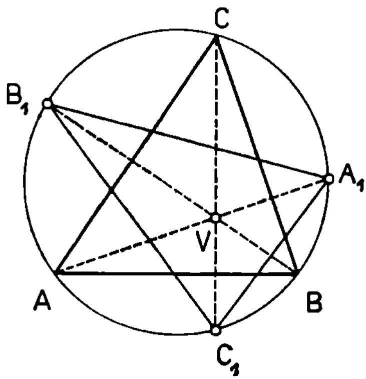
Je dán trojúhelník ABC a kružnice jemu opsaná. Dokažte, že body souměrně sdružené s průsečíkem výšek $\triangle ABC$ podle jeho stran leží na kružnici opsané.

Na připojeném obrázku jsou body souměrně sdružené s průsečíkem výšek $\triangle ABC$ podle jeho stran označeny po řadě A_1, B_1, C_1. Vlastní důkaz úlohy zde provádět nebudeme, ještě se později k němu vrátíme. Zatím pouze naznačíme okruh úvah, které mohou po provedení důkazu následovat:

Existují mezi trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ nebo mezi jejich prvky nějaké pozoruhodné metrické či polohové vztahy a jaké?

Jak se změní tyto vztahy, půjde-li místo průsečíku výšek například o střed kružnice $\triangle ABC$ opsané či vepsané?

Co když půjde o libovolný bod ležící uvnitř nebo vně trojúhelníku ABC?



Obr. 1

Z takových a podobných úvah vznikla práce, kterou tu předkládám. Sleduji hned dva cíle. Předně chci poukázat na některé vztahy, které se mi zdají být natolik zajímavé, že stojí za pozornost. Za druhé nabízím příležitost k vydatnému výcviku v přesném rýsování těm, kdož o to projeví zájem. Tomuto druhému cíli slouží cvičení uvedená za každou kapitolou.

Tím je současně dán i dvojí možný přístup čtenáře k této práci a ovšem i rozsah nezbytných znalostí nutných k úspěšnému teoretickému či praktickému využití. V prvním případě vystačí čtenář dobře se znalostí planimetrie na úrovni střední školy. Jedinou výjimkou, i když podstatnou, je první kapitola, která předpokládá znalost nejzákladnějších pojmů z projektivní geometrie. Jde tu o větu Desarguesovu o trojúhelnících, o harmonické čtveřice bodů a přímek, o vlastnosti sdružených pólů a polár vzhledem ke kružnici. Postačující poučení o těchto pojmech a vztazích podává „Dodatek" za textem práce.

Půjde-li čtenáři jenom o získání námětů vhodných k vydatnému výcviku v přesném rýsování, může první kapitolu i dodatek přijmout jako dané axióma a zaměřit pozornost převážně na kapitolu druhou a třetí. V tom případě vystačí při studiu se znalostmi planimetrie na úrovni základní školy.

K vnější stránce textu chci ještě připomenout dvě úmyslné odchylky od běžně užívané či doporučené symboliky. Rovnost dvou úhlů zapisuji všude prostě

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle KLM \quad \text{nebo} \quad \sphericalangle BAC = \alpha,$$

místo doporučeného způsobu

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM|.$$

To proto, že se takové rovnosti vyskytují v textu velmi často a přes jednoduchost zápisu nemůže nikde dojít k omylu. Neméně často se v textu mluví o binární relaci $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$, které na rozdíl od doporučených norem zapisuji malým znakem. Důvod k tomu pozná čtenář záhy sám, protože binární relace takto označené jsou vždy vázány na existenci daných bodů — v této souvislosti pojmenovaných póly — které je ovšem nutno psát velkými znaky. Tak vzniká spojení „relace $\boldsymbol{p}$ podle P" nebo „relace $\boldsymbol{q}$ podle Q" a také relace„ $\boldsymbol{p}$ podle S" a podobně.

Z obdobných důvodů používám v textu původních termínů „kružnice trojúhelníku uvnitř a vně vepsaná" místo „kružnice vepsaná a připsaná", jak doporučuje nová norma (Názvy a značky školské matematiky — SPN 1977).

A. VYMEZENÍ ZÁKLADNÍCH POJMŮ A VZTAHŮ

Předmětem našich úvah budou útvary v dvojrozměrném prostoru představovaném rovinou π_2. Tuto rovinu budeme nadále pokládat za základní množinu bodů. V ní zvolme kružnici, nejlépe jednotkovou, $k = (O; 1)$. Tím jsme základní množinu bodů rozložili na tři navzájem disjunktní podmnožiny $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}'$ a $\boldsymbol{K}''$, kde $\boldsymbol{K}$ je množina všech bodů na zvolené kružnici, $\boldsymbol{K}'$ množina všech bodů náležejících do vnitřní oblasti a $\boldsymbol{K}''$ množina všech bodů náležejících do vnější oblasti kružnice k.

Uvažme nyní, že kterékoliv tři libovolně zvolené a navzájem různé prvky množiny $\boldsymbol{K}$, například body X, Y a Z, jsou vrcholy trojúhelníku, protože žádné tři navzájem různé body na kružnici neleží v přímce. Označme množinu všech takto vytvořených trojúhelníků $\boldsymbol{M}_T$.

V množině $\boldsymbol{M}_T$, která má zřejmě nekonečně mnoho prvků, definujme binární relaci $\boldsymbol{p} \subset (\boldsymbol{M}_T \times \boldsymbol{M}_T)$ takto:

Definice 1. Dvojice navzájem různých trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ je *prvkem relace* $\boldsymbol{p}$ podle pólu P, když o jejich vrcholech platí současně:

1. $\{A, B, C\} \subset \boldsymbol{K} \wedge \{A_1, B_1, C_1\} \subset \boldsymbol{K}$;
2. přímky AA_1, BB_1, CC_1 procházejí týmž bodem $P \in \boldsymbol{K}'$.

Úmluva. Vztah uvedený v definici 1 budeme zapisovat takto:

$$\triangle ABC \, \boldsymbol{p} \, \triangle A_1B_1C_1 \text{ podle } P, \text{ nebo}$$
$$[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } P,$$

přičemž doložku „podle P“ vynecháme, nebude-li nebezpečí omylu. Je totiž možné, že příslušný pól nebude označen P, ale například S. Potom půjde o relaci $\boldsymbol{p}$ podle S.

Z definice přímo vyplývají některé vlastnosti relace $\boldsymbol{p}$:

1. Relace $\boldsymbol{p}$ je symetrická, neboť podmínky uvedené v definici jsou splněny, i když zaměníme označení vrcholů A, B, C za A_1. B_1, C_1 a naopak. (1.1)
2. Relace $\boldsymbol{p}$ je zobrazením v množině $\boldsymbol{M_T}$, neboť dvojici bodů $A \neq B$ odpovídá dvojice $A_1 \neq B_1$, takže je také $\triangle ABC \neq \triangle A_1B_1C_1$. (1.2)
3. Toto zobrazení je středová kolineace se středem P, neboť trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ leží tak, že přímky spojující sobě odpovídající vrcholy procházejí týmž bodem, tj. středem kolineace P. (1.3)

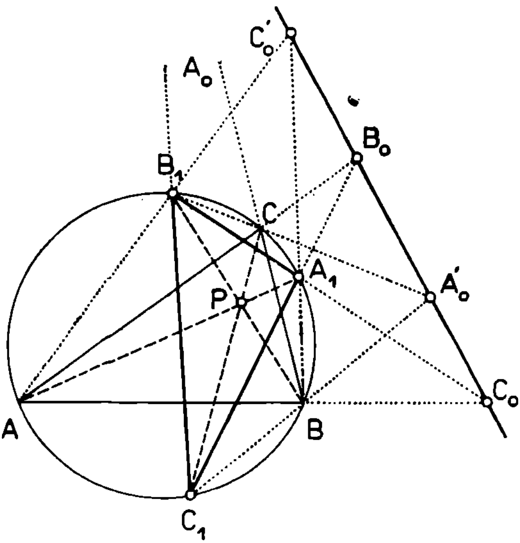
Právě jsme v podstatě citovali větu dobře známou z projektivní geometrie jako *větu Desarguesovu* o trojúhelnících. Formulace věty Desarguesovy i důkaz její pravdivosti jsou uvedeny v Dodatku. Tam jsou z obr. D 8 zřejmé i vlastnosti středové kolineace, v níž odpovídá trojúhelníku ABC trojúhelník KLM.

Připomeňme si, že středová kolineace je dána středem, osou kolineace a dvojicí sobě odpovídajících bodů, které leží na přímce jdoucí středem kolineace. Dále víme, že dvojice přímek sobě odpovídajících se protínají na ose kolineace. Je-li dán trojúhelník ABC, střed kolineace, osa kolineace a bod K odpovídající bodu A, snadno sestrojíme zbývající dva vrcholy $\triangle KLM$.

Například: přímky AC a KM se protínají na ose kolineace h v bodě H a přímka SM prochází bodem C. Přímka BC se s přímkou LM protne v bodě G rovněž na ose kolineace atd.

Vedle vlastností vyplývajících ze středové kolineace má relace **p** ještě další důležitou vlastnost, jak hned dokážeme.

Věta 1. *Je-li dvojice trojúhelníků* $\triangle ABC$ *a* $\triangle A_1B_1C_1$ *v relaci* **p** *podle* P, *potom bod* P *je středem kolineace a osou kolineace je polára bodu* P *vzhledem ke společné kružnici těmto trojúhelníkům opsané.*



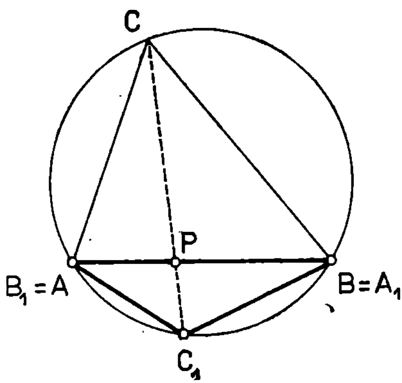
Obr. 2

Důkaz (obr. 2). Podle vzpomenuté věty Desarguesovy o trojúhelnících (1.3), procházejí-li přímky AA_1, BB_1

a CC_1 týmž bodem P, leží body $A_0 = (BC \cap B_1C_1)$, $B_0 = (AC \cap A_1C_1)$ a $C_0 = (AB \cap A_1B_1)$ na téže přímce, která je osou středové kolineace.

Uvažovaná dvojice trojúhelníků má však ještě navíc společnou kružnici opsanou k a to znamená, že přímka $p \equiv A_0B_0 \equiv B_0C_0$ je nejenom osou kolineace, ale také polárou bodu P vzhledem ke kružnici k. Toto poslední tvrzení vlastně není třeba zvlášť dokazovat. Jeho pravdivost vyplývá ze samotné konstrukce poláry bez použití tečen vedených z pólu k uvažované kružnici. Správnost konstrukce je dokázána v Dodatku. Zde je užitečné si ještě všimnout toho, že na obr. 2 se na poláře protínají ještě další tři dvojice přímek, a to: $[\overleftrightarrow{AB_1}, \overleftrightarrow{A_1B}]$, $[\overleftrightarrow{BC_1}, \overleftrightarrow{B_1C}]$, $[\overleftrightarrow{CA_1}, \overleftrightarrow{C_1A}]$, což je v dobrém souladu s dříve uvedeným tvrzením.

Z toho všeho vyplývá, že relace p podle P je zvláštní případ středové kolineace podle středu P, kde vzor a obraz mají společnou kružnici opsanou. Tato zvlášt-



Obr. 3

nost spočívá právě v tom, že sobě odpovídající dvojice bodů leží na této kružnici, což obecně o středové kolineaci neplatí. Je proto zcela na místě, že nadále nebudeme mluvit o středové kolineaci, ale o relaci $\boldsymbol{p}$ podle P.

Za zmínku jistě stojí ještě případ vyobrazený na obr. 3.

Zde pól P je vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC, takže je $A \equiv B_1 \wedge B \equiv A_1$. I v tomto případě jsou splněny podmínky uvedené v definici 1, a proto i zde můžeme říci, že trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ jsou v relaci $\boldsymbol{p}$ podle P.

Na kartézském součinu $(\boldsymbol{M}_T \times \boldsymbol{M}_T)$ můžeme dále utvořit relaci obdobnou relaci $\boldsymbol{p}$ podle P s tím rozdílem, že příslušným pólem bude bod Q ležící ve vnější oblasti kružnice k uvažovanému trojúhelníku opsané, tedy $Q \in \boldsymbol{K}'$.

Definice 2. Dvojice navzájem různých trojúhelníků ABC a $A_2B_2C_2$ je prvkem relace $\boldsymbol{q}$ podle pólu Q ležícího vně kružnice těmto trojúhelníkům opsané, když o jejich vrcholech platí současně:

1. $\{A, B, C\} \subset \boldsymbol{K} \wedge \{A_2, B_2, C_2\} \subset \boldsymbol{K}$; přičemž množiny $\{A, B, C\}$ a $\{A_2, B_2, C_2\}$ mají nanejvýš dva společné prvky.

2. Přímky AA_2, BB_2 a CC_2 procházejí týmž bodem $Q \in \boldsymbol{K}'$.

Úmluva. Vztah uvedený v definici 2 budeme symbolicky vyjadřovat takto:

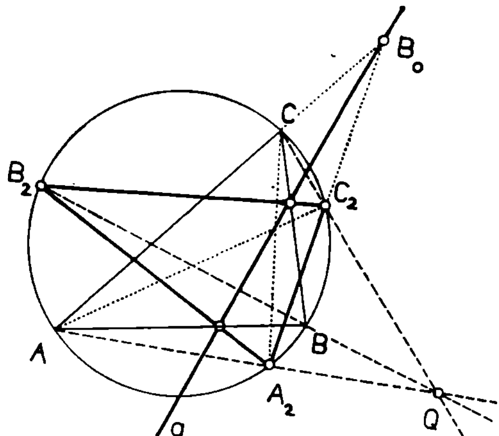
$$\triangle ABC\ \boldsymbol{q}\ \triangle A_2B_2C_2 \text{ podle } Q, \text{ nebo}$$

$$[\triangle ABC,\ \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q} \text{ podle } Q.$$

Doložku „podle Q“ i zde vynecháme, nebude-li nebezpečí omylu, jako v případě relace $\boldsymbol{p}$ podle P.

Vlastnosti relace q, které vyplývají přímo z definice 2, jsou zcela analogické vlastnostem relace p uvedeným v (1.1), (1.2) a (1.3), takže je nemusíme znovu zdůvodňovat. Podle toho je i relace q symetrická, jde o zobrazení v M_T, a to o středovou kolineaci se středem Q. Platí i věta obdobná větě 1.

Věta 2. *Je-li dvojice trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$ v relaci q podle Q, potom bod Q je středem kolineace a osou kolineace je polára bodu Q vzhledem ke společné kružnici těmto trojúhelníkům opsané.*

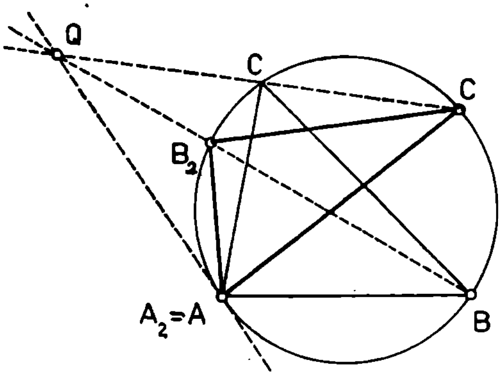


Obr. 4

Důkaz (obr. 4). Přímky AA_2, BB_2 a CC_2 mají společný bod Q, a proto se podle věty Desarguesovy protínají na jedné přímce odpovídající si strany $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$. Tato přímka pak, protože body A, B, C,

A_2, B_2, C_2 leží na téže kružnici, je polárou bodu Q vzhledem ke kružnici k. Také zde se na uvedené poláře protínají dvojice přímek $[\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{A_2B_2}]$, $[\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{B_2C_2}]$, $[\overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{C_2A_2}]$ a ovšem i dvojice $[\overleftrightarrow{AB_2}, \overleftrightarrow{A_2B}]$, $[\overleftrightarrow{BC_2}, \overleftrightarrow{B_2C}]$, $[\overleftrightarrow{CA_2}, \overleftrightarrow{C_2A}]$.

Je tedy relace q podle Q rovněž zvláštní případ středové kolineace, kde vzor a obraz mají společnou kružnici opsanou. Je ovšem třeba mít stále na paměti, že složkami obou uvažovaných relací jsou trojúhelníky, nikoliv jejich prvky. Na rozdíl od relace p má relace q

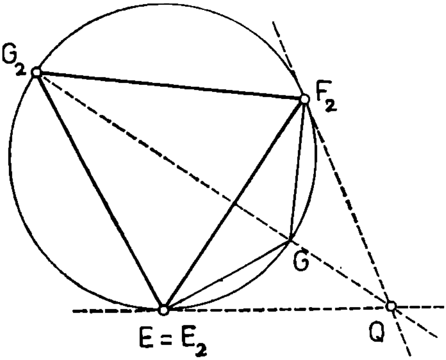


Obr. 5

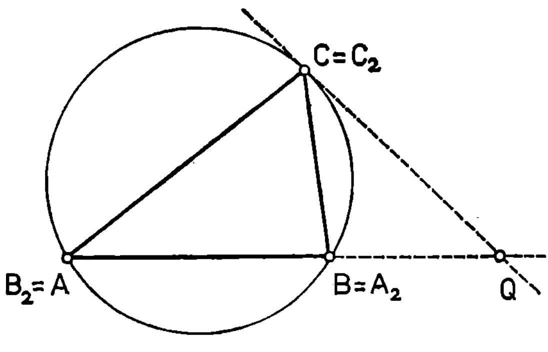
jednu zvláštnost, což konečně prozrazuje už odlišná formulace podmínky 1 v definici 2. Případy, kdy množiny $\{A, B, C\}$ a $\{A_2, B_2, C_2\}$ mají jeden nebo dva prvky společné, nastanou tehdy, jestliže pól Q leží na některé z tečen vedených ke kružnici k v jednom nebo dvou vrcholech $\triangle ABC$, jak ukazují obr. 5—7.

Na obr. 5 leží pól Q na tečně sestrojené ke kružnici k

opsané $\triangle ABC$ v jeho vrcholu A, takže je $A_2 \equiv A$. Na obr. 6 je pól Q průsečíkem tečen vedených ke kružnici opsané $\triangle EFG$ v jeho vrcholech E a F, takže je $E \equiv E_2$ a současně $F \equiv F_2$. Na obr. 7 je pól Q průsečíkem tečny

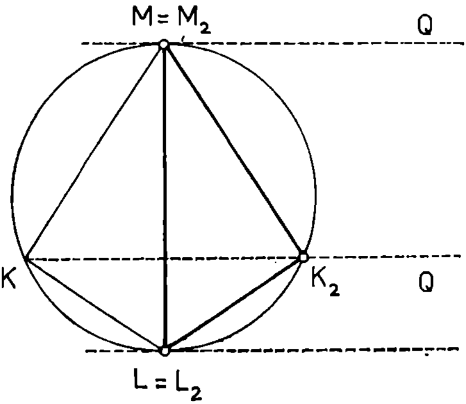


Obr. 6



Obr. 7

vedené ke kružnici opsané $\triangle ABC$ v jeho vrcholu C s prodloužením jeho strany AB za bod B, takže je $C \equiv \equiv C_2$, $A \equiv B_2$ a $B \equiv A_2$. Všechny tyto tři zvláštní případy jsou v souladu s definicí 2 právě tak jako zcela zvláštní případ zobrazený na obr. 8.



Obr. 8

Zde je pól Q nevlastní bod roviny π_2, takže středová kolineace přechází v afinitu, neboť přímky $\overleftrightarrow{LL_2} \parallel \overleftrightarrow{MM_2}$ jsou tečnami kružnice opsané $\triangle KLM$, který je pravoúhlý a body L a M jsou krajní body jeho přepony.

Z toho, co jsme zatím uvedli o vlastnostech relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$, je zřejmé, že tvar trojúhelníků v uvažovaných dvojicích je závislý na poloze pólů P nebo Q. Naskýtá se proto otázka, je-li možno tuto polohu určit konstruktivně tak, aby uvažované dvojice trojúhelníků měly předem dané vlastnosti. Předpokládejme, že to možné je. Pak ovšem musí platit tato věta:

Věta 3. *Je-li dán jeden z dvojice trojúhelníků* $\triangle ABC$ **p** **p** $\triangle A_1B_1C_1$ *nebo* $\triangle ABC$ **q** $\triangle A_2B_2C_2$, *potom druhý trojúhelník je určen právě dvěma navzájem nezávislými prvky, přičemž póly P a Q dané polohou mají hodnotu dvou takových prvků.*

Důkaz. Věta obsahuje dvě tvrzení:

a) Obecně platí, že trojúhelník je určen třemi navzájem nezávislými prvky. Avšak dvojice trojúhelníků, které jsou v relaci **p** nebo **q**, mají vždy jeden prvek společný, totiž velikost poloměru společné opsané kružnice. Proto je druhý trojúhelník určen právě dvěma dalšími navzájem nezávislými prvky, jakmile první trojúhelník je dán.

b) Pravdivost druhého tvrzení vyplývá z definic 1 a 2. Dané póly P nebo Q určují spolu s vrcholy daného trojúhelníku jednoznačně přímky AP, BP, CP, popřípadě A_1P, B_1P, C_1P, nebo AQ, BQ, CQ, případně A_2Q, B_2Q, C_2Q, a tím jsou rovněž jednoznačně určeny polohy bodů A, B, C, popřípadě A_1, B_1, C_1 nebo A_2, B_2, C_2 na kružnici k.

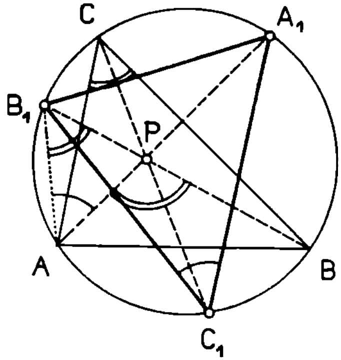
Věnujme nyní pozornost velikostem vnitřních úhlů uvažovaných dvojic trojúhelníků. Lze předvídat, že existuje taková podmnožina množiny M_T, jejíž prvky jsou v relaci **p** nebo **q** s daným trojúhelníkem a přitom mají jeden úhel shodný, tj. předem dané velikosti. Dvě věty (věta 4 a 5), jejichž pravdivost dokážeme, nejenom potvrzují existenci takových podmnožin, ale udávají současně návod, jak lze sestrojit množinu všech příslušných pólů P nebo Q.

Věta 4. *Má-li* $\triangle ABC$ *vnitřní úhly daných velikostí* α, β, γ, *a množina trojúhelníků, které jsou s ním v relaci* **p**, *vnitř-*

ní úhel $\sphericalangle A_1C_1B_1$ *dané velikosti* γ', *potom množinou všech příslušných pólů* P *je oblouk kružnice mezi body* A *a* B *takový, že obvodový úhel příslušný k tomuto oblouku* ($\sphericalangle APB = \varphi$) *má velikost:*

a) $\varphi = \gamma + \gamma'$, *je-li* $\gamma + \gamma' \leqq 180°$ *a oblouk* $\widehat{AB}$ *leží v polorovině* $\overrightarrow{ABC}$,

b) $\varphi = 360° - (\gamma + \gamma')$, *je-li* $\gamma + \gamma' > 180°$ *a oblouk* $\widehat{AB}$ *leží v polorovině opačné k* $\overrightarrow{ABC}$ ($\widehat{AB} \subset \overrightarrow{ABC}^*$).



Obr. 9

Důkaz. a) Předpokládejme nejdříve, že pól P leží v polorovině $\overrightarrow{ABC}$, a to buď uvnitř $\triangle ABC$ nebo vně (obr. 9).

V obou případech vyplývá z vlastností obvodových úhlů:

$$\sphericalangle B_1AP \equiv \sphericalangle B_1AA_1 = \sphericalangle B_1C_1A_1 = \gamma', \qquad (1.4)$$

$$\sphericalangle AB_1P \equiv \sphericalangle AB_1B = \sphericalangle ACB = \gamma. \qquad (1.5)$$

Úhly $\sphericalangle B_1AP$ a $\sphericalangle AB_1P$ jsou vnitřní úhly $\triangle AB_1P$, jehož vnější úhel při vrcholu P je $\sphericalangle APB$. Je tedy velikost $\sphericalangle APB$ rovna součtu velikostí úhlů $\sphericalangle B_1AP$ a $\sphericalangle AB_1P$, takže podle (1.4) a (1.5) je $\sphericalangle APB = \gamma + \gamma'$, což také znamená

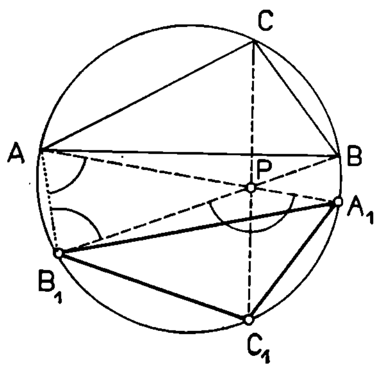
$$\gamma + \gamma' < 180°. \tag{1.6}$$

Leží-li bod P na straně AB $\triangle ABC$, je ovšem

$$\gamma + \gamma' = 180°. \tag{1.7}$$

Podle předpokladu mají úhly γ a γ' dané velikosti, takže jejich součet je stálý, a probíhá-li bod C oblouk $\widehat{AB}$ kružnice $\triangle ABC$ opsané v polorovině $\overrightarrow{ABC}$, probíhá pól P oblouk kružnice mezi body A a B takový, že příslušný obvodový úhel $\sphericalangle APB$ má velikost $\varphi = \gamma + \gamma'$, rovněž v polorovině $\overrightarrow{ABC}$. Body tohoto oblouku bez krajních bodů A a B jsou prvky hledané množiny všech příslušných pólů P.

Je-li pól P vnitřní bod úsečky AB (viz obr. 3), potom je podle (1.7) $\gamma + \gamma' = 180°$ a oblouk $\widehat{AB}$ přechází v úsečku $\overline{AB}$.



Obr. 10

b) Umístíme-li pól P vně $\triangle ABC$, například do poloroviny $\overrightarrow{ABC^*}$, padnou do této poloroviny i všechny tři vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$, a to tak, že (obr. 10)

$$\sphericalangle AC_1B < \sphericalangle A_1C_1B_1 = \gamma'. \tag{1.8}$$

Protože je současně $\sphericalangle AC_1B = 180° - \sphericalangle ACB = 180° - \gamma$, dostaneme po dosazení do (1.8)

$$180° - \gamma < \gamma', \text{ neboli } \gamma + \gamma' > 180°.$$

V tětivových čtyřúhelnících $AA_1C_1B_1$ a $ACBB_1$ je

$$\sphericalangle A_1AB_1 \equiv \sphericalangle PAB_1 = 180° - \sphericalangle A_1C_1B_1 = 180° - \gamma',$$

$$\sphericalangle AB_1B \equiv \sphericalangle AB_1P = 180° - \sphericalangle ACB = 180° - \gamma. \tag{1.9}$$

Úhly $\sphericalangle PAB_1$ a $\sphericalangle AB_1P$ jsou vnitřní úhly $\triangle PAB_1$, jehož vnější úhel při vrcholu P má velikost

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle PAB_1 + \sphericalangle AB_1P$$

a po dosazení podle (1.9)

$$\sphericalangle APB = (180° - \gamma') + (180° - \gamma)$$

a po úpravě:

$$\sphericalangle APB = \varphi = 360° - (\gamma + \gamma').$$

Také zde je podle předpokladu součet $\gamma + \gamma'$ stálý, takže prvky hledané množiny všech pólů P dané vlastnosti tvoří oblouk kružnice mezi body A a B takový, že příslušný obvodový úhel má velikost $\varphi = 360° - (\gamma + \gamma')$.

Velikosti úhlů $\sphericalangle BPC = \alpha + \alpha'$ a $\sphericalangle CPA = \beta + \beta'$ se pak v tomto případě řídí částí a) důkazu.

Dokázali jsme pravdivost obou tvrzení věty 4 pro dvojici úhlů velikostí γ, γ'. Cyklickými záměnami dojdeme k obdobným tvrzením pro dvojice α a α', β a β'.

Věta 5. *Má-li* $\triangle ABC$ *vnitřní úhly velikostí* α, β, γ *a množina všech trojúhelníků, které jsou s ním v relaci* **q**, *vnitřní úhel* $\sphericalangle A_2C_2B_2$ *dané velikosti* γ', *potom množinou všech pólů* Q *je oblouk kružnice mezi body* A *a* B *takový, že obvodový úhel příslušný k tomuto oblouku* ($\sphericalangle AQB = \varepsilon$) *má velikost:*

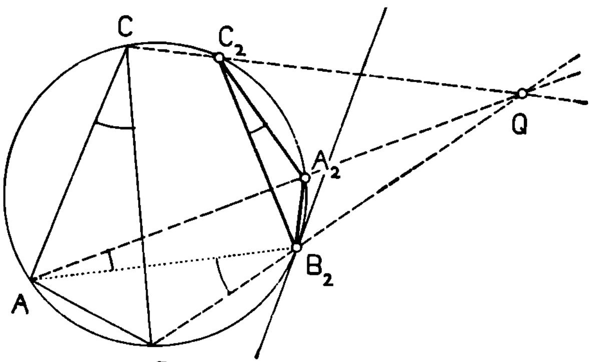
$\varepsilon = |\gamma - \gamma'|$, *přičemž oblouk* $\widehat{AQB}$ *leží*

a) *v polorovině* $\overrightarrow{ABC}$, *když* $\gamma - \gamma' \geqq 0$,

b) *v polorovině* $\overrightarrow{ABC}^*$, *když* $\gamma - \gamma' < 0$.

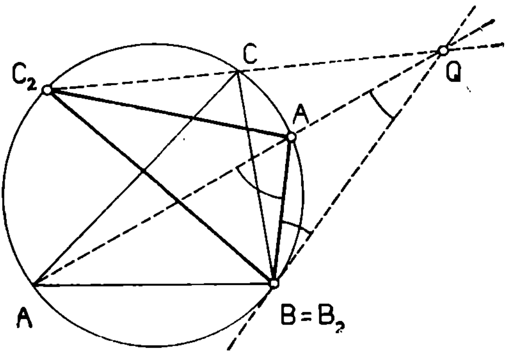
Důkaz provedeme zvlášť pro polorovinu $\overrightarrow{ABC}$ a zvlášť pro $\overrightarrow{ABC}^*$.

V polorovině $\overrightarrow{ABC}$ musíme rozlišovat čtyři různé polohy pólu Q, z nichž tři jsou zobrazeny na obr. 11, 12 a 13.

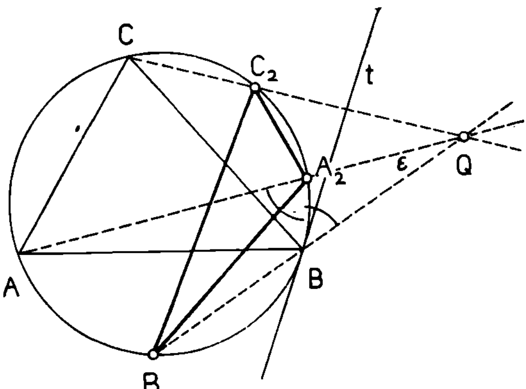


Obr. 11

Tečna t vedená ke kružnici opsané $\triangle ABC$ v bodě B rozděluje $\overrightarrow{ABC}$ na dvě části. Na obr. 11 leží pól Q v průniku polorovin $\overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{tA}$, na obr. 12 na tečně t a na obr. 13 v průniku $\overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{tA}^*$.



Obr. 12



Obr. 13

Ve všech třech případech je

$$\sphericalangle AA_2B = \sphericalangle ACB = \gamma \tag{1.10}$$

(jde o obvodové úhly) a také

$$\sphericalangle A_2BQ = \sphericalangle A_2C_2B_2 = \gamma'. \tag{1.11}$$

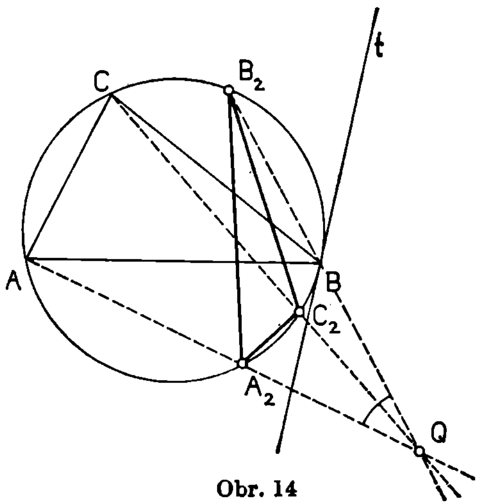
Tvrzení (1.11) ovšem musíme dokázat.

V prvním případě jsou úhly $\sphericalangle A_2BQ$ a $\sphericalangle A_2C_2B_2$ obvodové úhly příslušné k oblouku $\widehat{A_2B_2}$,

v druhém případě je $\sphericalangle A_2BQ$ úsekový úhel příslušný k oblouku $\widehat{A_2B_2}$, takže je $\sphericalangle A_2BQ = \sphericalangle A_2C_2B_2$,

ve třetím případě pak je úhel $\sphericalangle A_2BQ$ vedlejší k $\sphericalangle A_2BB_2$ a ten má velikost $180° - \gamma'$, neboť je protilehlý k $\sphericalangle A_2C_2B_2$ v tětivovém čtyřúhelníku $A_2BB_2C_2$.

Ve všech třech případech je $\sphericalangle AA_2B$ vnější úhel trojúhelníku A_2BQ při vrcholu A_2. Označíme-li $\sphericalangle A_2QB =$

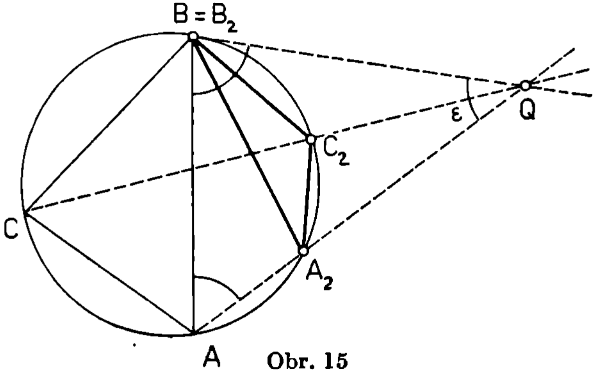


Obr. 14

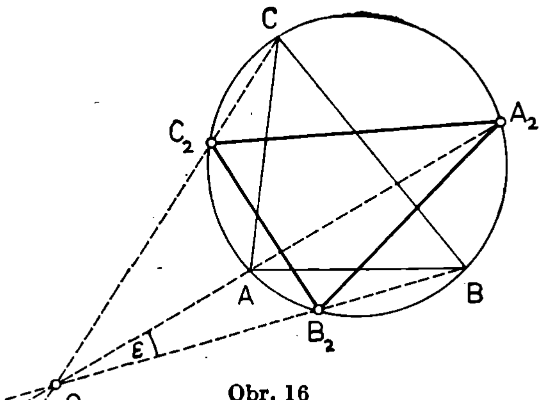
$= \varepsilon$, potom je $\varepsilon = \sphericalangle AA_2B - \sphericalangle A_2BQ$ a podle (1.10) a (1.11) konečně

$$\varepsilon = \gamma - \gamma', \text{ neboli } \gamma = \gamma' + \varepsilon, \tag{1.12}$$

což znamená, že je větší než γ'.



Obr. 15



Obr. 16

Leží-li pól Q na prodloužení strany AB za bod B, je $\gamma = \gamma'$, neboli $\gamma - \gamma' = 0$.

V polorovině opačné k $\overrightarrow{ABC}$ jsou možné tři různé polohy pólu Q zobrazené na obr. 14, 15 a 16.

Na obr. 14 je $Q \in (\overrightarrow{ABC}^* \cap \overrightarrow{tA}^*)$, na obr. 15 $Q \in t$, na obr. 16 je $Q \in (\overrightarrow{ABC}^* \cap \overrightarrow{tA})$. Ve všech třech případech je v $\triangle AB_2Q$

$$\sphericalangle AB_2Q = \gamma, \tag{1.13}$$

$$\sphericalangle B_2AQ = 180° - \gamma'. \tag{1.14}$$

V prvním případě je $\sphericalangle AB_2Q \equiv \sphericalangle AB_2B = \sphericalangle ACB = \gamma$ (obvodové úhly), současně $\sphericalangle B_2AQ = 180° - \gamma'$, protože je ve čtyřúhelníku $AB_2C_2A_2$ protilehlý k $\sphericalangle B_2C_2A_2$,

v druhém případě je $\sphericalangle AB_2Q$ úsekový úhel příslušný k oblouku $\widehat{AB}$, takže je $\sphericalangle AB_2Q = \sphericalangle ACB = \gamma$, současně $\sphericalangle B_2AQ = \gamma'$ jako v případě prvním,

ve třetím případě konečně je $\sphericalangle AB_2Q$ vedlejší k $\sphericalangle AB_2B$ a ten má velikost $180° - \gamma$, neboť je protilehlý k $\sphericalangle ACB$ v tětivovém čtyřúhelníku $ACBB_2$ a obdobně $\sphericalangle B_2AQ$ je vedlejší k $\sphericalangle A_2AB_2 = \sphericalangle A_2C_2B_2 = \gamma'$.

Označíme-li v $\triangle AB_2Q$ $\sphericalangle AQB_2 = \varepsilon$, bude ve všech třech případech

$$\varepsilon = 180° - [\sphericalangle B_2AQ + \sphericalangle AB_2Q]$$

a podle (1.13) a (1.14)

$$\varepsilon = 180° - (180° - \gamma' + \gamma) = \gamma' - \gamma, \text{ neboli}$$

$$\gamma' = \gamma + \varepsilon, \tag{1.15}$$

což znamená, že γ' je větší než γ.

Tím je dokázáno i tvrzení b) věty 5 a podle (1.12) a (1.15) je

$$\varepsilon = |\gamma - \gamma'|.$$

I zde ovšem musíme vzít v úvahu cyklické záměny, podle nichž je $\sphericalangle BQC = |\alpha - \alpha'|$ a $\sphericalangle CQA = |\beta - \beta'|$.

Právě dokázané věty 4 a 5 mají pro naše další úvahy základní význam, a proto uspořádáme jejich obsah do tabulek:

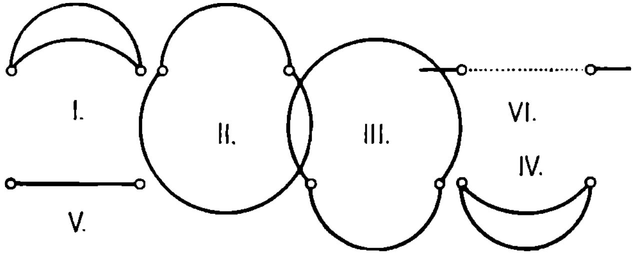
Velikosti úhlů:	Poloha pólu P:	Odkaz na obr. 17:
$\gamma + \gamma' < 180°$	$P \in \overrightarrow{ABC}$	I, II
$\gamma + \gamma' > 180°$	$P \in \overrightarrow{ABC}*$	III, IV
$\gamma + \gamma' = 180°$	$P \in \overline{AB}$	V

tab. 1

Velikosti úhlů:	Poloha pólu Q:	Odkaz na obr. 17:
$\gamma > \gamma'$	$Q \in \overrightarrow{ABC}$	I, III
$\gamma < \gamma'$	$Q \in \overrightarrow{ABC}*$	II, IV
$\gamma = \gamma'$	$Q \in \overleftrightarrow{AB}$	VI

tab. 2

Římské číslice v tabulkách odkazují na obr. 17, kde jsou zobrazeny polohy oblouků zobrazujících množiny všech pólů P nebo Q pro různé vztahy mezi velikostmi úhlů γ a γ'.

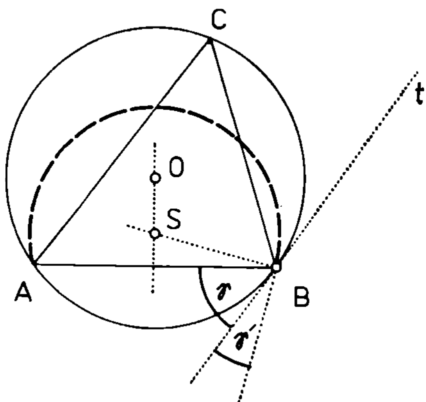


Obr. 17

Platí i věty obrácené k větám 4 a 5. Jejich důkazy jsou zařazeny do cvičení na konci kapitoly.

K vlastnímu provádění konstrukcí je třeba připomenout ještě toto:

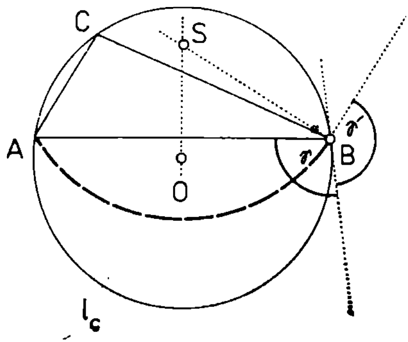
Při sestrojování kruhových oblouků podle vět 4 a 5 je vždy nutno pečlivě uvážit, ve které polorovině bude příslušný oblouk ležet. K tomu slouží uvedené tabulky



Obr. 18

a cyklické záměny z nich vyplývající. Konstrukci si pak zpravidla usnadníme tím, že využijeme vlastností úsekových úhlů. Chceme-li například sestrojit množinu všech pólů P k dané dvojici úhlů γ a γ', je výhodné sestrojit v některém krajním bodě úsečky AB tečnu ke kružnici $\triangle ABC$ opsané (obr. 18).

Tato tečna tvoří s úsečkou AB úsekový úhel velikosti γ, načež graficky přičteme úhel velikosti γ'. Kolmice na rameno součtu $\gamma + \gamma'$ vedená příslušným krajním



Obr. 19

bodem úsečky AB určuje spolu s osou úsečky AB střed hledaného oblouku. Máme-li sestrojit množinu všech pólů P s odpovídajícím obvodovým úhlem velikosti $360° - (\gamma + \gamma')$, bude postup obdobný jako v předešlém případě (obr. 19), avšak volíme opačnou polorovinu a v ní sestrojíme úhel velikosti $(\gamma + \gamma')$.

Zcela obdobně budeme postupovat při konstrukcích množin všech pólů Q. Zde se však může stát, že přesnost konstrukce bude ohrožena, zvláště když rozdíl $\gamma - \gamma'$ bude mít příliš malou absolutní hodnotu. V tom případě bude nutno použít známých konstrukcí na omezené nákresně, konstrukcí přímek spojujících dva velmi blízko sebe ležící body na kružnici a podobně. Další možnosti takových pomocných konstrukcí nám poskytnou i úvahy zařazené do druhé části první kapitoly.

Ukázali jsme již (věta 3), že k určení dvojice trojúhelníků z relací p nebo q, je-li jeden z trojúhelníků dán, postačí dva další navzájem nezávislé prvky. Mohou to tedy být například vedle velikosti poloměru společné opsané kružnice velikosti dvou vnitřních úhlů, pokud ovšem splňují nutnou podmínku

$$\alpha + \beta < 180° \wedge \alpha' + \beta' < 180°.$$

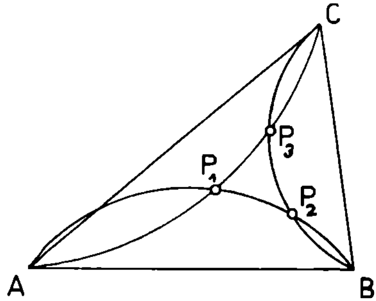
Podle vět 4 a 5 můžeme předpokládat, že takto zadané úlohy budou mít vždy právě jedno řešení, protože příslušné póly můžeme vždy určit jako průsečíky dvou kruhových oblouků s obvodovými úhly velikostí $(\alpha + \alpha')$ a $(\beta + \beta')$. Logickou cestou dojdeme k závěru, že takto určeným bodem bude procházet i třetí oblouk geometrického místa s obvodovým úhlem velikosti $(\gamma + \gamma')$. Správnost této úvahy nyní dokážeme:

Věta 6. *Nechť dvojice trojúhelníků* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ *mají vnitřní úhly velikostí po řadě* α, β, γ *a* α', β', γ', *potom kruhové oblouky* $\widehat{BPC}$, $\widehat{APC}$ *a* $\widehat{APB}$ *určující polohu pólu* P *vzhledem k velikostem úhlů* $(\alpha + \alpha')$, $(\beta + \beta')$, $(\gamma + \gamma')$, *mají vedle vrcholů* $\triangle ABC$ *právě jeden další společný bod, totiž pól* P.

Důkaz provedeme sporem.

a) Předpokládejme, že pól P je vnitřní bod $\triangle ABC$ a že oblouky $\widehat{BPC}$, $\widehat{APC}$ a $\widehat{APB}$ neprocházejí jedním bodem (obr. 20).

Protože tyto oblouky podle věty 4 procházejí vždy po dvou týmž vrcholem $\triangle ABC$, mohou mít právě ještě jeden další společný bod. Označme tyto další průsečíky P_1, P_2, P_3.



Obr. 20

Podle předpokladu mají oblouky $\widehat{AP_1P_2B}$, $\widehat{BP_2P_3C}$, $\widehat{CP_3P_1A}$ vlastnosti hledaných množin podle věty 4. To znamená, že $\sphericalangle AP_1B$ má velikost $(\gamma + \gamma')$, $\sphericalangle AP_1C$ velikost $(\beta + \beta')$. Výpočtem zjistíme, že $\sphericalangle CP_1B$ má velikost

$$360° - (\gamma + \gamma') - (\beta + \beta') = 180° - (\beta + \gamma) +$$
$$+ 180° - (\beta' + \gamma') = \alpha + \alpha'.$$

Avšak tuto velikost mají úhly BPC, pokud podle předpokladu pól P_1 leží na oblouku $\widehat{CPB}$. Mimo ně žádný jiný bod roviny. Náš předpoklad byl tedy nesprávný a všechny tři oblouky procházejí jediným bodem.

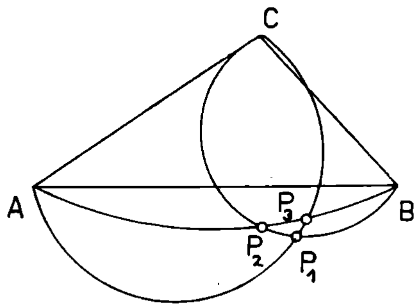
Zcela obdobný výsledek dostaneme pro pól P ležící vně $\triangle ABC$, ovšem uvnitř kružnice $\triangle ABC$ opsané (obr. 21).

Jistě není nutné znovu opakovat celý myšlenkový pochod, stačí, uvedeme-li závěrečný výpočet:

$$\sphericalangle BP_1A = \sphericalangle AP_1C + \sphericalangle BP_1C = (\alpha + \beta) + \\ + (\alpha' + \beta'),$$

neboli

$$(180° - \gamma) + (180° - \gamma') = 360° - (\gamma + \gamma').$$



Obr. 21

Také zde procházejí všechny tři oblouky jediným bodem.

Dříve než odvodíme obdobnou větu pro pól Q, dokážeme platnost užitečné pomocné věty.

Věta 7. *Nechť dvojice trojúhelníků* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \mathbf{q}$ *má vnitřní úhly velikostí po řadě* α, β, γ *a* α', β', γ', *a současně jeden vnitřní úhel* $\triangle ABC$ *je větší než jemu odpovídající vnitřní úhel* $\triangle A_2B_2C_2$, *potom aspoň jeden, nejvýše však dva další vnitřní úhly* $\triangle ABC$ *jsou menší než jim odpovídající úhly* $\triangle A_2B_2C_2$.

Důkaz. a) Především je vyloučen případ, kdy všechny tři úhly $\triangle ABC$ jsou větší než vnitřní úhly $\triangle A_2B_2C_2$. V tom případě by platilo současně:

$$\alpha > \alpha', \beta > \beta', \gamma > \gamma'$$

a po sečtení těchto nerovnic

$$\alpha + \beta + \gamma > \alpha' + \beta' + \gamma'$$

neboli $180° > 180°$.

b) Předpokládejme, že platí

$$\alpha > \alpha' \wedge \beta > \beta',$$

odtud plyne $\alpha + \beta > \alpha' + \beta'$, což můžeme psát také takto:

$$180° - \gamma > 180° - \gamma', \text{ takže}$$
$$-\gamma > -\gamma', \text{ neboli } \gamma < \gamma'.$$

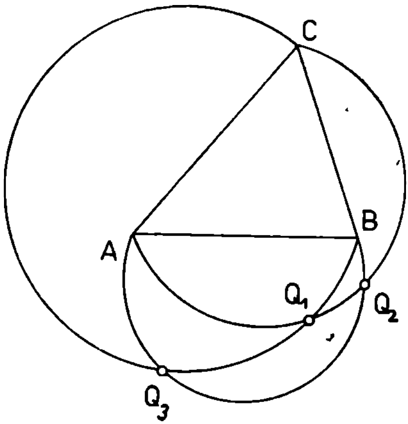
c) Zaměníme-li v předcházejícím textu znaménka „větší“ za „menší“ a naopak, dostaneme potvrzení platnosti druhé části tvrzení, že mohou dva úhly být menší a to — v souladu s výsledkem první části důkazu — nejvýše dva.

Zde je na místě připomenout tabulku 2 uvedenou za větou 5. Užijeme-li věty 7, snadno provedeme cyklické záměny k tabulce 2 a tím určíme spolehlivě polohu pólu Q vzhledem k velikostem vnitřních úhlů trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$ z relace $\boldsymbol{q}$.

Věta 8. *Nechť dvojice trojúhelníků* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *má vnitřní úhly velikostí po řadě* α, β, γ *a* α', β', γ'; *potom kruhové oblouky* $\widehat{BQC}$, $\widehat{AQC}$ *a* $\widehat{AQB}$ *určující polohu pólu* Q *vzhledem k velikostem úhlů* $|\alpha - \alpha'|$,

$|\beta - \beta'|$, $|\gamma - \gamma'|$ *mají vedle vrcholů* $\triangle ABC$ *právě jeden další společný bod, totiž pól* Q.

Důkaz provedeme opět sporem.



Obr. 22

a) Předpokládejme nejdříve (obr. 22), že pól Q leží v průniku $\overrightarrow{ABC}^* \cap \sphericalangle \overrightarrow{ACB}$. V tom případě je podle vět 5 a 7

$$\gamma' > \gamma \Rightarrow \sphericalangle AQB = \gamma' - \gamma,$$

$$\alpha' < \alpha \Rightarrow \sphericalangle BQC = \alpha - \alpha',$$

$$\beta' < \beta \Rightarrow \sphericalangle AQC = \beta - \beta'.$$

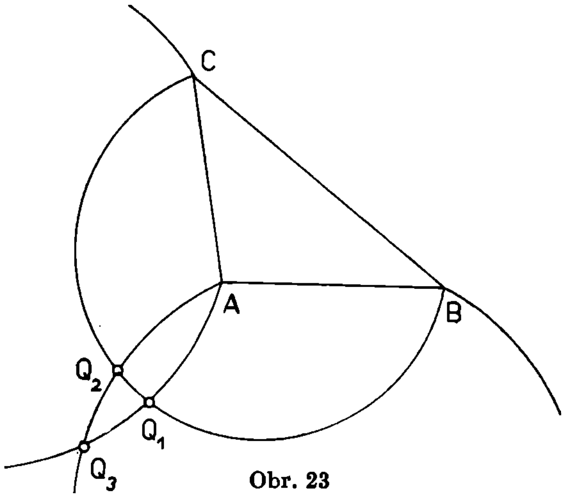
Příslušné oblouky takto určené nechť se protínají v bodech $Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3$. Podle věty 5 pak platí

$$\sphericalangle AQ_1C = \beta - \beta' \wedge \sphericalangle BQ_1C = \alpha - \alpha'.$$

Součet těchto dvou úhlů má velikost

$$\sphericalangle AQB = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') = (\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') = (180° - \gamma) - (180° - \gamma') = \gamma' - \gamma .$$

Podle tohoto výsledku leží pól Q na oblouku $\widehat{AQ_2Q_3B}$, takže předpoklad $Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3$ je nesprávný a všechny tři oblouky procházejí týmž bodem Q.

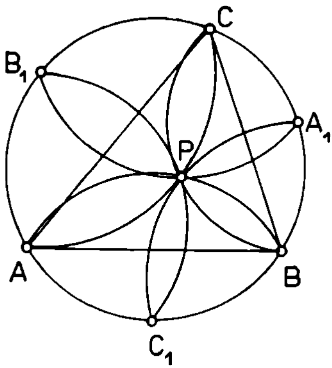


Obr. 23

b) Umístíme-li pól Q do úhlu vrcholového k $\sphericalangle BAC$, potom bude (obr. 23)

$$\gamma' > \gamma \Rightarrow \sphericalangle AQB = \gamma' - \gamma ,$$
$$\beta' < \beta \Rightarrow \sphericalangle AQC = \beta - \beta',$$
$$\alpha' > \alpha \Rightarrow \sphericalangle BQC = \alpha' - \alpha .$$

Oblouky takto určené se protnou v bodech $Q_1 \neq Q_2 \neq$ $\neq Q_3$. Další úvahy pak jsou shodné s úvahami z první části důkazu se stejným závěrem, že všechny tři oblouky procházejí týmž bodem, tj. pólem Q. Zde se na první pohled zdá, že důkaz ještě není úplný, protože jsme nevzali v úvahu polohy pólu Q v polorovině $\overrightarrow{ABC}$. To však není nutné, protože cyklickými záměnami bychom došli ke stejným závěrům pro poloroviny $\overrightarrow{ACB}$* a $\overrightarrow{BCA}$*, čímž je celá rovina až na vnitřek $\triangle ABC$ vyčerpána. Pól Q ovšem podle definice 2 v této části roviny ležet nemůže.



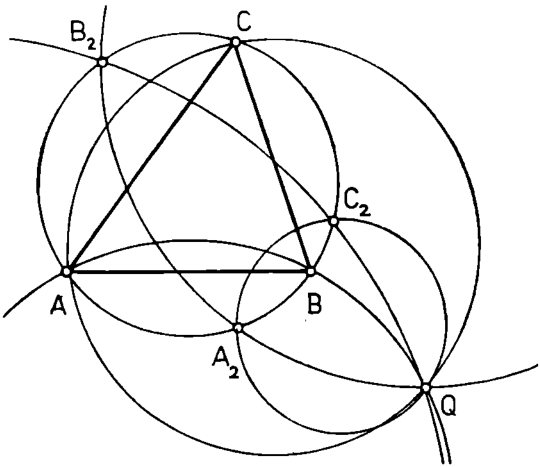
Obr. 24

Věty 6 a 8 mají jeden zajímavý důsledek. Uvážíme-li totiž, že relace **p** a **q**, jak jsme dříve ukázali, jsou symetrické, můžeme v důkazech vět 6 a 8 zaměnit označení vrcholů trojúhelníků z uvažovaných dvojic $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ a $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$. Potom pólem P procházejí další tři oblouky, a to $\widehat{A_1PB_1}$, $\widehat{B_1PC_1}$

a $\widehat{C_1PA_1}$, s příslušnými obvodovými úhly velikostí $(\gamma + \gamma')$, $(\beta + \beta')$ a $(\alpha + \alpha')$ (obr. 24).

Obdobně pak pólem Q procházejí rovněž tři další oblouky $\widehat{A_2QB_2}$, $\widehat{B_2QC_2}$ a $\widehat{C_2QA_2}$ s příslušnými obvodovými úhly velikostí $|\gamma - \gamma'|$, $|\beta - \beta'|$ a $|\alpha - \alpha'|$ (obr. 25).

Výčet vlastností relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ uzavřeme důkazem další věty, která se týká polohy vrcholů uvažovaných dvojic trojúhelníků na společné kružnici opsané.



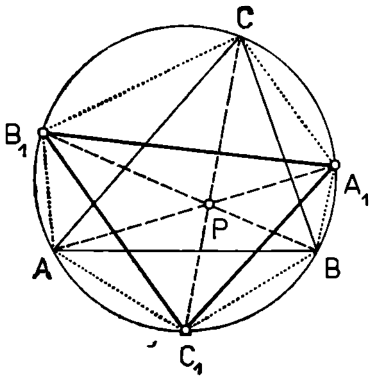
Obr. 25

Věta 9. *Mějme dvojice trojúhelníků* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* P *a* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* Q *takové, že ani pól* P *ani pól* Q *neleží na některé straně* $\triangle ABC$ *nebo na jejím prodloužení, potom o vzdálenostech vrcholů uvažovaných trojúhelníků platí:*

$$\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}=1, \qquad \frac{AB_2}{CB_2}\cdot\frac{BC_2}{AC_2}\cdot\frac{CA_2}{BA_2}=1.$$

Důkaz. a) Na obr. 26 je v trojúhelnících $\triangle AB_1P$ a $\triangle BA_1P$

$$\sphericalangle APB_1 = \sphericalangle BPA_1 \text{ (úhly vrcholové)}$$
$$\sphericalangle AB_1P = \sphericalangle BA_1P \text{ (úhly obvodové)},$$



Obr. 26

a proto $\triangle AB_1P \sim \triangle BA_1P$, takže je

$$\frac{AB_1}{BA_1}=\frac{AP}{BP}. \tag{1.16}$$

Obdobně je $\triangle BC_1P \sim \triangle CB_1P$ a také

$$\frac{BC_1}{CB_1}=\frac{BP}{CP} \tag{1.17}$$

a konečně $\triangle CA_1P \sim \triangle AC_1P$, takže

$$\frac{CA_1}{AC_1} = \frac{CP}{AP}. \tag{1.18}$$

Vynásobíme-li nyní rovnosti (1.16), (1.17) a (1.18), dostaneme:

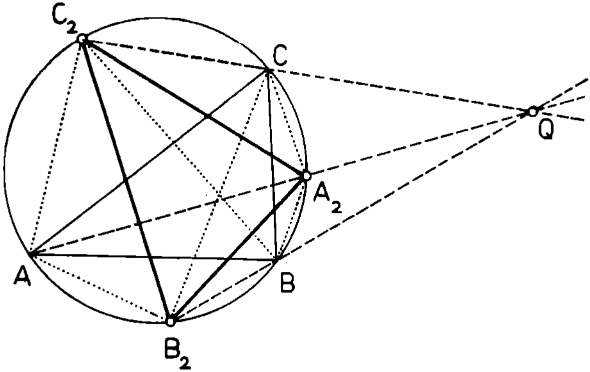
$$\frac{AB_1}{BA_1} \cdot \frac{BC_1}{CB_1} \cdot \frac{CA_1}{AC_1} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CP}{AP}.$$

Na pravé straně se vykrátí velikosti úseček AP, BP, CP, takže výraz na levé straně se rovná 1. Po úpravě pak odtud dostaneme dokazovaný vztah:

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = 1.$$

b) Na obr. 27 je v trojúhelnících $\triangle AB_2Q$ a $\triangle BA_2Q$

$$\sphericalangle AQB_2 = \sphericalangle BQA_2,$$



Obr. 27

neboť jsou totožné,

$$\sphericalangle AB_2Q = \sphericalangle BA_2Q,$$

protože

$$\sphericalangle AB_2Q \equiv \sphericalangle AB_2B = 180° - \sphericalangle AA_2B$$

(úhel protilehlý ve čtyřúhelníku tětivovém AB_2BA_2).

Protože úhel $\sphericalangle AA_2B$ je vedlejší k $\sphericalangle BA_2Q$, je

$$\sphericalangle AB_2Q = \sphericalangle BA_2Q.$$

Trojúhelníky $\triangle AB_2Q$ a $\triangle BA_2Q$ mají tedy dva úhly shodných velikostí, takže je $\triangle AB_2Q \sim \triangle BA_2Q$.

Z podobnosti trojúhelníků pak plyne

$$\frac{AB_2}{BA_2} = \frac{AQ}{BQ}. \tag{1.19}$$

Obdobně je $\triangle BC_2Q \sim \triangle CB_2Q$, odkud

$$\frac{BC_2}{CB_2} = \frac{BQ}{CQ} \tag{1.20}$$

a konečně i $\triangle CA_2Q \sim \triangle AC_2Q$ a odtud

$$\frac{CA_2}{AC_2} = \frac{CQ}{AQ}. \tag{1.21}$$

Vynásobením (1.19), (1.20) a (1.21) a po obdobných úpravách jako v předešlé části důkazu dostáváme:

$$\frac{AB_2}{CB_2} \cdot \frac{BC_2}{AC_2} \cdot \frac{CA_2}{BA} = 1.$$

Podle předpokladu neleží pól P na žádné straně $\triangle ABC$. V tom případě by bylo například $A \equiv B_1 \wedge$ $\wedge\, B \equiv A_1$, takže $AB_1 = BA_1 = 0$ a do dokazovaného vztahu se dostává neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ a výraz pozbývá smyslu. Obdoba platí i pro pól Q.

Dosud poznané vlastnosti relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ nás již dostatečně vyzbrojují k řešení úloh. Zde několik příkladů:

Příklad 1. Je dán $\triangle ABC$ s vnitřními úhly velikostí $\alpha = 100°$, $\beta = 30°$. Určete polohu pólů P a Q tak, aby $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ z relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ byly trojúhelníky rovnostranné.

a) *Rozbor.* Podle zadání je $\gamma = 180° - (100° + 30°) = 50°$,

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 60°.$$

Dále platí:

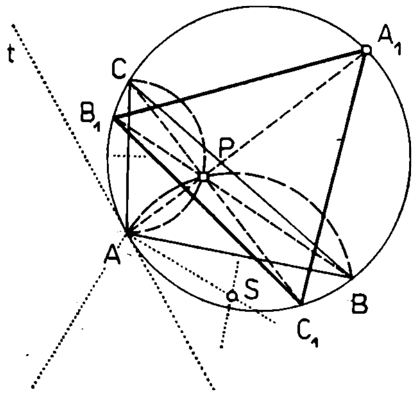
$$\alpha + \alpha' = 100° + 60° = 160°,$$
$$\beta + \beta' = 30° + 60° = 90°,$$
$$\gamma + \gamma' = 50° + 60° = 110°.$$

Všechny tři součty jsou menší než 180°, a proto pól P je vnitřní bod $\triangle ABC$.

$$\alpha - \alpha' = 100° - 60° = 40° \Rightarrow Q \in \overrightarrow{BCA},$$
$$\beta - \beta' = 60° - 30° = 30° \Rightarrow Q \in \overrightarrow{ACB}^*,$$
$$\gamma - \gamma' = 60° - 50° = 10° \Rightarrow Q \in \overrightarrow{ABC}^*.$$

Podle toho leží pól Q v průniku $\overrightarrow{BCA} \cap \overrightarrow{ACB}^* \cap \overrightarrow{ABC}^*$.

b) *Konstrukce.* Nejdříve sestrojíme $\triangle ABC$: Na kružnici $k = (O; 4)$ zvolíme bod A, v něm sestrojíme tečnu ke kružnici k a úsekové úhly velikostí $\beta = 30°$ a $\gamma = 50°$. Ramena úsekových úhlů určí na kružnici k body B a C. Potom sestrojíme příslušné oblouky zobrazující množiny hledaných pólů. Volíme oblouk $\widehat{APC}$, protože k němu příslušný obvodový úhel má velikost $\beta + \beta' = 90°$, takže střed oblouku je středem úsečky AC.



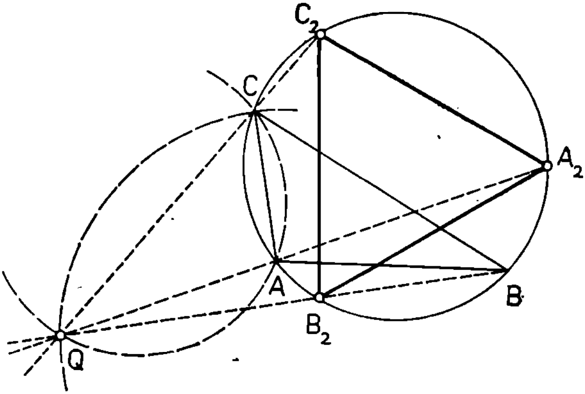
Obr. 28

Podle rozboru je výhodnější zvolit jako druhý oblouk $\widehat{APB}$ s příslušným obvodovým úhlem velikosti $\gamma + \gamma' = 110°$. Konstrukce je provedena na obr. 28.

V druhé části úlohy (obr. 29) obdobným postupem určíme polohu pólu Q jako průsečíku oblouků $\widehat{BQC}$ s obvodovým úhlem velikosti $\alpha - \alpha' = 40°$ a oblouku $\widehat{CQA}$ s obvodovým úhlem velikosti $\beta' - \beta = 30°$. Tyto oblouky jsou výhodnější, protože rozdíl $\gamma' - \gamma = 10°$ je příliš malý. V obou případech opět užijeme ke konstrukci příslušných úsekových úhlů.

c) *Důkaz* vyplývá z užitých vět a popisu konstrukce.

d) *Diskuse.* Všechny tři trojúhelníky ($\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ i $\triangle A_2B_2C_2$) jsou určeny velikostmi dvou vnitřních úhlů a poloměru kružnice opsané, tedy jednoznačně. Obě části úlohy proto mají po jednom řešení.



Obr. 29

Příklad 2. K danému rovnostrannému trojúhelníku ABC vepsanému do kružnice o poloměru $r = 4{,}5$ cm sestrojte trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ a $\triangle A_2B_2C_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ takové, aby byly pravoúhlé s jedním ostrým úhlem velikosti 60°.

a) *Rozbor.* Podle podmínek úlohy může o velikostech vnitřních úhlů hledaných trojúhelníků platit:

$$\alpha' = 90°, \beta' = 60°, \quad \beta' = 90°, \gamma' = 60°,$$

$$\alpha' = 90°, \gamma' = 60°, \quad \gamma' = 90°, \beta' = 60°,$$

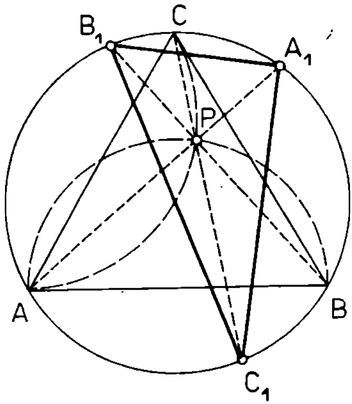
$$\beta' = 90°, \alpha' = 60°, \quad \gamma' = 90°, \alpha' = 60°.$$

Obě části úlohy proto budou mít po šesti řešeních, celkem dvanáct řešení. Zde provedeme pouze dvě z nich.

Zvolme například $\alpha' = 90°$, $\beta' = 60° \Rightarrow \gamma' = 30°$.

b) *Konstrukce* (obr. 30).

Je-li $\beta' = 60°$, je $\beta' = \beta$, takže oblouk $\widehat{APC}$ bude procházet středem opsané kružnice, neboť $\sphericalangle APC = 2 . \sphericalangle ABC$. Protože dále je $\gamma + \gamma' = 90°$, je oblouk $\widehat{APB}$ obloukem Thaletovy kružnice nad průměrem $\overline{AB}$. Tím se konstrukce pólu P značně zjednoduší. Dále pak postupujeme podle definice 1.

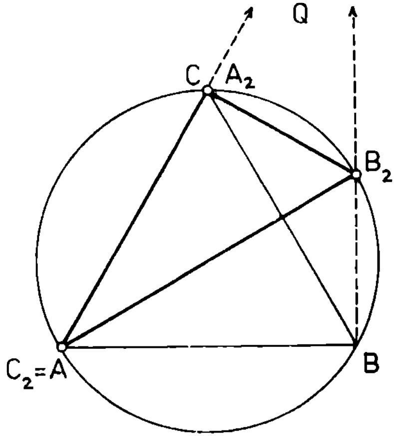


Obr. 30

Zvolíme-li stejné podmínky i pro sestrojení druhé části úlohy (obr. 31), dostaneme:

$$\alpha' - \alpha = 30°, \beta - \beta' = 0°, \gamma - \gamma' = 30°,$$

takže podle věty 5 padne pól Q na přímku AC. Bude proto $A_2 \equiv C$ a současně $C_2 \equiv A$.



Obr. 31

Příklad 3. Je dán $\triangle ABC$ vepsaný do kružnice o poloměru $r = 4{,}2$ s vnitřními úhly $\sphericalangle BAC = \alpha = 105°$ a $\sphericalangle ABC = \beta = 50°$. Sestrojte trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ z relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ takové, že

a) $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle BCA$,
b) $\triangle A_2B_2C_2 \cong \triangle ABC$.

Rozbor (obr. 32). a) V prvním případě je především $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 25°$. Dále musí při přemístění platit:

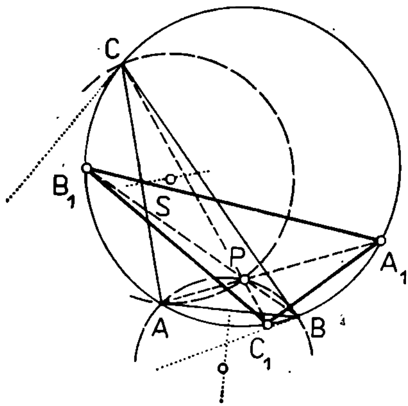
$$C_1 \equiv A \Rightarrow \gamma' = \alpha = 105°,$$

$$A_1 \equiv B \Rightarrow \alpha' = \beta = 50°,$$

$$B_1 \equiv C \Rightarrow \beta' = \gamma = 25°.$$

Máme tedy:

$$\alpha + \alpha' = \alpha + \beta = 155°,$$
$$\beta + \beta' = \beta + \gamma = 75°,$$
$$\gamma + \gamma' = \gamma + \alpha = 130°.$$



Obr. 32

Všechny tři součty jsou menší než 180°, takže pól P je podle věty 4 vnitřní bod $\triangle ABC$. Konstrukce se provede jako v předešlých úlohách.

b) Ve druhém případě je $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Zde dostáváme zajímavý výsledek, protože

$\alpha - \alpha' = 0 \Rightarrow$ pól Q leží na přímce BC,

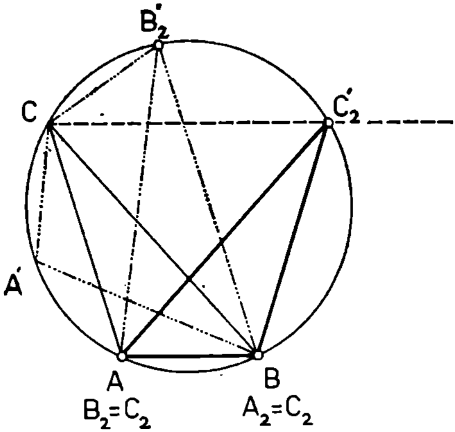
$\beta - \beta' = 0 \Rightarrow$ pól Q leží na přímce AC,

$\gamma - \gamma' = 0 \Rightarrow$ pól Q leží na přímce AB.

Protože přímky AB, BC, AC mimo vrcholy $\triangle ABC$ již žádné další společné body nemají, zdálo by se, že úloha nemá řešení. Avšak podmínku $\sphericalangle AQB = \sphericalangle BQC = \sphericalangle CQA = 0°$ splňují tři nevlastní body roviny, takže je (obr. 33)

$$CQ_1 \parallel AQ_1 \equiv BQ_1; \; BQ_2 \parallel AQ_2 \equiv CQ_2;$$

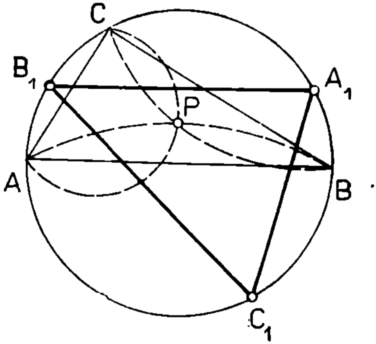
$$AQ_3 \parallel BQ_3 \equiv CQ_3.$$



Obr. 33

Příklad 4. Je dán pravoúhlý $\triangle ABC$ s přeponou $AB = 8$ cm a úhlem $\sphericalangle CAB = 60°$. Sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ **p** **p** $\triangle ABC$, jehož strana A_1B_1 má velikost 7 cm a poloměr kružnice vepsané $\varrho = 1{,}7$ cm.

Rozbor. Protože $\triangle ABC$ je pravoúhlý, má poloměr kružnice opsané oběma trojúhelníkům velikost poloviny přepony, tj. 4 cm. $\triangle A_1B_1C_1$ je určen třemi navzájem nezávislými prvky, tj. velikostmi poloměrů kružnice opsané a vepsané a strany A_1B_1. Při konstrukci budeme postupovat tak, že nejdříve sestrojíme zvlášť $\triangle ABC$ a zvlášť $\triangle A_1B_1C_1$, načež užitím věty 4 „vložíme" trojúhelník $A_1B_1C_1$ do kružnice opsané $\triangle ABC$.



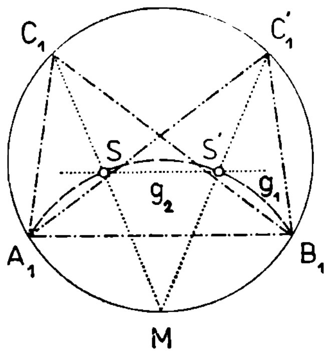
Obr. 34

Konstrukci $\triangle A_1B_1C_1$ řešíme jako samostatnou úlohu. Předpokládejme, že existuje $\triangle A'B'C' \cong \triangle A_1B_1C_1$ (obr. 35).

Na kružnici opsané poloměrem $r = 4$ cm kolem středu O' umístíme tětivu $A'B' = 7$ cm. Označme M střed menšího oblouku $\widehat{A'B'}$. Bude-li vrchol C' hledaného trojúhelníku probíhat větší oblouk $\widehat{A'B'}$, bude střed S' kružnice vepsané trojúhelníku $A'B'C'$ probíhat oblouk g_1 kružnice opsané kolem bodu M poloměrem velikosti $MA' = MB'$. S důkazem správnosti této konstrukce se setkáme až ve druhé kapitole. Současně leží bod S' na rovnoběžce g_2 se stranou $A'B'$ vedené ve vzdálenosti

$\varrho = 1,7$ cm. V našem případě má tato pomocná konstrukce dvě řešení.

Nyní již známe velikosti všech tří součtů $\alpha + \alpha'$, $\beta + \beta'$, $\gamma + \gamma'$, takže můžeme užitím věty 4 přemístit $\triangle A'B'C'$ do kružnice opsané $\triangle ABC$ (viz obr. 34).



Obr. 35

Příklad 5. K danému trojúhelníku ABC $[AB = 8, BC = 4, CA = 6]$ sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle P takový, že:

a) $AB_1 : CB_1 = 3 : 4$, $CA_1 : BA_1 = 4 : 7$ a pól P je vnitřní bod $\triangle ABC$.

b) $AB_1 : CB_1 = 9 : 16$, $BC_1 : AC_1 = 6 : 7$ a pól P leží v polorovině $\overleftarrow{ABC}$*.

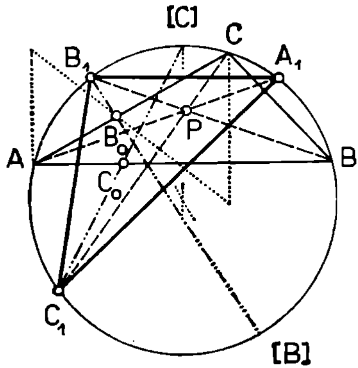
Řešení. V obou případech nejdříve zjistíme velikosti poměrů, které v úlohách nejsou zadány. Použijeme věty 9.

a) $$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot q \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{3}{4} \cdot q \cdot \frac{4}{7} = 1 \Rightarrow q = \frac{7}{3} = \frac{BC_1}{AC_1}.$$

b) $$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot q = \frac{9}{16} \cdot \frac{6}{7} \cdot q = 1 \Rightarrow q = \frac{56}{27} = \frac{CA_1}{BA_1}.$$

Je výhodné provést tyto výpočty ještě před vlastním provedením konstrukce, protože lze vypočteného poměru často použít k zajištění větší přesnosti. V daném případě je strana $BC = 4$ nejmenší a to, jak uvidíme dále, působí při konstrukci určité potíže.

Zde využijeme v obou případech známého vztahu, že osa úhlu v trojúhelníku dělí stranu trojúhelníku na dvě části, jejichž velikosti jsou v poměru velikostí přilehlých stran. V daném případě a) například máme sestrojit trojúhelník AB_1C, jehož strany mají velikosti v poměru 3 : 4 (obr. 36).

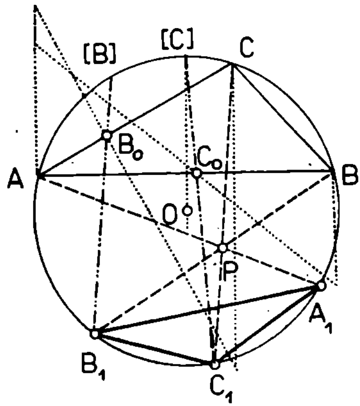


Obr. 36

Rozdělíme proto úsečku AC v udaném poměru a dělicí bod označíme B_0. Osa strany AC nechť protne opsanou kružnici v bodě $[B]$ ležícím na větším oblouku $\widehat{ABC}$. Přímka $[B]B_0$ pak protne menší oblouk kružnice mezi body A a C v hledaném bodě B_1. Že tomu tak skutečně je, snadno dokážeme, neboť jsou-li oblouky $\widehat{A[B]}$ a $\widehat{C[B]}$ shodné, jsou shodné i k nim příslušné obvodové úhly

$\sphericalangle AB_1[B]$ a $\sphericalangle CB_1[B]$. Stejným způsobem sestrojíme i další bod, zde nejlépe bod C_1, takže přímky BB_1 a CC_1 se protnou v hledaném bodě P.

V případě b) postupujeme obdobně s tím rozdílem, že oba body $[B]$ a $[C]$ leží na oblouku $\widehat{ABC}$ (obr. 37).



Obr. 37

Je třeba ještě připomenout, že předcházející dvě úlohy mají více řešení, a to v polorovinách $\overrightarrow{ABC}{}^*$, $\overrightarrow{CAB}{}^*$, $\overrightarrow{BCA}{}^*$. Není-li však daný trojúhelník tupoúhlý, jako je tomu v našem případě b), jsou konstrukce tak obtížné, že nelze zaručit jejich přesnost, a nemají tedy praktický význam.

Příklad 6. Jsou dány tři úsečky velikostí a, b, c. Úsečku c rozdělte na dvě části, jejichž velikosti jsou v poměru $a^2 : b^2$.

Rozbor. Ke konstrukci užijeme věty 9. Bude-li totiž $AB_1 = BC_1 = a \wedge CB_1 = AC_1 = b$, bude podle věty 9

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = 1,$$

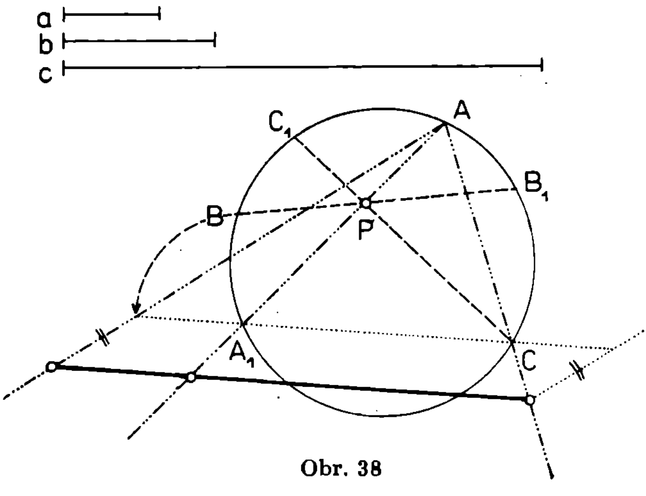
takže
$$\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = 1$$

a odtud
$$\frac{CA_1}{BA_1} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Konstrukci provedeme podle obr. 38:

Narýsujeme libovolnou kružnici k a na ní zvolíme bod B. Od bodu B naneseme po řadě tětivy $BC_1 = a$, $C_1A = b$, $AB_1 = a$, $B_1C = b$. Přímky BB_1 a CC_1 se protnou v bodě P. Potom přímka AP určí na kružnici k bod A_1 a podle věty 9 platí

$$BA_1 : CA_1 = a^2 : b^2,$$



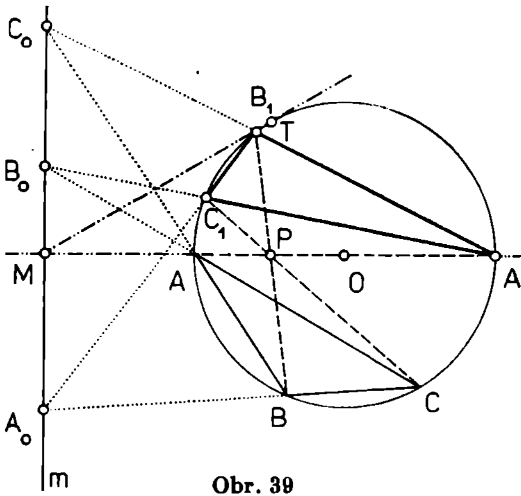
Obr. 38

načež danou úsečku velikosti c rozdělíme v poměru $BA_1 : CA_1$.

Poznámka. Jsou-li dané úsečky a, b příliš veliké, je možno je zmenšit ve vhodném libovolně zvoleném poměru.

Příklad 7. Do kružnice $k = (O; 40)$ vepište $\triangle ABC$ [$AB = 45$; $\sphericalangle ABC = 120°$]. Na polopřímce OA určete bod M ($OM = 80$). Bodem M veďte přímku $m \perp OA$. Do kružnice k pak vepište $\triangle A_1B_1C_1$ tak, aby se dvojice přímek ($\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{A_1B_1}$), ($\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{B_1C_1}$) a ($\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{C_1A_1}$) protínaly po dvou na přímce m.

Rozbor. Protože přímka m nemá s kružnicí k žádný společný bod, budou podle věty 1 přímky AA_1, BB_1 a CC_1 procházet bodem ležícím uvnitř kružnice k a přímka m bude polárou tohoto bodu. Na obr. 39 je to bod P.

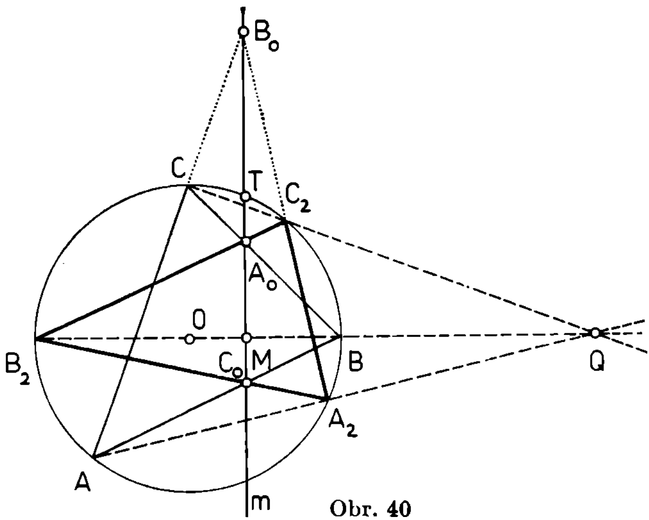


Obr. 39

Konstrukci bodu P provedeme tak, že nejdříve vedeme středem O kružnice k kolmici na přímku m, tj. přímku OM. Bod M je sdružený pól k hledanému pólu P. Ten pak sestrojíme například pomocí tečny vedené z bodu M ke kružnici k, jejíž dotykový bod leží na kolmici vedené pólem P na přímku OM. Potom nám polopřímky $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ a $\overrightarrow{CP}$ určí na kružnici k hledané vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$.

Takto zadaná úloha má vždy jedno řešení, pokud přímka m není tečnou kružnice k. To platí i v tom případě, že přímka m protne kružnici k. O tom nás přesvědčí řešení další úlohy.

Příklad 8. Do kružnice $k = (O;\ 40)$ vepište $\triangle ABC$ $[AB = 73;\ BC = 57]$. Na polopřímce OB určete bod M



Obr. 40

($OM = 15$) a veďte jím přímku $m \perp \overrightarrow{OB}$. Potom vepište do kružnice k trojúhelník $A_2B_2C_2$ tak, aby se dvojice přímek ($\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{A_2B_2}$), ($\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{B_2C_2}$) a ($\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{C_2A_2}$) protínaly po dvou na přímce m.

Rozbor. Jde o obdobu úlohy z příkladu 7 s tím rozdílem, že daný bod M je sdruženým pólem pólu Q ležícího ve vnější oblasti kružnice k.

Bod Q sestrojíme v tomto případě tak, že v průsečících přímky m s kružnicí k vedeme tečny k této kružnici a ty se protnou v hledaném bodě Q. Potom přímky QA, QB a QC určí na kružnici k vrcholy hledaného $\triangle A_2B_2C_2$.

Také takto zadaná úloha má právě jedno řešení, pokud přímka m není tečnou kružnice k.

Na závěr je třeba ještě připomenout toto:

Podle výsledku příkladu 4 zřejmě můžeme k danému trojúhelníku umístit do kružnice jemu opsané trojúhelník podobný k libovolně zvolenému trojúhelníku tak, aby spolu s daným vytvořili dvojici z relace $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$.

Ve cvičeních, která následují, jsou uvedeny ještě některé další úlohy jiného typu, než je ukázáno v příkladech. Vzhledem k shora uvedené připomínce je zde volba a možnost různých kombinací nevyčerpatelná.

Cvičení

1. Do kružnice $k = (O; 3)$ vepište $\triangle ABC$ [$a = BC = 5{,}5$; $c = AB = 4$]. Sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\triangle ABC\, \boldsymbol{p}\, \boldsymbol{p}\, \triangle A_1B_1C_1$ podle P[$AP = 2{,}5$; $BP = 2$].
2. Do kružnice o poloměru $r = 32$ mm vepište rovnoramenný $\triangle EFG$, jehož základna EF má velikost 40 mm. Sestrojte $\triangle E_2F_2G_2\, \boldsymbol{q}\, \triangle EFG$ podle pólu Q, je-li $FQ = 40$ mm, $GQ = 75$ mm.

3. Je dán $\triangle ABC$ [$AB = 6$; $BC = 3{,}5$; $\sphericalangle ABC = 60°$]. Sestrojte $\triangle A_2B_2C_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle pólu Q, který leží na prodloužení strany AB za bod B tak, že $BQ = 2$.
4. Trojúhelník RUT má velikosti stran v poměru $RU : UT : TR = 4 : 5 : 6$. Určete polohu pólu Q tak, aby platilo $\triangle RUT \cong \triangle U_2R_2T_2 \wedge \triangle RUT\ \boldsymbol{q}\ \triangle R_2U_2T_2$ podle Q.
5. Je dán $\triangle ABC$ [$AB = 5$; $r = 3$; $v_c = 4$], kde r je velikost poloměru kružnice opsané a v_c velikost výšky příslušné ke straně AB. Bod C_1 (případně C_2) půlí oblouk $\widehat{AB}$ kružnice $\triangle ABC$ opsané a vzdálenost pólů P (případně Q) od přímky AB má velikost $d = \frac{1}{2} v_c$. Sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle P (případně $\triangle A_2B_2C_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle Q).
6. Do kružnice o poloměru $r = 3$ cm vepište pravidelný pětiúhelník. Dva jeho sousední vrcholy označte A, B a zbývající tři vrcholy C_1, A_1, B_1 v libovolném pořadí (půjde-li o relaci $\boldsymbol{q}$, změňte indexy na A_2, B_2). Utvořte všechny dvojice [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$, případně [$\triangle ABC$, $\triangle A_2B_2C_2$] tak, aby všechny možné obměny v pořadí vrcholů C, A_1, B_1 nebo C, A_2, B_2 byly vyčerpány. Zapište všechna výsledná pořadí šesti bodů na opsané kružnici.
7. Neleží-li pól P nebo Q na žádné straně $\triangle ABC$ ani na jejich prodloužení, neleží ani na žádné straně $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ z relací $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ ani na jejich prodloužení. Dokažte!
8. Trojúhelník EFG je dán velikostmi stran, a to: $EF = 7$ cm, $FG = 5$ cm, $GE = 6$ cm. Pól P leží na straně EF tak, že $EP : FP = 3 : 2$. Sestrojte dvojici $\triangle E_1F_1G_1\ \boldsymbol{p}\ \boldsymbol{p}\ \triangle EFG$ podle P, aniž narýsujete kružnici $\triangle EFG$ opsanou.
9. Základna rovnoramenného $\triangle ABC$ má velikost $AB = 3$ cm a jeho ramena $AC = BC = 5$ cm. Na prodloužení strany AB za bod B leží pól Q tak, že $AQ : BQ = 7 : 5$. Sestrojte dvojici [$\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle ABC$] $\in \boldsymbol{q}$ podle Q, aniž narýsujete kružnici $\triangle ABC$ opsanou.
10. Trojúhelníky $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle P mohou být navzájem shodné nebo neshodné, avšak nemohou být podobné s poměrem podobnosti různým od 1. Odůvodněte!
11. Upravte text úlohy 10 takto: Existuje dvojice [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle P taková, že $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Ukažte na rozdíly v textu a uvažte, je-li takto upravený výrok pravdivý.

12. Rovnoramenný $\triangle K_2L_2M_2$ se základnou $K_2L_2 = 4$ cm je v relaci q podle pólu Q ležícího na přímce K_2L_2 s $\triangle KLM$ rovněž rovnoramenným se základnou KL. Sestrojte vrcholy M a M_2.
13. Trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ mají společnou kružnici opsanou $k = (O; 3{,}5)$, přičemž je $AB = 5$, $\sphericalangle ABC = 76°$, $A_1B_1 = 7$ a velikost výšky příslušné ke straně A_1B_1 je $v_1 = 2{,}5$. Umístěte tyto trojúhelníky do kružnice k tak, aby přímky $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ a $\overleftrightarrow{CC_1}$ procházely týmž bodem uvnitř společné kružnice opsané.
14. Úlohu 13 řešte tak, aby společný bod přímek $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ a $\overleftrightarrow{CC_1}$ byl vně kružnice opsané. Indexy se ovšem změní!
15. K danému trojúhelníku RTU vepsanému do kružnice $k = (O; 3{,}8)$, jehož vnitřní úhly mají velikosti $\sphericalangle TRU = 120°$, $\sphericalangle UTR = 45°$, sestrojte rovnostranný trojúhelník
a) $\triangle R_1T_1U_1$ z relace p podle P,
b) $\triangle R_2T_2U_2$ z relace q podle Q.
16. Je dán rovnostranný $\triangle ABC$. Sestrojte pravoúhlý rovnoramenný $\triangle A_2B_2C_2$ z relace q podle Q.
17. Je dán $\triangle ABC$ s vnitřními úhly $\sphericalangle ABC = \beta = 40°$ a $\sphericalangle ACB = \gamma = 60°$ vepsaný do kružnice $k = (O; 3{,}5)$. Narýsujte dvojici $[\triangle A_1B_1C_1, \triangle ABC] \in p$ podle P tak, aby bylo $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \alpha$, $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \gamma$. Jaký je vztah mezi těmito trojúhelníky? Zapište!
18. Vyšetřete množinu všech pólů P určujících dvojice trojúhelníků $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ podle P takové, že vnitřní úhly $\triangle ABC$ mají velikosti $\alpha = 40°$ a $\beta = 65°$ a jim odpovídající vnitřní úhly $\triangle A_1B_1C_1$ velikosti $\alpha' = 60°$, $\beta' < 90°$.
19. Vyšetřete množinu všech pólů Q určujících dvojice trojúhelníků $[\triangle KLM, \triangle K_1L_1M_1] \in q$ podle Q, víte-li, že $KL = 6{,}5$; $LM = 4$ a $\sphericalangle KLM = 110°$ a současně je $\sphericalangle K_2L_2M_2 = 70°$ a $K_2L_2 \geqq 6{,}5$.
20. Sestrojte dvojici $[\triangle UHF, \triangle U_1H_1F_1] \in p$ podle P vepsanou do kružnice o poloměru $r = 4$ cm, jsou-li velikosti vnitřních úhlů $\sphericalangle UHF = 120°$, $\sphericalangle UFH = 25°$, $\sphericalangle U_1H_1F_1 = 100°$, $\sphericalangle F_1U_1H_1 = 25°$.
21. K trojúhelníku KMZ s vnitřními úhly velikostí $\sphericalangle KZM = 30°$, $\sphericalangle ZKM = 40°$ sestrojte $\triangle K_1M_1Z_1$ s vnitřním úhlem $\sphericalangle K_1M_1Z_1 = 130°$ z relace p podle pólu P, který půlí poloměr společné kružnice opsané.

22. Trojúhelník ABC je dán velikostmi stran: $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 7$ cm. Sestrojte všechny rovnoramenné $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ z relací p nebo q podle pólů P nebo Q ležících na přímce AB.

23. Opakujte úlohu 22, avšak slova „podle pólů ležících na přímce AB" nahraďte slovy „takové, že $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$ nebo $\overline{A_2B_2} = \overline{AB}$".

24. Je dán $\triangle K_1L_1M_1$ vepsaný do kružnice o poloměru $r = 3{,}5$, jehož strany mají velikosti $K_1L_1 = 4$ a $L_1M_1 = 3$. Narýsujte $\triangle KLM$, který je s daným trojúhelníkem v relaci p podle P a je pravoúhlý s odvěsnami, jejichž velikosti jsou v poměru $3 : 4$.

25. Do kružnice o poloměru $r = 4$ cm vepište dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in q$ podle Q tak, aby bylo $A_2B_2 = BC = 6{,}8$ cm, $B_2C_2 = 1/2\ AC = 2{,}5$ cm.

26. Narýsujte dvojici $[\triangle K_1L_1M_1, \triangle KLM] \in p$ podle P, kde $r = 3$, $\sphericalangle KLM = 60°$, $\sphericalangle LMK = 45°$ a současně je $K_1L_1 \parallel KL$, $L_1M_1 \parallel LM$.

27. Sestrojte dvojici $[\triangle EFG, \triangle E_1F_1G_1] \in p$ podle P nebo $[\triangle EFG, \triangle E_2F_2G_2] \in q$ podle Q, víte-li, že $EF = 48$ mm, $\sphericalangle EFG = \sphericalangle E_1F_1G_1$ nebo $\sphericalangle E_2F_2G_2 = 60°$, $\sphericalangle GEF = 45°$ a $E_1G_1 \perp EF$ nebo $E_2G_2 \perp EF$.

28. K danému $\triangle ABC$, kde $AB = 4{,}5$; $\sphericalangle ABC = 110°$, $BC = 6$, sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace p podle P pravoúhlý s přeponou B_1C_1 nebo $\triangle A_2B_2C_2$ rovněž pravoúhlý s přeponou B_2C_2.

29. K danému trojúhelníku HJK $[HJ = 7$, $JK = 6$, $KH = 5{,}5]$ narýsujte $\triangle H_1J_1K_1$ z relace p podle P, kde $H_1J_1 = J_1K_1 = 6$, a $\triangle H_2J_2K_2$ z relace q podle Q, kde $H_2J_2 = J_2K_2 = 5$.

30. Je dán $\triangle A_1B_1C_1$ z relace p podle P $[A_1B_1 = 4{,}5$; $\sphericalangle A_1B_1C_1 = 60°$ a poloměr opsané kružnice $r = 3]$. Narýsujte příslušný $\triangle ABC$ tak, aby bylo $AB = 5{,}5 \wedge AB \parallel A_1B_1$.

31. Dokažte pravdivost vět obrácených k větám 4 a 5.

32. Jsou dány velikosti některých vnitřních úhlů dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ podle P. Určete polohu pólu P:
a) $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $\alpha' = 50°$, $\beta' = 70°$;
b) $\alpha = 30°$, $\beta = 70°$, $\alpha' = 150°$, $\beta' = 20°$;
c) $\alpha = 80°$, $\alpha' = 110°$.

33. Jsou dány velikosti některých vnitřních úhlů dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2]$. Určete polohu pólu Q:
a) $\alpha = 80°$, $\beta = 60°$, $\alpha' = 50°$, $\beta' = 40°$;
b) $\alpha = 70°$, $\beta = 40°$, $\alpha' = 90°$, $\beta' = 60°$.

84. Je dán $\triangle KLM$ [$KL = 6$ cm, $LM = 7$ cm, $\sphericalangle KLM = 60°$] a přímka $p \perp KL$, jejíž vzdálenost od vrcholu L je 4,5 cm. Opište kružnici $\triangle KLM$ a do ní vepište $\triangle K'L'M'$ tak, aby se dvojice stran KL a $K'L'$, LM a $L'M'$, MK a $M'K'$ protnuly na dané přímce p.

85. Do dané kružnice vepište pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají velikosti v poměru 3 : 5!

86. Vrcholy trojúhelníků ABC a $A_1B_1C_1$ leží na společné kružnici opsané tak, že $AB_1 : CB_1 = 3 : 4$, $CA_1 : BA_1 = 4 : 7$. Určete poměr $BC_1 : AC_1$!

B. SLOŽENÉ RELACE

V první části této kapitoly jsme poznali základní vlastnosti relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$. Protože v dvojicích

$$[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p} \text{ a } [\triangle ABC,\ \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$$

jsou první složky shodné, můžeme relace $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ složit, a to ve dvou pořadích:

$$\triangle A_1B_1C_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle ABC\ \boldsymbol{q}\ \triangle A_2B_2C_2$$

nebo

$$\triangle A_2B_2C_2\ \boldsymbol{q}\ \triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1.$$

Tyto složené relace mezi $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ pak můžeme psát zjednodušeně:

$$\triangle A_1B_1C_1\ \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}\ \triangle A_2B_2C_2,$$
$$\triangle A_2B_2C_2\ \boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$$

nebo také

$$[\triangle A_1B_1C_1,\ \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q},$$

$$[\triangle A_2B_2C_2,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p}.$$

Víme dále, že tvar jednotlivých složek v relacích $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ závisí na poloze pólů P a Q. Můžeme proto v množině $\boldsymbol{M_T}$ utvořit nekonečně mnoho složených relací $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ nebo $\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p}$ tím, že budeme polohy pólů P a Q různě kombinovat. Tu se pak naskýtá otázka, existuje-li taková dvojice pólů P a Q, aby uvažované složené relace byly shodnosti

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2,\ \triangle A_2B_2C_2 \cong \triangle A_1B_1C_1.$$

Pokud takové dvojice pólů P a Q existují, budou relace $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p}$ zobrazením v $\boldsymbol{M}_T$. Protože prvky množiny $\boldsymbol{M}_T$ jsou všechny trojúhelníky vepsané do dané kružnice k, lze předpokládat, že uvažovaným zobrazením bude identita, otáčení nebo středová či osová souměrnost.

Ukážeme, že v úvahu připadá právě osová souměrnost.

Věta 10. *Je-li daný $\triangle ABC$ první složkou v relacích*

$$[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p} \text{ a } [\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q},$$

potom trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ jsou téhož smyslu a trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$ opačného smyslu.

Důkaz. Věta obsahuje dvě tvrzení.

a) Na obr. 9 leží pól P uvnitř $\triangle ABC$, z čehož plyne, že polopřímka $AA_1 \equiv AP$ odděluje body B a C, polopřímka $BB_1 \equiv BP$ body A a C, polopřímka CC_1 body A a B. Leží tedy vrcholy $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ na kružnici k v pořadí $A\ C_1\ B\ A_1\ C\ B_1$, takže trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ jsou téhož smyslu. (1.22)

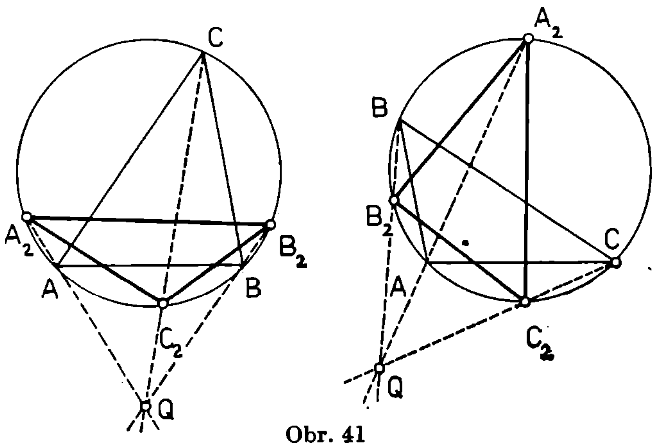
Na obr. 10 leží pól P v polorovině $\overrightarrow{ABC}*$, takže polopřímka $\overrightarrow{CC_1} \equiv \overrightarrow{CP}$ odděluje body A a B, B_1 a A_1, A a A_1, B_1 a B, odkud plyne toto pořadí: $A\ C\ B\ A_1\ C_1\ B_1$, neboli $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ jsou opět téhož smyslu. (1.23)

Podle (1.22) a (1.23) jsou trojúhelníky $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ vždy téhož smyslu, neboť cyklické záměny vedou k stejným závěrům.

b) Na obr. 41 vlevo leží pól Q uvnitř $\sphericalangle ACB$, takže polopřímka $\overrightarrow{CC_2} \equiv \overrightarrow{CQ}$ odděluje body A a B. Proto polopřímky $\overrightarrow{QA} \equiv \overrightarrow{QA_2}$ a $\overrightarrow{QB} \equiv \overrightarrow{QB_2}$ leží v opačných polorovinách $\overrightarrow{QCA}$ a $\overrightarrow{QCB}$. Jsou proto možná právě čtyři různá pořadí vrcholů $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$ na kružnici k:

$$CA_2AC_2BB_2,\ CAA_2C_2B_2B,\ CA_2AC_2B_2B,\ CAA_2C_2BB_2.$$

Ve všech čtyřech případech jsou $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$ smyslu opačného. (1.24)



Obr. 41

Na obr. 41 vpravo leží pól Q uvnitř úhlu vrcholového k $\sphericalangle BAC$. Zde polopřímka $\overrightarrow{QA_2} \equiv \overrightarrow{QA}$ odděluje body B a C, takže polopřímky $\overrightarrow{QB_2} \equiv \overrightarrow{QB}$ a $\overrightarrow{QC_2} \equiv \overrightarrow{QC}$ leží v opačných polorovinách $\overrightarrow{QAB}$ a $\overrightarrow{QAC}$. Odtud pak plyne jediné možné pořadí vrcholů na kružnici k: $A\ B_2\ B\ A_2\ C\ C_2$, neboli $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$ jsou opačného smyslu jako v případě (1.24). (1.25)

Tím je pravdivost věty 10 dokázána. Jaký však je význam této věty? Je-li $\triangle ABC$ téhož smyslu jako $\triangle A_1B_1C_1$ a opačného smyslu než $\triangle A_2B_2C_2$, musí být trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ smyslu opačného. Potom ovšem složená relace $\triangle A_1B_1C_1$ $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ $\triangle A_2B_2C_2$ v $\boldsymbol{M}_T$ nemůže být ani identitou, ani otáčením nebo středovou souměrností. Zbývá proto právě souměrnost osová.

Nyní už jde jenom o to, existuje-li vůbec taková dvojice pólů P a Q, aby bylo $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

Věta 11. *Mějme dvojici trojúhelníků* $\triangle A_1B_1C_1$ $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ $\triangle A_2B_2C_2$ *takovou, že je současně* $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$*; potom příslušné póly P a Q jsou sdružené póly vzhledem ke společné kružnici těmto trojúhelníkům opsané a přímka PQ je osou souměrnosti uvažované dvojice trojúhelníků.*

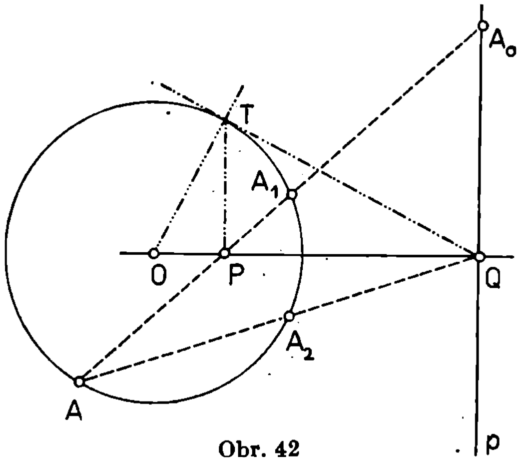
Důkaz si zjednodušíme tím, že nejdříve dokážeme platnost věty obrácené.

Na obr. 42 jsou body P a Q sdružené póly vzhledem ke kružnici k. Přímka AP protíná kružnici k v bodě A_1, přímka AQ v bodě A_2. Dále je $p \perp \overleftrightarrow{PQ}$ polára bodu P vzhledem ke kružnici k a A_0 průsečík přímky AA_1 s polárou p.

Z vlastností sdružených pólů P a Q plyne

$$(A\, A_1\, P\, A_0) = -1, \text{ neboli } \frac{PA_1}{PA} : \frac{A_0A_1}{A_0A} = -1.$$

To znamená, že úsečka AA_1 je body P a A_0 dělena harmonicky a také polopřímky $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QA_1}$, $\overrightarrow{QP}$ a $\overrightarrow{QA_0}$ tvoří harmonickou čtveřinu. Současně je $\sphericalangle PQA_0$ pravý, z čehož plyne, že polopřímky $\overrightarrow{QP}$ a $\overrightarrow{QA_0}$ jsou osami vedlejších úhlů, z nichž jeden je $\sphericalangle AQA_1$. Polopřímky $\overrightarrow{QA}$ a $\overrightarrow{QA_1}$ jsou proto souměrně sdruženy podle osy $\overleftrightarrow{PQ}$, a protože osa PQ prochází středem kružnice k, jsou podle ní souměrně sdruženy i body A_1 a A_2. (1.26)



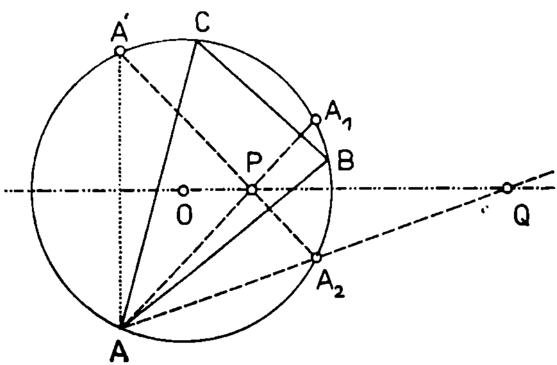
Obr. 42

Zobrazíme-li takto i zbývající dva vrcholy B a C libovolného $\triangle ABC$, budou podle (1.26) podle osy PQ souměrně sdruženy i dvojice vrcholů $[B_1, B_2]$ a $[C_1, C_2]$. Tím jsme dokázali, že existuje aspoň jedna dvojice pólů P a Q, která splňuje větu 11. Zbývá proto dokázat, že vedle dvojice sdružených pólů P a Q žádná jiná taková dvojice již neexistuje. Že tomu tak skutečně je, to plyne z vět 6 a 8, protože dvojicemi úhlů $[\alpha, \alpha']$, $[\beta, \beta']$ a $[\gamma, \gamma']$ je určen právě jeden pól P a jeden pól Q.

Přímým důsledkem věty 11 je věta další:

Věta 12. *Je-li v množině* $\boldsymbol{M}_T$ *dána trojice trojúhelníků* $\triangle A_1B_1C_1 \ \boldsymbol{p} \ \triangle ABC \ \boldsymbol{q} \ \triangle A_2B_2C_2$ *taková, že je současně* $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$, *potom existuje v množině* $\boldsymbol{M}_T$ *také* $\triangle A'B'C'$, *o němž platí*

$$\triangle A_2B_2C_2 \ \boldsymbol{p} \ \triangle A'B'C' \ \boldsymbol{q} \ \triangle A_1B_1C_1 \wedge$$
$$\wedge \ \triangle A'B'C' \cong \triangle ABC.$$



Obr. 43

Důkaz (obr. 43). Podle věty 11 jsou polopřímky $\overrightarrow{QA}$ a $\overrightarrow{QA_1}$ souměrně sdruženy podle osy $\overleftrightarrow{PQ}$. Protíná-li polopřímka $\overrightarrow{QA_1}$ kružnici k (souměrnou podle téže osy) v bodě A', jsou i body A a A' souměrně sdruženy podle osy $\overleftrightarrow{PQ}$. Na obr. 43 jsou vrcholy B, C, B', C' pro přehlednost opět vynechány. Zřejmě se však i na ně vztahuje věta 11, takže také dvojice trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ je souměrně sdružena podle téže osy. V této souměrnosti je bod P samodružný, takže jím procházejí dvojice přímek $\overleftrightarrow{A_2A'}$ a $\overleftrightarrow{A_1A}$, $\overleftrightarrow{B_2B'}$ a $\overleftrightarrow{B_1B}$, $\overleftrightarrow{C_2C'}$ a $\overleftrightarrow{C_1C}$. Rovněž bod Q je samodružný s obdobnými důsledky jako u bodu P.

Věty 11 a 12, protože jejich pravdivost vyplývá z vlastností sdružených pólů, mají několik bezprostředních důsledků, jichž lze s výhodou využít při konstrukcích i řešení některých úloh. Uveďme aspoň ty nejdůležitější:

1. Osa souměrnosti PQ dvojic $[\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2] \in \in \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ i $[\triangle ABC, \triangle A'B'C'] \in \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ prochází středem společné kružnice opsané uvažované čtveřici trojúhelníků.

2. V první části této kapitoly jsme se setkávali se situacemi, kdy bylo obtížné sestrojit oblouky množin všech pólů Q, když některý z rozdílů $|\alpha - \alpha'|$, $|\beta - \beta'|$ nebo $|\gamma - \gamma'|$ byl příliš malý, takže pól Q padl daleko mimo nákresnu. V tom případě je snazší sestrojit nejdříve sdružený pól P užitím součtů $\alpha + \alpha'$, $\beta + \beta'$ nebo $\gamma + \gamma'$ a potom teprve $\triangle A_2B_2C_2$ užitím osové souměrnosti.

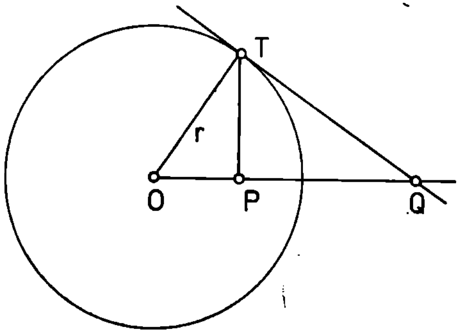
3. Jiné usnadnění konstrukcí poskytují známé vztahy mezi sdruženými póly:

a) Platí $\overline{OP}.\overline{OQ} = r^2$, kde $\overline{OP}$ a $\overline{OQ}$ jsou vzdálenosti sdružených pólů od středu kružnice opsané a r velikost jejího poloměru. To plyne z Euklidovy věty o odvěsně (viz obr. 44).
Sestrojíme-li k dané kružnici k a pólu Q sdružený pól P užitím tečen, je $\sphericalangle QTO$ pravý a v pravoúhlém $\triangle QTO$ platí

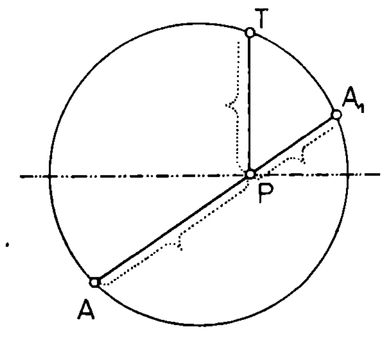
$$\overline{OP}.\overline{OQ} = \overline{OT}^2 = r^2. \tag{1.27}$$

b) Mocnost pólu P ke kružnici k je $\mu_1 = \overline{AP} . \overline{A_1P} = \overline{PT}^2 = v^2$, kde v značí velikost poloviny tětivy kružnice k vedené kolmo na přímku PQ v bodě P (obr. 45). V pravoúhlém $\triangle OPT$ je podle Pythagorovy věty

$$\mu_1 = v^2 = r^2 - \overline{OP}^2. \tag{1.28}$$



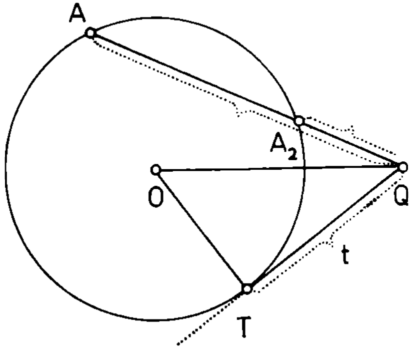
Obr. 44



Obr. 45

c) Mocnost pólu Q ke kružnici k je $\overline{QA} . \overline{QA_2} = \overline{QT}^2 = t^2$, kde t je velikost tečny vedené z pólu Q ke kružnici k (obr. 46).
V pravoúhlém $\triangle OQT$ je

$$\mu_2 = t^2 = \overline{OQ}^2 - r^2. \tag{1.29}$$



Obr. 46

d) Podle (1.28) a (1.29) pak je

$$\mu_2 - \mu_1 = t^2 - v^2 = \overline{PQ}^2. \tag{1.30}$$

e) $$\overline{PA} : \overline{PA_1} = \overline{QA} : \overline{QA_1}.$$

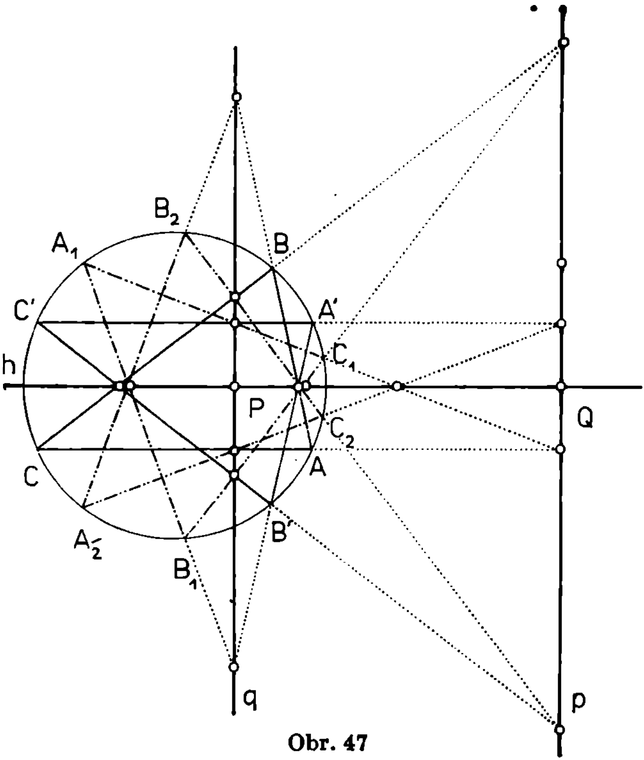
Tento vztah plyne z $\triangle AA_1Q$ (obr. 42), kde $\overleftrightarrow{PQ}$ je osou $\sphericalangle AQA_1$, a proto jeho strany AQ a A_1Q mají velikosti v poměru

$$\overline{AP} : \overline{A_1P}. \tag{1.31}$$

f) Vezmeme-li v úvahu ještě věty 1 a 2, vidíme podle obr. 47, že v trojúhelnících $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ se protínají odpovídající si strany na třech přímkách, a to:

— na přímce PQ dvojice z $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$, $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$,

— na poláře p pólu P z $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A'B'C'$ a $\triangle A_2B_2C_2$,



Obr. 47

— na poláře $\boldsymbol{q}$ pólu Q z $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A'B'C'$ a $\triangle A_1B_1C_1$.

Z mnoha dalších složených relací, které lze v množině $\boldsymbol{M}_T$ utvořit, stojí za zmínku ještě jedna, jejichž vlastností využijeme v dalších kapitolách.

Věta 13. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$, *nebo dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$, *potom existuje v množině* $\boldsymbol{M}_T$ *takový* $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, *jehož vrchol* $\bar{A}$ *je souměrně sdružen s vrcholem* A *podle osy úsečky* $\overline{B_1C_1}$ *nebo* $\overline{B_2C_2}$, *vrchol* $\bar{B}$ *s vrcholem* B *podle osy úsečky* $\overline{A_1C_1}$ *nebo* $\overline{A_2C_2}$ *a vrchol* $\bar{C}$ *s vrcholem* C *podle osy úsečky* $\overline{A_1B_1}$ *nebo* $\overline{A_2B_2}$, *přičemž přímky* $A_1\bar{A}$, $B_1\bar{B}$ *a* $C_1\bar{C}$, *nebo* $A_2\bar{A}$, $B_2\bar{B}$ *a* $C_2\bar{C}$ *procházejí týmž bodem.*

Důkaz. Zde musíme nejdříve dokázat, že platí věta obrácená k větě 9. Předpokládejme proto, že o dvou trojúhelnících $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ se společnou kružnicí opsanou platí podle věty 9

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = 1$$

a současně přímky AA_1, BB_1 a CC_1 neprocházejí týmž bodem (obr. 48). (1.32)

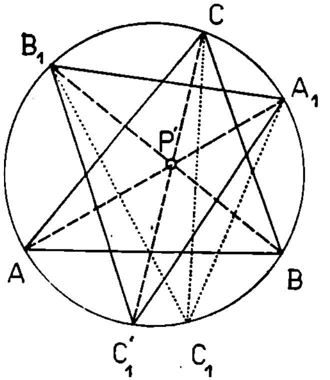
Nechť přímky AA_1 a BB_1 se protnou v nějakém bodě P'. Potom polopřímka CP' protne kružnici k v bodě $C_1' \neq C_1$. Podle věty 9 pak platí:

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1'}{AC_1'} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = 1$$

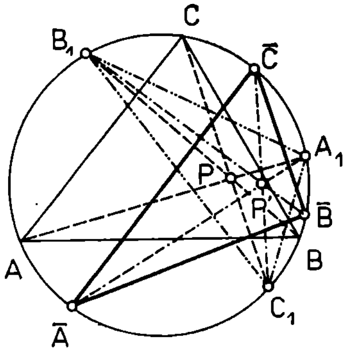
a podle předpokladu (1.32) také

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1'}{AC_1'} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = 1,$$

neboli $C_1 \equiv C_1'$ a také $P \equiv P'$, což je v rozporu s předpokladem (1.32), takže platí věta obrácená k větě 9, a to v celém rozsahu, protože v druhém tvrzení věty 9 jde o pouhou záměnu indexů.



Obr. 48



Obr. 49

Dále je na obr. 49 zobrazena trojice trojúhelníků $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle věty 13. Z konstrukce vyplývá, že

$$\begin{aligned} AB_1 &= \bar{A}C_1, BC_1 = \bar{B}A_1, CA_1 = \bar{C}B_1; \\ CB_1 &= \bar{C}A_1, AC_1 = \bar{A}B_1, BA_1 = \bar{B}C_1. \end{aligned} \qquad (1.33)$$

Dosadíme-li podle (1.33) do výrazu

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = 1,$$

dostaneme

$$\frac{\bar{A}C_1}{\bar{C}A_1} \cdot \frac{\bar{B}A_1}{\bar{A}B_1} \cdot \frac{\bar{C}B_1}{\bar{B}C_1} = 1,$$

a po úpravě

$$\frac{\bar{A}B_1}{\bar{C}B_1} \cdot \frac{\bar{B}C_1}{\bar{A}C_1} \cdot \frac{\bar{C}A_1}{\bar{B}A_1} = 1,$$

což podle obrácení věty 9 znamená, že přímky $\bar{A}A_1$, $\bar{B}B_1$ a $\bar{C}C_1$ procházejí týmž bodem $\bar{P}$, nebo přímky $\bar{A}A_2$, $\bar{B}B_2$ a $\bar{C}C_2$ bodem $\bar{Q}$. Přitom nevylučujeme možnost, že bod $\bar{P}$ leží vně kružnice $\triangle ABC$ opsané, nebo naopak bod $\bar{Q}$ uvnitř. Podrobněji o tom pojednáme až ve třetí kapitole.

Zde zatím omezíme své úvahy na případ, kdy pól P leží uvnitř $\triangle ABC$, takže všechny tři trojúhelníky, tj. $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, jsou téhož smyslu, protože dvojice vrcholů $[A, \bar{A}]$, $[B, \bar{B}]$ a $[C, \bar{C}]$ leží při konstrukci podle věty 13 na týchž obloucích opsané kružnice omezených vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$. V důsledku toho leží i pól $\bar{P}$ uvnitř $\triangle ABC$.

V tomto omezení budeme vztah mezi $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ zapisovat takto:

$$\triangle A_1B_1C_1 \,\bar{\boldsymbol{p}}\, \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} \text{ podle } P \text{, nebo}$$

$$[\triangle A_1B_1C_1,\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \bar{\boldsymbol{p}} \text{ podle } P$$

a také

$$\triangle A_1B_1C_1 \,\boldsymbol{p}\, \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} \text{ podle } \bar{P} \text{, nebo}$$

$$[\triangle A_1B_1C_1,\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } \bar{P}.$$

V relacích $(\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1)$ a $(\triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C})$ je opět jedna složka společná, a proto je můžeme složit dvěma způsoby:

$$\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

podle P,

$$\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle ABC = \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle ABC$$

podle $\bar{P}$.

Druhý zápis složené relace prozrazuje, že jde o symetrickou relaci, neboť věta 13 platí, i když zaměníme označení vrcholů $\triangle ABC$ za $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$. Vztah mezi velikostmi vnitřních úhlů uvažované trojice trojúhelníků pak vyjadřuje věta 14.

Věta 14. *Má-li trojice trojúhelníků ze složené relace*

$$\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} \text{ podle } P$$

vnitřní úhly po řadě velikostí α, β, γ; α', β', γ'; $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ a příslušný pól je vnitřní bod $\triangle ABC$, potom o velikostech těchto úhlů platí:

$$\bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha'),\ \bar{\beta} = 180° - (\beta + \beta'),$$
$$\bar{\gamma} = 180° - (\gamma + \gamma').$$

Důkaz. Na obr. 49 je

$$\bar{\alpha} = \sphericalangle \bar{B}\bar{A}\bar{C} = \sphericalangle A_1\bar{A}\bar{B} + \sphericalangle A_1\bar{A}\bar{C}. \qquad (1.34)$$

Podle věty 13 je

$$A_1\bar{B} = C_1B \Rightarrow \sphericalangle A_1\bar{A}\bar{B} = \sphericalangle C_1B_1B \equiv \sphericalangle C_1B_1P,$$
$$A_1\bar{C} = B_1C \Rightarrow \sphericalangle A_1\bar{A}\bar{C} = \sphericalangle B_1C_1C \equiv \sphericalangle B_1C_1P.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do (1.34), bude

$$\bar{\alpha} = \sphericalangle \bar{B}\bar{A}\bar{C} = \sphericalangle C_1B_1P + \sphericalangle B_1C_1P = 180° -$$
$$- \sphericalangle B_1PC_1$$

a podle věty 4

$$\bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha') .$$

Zbývající dvě tvrzení věty 14 vyplývají z cyklických záměn.

Právě dokázaná věta 14 má dva přímé důsledky:

1. $\alpha + \alpha' + \bar{\alpha} = 180°$, $\beta + \beta' + \bar{\beta} = 180°$, $\gamma + \gamma' + + \bar{\gamma} = 180°$. (1.35)

2. Vnitřní úhly v $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ mají velikosti (viz obr. 49):

$$\sphericalangle CPB_1 = \sphericalangle BPC_1 = \bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha'),$$
$$\sphericalangle APC_1 = \sphericalangle CPA_1 = \bar{\beta} = 180° - (\beta + \beta'),$$
$$\sphericalangle APB_1 = \sphericalangle BPA_1 = \bar{\gamma} = 180° - (\gamma + \gamma'),$$

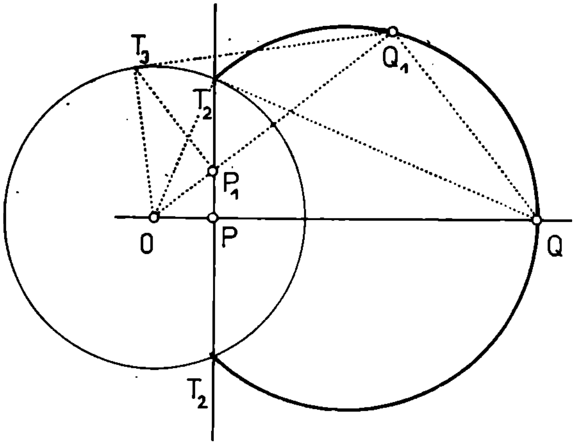
neboť například $\sphericalangle CPB_1$ je vedlejší k $\sphericalangle BPC = \alpha + \alpha'$, takže

$$\sphericalangle CPB_1 = 180° - (\alpha + \alpha') = \bar{\alpha}. \qquad (1.36)$$

Možnosti vytváření dalších složených relací nejsou dvěma typy uvedenými v této kapitole ještě zdaleka vyčerpány. Protože však pro následující úvahy s těmito dvěma typy dobře vystačíme, uzavřeme kapitolu několika příklady a cvičeními.

Příklad 1. Vyšetřete množinu všech vnějších pólů Q, jestliže s nimi sdružený pól P probíhá poláru pólu Q vzhledem ke kružnici k opsané danému $\triangle ABC$.

Řešení. Podle zadání sestrojíme libovolnou kružnici $k = (O; r)$ a přímku h jdoucí středem O kružnice k (obr. 50). Na té části přímky h, která je uvnitř kružnice k, zvolíme bod $P \neq O$. Nechť bod P je jedním z dvojice sdružených pólů P a Q! Vnější pól Q dostaneme tak, že v bodě P narýsujeme poláru $q \perp OP$. Její průsečíky



Obr. 50

s kružnicí k označíme T_1 a T_2 a v nich sestrojíme tečny ke kružnici k. Průsečík těchto tečen leží na přímce h a je vnějším pólem Q. Popsanou konstrukci nyní zopakujeme pro bod $P_1 \neq P$ zvolený na přímce q uvnitř kružnice k. Bodem P_1 vedeme kolmici na přímku OP_1 a ta protne kružnici k v bodě T_3. Tečna kružnice k v bodě T_3 se protne s přímkou OP_1 v bodě Q_1 vně kružnice k.

Trojúhelníky $\triangle OT_1Q$ a $\triangle OT_3Q_1$ jsou podle konstrukce pravoúhlé. Platí proto podle věty Euklidovy:

$$OP.OQ = OT_1^2 = r^2,$$
$$OP_1.OQ_1 = OT_3^2 = r^2,$$

takže

$$OP.OQ = OP_1.OQ_1 \text{ a také } OP : OP_1 =$$
$$= OQ_1 : OQ. \qquad (1.37)$$

Trojúhelníky $\triangle OPP_1$ a $\triangle OQ_1Q$ mají ještě společný úhel $\sphericalangle POP_1 \equiv \sphericalangle Q_1OQ$, takže podle (1.37) a věty *sus* o podobnosti trojúhelníků jsou podobné. Protože $\triangle OPP_1$ je pravoúhlý, je také $\triangle OQ_1Q$ pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu Q_1.

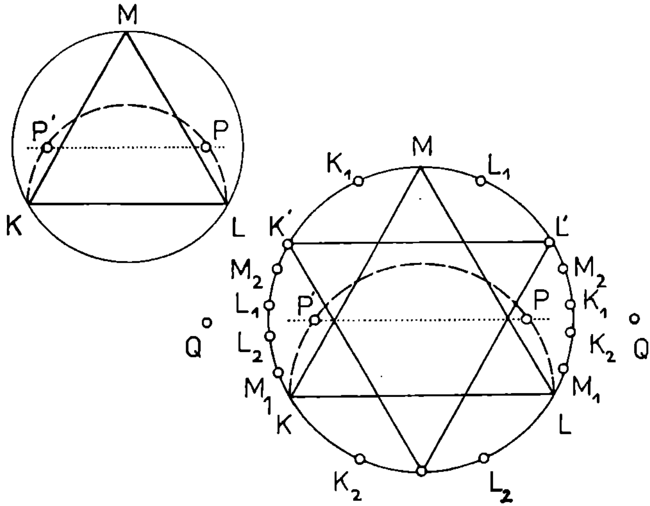
Dospěli jsme k závěru:

Hledanou množinou všech pólů Q je oblouk Thaletovy kružnice sestrojené nad průměrem $\overline{OQ}$, přičemž oblouk $\widehat{T_1OT_2}$ není částí této množiny.

Příklad 2. Je dán rovnostranný $\triangle KLM$. Sestrojte čtveřici trojúhelníků podle věty 12 z relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ podle sdružených pólů P a Q tak, aby vnější pól Q ležel na přímce rovnoběžné se stranou KL daného trojúhelníku a přímky KK_1 a LL_1 byly navzájem kolmé!

a) *Rozbor* (obr. 51). Protože $\triangle KLM$ z hledané čtveřice je dán, jde o to, abychom správně určili podle podmínek úlohy polohu aspoň jednoho z dvojice sdružených pólů. Víme, že oba póly leží na přímce $h \parallel KL$ jdoucí středem kružnice $\triangle KLM$ opsané. Přímky KK_1 a LL_1 procházejí pólem P. Protože mají být navzájem kolmé, bude $\sphericalangle KPL = 90°$. Zřejmě tedy leží pól P na Thaletově kružnici opsané nad průměrem $\overline{KL}$ a úloha bude mít nanejvýš dvě řešení. Jakmile známe polohu pólu P, je hledaná čtveřice trojúhelníků jednoznačně určena a můžeme ji sestrojit (obr. 51 vlevo).

b) *Konstrukce* (obr. 51 vpravo). Podle zadání sestrojíme kružnici k a vepíšeme do ní rovnostranný trojúhel-



Obr. 51

ník KLM. Jejím středem O vedeme přímku $h \parallel KL$ a nad průměrem $\overline{KL}$ opíšeme oblouk Thaletovy kružnice. Jeho průsečíky s přímkou h označíme P a P'. Příslušné vnější póly Q a Q' ani sestrojovat nemusíme; využijeme souměrnosti hledaných útvarů podle osy h. Především narýsujeme $\triangle K'L'M'$ souměrně sdružený s $\triangle KLM$ podle osy h. Všechny ostatní vrcholy hledaných trojúhelníků $\triangle K_1L_1M_1$ a $\triangle K_2L_2M_2$ určíme pomocí pólů P a P'.

c) *Důkaz.* Konstrukce je provedena podle věty 12 a podle definic 1 a 2. Tím je její správnost prokázána.

d) *Diskuse.* Již v rozboru jsme naznačili, že úloha může mít nanejvýš dvě řešení, protože přímka h a oblouk Thaletovy kružnice nad průměrem $\overline{KL}$ mohou mít nanejvýš dva společné body. Označme velikost úsečky $KL = a$. Potom poloměr Thaletovy kružnice má velikost $\frac{a}{2}$. Vzdálenost přímky h od středu úsečky KL je rovna třetině výšky rovnostranného trojúhelníku, tj. $\frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} . \sqrt{3} = \frac{1}{6} . 1{,}73 \ldots \doteq 0{,}29\, a$, což je méně než $\frac{a}{2}$. Thaletova kružnice proto protne přímku h právě ve dvou bodech, takže úloha má dvě a jenom dvě řešení. Obě dvě čtveřice trojúhelníků ovšem mají dvojici $\triangle KLM$ a $\triangle K'L'M'$ společnou.

Příklad 3. Je dán $\triangle ABC$ [$r = 4$ cm; $\gamma = 60°$; $v_c = 5$ cm; $AC > BC$]. Sestrojte dvojici $\triangle A_1B_1C_1\, \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ $\boldsymbol{q}\, \triangle A_2B_2C_2$ podle sdružených pólů P a Q, jejichž vzdálenost $PQ = 6$ cm a pól P je na ose $\sphericalangle BAC$ uvnitř $\sphericalangle BOC$ tak, aby daný trojúhelník byl střední složkou složené relace $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$.

Řešení. Tuto úlohu vyřešíme nejdříve algebraicky. Podle (1.27) je $OP . OQ = r^2$ a také $OQ = OP + PQ$. Po dosazení do prvního výrazu dostáváme kvadratickou rovnici: $\overline{OP} . (\overline{OP} + \overline{PQ}) = r^2$ a po úpravě: $\overline{OP}^2 + \overline{OP} . \overline{PQ} - r^2 = 0$.

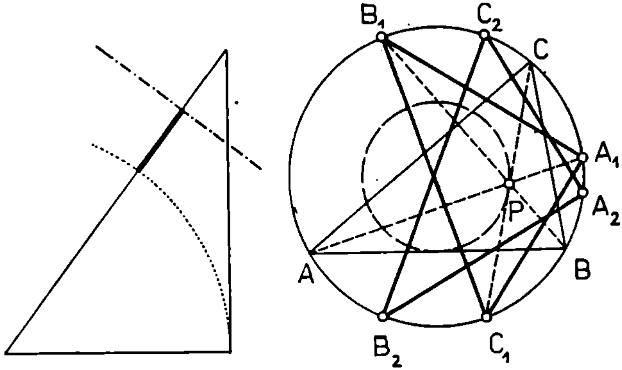
Tato rovnice má dva kořeny

$$\overline{OP}_{1.2} = \frac{-\overline{PQ} \pm \sqrt{\overline{PQ}^2 + 4r^2}}{2},$$

z nichž vyhovuje právě ten, který je kladný.

Příslušná pomocná konstrukce je provedena na obr. 52 vlevo, kde $\triangle PQM$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu Q a kde $\overline{QM} = 2r = 8$ cm, $\overline{PQ} = 6$ cm. Dále je $\overline{PQ'} = \overline{PQ}$ a podle Pythagorovy věty

$$PM = \sqrt{PQ^2 + 4r^2}.$$



Obr. 52

Protože $\overline{Q'M} = \overline{PM} - \overline{PQ}$, je $MN = \frac{1}{2}\,(\overline{PM} - \overline{PQ}) = \overline{OP}$.

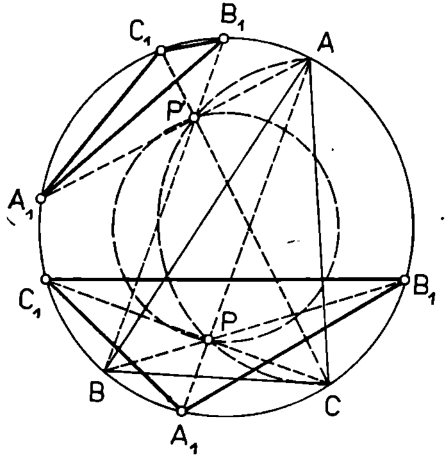
Nyní provedeme vlastní konstrukci (obr. 52 vpravo): Opíšeme-li kolem středu O kružnici poloměrem $\overline{OP}$, protne osu $\sphericalangle BAC$ ve dvou bodech P_1 a P_2, z nichž podmínkám úlohy vyhovuje právě bod P_1, protože leží uvnitř úhlu BOC. Další postup konstrukce je nasnadě.

Příklad 4. Je dán $\triangle ABC$ $[a = 6,\ r = 5,\ \beta = 60°]$. Sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\triangle ABC$ **p** $\triangle A_1B_1C_1$ podle pólu P, jehož mocnost ke kružnici $\triangle ABC$ opsané má hodnotu 16, a to tak, aby $\sphericalangle A_1B_1C_1$ měl velikost $\beta' = 30°$.

a) *Rozbor.* Především vidíme, že velikost strany AC je dána velikostí poloměru r a příslušného obvodového úhlu ABC. Množinou všech pólů P bude oblouk kružnice takový, že $\sphericalangle APC = \beta + \beta' = 90°$.

Dále je podle (1.28) $r^2 = 16 + \overline{OP}^2$. Dosadíme-li podle zadání $r = 5$, dostaneme velikost vzdálenosti pólu P od středu kružnice opsané $\overline{OP} = 3$ (obr. 53).

b) *Konstrukce.* Sestrojíme nejdříve kružnici opsanou, tětivu BC a $\sphericalangle ABC$. Nad tětivou AC jako nad průměrem opíšeme oblouk Thaletovy kružnice a kolem středu O kružnici poloměrem $\overline{OP} = 3$.



Obr. 53

Oblouky, které jsou množinami všech pólů P daných vlastností, se protly ve dvou bodech a to jsou hledané póly. Další postup určuje definice 1.

c) *Důkaz* vyplývá z rozboru a popisu konstrukce.

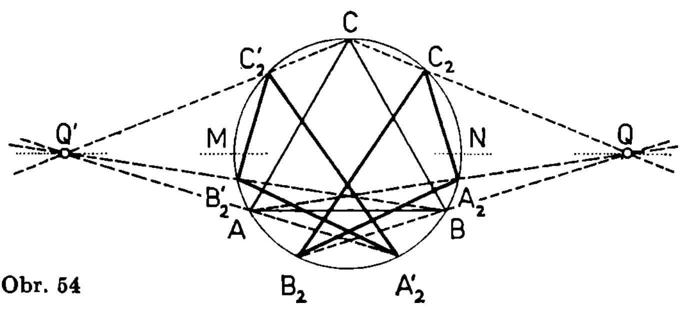
d) *Diskuse.* Počet řešení jsme mohli stanovit ještě před provedením konstrukce výpočtem. Protože jde o průsečíky dvou kružnic, musí o jejich poloměrech a středné platit:

$$r_1 + r_2 \geqq c \geqq |r_1 - r_2|.$$

V daném případě je $r_1 = 3$, $r_2 = 4{,}3$; $c = 2{,}5$. Tyto hodnoty splňují nerovnosti v uvedeném vztahu, takže úloha má právě dvě řešení.

Příklad 5. Do kružnice $k = (O; 3)$ vepište rovnostranný $\triangle ABC$. Sestrojte dvojici $[\triangle A_2B_2C_2 \; q \; \triangle ABC]$ podle pólu Q, který leží na přímce rovnoběžné se stranou AB daného trojúhelníku a platí-li o vzdálenosti pólu P sdruženého s daným pólem Q od středu opsané kružnice $\overline{OP} = \frac{2}{5} r$. Konstrukci však proveďte, aniž narýsujete pól P.

a) *Rozbor* (obr. 54). Podle zadání dělí bod P průměr



Obr. 54

kružnice k v poměru $\frac{PM}{PN} = -\frac{3}{7}$, kde MN je průměr rovnoběžný se stranou AB a bod P odděluje body M, O. Podle věty o sdružených pólech dělí póly P a Q průměr MN harmonicky, a proto $\frac{QM}{QN} = \frac{3}{7}$.

Tuto podmínku splňuje bod Q, o kterém platí

$$QM = \frac{3}{2} r = 4{,}5.$$

b) *Konstrukce.* Vyplývá z rozboru.

c) *Důkaz.* Je-li $OP = \frac{2}{5} r$, je $PM = \frac{3}{5} r \wedge PN = = \frac{7}{5} r$.

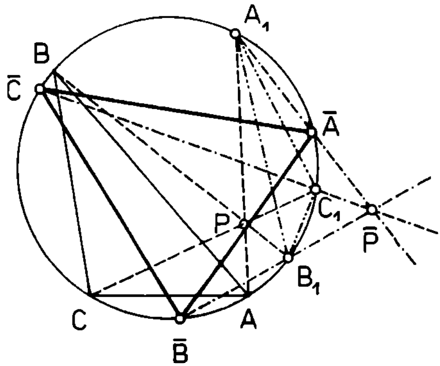
Potom $\frac{PM}{PN} = -\frac{3}{7}$, protože bod P odděluje body M a N.

Dále máme $\frac{QM}{QN} = \frac{3}{7} \wedge \overline{MN} = 2r \Rightarrow \overline{QN} = 2r + + \overline{QM}$. Dosadíme-li tuto hodnotu do $\frac{QM}{QN} = \frac{3}{7}$, bude

$$\frac{QM}{2r + QM} = \frac{3}{7} \text{ a odtud } \overline{QM} = \frac{3}{2} r.$$

d) *Diskuse.* Ze zadání $OP = \frac{2}{5} r$ nevyplývá, leží-li bod P na úsečce OM nebo ON. To znamená, že úloha má ještě jedno řešení, kde $\frac{PN}{PM} = -\frac{3}{7}$. Jsou tedy dvě řešení shodná.

Příklad 6. Zvolte libovolný tupoúhlý $\triangle ABC$ s tupým úhlem při vrcholu C a opište mu kružnici k. Potom narýsujte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle pólu P, který leží v polorovině $\overrightarrow{ABC^*}$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ z relace $\triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle věty 13. Přímky $A_1\bar{A}$, $B_1\bar{B}$ a $C_1\bar{C}$ se protínají v bodě $\bar{P}$, který leží vně kružnice k. Zdůvodněte, proč tomu tak je!



Obr. 55

Řešení (obr. 55). Přímky uvedené v zadání procházejí bodem $\bar{P}$ podle věty 13. To nemusíme znovu zdůvodňovat. Podstata úlohy tedy spočívá v tom, že máme dokázat, že jde o bod ležící ve vnější oblasti kružnice k, neboli že podle věty 10 jsou trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ opačného smyslu.

Z konstrukce vyplývá: $A\bar{A} \parallel B_1C_1 \wedge B\bar{B} \parallel A_1C_1$.

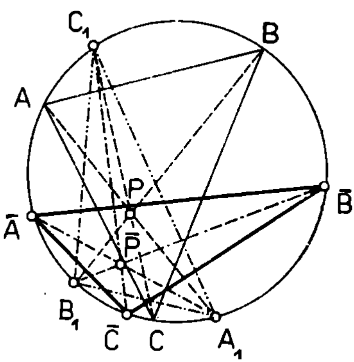
Mají proto lichoběžníky $A\bar{A}C_1B_1$ a $B\bar{B}C_1A_1$ společný vrchol C_1, takže přímky C_1C a $C_1\bar{C}$ oddělují body A a B

i body A_1 a B_1. Při konstrukci podle věty 13 nutně padne bod $\bar{A}$ do poloroviny $\overrightarrow{CC_1A}*$ a bod $\bar{B}$ do poloroviny $\overrightarrow{CC_1B}*$. Tím se pořadí vrcholů $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ oproti pořadí vrcholů $\triangle ABC$ změní, takže tyto trojúhelníky jsou opačného smyslu. Protože trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle$ $\triangle A_1B_1C_1$ jsou téhož smyslu, budou i trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ smyslu opačného a to jsme právě potřebovali dokázat.

Příklad 7. Je dán tětivový pětiúhelník $\bar{A}AC_1B\bar{B}$ vepsaný do kružnice $k = (O;\ 4\ \text{cm})$ takový, že $\bar{A}A = 3$ cm, $AC_1 = 2$ cm, $C_1B = 4{,}5$ cm a $B\bar{B} = 4$ cm. Na kružnici k určete body A_1, C, $\bar{C}$ a B_1 tak, aby platilo

$$\triangle ABC\ \mathbf{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\mathbf{p}}\ \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}\ \text{podle}\ P.$$

Řešení (obr. 56). Podle věty 13 bude $A_1C_1 \parallel B\bar{B}$ a $B_1C_1 \parallel A\bar{A}$. Přímky AA_1 a BB_1 se protnou v bodě P,



Obr. 56

přímky $\bar{A}A_1$ a $\bar{B}B_1$ v bodě $\bar{P}$. Potom přímka C_1P protne kružnici k v bodě C a přímka $C_1\bar{P}$ v bodě $\bar{C}$.

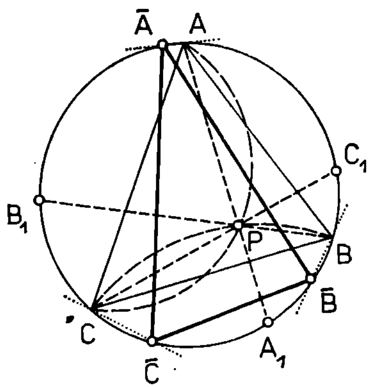
Příklad 8. Do kružnice $k = (O;\ 4\ \text{cm})$ vepište $\triangle ABC$ s vnitřními úhly velikosti $\alpha = 57°$, $\beta = 69°$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ s vnitřními úhly velikosti $\bar{\alpha} = 36°$, $\bar{\beta} = 78°$, a to tak, aby tyto trojúhelníky byly v relaci $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Rozbor. Složená relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ vznikla z relací $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle věty 13. Musíme proto nejdříve určit velikosti vnitřních úhlů společné složky $\triangle A_1B_1C_1$ v hledané složené relaci. Užijeme při tom věty 14, podle které je:

$$\bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha') \text{ a po dosazení}$$

$$36° = 180° - (57° + \alpha'),$$

takže $\alpha' = 87°$.



Obr. 57

$$\bar{\beta} = 180° - (\beta + \beta') \text{ a po dosazení}$$

$$78° = 180° - (69° + \beta'),$$

takže $\beta' = 33°$.

Konstrukce. Známe-li velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$, sestrojíme dvojici $\triangle ABC$ **p** $\triangle A_1B_1C_1$ užitím věty 4 a potom i trojúhelník $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ užitím věty 13.

Konstrukce je provedena na obr. 57.

Cvičení

1. Je dána kružnice $k = (O; 34 \text{ mm})$, její tětiva $A_2B_2 = 45$ mm a pól Q [$QB_2 \perp A_2B_2 \wedge QB_2 = 50$ mm]. Víte-li, že úsečka A_2B_2 je stranou $\triangle A_2B_2C_2$ ze složené relace $\triangle A_1B_1C_1$ **p** $\triangle ABC$ **q** $\triangle A_2B_2C_2$, kde $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$, narýsujte:
   a) příslušný pól P a strany AB, A_1B_1,
   b) umístěte vrchol C tak, aby bylo $C_1 \equiv C_2$ a vrchol C ležel na menším oblouku $\widehat{AB}$ kružnice opsané.
2. Úsečka $KL = 5{,}5$ cm je stranou $\triangle KLM$ vepsaného do kružnice $k = (O; 3{,}6)$ na níž leží bod M_1 [$KM_1 = 6$], který je vrcholem $\triangle K_1L_1M_1$ z relace $\triangle KLM$ **p** $\triangle K_1L_1M_1$. Dále je dán pól Q [$KQ = 10$, $LQ = 5$]. Narýsujte trojici trojúhelníků $\triangle K_1L_1M_1$ **p** $\triangle KLM$ **q** $\triangle K_2L_2M_2$ podle sdružených pólů P a Q.
3. Narýsujte dvojici $\triangle EFG$, $\triangle E_2F_2G_2$ [$EF = 4{,}2$; $\sphericalangle GEF = 42°$; $\sphericalangle GFE = 100°$; $\sphericalangle E_2G_2F_2 = \sphericalangle G_2E_2F_2 = 40°$]. *Návod.* Protože pól Q padne daleko mimo nákresnu, sestrojte nejdříve $\triangle E_1F_1G_1$ podle sdruženého pólu P.]
4. Leží-li pól Q na prodloužení strany AB trojúhelníku ABC za bod B, potom přímka obsahující stranu A_1B_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ ze složené relace $\triangle A_1B_1C_1$ **p** $\circ$ **q** $\triangle A_2B_2C_2$ podle sdružených pólů P, Q prochází pólem Q. Dokažte!
5. Nechť v složené relaci $\triangle K_1L_1M_1$ **p** $\triangle KLM$ **q** $\triangle K_2L_2M_2$ je $\triangle K_1L_1M_1 \cong \triangle K_2L_2M_2$ a příslušný pól P leží na straně AB. Potom strana A_2B_2 prochází pólem P. Dokažte!
6. Pravoúhlý $\triangle EFG$ s pravým úhlem při vrcholu F je vepsán do kružnice $k = (O; 3)$ a současně je $EF = 4$. Sdru-

žené póly P a Q leží na přímce h jdoucí středem O tak, že $h \equiv \overleftrightarrow{EG}$, $OP = 1$. Narýsujte dvojici $\triangle E_1F_1G_1$ $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ $\triangle E_2F_2G_2$ podle daných pólů, aniž sestrojíte pól Q.

7. O dvojici trojúhelníků $\triangle K_1L_1M_1$ [$K_1L_1 = 8$; $L_1M_1 = 6$; $M_1K_1 = 5{,}5$] a $\triangle K_2L_2M_2$ víme, že mají společnou kružnici opsanou, vrchol K_2 půlí menší oblouk L_1M_1 a jsou nepřímo shodné ($\triangle K_1L_1M_1 \cong \triangle K_2L_2M_2$). Umístěte tyto trojúhelníky tak, aby byly v relaci $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ podle pólu, jehož vzdálenost od vrcholu K_1 je $d = 5{,}2$.
8. Je dán $\triangle OAQ$, kde O je střed kružnice opsané $\triangle ABC$, bod A jeho vrchol a bod Q vnější pól. Sestrojte sdružený vnitřní pól a proveďte diskusi!
9. V trojúhelníku ROP je R vrchol $\triangle RUZ$, O střed kružnice $\triangle RUZ$ opsané a P vnitřní pól. Sestrojte sdružený vnější pól Q a proveďte diskusi!
10. Vrchol A daného $\triangle APQ$ je vrcholem $\triangle ABC$ a vrcholy P a Q sdruženými póly z relace $\triangle A_1B_1C_1$ $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ $\triangle A_2B_2C_2$. Sestrojte body A_1 a A_2 a proveďte diskusi.
11. Je dán $\triangle ALM$. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby přímka LM byla osou jeho strany BC a body L, M ležely na přímkách CA a CB. Proveďte diskusi!
12. Vrcholy $\triangle E_1E_2E$ jsou vrcholy trojúhelníků $\triangle E_1F_1G_1 \cong \triangle E_2F_2G_2$ ze složené relace $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$. Sestrojte příslušné póly P a Q a proveďte diskusi!
13. Narýsujte $\triangle EF_1G_2$ [$EF_1 = 3$; $F_1G_2 = 3{,}5$; $\sphericalangle EF_1G_2 = 100°$] a kružnici jemu opsanou. Nechť E je vrchol $\triangle EFG$, F_1 vrchol $\triangle E_1F_1G_1$ a G_2 vrchol $\triangle E_2F_2G_2$ ze složené relace $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ podle sdružených pólů P a Q. Určete polohu pólů P a Q tak, aby $\triangle EFG$ byl pravoúhlý rovnoramenný a $\sphericalangle E_2G_2F_2$ měl velikost $130°$. Předem stanovte počet řešení a potom některé narýsujte.
14. Vyšetřete množinu všech vnitřních pólů P, jestliže s ním sdružený pól Q vzhledem k dané kružnici probíhá přímku q kolmou na přímku PQ jdoucí bodem Q.
15. Do kružnice $k = (O; 5)$ umístěte tětivu $AA_1 = 9$. Na této tětivě určete pól P takový, aby bylo $\overline{AP} . \overline{A_1P} = 16$.
16. Do kružnice $k = (O; 4{,}5)$ umístěte tětivu $KK_2 = 7$. Na přímce KK_2 určete pól Q tak, aby bylo $\overline{QA} . \overline{QA_2} = 25$.
17. V dané kružnici $k = (O; 32\text{ mm})$ leží vnitřní pól P ve vzdálenosti $OP = 20$ mm od středu kružnice. Určete polohu sdruženého pólu Q.

18. V dané kružnici $k = (O; 42 \text{ mm})$ určete polohu pólu P tak, aby k němu sdružený vnější pól byl od středu O vzdálen 73 mm.
19. Narýsujte čtyřúhelník $KLQP$, kde $KL = 4$ je strana $\triangle KLM$, $LQ = 8$, $\sphericalangle KLQ = 135°$, $\sphericalangle LQP = 25°$ a body P, Q jsou sdružené póly vzhledem ke kružnici opsané $\triangle KLM$.
Potom určete polohu bodu M tak, aby trojúhelníky $\triangle K_1L_1M_1$, $\triangle K_2L_2M_2$ ze složené relace $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ podle daných pólů P a Q byly pravoúhlé s přeponami $K_1M_1 = K_2M_2$.
20. Je dána přímka h a na ní body P a Q $[PQ = 8]$. Vrchol A_1 $[PA_1 = 2{,}7;\ QA_1 = 6{,}6]$ patří trojúhelníku z relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle P, kde $\triangle ABC$ je rovnostranný. Sestrojte $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ tak, aby body P a Q tvořily dvojici sdružených pólů vzhledem ke kružnici opsané $\triangle ABC$.
21. Na dané přímce h leží body P a Q $[PQ = 7 \text{ cm}]$. Dále je dán bod $K \equiv K_2$, který je společným vrcholem trojúhelníků z dvojice $\triangle KLM\ \boldsymbol{q}\ \triangle K_2L_2M_2$ podle Q a $PK = 2{,}8$ cm. Sestrojte trojici $\triangle K_1L_1M_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle KLM\ \boldsymbol{q}$ $\boldsymbol{q}\ \triangle K_2L_2M_2$ tak, aby body P, Q tvořily dvojici sdružených pólů a současně bylo $K_1L_1 = L_1M_1 = 4$ cm.
22. Vrcholy trojúhelníků $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$ ze složené relace $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ podle sdružených pólů P a Q leží na společné kružnici opsané tak, že tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníku. Přitom není žádný vrchol šestiúhelníku vynechán. Příslušný $\triangle ABC$ má velikosti stran v poměru $4 : 5 : 6$. Stanovte nejdříve počet řešení a potom některé narýsujte!
23. Je dán $\triangle EFG$ $[EF = 8{,}5;\ FG = 6{,}4;\ GE = 5{,}2]$. V složené relaci $\triangle E_1F_1G_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle EFG\ \boldsymbol{q}\ \triangle E_2F_2G_2$ je $\triangle E_1F_1G_1$ rovnostranný a $\triangle E_2F_2G_2$ pravoúhlý rovnoramenný s pravým úhlem při vrcholu E_2. Sestrojte!
24. Narýsujte trojici $\triangle K_1L_1M_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle KLM\ \boldsymbol{q}\ \triangle K_2L_2M_2$ podle P a Q tak, aby všechny tři trojúhelníky byly pravoúhlé rovnoramenné s pravými úhly při vrcholech K, L_1, M_2.
25. Na kružnici $k = (O;\ 4)$ zvolte body A, $\bar{A}$, C, $\bar{C}$, $\bar{B}$, B v tomto pořadí a potom sestrojte trojici $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}\ \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle ABC$.
26. Na kružnici $k = (O;\ 4{,}5)$ zvolte body A, $\bar{B}$, $\bar{A}$, B, $\bar{C}$, C v uvedeném pořadí a potom sestrojte trojici $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}\ \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle ABC$.

27. Je-li $\alpha' = 37°48'12''$, $\beta = 79°32'56''$, $\bar{\gamma} = 103°14'42''$, $\gamma = 12°46'27''$, udejte velikosti zbývajících vnitřních úhlů z trojice $\triangle ABC$ **p** $\triangle A_1B_1C_1$ $\bar{\mathbf{p}}$ $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

28. Jsou dány velikosti úhlů $\alpha = 56°24'$, $\beta' = 108°32'$, $\bar{\gamma} = 49°43'$. Zvolte ještě velikost úhlu α' tak, aby trojice (α, β, γ); $(\alpha', \beta', \gamma')$; $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ byly vnitřními úhly z relace $\triangle ABC$ **p** $\triangle A_1B_1C_1$ $\bar{\mathbf{p}}$ $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Můžeme tuto velikost α' volit libovolně?

29. Vyšetřete množinu všech pólů Q sdružených s pólem P, který probíhá oblouk nad úsečkou AB s obvodovým úhlem $\sphericalangle APB = \gamma + \gamma'$, jsou-li γ a γ' velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků z relace $\triangle ABC$ **p** $\triangle A_1B_1C_1$ podle P.

30. Opakujte úlohu 29 pro množinu pólů P sdružených s pólem Q, který probíhá oblouk nad úsečkou AB s příslušným obvodovým úhlem $\sphericalangle AQB = \gamma - \gamma'$.

KAPITOLA 2

ZVLÁŠTNÍ POLOHY PÓLŮ P A Q

A. STŘEDY KRUŽNIC UVNITŘ A VNĚ VEPSANÝCH*)

V první kapitole jsme ukázali, že pólem v relacích $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ může být libovolný bod vnitřní či vnější oblasti kružnice opsané $\triangle ABC$. A tu se naskýtá otázka, objeví-li se nějaké nové vztahy, jestliže pólem bude některý ze zvláštních bodů $\triangle ABC$, například střed kružnice vepsané, průsečík výšek, těžiště apod.

Obrátíme nejdříve pozornost ke středům kružnic uvnitř a vně vepsaných, které budeme nadále značit obvyklými znaky S, S_a, S_b a S_c.

Zvláštní poloha středu kružnice $\triangle ABC$ vepsané S vede přímo k vyslovení první věty:

Věta 15. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S, *kde* S *je střed kružnice* $\triangle ABC$ *uvnitř vepsané, potom vrcholy* $\triangle A_1B_1C_1$ *půlí oblouky kružnice opsané* $\triangle ABC$ *ležící mezi jeho vrcholy.*

Důkaz. Je-li pól S středem kružnice $\triangle ABC$ uvnitř vepsané, potom leží na osách úhlů $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle CAB$ (obr. 58).

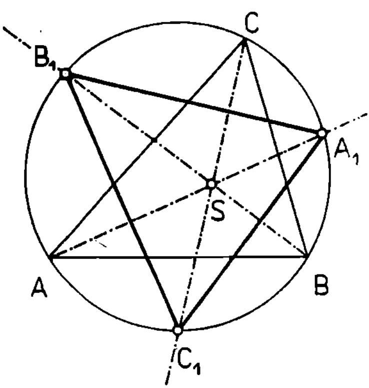
Shodují se proto nejenom úhly $\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle BCC_1$, ale i příslušné oblouky $\widehat{AC}_1 = \widehat{BC}_1$. Z cyklických záměn vycházejí i další rovnosti: $\widehat{BA}_1 = \widehat{CA}_1$ a $\widehat{CB}_1 = \widehat{AB}_1$.

*) viz připomínky v úvodu!

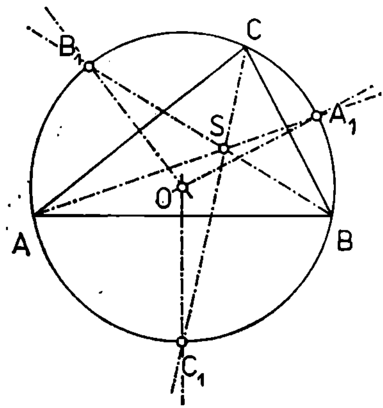
Přímým důsledkem pak je i další věta:

Věta 16. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S, *potom osy stran* $\triangle ABC$ *procházejí vrcholy* $\triangle A_1B_1C_1$.

Důkaz. Označme O střed kružnice trojúhelníkům $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ opsané (obr. 59).



Obr. 58



Obr. 59

Jestliže se podle věty 15 sobě rovnají oblouky $\widehat{AC}_1 = \widehat{BC}_1$, potom se rovnají i příslušné středové úhly $AOC_1 = \sphericalangle BOC_1$, takže přímka OC_1 je osou úsečky AB, neboť $\triangle AOB$ je rovnoramenný.

Z cyklických záměn plyne dále:

Přímka OB_1 je osou úsečky AC a přímka OA_1 osou úsečky BC.

Větu 16 bychom mohli zřejmě vyslovit i takto:

Je-li $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ *podle* S, *potom osy úhlů* *a osy stran $\triangle ABC$ se protínají na kružnici opsané ve vrcholech $\triangle A_1B_1C_1$.*

Toho využijeme při konstrukcích, neboť:

a) Máme-li sestrojenu kružnici trojúhelníku opsanou, snadno sestrojíme osy jeho vnitřních úhlů, protože kolmice vedené středem kružnice opsané na strany trojúhelníku určují na kružnici opsané body, jimiž procházejí osy jeho vnitřních úhlů.

b) Máme-li naopak střed kružnice trojúhelníku uvnitř vepsané, můžeme sestrojit vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\mathbf{p}$ podle S, aniž sestrojíme kružnici trojúhelníku opsanou. Stačí sestrojit osy stran a vyhledat jejich průsečíky s osami vnitřních úhlů.

Věta 17. *Mají-li vnitřní úhly trojúhelníků* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ *podle S velikosti po řadě α, β, γ a α', β', γ', potom platí:*

$$\alpha' = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90° - \frac{\alpha}{2},$$

$$\beta' = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 90° - \frac{\beta}{2},$$

$$\gamma' = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Důkaz. Z vlastností obvodových úhlů vyplývá (obr. 58):

$$\sphericalangle CC_1A_1 = \sphericalangle CAA_1 = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\sphericalangle CC_1B_1 = \sphericalangle CBB_1 = \frac{1}{2}\beta,$$

přičemž je

$$\sphericalangle CC_1A_1 + \sphericalangle CC_1B_1 = \sphericalangle A_1C_1B_1 = \gamma',$$

neboli

$$\gamma' = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Současně je $(\alpha + \beta) = 180° - \gamma$, takže

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(180° - \gamma) = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Zbývající dvě tvrzení jsou opět záležitostí cyklických záměn.

Bezprostředním důsledkem věty 17 je:

Věta 18. *Jsou-li α', β', γ' velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku $A_1B_1C_1$ z relace $\mathbf{p}$ podle S, potom jsou všechny tyto tři úhly ostré.*

Důkaz je nasnadě, protože podle věty 17 je

$$\alpha' = 90° - \frac{\alpha}{2} \wedge \beta' = 90° - \frac{\beta}{2} \wedge \gamma' = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

a to jsou vesměs ostré úhly.

Věta 19. *Je-li dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ podle S, potom vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$ jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle BSC$, $\triangle CSA$ a $\triangle ASB$.*

Důkaz. Na obr. 60 je v $\triangle SC_1B$ vnitřní úhel $\sphericalangle C_1SB$ vnějším úhlem $\triangle CSB$, kde

$$\sphericalangle SCB \equiv \sphericalangle C_1CB = \frac{\gamma}{2} \wedge \sphericalangle SBC \equiv \sphericalangle B_1BC = \frac{\beta}{2},$$

takže

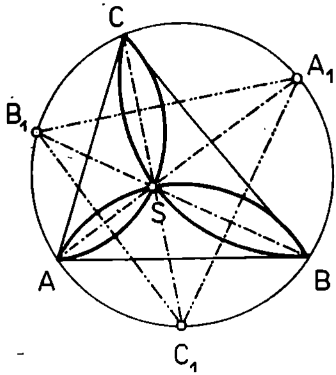
$$\sphericalangle C_1SB = \sphericalangle SCB + \sphericalangle SBC = \frac{1}{2}(\gamma + \beta). \quad (2.1)$$

Dále je

$$\sphericalangle SBC_1 = \sphericalangle SBA + \sphericalangle C_1BA, \quad (2.2)$$

přičemž

$$\sphericalangle SBA = \frac{1}{2}\beta \wedge \sphericalangle C_1BA = \sphericalangle C_1CA = \frac{1}{2}\gamma. \quad (2.3)$$



Obr. 60

Dosadíme-li podle (2.3) do (2.2), bude $\sphericalangle SBC_1 = \frac{1}{2}(\gamma + \beta)$ a podle (2.1) a (2.3) pak $\sphericalangle C_1SB = \sphericalangle C_1BS$, což znamená, že $\triangle BSC_1$ je rovnoramenný s rameny C_1S a C_1B a podle věty 15 také $C_1B = C_1A$.

Dokázali jsme, že $C_1B = C_1S = C_1A$, takže body B, S, A leží na kružnici opsané kolem středu C_1 poloměrem C_1S. Cyklickými záměnami dojdeme i k dalším dvěma tvrzením:

body C, S, B leží na kružnici opsané kolem středu A_1 poloměrem A_1S,

body C, S, A leží na kružnici opsané kolem středu B_1 poloměrem B_1S.

Věta 20. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S, *potom jsou vrcholy* $\triangle ABC$ *souměrně sdruženy se středem* S *kružnice* $\triangle ABC$ *vepsané podle stran* $\triangle A_1B_1C_1$, *a to vrchol* A *podle strany* B_1C_1, *vrchol* B *podle strany* A_1C_1 *a vrchol* C *podle strany* A_1B_1.

Důkaz (obr. 60). Jde o přímý důsledek věty 19, podle které je
$$C_1S = C_1A \wedge B_1S = B_1A\,.$$
Podle toho jsou trojúhelníky $\triangle ASC_1$ a $\triangle ASB_1$ rovnoramenné a souměrné podle osy B_1C_1. Totéž platí o trojúhelnících $\triangle BSC_1$ a $\triangle BSA_1$, $\triangle CSA_1$ a $\triangle CSB_1$, kde v prvním případě je osou souměrnosti přímka A_1C_1, ve druhém přímka A_1B_1. —

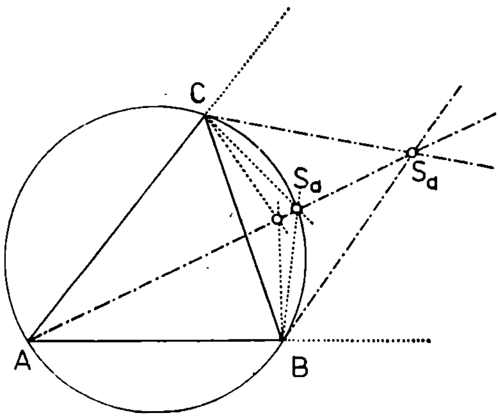
Tím jsme současně dokázali ještě jeden vztah, a protože jde o vztah základní důležitosti, vyjádříme ho samostatnou větou.

Věta 21. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S, *potom osy* AA_1, BB_1 *a* CC_1 *vnitřních úhlů* $\triangle ABC$ *obsahují výšky* $\triangle A_1B_1C_1$ *příslušné po řadě ke stranám* B_1C_1, A_1C_1 *a* A_1B_1, *takže pól* S *je průsečíkem výšek* $\triangle A_1B_1C_1$.

Důkaz byl již proveden, protože jsou-li přímky A_1B_1, B_1C_1 a C_1A_1 po řadě osami úseček CS, AS a BS, jsou na ně kolmé, takže:
$$C_1C \equiv CS \perp A_1B_1 \wedge B_1B \equiv BS \perp A_1C_1 \wedge A_1A = \\ = AS \perp B_1C_1.$$

To znamená, že přímky C_1C, B_1B a A_1A skutečně obsahují výšky $\triangle A_1B_1C_1$ a pól S je jejich průsečík.

K zajímavému výsledku dospějeme, utvoříme-li k relaci $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S relaci $[\triangle A_1B_1C_1, \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \bar{\boldsymbol{p}}$ podle $\bar{S}$ (viz větu 13). Tato nová relace je středovou souměrností podle středu O kružnice $\triangle ABC$ opsané. Příslušný důkaz je proveden v příkladech na konci této části druhé kapitoly.



Obr. 61

Obraťme nyní svou pozornost ke středům kružnic $\triangle ABC$ vně vepsaných. Zde je třeba si uvědomit, že středy kružnic libovolnému trojúhelníku vně vepsaných leží vždy vně jeho kružnice opsané. Půjde tedy v těchto případech vždy o relaci $\boldsymbol{q}$ podle S_a, nebo S_b či S_c. Tento obecně platný vztah dokážeme, aniž bychom vyslovovali zvláštní větu, a to sporem.

Předpokládejme proto, že uvažovaný střed, například

S_a, leží na kružnici opsané nebo uvnitř. V prvním případě bude v tětivovém čtyřúhelníku ABS_aC (obr. 61) platit $\sphericalangle BS_aC = 180° - \alpha$, v druhém případě $\sphericalangle BS_aC > > 180° - \alpha$, neboli

$$\sphericalangle BS_aC \geqq 180° - \alpha . \tag{2.4}$$

Protože střed kružnice trojúhelníku vně vepsané leží na osách vnějších úhlů, v našem případě při vrcholech B a C, bude

$$\sphericalangle S_aCB = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \wedge \sphericalangle S_aBC = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma),$$

kde α je velikost vnitřního úhlu při vrcholu A, β při vrcholu B a γ při vrcholu C.

V $\triangle BS_aC$ potom platí:

$$\sphericalangle BS_aC = 180° - (\sphericalangle S_aCB + \sphericalangle S_aBC) =$$

$$= 180° - \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)\right] = 90° - \frac{\alpha}{2},$$

takže

$$2 . \sphericalangle BS_aC = 180° - \alpha . \tag{2.5}$$

Vidíme hned, že nemůže současně platit (2.4) i (2.5), protože by potom bylo $2 . \sphericalangle BS_aC = \sphericalangle BS_aC$, a proto předpoklad (2.4) je nesprávný. Nemůže tedy střed S_a a v důsledku cyklických záměn ani středy S_b a S_c ležet na kružnici opsané nebo dokonce uvnitř této kružnice.

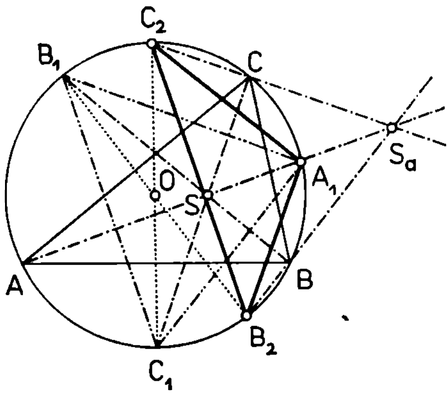
Tím jsme dokázali, že relace podle pólů S_a, S_b a S_c mají vlastnosti relací $\boldsymbol{q}$ podle Q zavedené definicí 2. Současně musíme vzít v úvahu, že střed kružnice trojúhelníku vně vepsané je průsečíkem osy jednoho vnitřního úhlu a os dvou vnějších úhlů. Půjde-li proto například o relaci $\boldsymbol{q}$ podle S_a, musíme vrcholy příslušného trojúhelníku značit A_1, B_2 a C_2, protože vrchol A_1 leží spolu se středem

S kružnice uvnitř vepsané na přímce AS_a, takže dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S a $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in$ $\in \boldsymbol{q}$ podle S_a mají jeden vrchol společný, tj. vrchol A_1. Je proto logické, že tomuto vrcholu ponecháme index 1.

Pro relaci $\boldsymbol{p}$ podle S jsme odvodili věty 15 až 21. Ověřme nyní, platí-li obdobné věty i pro relace $\boldsymbol{q}$ podle S_a, S_b a S_c!

Věta 22. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* S_a. *Potom vrcholy* $\triangle A_1B_2C_2$ *půlí oblouky kružnice opsané* $\triangle ABC$ *mezi jeho vrcholy.*

Důkaz (obr. 62). Polopřímky CC_1 a CS_a jsou osy vedlejších úhlů, takže $CC_1 \perp CS_a$, neboli $\sphericalangle C_1CS_a =$ $= 90°$. Protože $\sphericalangle C_2CC_1$ je vedlejší úhel k $\sphericalangle C_1CS_a$, je jeho velikost rovněž 90° a podle Thaletovy věty přímka C_1C_2 prochází středem O kružnice $\triangle ABC$ opsané. Podle věty



Obr. 62

16 je přímka $OC_1 \equiv OC_2$ osou strany AB $\triangle ABC$, a proto oblouky $\widehat{AC_2}$ a $\widehat{BC_2}$ jsou shodné. Obdobně je i $\widehat{AB_2} = \widehat{CB_2}$ a $\widehat{BA_1} = \widehat{CA_1}$, takže i přímka B_1B_2 prochází středem O.

Právě dokázaného vztahu využijeme s výhodou při konstrukcích tam, kde bude snazší místo $\triangle A_1B_2C_2$ sestrojit $\triangle A_1B_1C_1$ nebo naopak. Připomeňme už jenom, že věta 22 je obdobou věty 15 a její důsledky obdobou věty 16, což znamená, že osy stran $\triangle ABC$ procházejí vrcholy $\triangle A_1B_2C_2$. Rozdíly mezi $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_1B_2C_2$ z relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ podle S a S_a nebo S_b či S_c se projeví, budeme-li hledat věty analogické k větám 17 a 18.

Nejdříve dokážeme platnost věty obdobné větě 17.

Věta 23. *Má-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* S_a *velikosti vnitřních úhlů po řadě* α, β, γ *a* α', β', γ', *potom o těchto velikostech platí:*

$$\alpha' = 90° + \frac{\alpha}{2}, \beta' = \frac{\beta}{2}, \gamma' = \frac{\gamma}{2}.$$

Důkaz (obr. 62). Především uvažme, že $\sphericalangle A_1B_2C_2 = \sphericalangle A_1B_2C_1 - 90°$, protože $\sphericalangle C_2B_2C_1$ je obvodový úhel nad průměrem C_1C_2 podle důsledků věty 21. V tětivovém čtyřúhelníku $A_1B_2C_1B_1$ pak je $\sphericalangle A_1B_2C_1 = 180° - \sphericalangle C_1B_1A_1$. Víme, že $\sphericalangle C_1B_1A_1$ má velikost $90° - \frac{\beta}{2}$, takže $\sphericalangle A_1B_2C_2 = 180° - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) - 90° = \frac{\beta}{2}$.

Obdobně dostaneme velikost $\sphericalangle A_1C_2B_2 = \frac{\gamma}{2}$ a konečně i $\sphericalangle C_2A_1B_2 = 180° - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Cyklickými záměnami dojdeme k velikostem vnitřních úhlů v $\triangle A_2B_1C_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle S_b, kde

$$\alpha' = \frac{\alpha}{2}, \beta' = 90° + \frac{\beta}{2}, \gamma' = \frac{\gamma}{2}$$

a v $\triangle A_2B_2C_1$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle S_c, kde

$$\alpha' = \frac{\alpha}{2}, \beta' = \frac{\beta}{2}, \gamma' = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

Tím je věta 23 dokázána a zároveň poznáváme, jak se liší od věty 17, což se projeví v jejích důsledcích:

Věta 24. *Je-li $\triangle ABC$ společná první složka v relacích $\boldsymbol{q}$ podle S_a, S_b a S_c, potom druhé složky, tj. trojúhelníky $\triangle A_1B_2C_2$, $\triangle A_2B_1C_2$ a $\triangle A_2B_2C_1$ jsou trojúhelníky tupoúhlé s tupým úhlem při vrcholu, jehož index je 1.*

Důkaz je opět nasnadě, neboť úhly

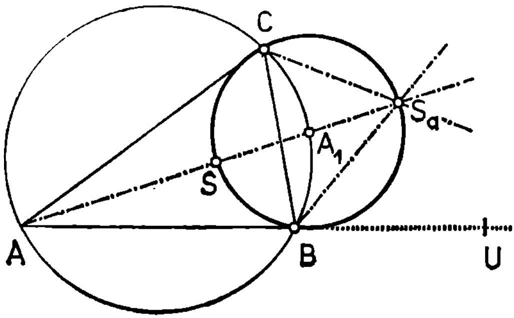
$$\alpha' = 90° + \frac{\alpha}{2}, \beta' = 90° + \frac{\beta}{2}, 90° + \frac{\gamma}{2} = \gamma'$$

jsou vesměs tupé, takže všechny ostatní úhly jsou ostré.

Nyní snadno rozšíříme platnost věty 19 na trojúhelníky z relací $\boldsymbol{q}$ podle S_a, S_b a S_c.

Věta 25. *Je-li dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S, potom vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$ jsou po řadě středy kružnic opsaných čtyřúhelníkům $BSCS_a$, $CSAS_b$ a $ASBS_c$, kde S_a, S_b a S_c jsou středy kružnic $\triangle ABC$ vně vepsaných.*

Důkaz (obr. 63). Musíme dokázat, že například střed S_a leží na kružnici jdoucí body B, C a S. Polopřímky BS a BS_a jsou osy vedlejších úhlů $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle CBU$, kde U je bod na prodloužení úsečky AB za bod B. $\triangle SBS_a$ je proto pravoúhlý s přeponou SS_a. Přímka SS_a při tom obsahuje bod A_1, který je podle věty 19 středem kružnice opsané $\triangle BSC$. Nutně je i středem přepony SS_a a bod S_a leží rovněž na kružnici opsané $\triangle BSC$. Vše další opět plyne z cyklických záměn.



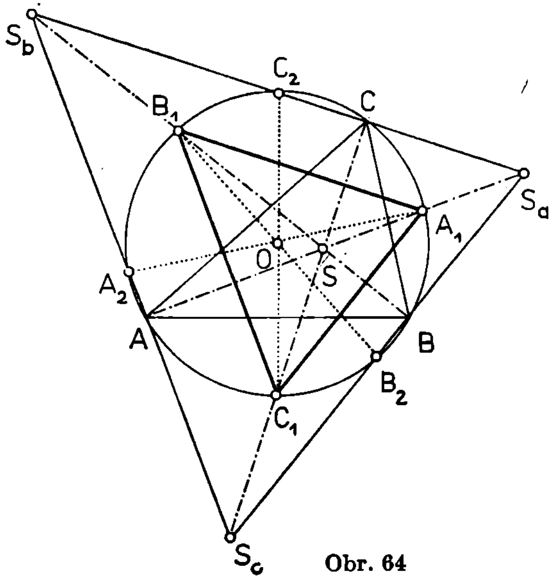
Obr. 63

Důsledkem věty 25 je důležitý vztah mezi trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S a $\triangle A_1B_2C_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle S_a, pokud mají společnou první složku $\triangle ABC$.

Věta 26. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S *a středy kružnic* $\triangle ABC$ *vně vepsaných* S_a, S_b *a* S_c, *potom trojúhelníky* $\triangle A_1B_1C_1$ *a* $\triangle S_aS_bS_c$ *jsou podobné s poměrem podobnosti* $k = 2$ *a jejich strany jsou rovnoběžné* ($A_1B_1 \parallel S_aS_b$, $B_1C_1 \parallel S_bS_c$ *a* $C_1A_1 \parallel S_cS_a$).

Důkaz (obr. 64). Jde o přímý důsledek věty 25, neboť: Je-li

$$\overline{SA_1} = \overline{A_1S_a}, \text{ potom } \overline{SS_a} = 2 \,.\, \overline{SA_1},$$
$$\overline{SC_1} = \overline{C_1S_c}, \text{ potom } \overline{SS_c} = 2 \,.\, \overline{SC_1},$$



Obr. 64

což znamená, že trojúhelníky $\triangle A_1SC_1$ a $\triangle S_aSS_c$ jsou stejnolehlé podle středu stejnolehlosti S a poměru stejnolehlosti $\varkappa = 2$. Odtud potom plyne rovnoběžnost jejich stran. Obdobně platí $\triangle A_1SC_1 \sim \triangle S_aSS_b$, $\triangle B_1SC_1 \sim \sim \triangle S_bSS_c$ při stejném poměru stejnolehlosti $\varkappa = 2$.

Věta 27. *Je-li $\triangle ABC$ první složkou a $\triangle A_1B_1C_1$ druhou složkou v relaci* **p** *podle S a současně trojúhelníky $\triangle A_1B_2C_2$,*

$\triangle B_1C_2A_2$ a $\triangle C_1A_2B_2$ druhými složkami v relacích q podle pólů S_a, S_b a S_c, potom společná kružnice opsaná těmto trojúhelníkům je Feuerbachovou kružnicí trojúhelníku $S_aS_bS_c$.

Důkaz (obr. 64). Víme, že Feuerbachova kružnice, jinak také zvaná kružnice devíti bodů, obsahuje paty výšek, středy stran a středy úseků výšek mezi vrcholem a průsečíkem výšek.

Podle věty 21 je střed S průsečíkem výšek $\triangle A_1B_1C_1$. Z toho plyne, že přímka obsahující body A, S, A_1 a S_a je kolmá na přímku B_1C_1, a protože tato přímka je podle věty 26 rovnoběžná s přímkou S_bS_c, je $AS_a \perp S_bS_c$ a úsečka AS_a je výškou trojúhelníku $S_aS_bS_c$ příslušnou ke straně S_bS_c. Další dvě výšky pak jsou analogicky úsečky BS_b a CS_c. Tím je důkaz věty 27 proveden, protože stačilo dokázat, že kružnice opsaná $\triangle ABC$ prochází patami výšek $\triangle S_aS_bS_c$, a proto je jeho Feuerbachovou kružnicí. Zbývajících šest bodů na této kružnici lze snadno identifikovat:

Podle věty 25 je $SA_1 = A_1S_a$, $SB_1 = B_1S_b$ a $SC_1 = C_1S_c$. Jinými slovy: Vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$ jsou po řadě středy úseček SS_a, SS_b a SS_c.

Jsou tedy body A_1, B_1 a C_1 po řadě středy úseků výšek $\triangle S_aS_bS_c$ mezi průsečíkem výšek S a jeho vrcholy.

Dále víme podle věty 22, že přímky A_1A_2, B_1B_2 a C_1C_2 procházejí středem kružnice $\triangle ABC$ opsané. Proto jsou $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ souměrně sdruženy podle tohoto středu, takže podle věty 26 platí:

$$A_2B_2 \parallel S_bS_a \wedge B_2C_2 \parallel S_cS_b \wedge C_2A_2 \parallel S_aS_c\,.$$

Jsou proto úsečky A_2B_2, B_2C_2 a C_2A_2 středními příčkami $\triangle S_aS_bS_c$, neboli body A_2, B_2 a C_2 středy jeho stran.

Ukážeme ještě, že platí věty obdobné větám 20 a 21.

Věta 28. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* S_a, *potom přímky* A_1S_a, B_2S_a *a* C_2S_a *obsahují výšky trojúhelníku* $A_1B_2C_2$, *přičemž pól* S_a *je průsečíkem těchto výšek.*

Důkaz (obr. 64). Protože přímka C_1C_2 prochází středem O kružnice $\triangle ABC$ opsané, je $\sphericalangle C_2A_1C_1 = 90°$, neboli

$$C_2A_1 \perp A_1C_1. \tag{2.6}$$

Podle věty 26 je současně $A_1C_1 \perp S_aS_c$, takže podle (2.6) je také $C_2A_1 \perp S_aS_c$. Je proto v $\triangle A_1B_2C_2$ výška příslušná ke straně C_2A_1 částí přímky S_aS_c. Obdobně také výška příslušná ke straně B_2A_1 je částí přímky S_aS_b, přičemž průsečík přímek S_aS_c a S_aS_b, tj. pól S_a, je průsečíkem výšek $\triangle A_1B_2C_2$.

Věta 28 je tedy obdobou věty 21.

Věta 29. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* S_a, *potom vrcholy* $\triangle ABC$ *jsou souměrně sdruženy s pólem* S_a *podle stran* $\triangle A_1B_2C_2$, *a to: Vrchol* A *podle strany* B_2C_2, *vrchol* B *podle strany* A_1C_2 *a vrchol* C *podle strany* A_1B_2.

Důkaz (obr. 64). Jde o přímý důsledek předešlé věty. Je-li totiž $C_2A_1 \perp S_aB \equiv S_aS_c$ a současně podle věty 25 $A_1B = A_1S_a$, potom jsou body S_a a B souměrně sdruženy podle přímky C_2A_1. Dále víme, že úsečka S_aA je výškou $\triangle S_aS_bS_c$ příslušnou ke straně S_bS_c a úsečka B_2C_2 je střední příčkou téhož trojúhelníku (viz věta 27). Je tedy také přímka B_2C_2 osou souměrnosti bodů A a S_a.

Zřejmě věta 29 je obdobou věty 20.

Existují ještě některé další vztahy, kterých lze s výhodou využít při konstrukcích. Některé z nich uvedeme v následujících příkladech, jimiž tuto část kapitoly uzavřeme.

Příklad 1. Rozhodněte, zda je pravdivé toto tvrzení: Existuje aspoň jedna trojice trojúhelníků $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_1B_2C_2$ takových, že o nich platí $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S a současně $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in$ $\in \boldsymbol{q}$ podle S_a, přičemž

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_1B_2C_2.$$

Řešení. Takové trojúhelníky neexistují, neboť podle věty 18 je $\triangle A_1B_1C_1$ ostroúhlý a podle věty 24 $\triangle A_1B_2C_2$ tupoúhlý. Proto nemůže být $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_1B_2C_2$.

Příklad 2. Je dána kružnice $k = (O;\ 3{,}5\ \text{cm})$ a na ní body A, B, B_1 takové, že $AB = 4$ cm, $\sphericalangle BAB_1 = 90°$. Určete na kružnici k body C, A_1 a C_1, aby trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ byly v relaci $\boldsymbol{p}$ podle S.

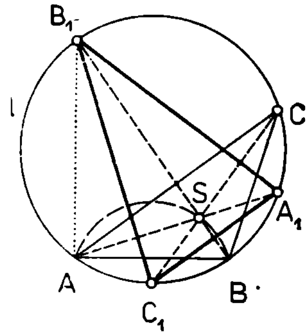
Rozbor. Předpokládejme, že existuje aspoň jedno řešení. Potom je střed menšího oblouku $\widehat{AB}$ již vrcholem C_1 hledaného $\triangle A_1B_1C_1$ a pól S je průsečík přímky BB_1 s kružnicí opsanou kolem bodu C_1 poloměrem C_1A.

Můžeme však usuzovat také takto: Daný bod B_1 je středem oblouku $\widehat{AC}$, takže $B_1A = B_1C$. Tím je určen $\triangle ABC$ a další postup je nasnadě.

Konstrukce je provedena na obr. 65 prvním způsobem. Máme-li střed S, potom přímky AS a C_1S protínají kružnici k v bodech A_1 a C.

Důkaz správnosti vyplývá z pravdivosti použitých vět.

Diskuse. Protože přímka BB_1 a kružnice opsaná kolem bodu C_1 poloměrem C_1A mají jeden bod společný, tj. bod B, mohou mít právě jeden další společný bod, takže úloha má nejvýše jedno řešení. Nutná podmínka ovšem je, aby bod B_1 ležel v polorovině $\overrightarrow{ABC}$, tj. na větším oblouku $\widehat{AB}$ tak, že $AB_1 < BB_1$. Tato podmínka je zde splněna, a proto úloha má právě jedno řešení.

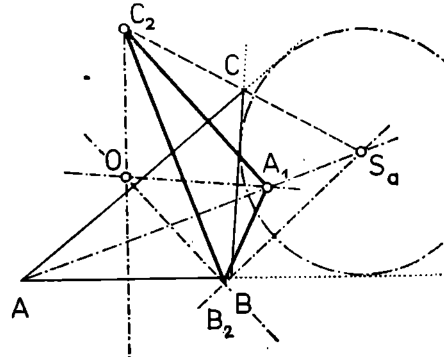


Obr. 65

Příklad 3. Zvolte body A, B, S_a tak, aby neležely v přímce. Nechť body A a B jsou vrcholy $\triangle ABC$ a bod S_a středem kružnice $\triangle ABC$ vně vepsané proti vrcholu A. Sestrojte dvojici $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ podle S_a, aniž narýsujete kružnici $\triangle ABC$ opsanou!

Řešení. Kružnice vně vepsaná se dotýká přímky AB. Můžeme ji proto sestrojit, protože máme její střed S_a. Přímky BC a AC pak jsou rovněž tečnami téže kružnice vně vepsané a jejich průsečík je vrchol C $\triangle ABC$. Podle věty 22 je vrchol A_1 hledaného $\triangle A_1B_1C_1$ průsečík přímky AS_a s osou strany BC, vrchol B_2 průsečík přímky BS_a s osou strany AC a vrchol C_2 průsečík přímky CS_a s osou strany AB trojúhelníku ABC.

Diskuse. Úloha bude mít řešení právě tehdy, když pata kolmice vedené bodem S_a na přímku AB padne na prodloužení úsečky AB za bod B. Kdyby padla dovnitř úsečky AB, ležel by střed S_a proti vrcholu C, což není



Obr. 66

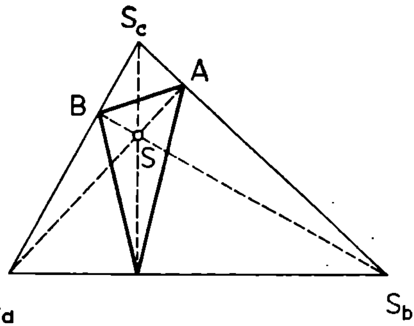
možné. Kdyby padla dokonce na prodloužení úsečky AB za bod A, ležel by bod S_a proti vrcholu B, což rovněž není možné. Další postup konstrukce už je závislý jenom na existenci tečen ke kružnici vepsané vedených body A a B. Protože přímka AB je tečnou této kružnice a ani jeden z bodů A nebo B není bodem dotyku, existují právě dvě další tečny, a to $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{BC}$, protože tečna AB je společná. Jde už jenom o to, nejsou-li některé z uvedených tečen navzájem rovnoběžné, a to být nemohou, protože by pak dotykový bod musel ležet mezi body A a B. Bude-li tedy splněna shora uvedená podmínka o poloze bodu S_a vzhledem k úsečce AB, bude mít tato úloha vždy právě jedno řešení.

Příklad 4. Je dán $\triangle S_aS_bS_c = [S_aS_b = 10,\ S_bS_c = 9,\ S_cS_a = 7]$. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby body S_a, S_b a S_c byly středy kružnic trojúhelníku ABC vně vepsaných.

Řešení. Užijeme věty 27. Sestrojíme Feuerbachovu kružnici v trojúhelníku $\triangle S_aS_bS_c$. To se dá provést dvěma způsoby. Nejjednodušší konstrukce spočívá v tom, že narýsujeme výšky tohoto trojúhelníku, jejichž paty jsou vrcholy hledaného $\triangle ABC$. Tato konstrukce je provedena na obr. 67.

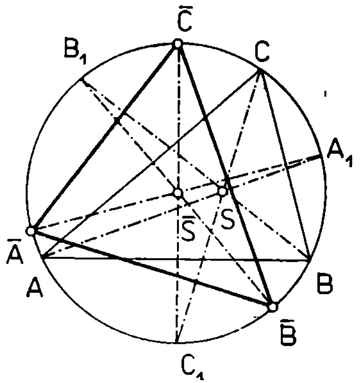
Můžeme ovšem volit i zdlouhavější postup. Vyhledáme středy stran a potom Feuerbachova kružnice jimi prochází a protne strany $\triangle S_aS_bS_c$ v hledaných vrcholech $\triangle ABC$.

Protože v každém trojúhelníku lze sestrojit právě jednu Feuerbachovu kružnici, má tato úloha právě jedno řešení.



Obr. 67

Příklad 5. K danému trojúhelníku ABC sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ z relace $[\triangle A_1B_1C_1, \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \bar{\boldsymbol{p}}$ podle S. Dokažte, že pól $\bar{S}$ je středem kružnice $\triangle ABC$ opsané a relace $\bar{\boldsymbol{p}}$ je středovou souměrností.



Obr. 68

Řešení. Popsaná konstrukce je provedena na obr. 68. Podle věty 14 mají vnitřní úhly $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ velikosti

$$\bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha'), \bar{\beta} = 180° - (\beta + \beta'),$$
$$\bar{\gamma} = 180° - (\gamma + \gamma'). \qquad (2.7)$$

Dále je podle věty 17 $\alpha' = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, $\beta' = 90° - \dfrac{\beta}{2}$, $\gamma' = 90° - \dfrac{\gamma}{2}$. Dosadíme-li tyto hodnoty do (2.7), dostaneme po úpravě:

$$\bar{\alpha} = 90° - \frac{\alpha}{2}, \bar{\beta} = 90° - \frac{\beta}{2}, \bar{\gamma} = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Jsou tedy vnitřní úhly trojúhelníků $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ shodné, a protože jde o trojúhelníky vepsané do téže kružnice, jsou tyto trojúhelníky shodné. Současně pak podle věty 13 procházejí přímky $A_1\overline{A}$, $B_1\overline{B}$ a $C_1\overline{C}$ týmž bodem, takže jde o středovou souměrnost se středem $\overline{S} \equiv O$.

Příklad 6. Je dána dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$
$\boldsymbol{p}$ podle S a středy kružnic $\triangle ABC$ vně vepsaných S_a, S_b, S_c.

Dokažte, že

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle S_aS_bS_c \sim \triangle S_aBC \sim \triangle AS_bC \sim \triangle ABS_c\,.$$

Řešení. První část tvrzení dokazovat nemusíme, vyplývá z věty 26.

Podle věty 27 jsou vrcholy $\triangle ABC$ patami výšek v $\triangle S_aS_bS_c$. Jsou proto trojúhelníky $\triangle S_aAS_b$ a $\triangle S_bCS_c$ podobné, protože oba jsou pravoúhlé a mají jeden další úhel, totiž $\sphericalangle S_aS_bS_c$, společný. Velikosti jejich stran jsou tedy úměrné a platí:

$$S_aS_b : S_bA = S_cS_b : S_bC\,,$$

neboli

$$S_aS_b : S_bS_c = S_bA : S_bC\,. \tag{2.8}$$

Také trojúhelníky $\triangle S_aS_bS_c$ a $\triangle AS_bC$ mají společný $\sphericalangle S_aS_bS_c$. Podle (2.8) jsou jejich strany co do velikosti úměrné, takže podle věty *sus* o podobnosti trojúhelníků je $\triangle S_aS_bS_c \sim \triangle AS_bC$.

Cyklickými záměnami dojdeme k dalším dvěma vztahům:

$$\triangle S_bS_cS_a \sim \triangle BS_cA \text{ a } \triangle S_cS_aS_b \sim \triangle CS_aB\,.$$

Příklad 7. Má-li $\triangle ABC$ vnitřní úhly velikostí $\alpha > \beta > \gamma$, potom vrcholy trojúhelníků $\triangle A_1B_2C_2$, $\triangle A_2B_1C_2$, $\triangle A_2B_2C_1$ z relací q podle S_a, S_b a S_c leží na společné kružnici opsané tak, že platí:
bod A_2 odděluje body S_b, A,
bod B_2 odděluje body S_a, B,
bod C_2 odděluje body S_a, C.
Dokažte a vypište všechny obměny pro různé vzájemné velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$.

Řešení. Dokážeme každé ze tří tvrzení zvlášť.
a) Bod A_2 odděluje body S_b, A:
Především víme, že tečna kružnice $\triangle ABC$ opsané sestrojená v bodě A tvoří se stranou AB úhel velikosti γ (úsekový úhel). Podle výsledku příkladu 6 je

$$\triangle S_bAC \sim \triangle B_1A_1C_1$$

a také

$$\sphericalangle S_bAC = \sphericalangle B_1A_1C_1 = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \tag{2.9}$$

podle věty 17.
Podle předpokladu je $\beta > \gamma$ tedy i $\beta + \beta > \gamma + \beta$, neboli

$$\beta > \frac{1}{2}(\gamma + \beta). \tag{2.10}$$

Máme proto podle (2.9) a (2.10) $\beta > \sphericalangle S_bAC$ a přímka S_bA protne kružnici opsanou $\triangle ABC$ mezi body A a S_b. (2.11)

b) Bod B_2 odděluje body S_a, B:
Tečna v bodě B tvoří se stranou BC úsekový úhel velikosti α. Současně je $\sphericalangle S_aBC = \sphericalangle A_1B_1C_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$.

Podle předpokladu je $\alpha > \gamma$ a odtud $\alpha > \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$, neboli $\sphericalangle S_aBC < \alpha$ a bod B_2 padne mezi body S_a, B. (2.12)

c) Bod C_2 odděluje body S_a, C:

Také tečna kružnice opsané $\triangle ABC$ vedená v bodě C tvoří se stranou AC úhel velikosti β a $\sphericalangle S_bCA = \sphericalangle B_1C_1A_1 = \frac{1}{2}(\beta + \alpha)$.

Podle předpokladu je $\alpha > \beta$ a odtud $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \sphericalangle S_bCA < \beta$, takže přímka S_bC protne kružnici opsanou $\triangle ABC$ až za bodem C, čili C_2 odděluje body S_a a C. (2.13)

Shrneme-li (2.11), (2.12) a (2.13), je důkaz úplný. Požadované obměny zapíšeme do tabulky:

Předpoklad:	Tvrzení o pořadí bodů na přímkách S_aA, S_aB, S_aC			
$\alpha > \beta > \gamma$	S_aB_2B	S_aC_2C	S_bA_2A	
$\alpha > \gamma > \beta$	S_aC_2C	S_aB_2B	S_cA_2A	
$\beta > \alpha > \gamma$	S_bA_2A	S_bC_2C	S_aB_2B	
$\beta > \gamma > \alpha$	S_bC_2C	S_bA_2A	S_cB_2B	(obr. 64)
$\gamma > \alpha > \beta$	S_cA_2A	A_cB_2B	S_aC_2C	
$\gamma > \beta > \alpha$	S_cB_2B	S_cA_2A	S_bC_2C	

Příklad 8. Je dána dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p}$ podle S. Aniž narýsujete středy kružnic $\triangle ABC$ vně vepsaných, sestrojte trojúhelníky $\triangle A_1B_2C_2$, $\triangle A_2B_1C_2$ a $\triangle A_2B_2C_1$ z relací $\boldsymbol{q}$ podle S_a, S_b a S_c a potom dokažte, že

a) tětivový šestiúhelník $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ má každé dvě protější strany rovnoběžné,

b) trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ jsou v relaci $\bar{\boldsymbol{p}}$ podle $S \equiv O$, kde O je střed kružnice $\triangle ABC$ opsané.

Řešení (obr. 64). Při konstrukci užijeme poznatku, že přímky A_1A_2, B_1B_2 a C_1C_2 procházejí středem O (viz např. důkaz věty 22). Odtud také vyplývá, že čtyřúhelníky $A_1C_2A_2C_1$, $C_2B_1C_1B_2$ a $B_1A_2B_2A_1$ jsou obdélníky, takže je

$$A_1C_2 \parallel A_2C_1 \wedge C_2B_1 \parallel C_1B_2 \wedge B_1A_2 \parallel B_2A_1.$$

Tím je důkaz a) proveden,

Druhý důkaz vyplývá z věty 26, neboť, jsou-li úsečky A_1B_1 a S_bS_a rovnoběžné, jsou rovnoběžné i úsečky A_1B_1 a C_2C, protože úsečka C_2C je částí úsečky S_bS_a. To však znamená, že čtyřúhelník A_1CC_2B a obdobně i čtyřúhelníky $B_1A_2AC_1$ a $C_1B_2BA_1$ jsou lichoběžníky vepsané do kružnice, a proto rovnoramenné. Z toho plyne

$$A_1C = C_2B_1 \wedge B_1A_2 = AC_1 \wedge C_1B_2 = BA_1.$$

To znamená, že podle věty 13 jsou trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ v relaci $\bar{\boldsymbol{p}}$ podle $S \equiv O$.

Cvičení

1. Sestrojte libovolný trojúhelník a opište mu kružnici. Potom bez použití kružítka sestrojte vrcholy trojúhelníku z relace $\boldsymbol{p}$ podle S.

2. K libovolně zvolenému trojúhelníku EFG sestrojte trojúhelník $E_1F_1G_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S, aniž narýsujete kružnici $\triangle EFG$ opsanou.
3. Velikosti vnitřních úhlů daného $\triangle ABC$ jsou v poměru $\alpha : \beta : \gamma = 5 : 6 : 7$.
   a) Určete velikosti těchto úhlů a velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S.
   b) Jaký je poměr velikostí vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$?
   c) Udejte obecný vzorec pro přímé stanovení poměru velikostí vnitřních úhlů druhé složky z relace $\boldsymbol{p}$ podle S.
4. Velikosti vnitřních úhlů druhé složky z relace $\boldsymbol{p}$ podle S jsou ve stejném poměru jako velikosti vnějších úhlů první složky. Dokažte!
5. Velikosti vnitřních úhlů v $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S jsou $\alpha' = 57°48'$, $\beta' = 78°36'$. Určete velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$.
6. Odvoďte vzorec pro výpočet velikostí úhlů $\sphericalangle ASB$, $\sphericalangle BSC$ a $\sphericalangle CSA$ v trojúhelníku ABC se středem S kružnice uvnitř vepsané, jsou-li velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ po řadě α, β, γ.
7. Výsledku úlohy 6 užijte při řešení této úlohy: Sestrojte $\triangle EFG$ [$EF = 7$; $\sphericalangle EGF = 40°$; $\varrho = 2$], kde ϱ je velikost poloměru kružnice uvnitř vepsané.
8. Sestrojte trojúhelník, je-li dána velikost poloměru kružnice opsané $r = 3{,}5$, velikost poloměru kružnice uvnitř vepsané $\varrho = 1{,}5$ a velikost jednoho vnitřního úhlu $\alpha = 70°$.
9. Je dána kružnice $k = (O;\ 36)$, na ní vrchol A $\triangle ABC$ a vrchol A_1 $\triangle A_1B_1C_1$ z relace [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle S. Sestrojte oba trojúhelníky, víte-li, že $AB = 42$.
10. Do kružnice $k = (O;\ 28)$ vepište dvojici [$\triangle KLM$, $\triangle K_1L_1M_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle S, víte-li, že $KL = 42$, $L_1M_1 = 30$.
11. Je dán $\triangle AB_1C_1$ [$AB_1 = 3$; $AC_1 = 4$; $\sphericalangle B_1AC_1 = 120°$]. Narýsujte [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle S.
12. Do kružnice opsané danému $\triangle EFG$ vepište $\triangle KLM$ tak, aby bylo $KE \perp LM$, $LF \perp KM$ a $MG \perp LK$.
13. Je dán $\triangle ABC$ a kružnice jemu opsaná. Bez použití kružítka sestrojte střed kružnice vně vepsané proti vrcholu A.
14. K danému $\triangle ABC$ sestrojte druhou složku $\triangle A_2B_1C_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle S_b, aniž narýsujete bod S_b.
15. Velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_2B_2C_1$ z relace $\triangle ABC$ $\boldsymbol{q}$ $\boldsymbol{q}$ $\triangle A_2B_2C_1$ podle S_c jsou v poměru $2 : 3 : 13$. Určete velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ a jejich poměr.

16. Je-li první složkou v relacích $\boldsymbol{q}$ podle S_a, S_b a S_c trojúhelník rovnoramenný, potom právě jedna ze tří druhých složek je opět rovnoramenný trojúhelník. Dokažte a uveďte, který.

17. Zvolte libovolný trojúhelník ABA_1 a na jeho straně AA_1 určete bod S takový, aby úsečka AB byla stranou první složky $\triangle ABC$ a bod A_1 vrcholem druhé složky $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S. Proveďte diskusi vzhledem k velikosti stran zvoleného trojúhelníku.

18. Zvolte libovolný trojúhelník EFG a opište mu kružnici. K sestrojení středů kružnice uvnitř vepsané a vně vepsané proti vrcholu E stačí narýsovat jedinou přímku a jedinou kružnici. Proveďte!

19. Narýsujte ostroúhlý trojúhelník HJK a sestrojte průsečík jeho výšek. Potom narýsujte kružnice:
$k_1 = (H; \overline{HV})$, $k_2 = (J; \overline{JV})$ a $k_3 = (K; \overline{KV})$. Tyto kružnice se po dvou protínají na kružnici opsané $\triangle HJK$. Odůvodněte!

20. Narýsujte různostranný tětivový čtyřúhelník $ABCD$, jehož vnitřní úhly při vrcholech A a C jsou pravé. Střed kružnice opsané označte M. Ukažte, že body A, B, C, D a M je jednoznačně určena dvojice $[\triangle ACE, \triangle A_1C_1E_1]$ a dvojice $[\triangle ACE, \triangle A_2C_2M]$ z relací $\boldsymbol{p}$ podle B a $\boldsymbol{q}$ podle D, kde B a D jsou středy kružnic uvnitř a vně vepsaných. Narýsujte a odůvodněte!

21. Sestrojte ostroúhlý různostranný trojúhelník EFG a průsečík jeho výšek označte V. Paty výšek jsou po řadě E_0, F_0, G_0. Trojúhelníku $E_0F_0G_0$ opište kružnici. Tato kružnice má se stranami $\triangle EFG$ ještě další tři společné body, a to středy stran. Narýsujte a odůvodněte!

22. Opakujte úlohu 21 pro různostranný tupoúhlý trojúhelník!

23. Známe-li $AB = 7$ velikost strany $\triangle ABC$ a velikost úhlu $20° = \sphericalangle AS_aB$, kde S_a je střed kružnice vně vepsané $\triangle ABC$ proti vrcholu A, potom můžeme řešit tyto úlohy:
 a) Určit velikosti úhlů γ a γ' v dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S.
 b) Narýsovat množinu všech středů S_a.
 c) Vypočítat velikosti všech dalších úhlů v trojúhelnících z relací $\boldsymbol{p}$ podle S a $\boldsymbol{q}$ podle S_a, je-li známa ještě velikost dalšího úhlu, například $\alpha = 80°$.

24. Jak se změní řešení úlohy 23, bude-li místo daného úhlu $\sphericalangle AS_aB$ známa velikost $\sphericalangle AS_cB = 20°$?

25. Trojúhelník $A_2B_1C_2$ z relace $\triangle ABC$ $\boldsymbol{q}$ $\triangle A_2B_1C_2$ podle S_b má velikosti vnitřních úhlů v poměru 2 : 9 : 4. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \in \boldsymbol{p}$ podle S.

26. Zvolte tři body A, B_1 a C_2, které neleží v přímce. Jaká musí být vzájemná poloha těchto tří bodů, aby jednoznačně určovaly $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S, jakož i trojúhelníky z relací $\boldsymbol{q}$ podle S_a, S_b a S_c?

27. Je dán $\triangle C_1S_aS_b$ $[C_1S_a = 7; S_aS_b = 10; C_1S_b = 9]$. Sestrojte příslušný $\triangle ABC$, víte-li, že C_1 je vrchol $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S a body S_a, S_b středy kružnic $\triangle ABC$ vně vepsaných.

28. Je dán $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ $[\bar{A}\bar{B} = 7{,}2; \bar{B}\bar{C} = 6{,}7; \sphericalangle \bar{C}\bar{B}\bar{A} = 70°]$ z trojice $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ $\bar{\boldsymbol{p}}$ $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle S. Narýsujte tuto trojici!

29. Na dané kružnici $k = (O; 3{,}8)$ zvolte tři navzájem různé body A, B_1, $\bar{C}$ a sestrojte trojici trojúhelníků $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ $\bar{\boldsymbol{p}}$ $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle S!

30. Sestrojte $\triangle ABC$ z relace $\triangle ABC$ $\bar{\boldsymbol{p}} \circ \boldsymbol{p}$ $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle S, je-li dán $\triangle A_1B_2C_2$ s tupým úhlem při vrcholu A_1.

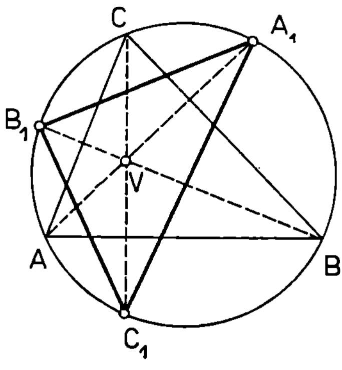
31. Vyšetřete množinu všech pólů Q sdružených s póly S, když vrchol C daného trojúhelníku ABC probíhá kružnici tomuto trojúhelníku opsanou. Patří do této množiny střed S_a kružnice vně vepsané?

Tuto část druhé kapitoly věnujeme dvojicím trojúhelníků z relací **p** nebo **q** utvořeným podle průsečíku výšek daného $\triangle ABC$, který budeme nadále značit vždy znakem V.

Musíme ovšem přes toto jednotné značení rozlišovat mezi trojúhelníky ostroúhlými a tupoúhlými, neboť u ostroúhlých půjde vždy o relaci **p** podle V, u tupoúhlých o relaci **q** podle V. Trojúhelníky pravoúhlé zde nepřipadají v úvahu, protože podle definic 1 a 2 nemohou póly P ani Q ležet na kružnici trojúhelníku opsané.

Pro zkoumání vlastností relací **p** nebo **q** podle V má základní význam věta, jejíž platnost teď dokážeme:

Věta 30. *Je-li $\triangle ABC$ první složkou a $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ druhou složkou v relaci* **p** *nebo* **q** *podle V, je pól V středem kružnice*



Obr. 69

a) *uvnitř vepsané* $\triangle A_1B_1C_1$, *když* $\triangle ABC$ *je ostroúhlý,*
b) *vně vepsané* $\triangle A_2B_2C_2$, *když* $\triangle ABC$ *je tupoúhlý.*

Důkaz provedeme pro každý typ trojúhelníku zvlášť.
a) Nechť tedy $\triangle ABC$ je ostroúhlý (obr. 69).
Především je $CC_1 \perp AB \wedge BB_1 \perp AC$, a proto $\sphericalangle AA_1C_1 = \sphericalangle ACC_1 = 90° - \alpha$, $\sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle ABB_1 = 90° - \alpha$, takže $\sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle AA_1C_1$, čili

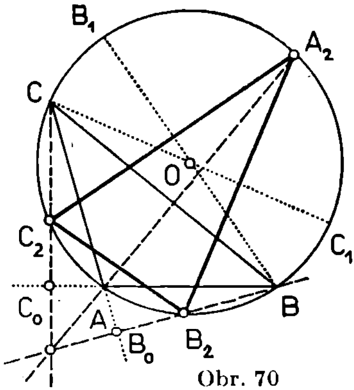
$$\text{přímka } AA_1 \text{ je osou úhlu } B_1A_1C_1. \qquad (2.14)$$

Z cyklických záměn pak plyne:

$$\text{přímka } BB_1 \text{ je osou } \sphericalangle A_1B_1C_1, \qquad (2.15)$$

$$\text{přímka } CC_1 \text{ je osou } \sphericalangle A_1C_1B_1. \qquad (2.16)$$

Pól V, kterým přímky AA_1, BB_1 a CC_1 procházejí, je podle (2.14), (2.15) a (2.16) středem kružnice uvnitř vepsané $\triangle A_1B_1C_1$, takže je $[\triangle A_1B_1C_1, \triangle ABC] \in \boldsymbol{p}$ podle S.



Obr. 70

b) Nechť $\triangle ABC$ je tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu A (obr. 70).

Označme O střed kružnice $\triangle ABC$ opsané a průsečíky přímek BO a CO s touto kružnicí po řadě B_1 a C_1; dále pak paty výšek $\triangle ABC$ na stranách AB a AC po řadě C_0 a B_0.

Protože přímky BB_1 a CC_1 procházejí středem O, je čtyřúhelník BCB_1C_1 obdélník, a proto

$$\sphericalangle C_1CB = \sphericalangle B_1BC. \tag{2.17}$$

Podle Thaletovy věty jsou trojúhelníky $\triangle B_1B_2B$ a $\triangle C_1C_2C$ pravoúhlé, takže je

$$\begin{aligned} B_1B_2 \perp BV \wedge CB_0 \perp BV &\Rightarrow B_1B_2 \parallel CB_0, \\ C_1C_2 \perp CV \wedge BC_0 \perp CV &\Rightarrow C_1C_2 \parallel BC_0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Podle (2.18) jsou čtyřúhelníky B_1B_2AC a C_1C_2AB lichoběžníky, a protože jsou vepsány do kružnice, jsou rovnoramenné; odtud dostáváme přímo:

$$\begin{aligned} AC_2 = BC_1 = CB_1 = AB_2 \Rightarrow \sphericalangle AA_2B_2 &= \\ = \sphericalangle AA_2C_2, \end{aligned} \tag{2.19}$$

a také

$$\sphericalangle AA_2B_2 = \sphericalangle BCC_1 \wedge \sphericalangle AA_2C_2 = \sphericalangle CBC_1.$$

Současně je $AA_2 \perp BC$, tedy podle (2.19) také

$$A_2B_2 \perp CC_1 \text{ a } A_2C_2 \perp BB_1 \tag{2.20}$$

Přímky BB_1 a CC_1 procházejí středem O, a proto podle (2.20) jsou body B_1 a C_1 středy oblouků $\widehat{A_2C_2}$ a $\widehat{A_2B_2}$, neboli: polopřímky B_2B_1 a C_2C_1 jsou osami vnitřních úhlů $\triangle A_2B_2C_2$.

Protože je současně $B_1B_2 \perp BV$ a $C_1C_2 \perp CV$, jsou přímky BV a CV osami vnějších úhlů $\triangle A_2B_2C_2$.

Dokázali jsme, že $[\triangle A_2B_2C_2, \triangle ABC] \in \boldsymbol{q}$ podle $S_a \equiv \equiv V$.

Význam právě dokázané věty 30 spočívá v tom, že vlastnosti relace $\boldsymbol{p}$ podle V nebo $\boldsymbol{q}$ podle V můžeme zkoumat na základě již známých vlastností relace $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ podle S, S_a, S_b či S_c. Toho dále využijeme.

Věta 31. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* V *nebo dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* V, *potom vrcholy* $\triangle ABC$ *půlí oblouky kružnice* $\triangle ABC$ *opsané mezi vrcholy* $\triangle A_1B_1C_1$ *nebo* $\triangle A_2B_2C_2$.

Důkaz. Užijeme-li věty 30 a podle ní zaměníme indexy u vrcholů trojúhelníků podle vět 15 a 22, dostaneme přímo tvrzení obsažená ve větě 31.

Tato věta pak má zajímavý důsledek:
Utvořme k danému $\triangle ABC$ trojúhelník $A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle V a k němu $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ z relace $\bar{\boldsymbol{p}}$ podle V. Snadno zjistíme, že složená relace $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle V je identitou, neboť $V \equiv \bar{V}$.
Pohleďme například na obr. 69. Podle vět 13 a 31 je $C_1A = B_1A \wedge C_1\bar{A} = B_1\bar{A}$, takže $A \equiv \bar{A}$ a obdobně i $B \equiv \bar{B}$ a $C \equiv \bar{C}$, neboli $\triangle ABC \equiv \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Věta 32. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* V *nebo dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* V, *potom osy stran trojúhelníků* $\triangle A_1B_1C_1$ *nebo* $\triangle A_2B_2C_2$ *procházejí vrcholy* $\triangle ABC$.

Důkaz. Také zde stačí provést záměnu indexů ve větě 16, popřípadě 22.

Věta 33. *Je-li dvojice ostroúhlých trojúhelníků* $\triangle ABC$ *a* $\triangle A_1B_1C_1$ *v relaci* **p** *podle* V, *platí o velikostech vnitřních úhlů* α, β, γ, $\triangle ABC$ *a* α', β', γ' $\triangle A_1B_1C_1$:

$$\alpha' = 180° - 2\alpha, \beta' = 180° - 2\beta, \gamma' = 180° - 2\gamma.$$

Důkaz. Jestliže podle věty 30 je $\triangle ABC$ v relaci **p** podle S s $\triangle A_1B_1C_1$, potom podle věty 17 je

$$\alpha = 90° - \frac{\alpha'}{2} \text{ a po úpravě } \alpha' = 180° - 2\alpha,$$

$$\beta = 90° - \frac{\beta'}{2} \text{ a po úpravě } \beta' = 180° - 2\beta,$$

$$\gamma = 90° - \frac{\gamma'}{2} \text{ a po úpravě } \gamma' = 180° - 2\gamma.$$

Věta 34. *Je-li tupoúhlý* $\triangle ABC$ *první složkou v relaci* **p** *podle* V *s úhly velikostí* $\alpha > 90°$, β, γ *a* $\triangle A_2B_2C_2$ *druhou složkou v této relaci s vnitřními úhly velikostí* α', β' *a* γ', *potom platí:*

$$\alpha' = 2\alpha - 180°, \beta' = 2\beta, \gamma' = 2\gamma.$$

Důkaz. Užijeme opět vět 30 a 23, podle kterých je:

$$\alpha = 90° + \frac{\alpha'}{2} \text{ a po úpravě } \alpha' = 2\alpha - 180°,$$

$$\beta = \frac{\beta'}{2} \text{ a po úpravě } \beta' = 2\beta,$$

$$\gamma = \frac{\gamma'}{2} \text{ a po úpravě } \gamma' = 2\gamma.$$

Věta 35. *Je-li* $\triangle ABC$ *první složkou a* $\triangle A_1B_1C_1$ *nebo* $\triangle A_2B_2C_2$ *druhou složkou v relaci* **p** *nebo* **q** *podle* V, *potom* *vrcholy* $\triangle ABC$ *jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům* $\triangle B_1VC_1$, $\triangle C_1VA_1$ *a* $\triangle A_1VB_1$, *popřípadě* $\triangle B_2VC_2$, $\triangle C_2VA_2$ *a* $\triangle A_2VB_2$.

Důkaz. Pravdivost tvrzení vyplývá opět z věty 30, jestliže podle ní upravíme texty vět 19 a 25.

Věta 36. *Jsou-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1]$ *nebo* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2]$ *z relací* $\mathbf{p}$ *nebo* $\mathbf{q}$ *podle* V, *potom vrcholy trojúhelníků* $\triangle A_1B_1C_1$ *nebo* $\triangle A_2B_2C_2$ *jsou souměrně sdruženy s pólem* V *podle stran* $\triangle ABC$ *a to:*
vrchol A_1 (A_2) *podle strany* BC,
vrchol B_1 (B_2) *podle strany* AC,
vrchol C_1 (C_2) *podle strany* AB.

Důkaz. Také zde stačí obměnit užitím věty 30 texty vět 20 a 29. Pro naše úvahy má ovšem tato věta zvláštní význam. Dokázali jsme pravdivost tvrzení věty, která byla v úvodu připomenuta jako příklad důkazové úlohy, na niž lze navázat obsáhlou diskusi. Dospěli jsme v této diskusi k závěru druhé části druhé kapitoly, kterou opět uzavřeme několika příklady a dalšími úlohami.

Příklad 1. Sestrojte $\triangle ABC$ z dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ podle S, kde $\triangle A_1B_1C_1$ je rovnoramenný trojúhelník vepsaný do kružnice o poloměru velikosti 32 mm s jedním vnitřním úhlem velikosti 30°. Trojúhelník $A_1B_1C_1$ však nerýsujte!

Rozbor. Hledaný trojúhelník je podle věty 30 v relaci $\mathbf{p}$ podle V s daným $\triangle A_1B_1C_1$. Protože podle zadání nelze zjistit, je-li $\triangle A_1B_1C_1$ ostroúhlý nebo tupoúhlý, jsou tyto dvě možnosti, pokud jde o velikost jeho vnitřních úhlů:

a) 30°, 30°, 120°.

b) 30°, 75°, 75°.

V prvním případě budou velikosti vnitřních úhlů v $\triangle ABC$ podle věty 34:

$2.30° = 60°, 2.30° = 60°, 2.120° - 180° = 60°$, takže hledaný trojúhelník je rovnostranný.

V druhém případě jsou velikosti vnitřních úhlů $180° - 2.30° = 120°$, $180° - 2.75° = 30°$ a třetí úhel ovšem rovněž $30°$.

Vidíme hned, že podmínkám úlohy vyhovuje jenom případ druhý, protože v prvním případě příslušný trojúhelník je rovnostranný, takže $\triangle A_1B_1C_1$ by musel být rovněž rovnostranný. K označení vrcholů jsme při řešení této úlohy nepřihlédli.

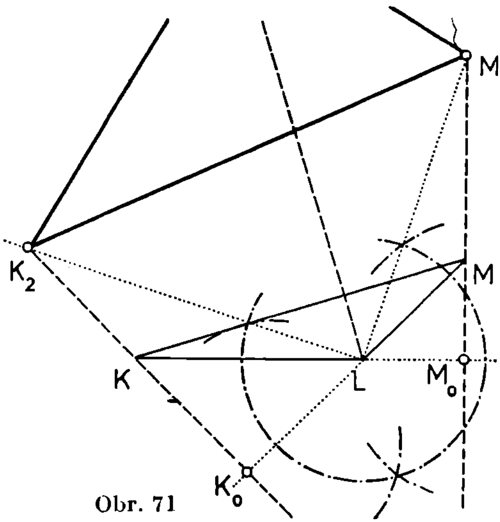
Příklad 2. Je dán $\triangle KLM$ [$KL = 4$ cm; $LM = 2{,}5$ cm; $\sphericalangle KLM = 135°$]. Sestrojte $\triangle K_2L_2M_2$ z relace $\triangle KLM\ q\ \triangle K_2L_2M_2$ podle V, aniž narýsujete kružnici oběma trojúhelníkům opsanou. Konstrukci umístěte tak, aby průsečík výšek $\triangle KLM$ padl mimo nákresnu!

Rozbor. Předpokládejme, že hledaný trojúhelník existuje. Potom podle věty 36 je vrchol M_2 souměrně sdružený podle přímky KL a vrchol K_2 souměrně sdružený podle přímky LM s průsečíkem výšek V. Protože však podle zadání leží průsečík výšek mimo nákresnu, sestrojíme nejdříve paty výšek M_0 na straně KL a K_0 na straně LM, jakož i výšku na stranu KM včetně jejího prodloužení za vrchol L. Přeneseme-li nyní $\sphericalangle M_0LV =$ $= \sphericalangle M_0LM_2$ do poloroviny $\overrightarrow{KLM}$ a úhel $\sphericalangle K_0LV =$ $= \sphericalangle K_0LK_2$ do poloroviny MLK (obr. 71), protnou ramena takto přemístěných úhlů přímky MM_0 a KK_0 po řadě v bodech M_2 a K_2. Pokud bude nepřístupný i bod L_2, můžeme narýsovat snadno aspoň části stran M_2L_2 a K_2L_2. Stačí si uvědomit, že podle věty 34 je

$\sphericalangle K_2M_2L_2 = 2 . \sphericalangle KML$ a také $\sphericalangle M_2K_2L_2 = 2 . \sphericalangle MKL$.

Konstrukce je provedena na obr. 71 a její popis je obsažen v rozboru.

Diskuse. Úlohy tohoto typu mají vždy právě jedno řešení, protože určení pólu V je jednoznačné.

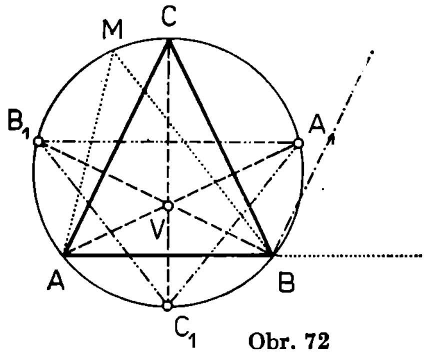


Obr. 71

Příklad 3. Do kružnice o poloměru velikosti 3,5 cm vepište dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ podle V tak, aby platilo: $AB = B_1C_1 = 5{,}5$ cm.

Rozbor a popis *konstrukce.* Známe-li velikost poloměru kružnice opsané a velikost jedné strany trojúhelníku, můžeme graficky zjistit velikost protilehlého úhlu. V našem případě to bude $\gamma = \alpha'$. Podle věty 17 pak platí $\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Tento úhel snadno sestrojíme (obr. 72).

Kolem bodu A opíšeme oblouk poloměrem $AB = B_1C_1 = 5{,}5$ cm. Tento oblouk protne kružnici opsanou v bodě M, takže $\sphericalangle MBA = \gamma$. Úhel vedlejší k $\sphericalangle MBA$ má velikost $180° - \gamma$. Rozpůlíme jej a bodem A vedeme rovnoběžku s jeho osou. Rovnoběžka protne kružnici opsanou v bodě C.



Obr. 72

Z konstrukce vyplývá, že úhel $\sphericalangle CAB$ má velikost $90° - \frac{\gamma}{2}$. Potom už obvyklým způsobem sestrojíme $\triangle A_1B_1C_1$.

Diskuse. Úhel $90° - \frac{\gamma}{2}$ je ostrý, takže naposledy sestrojená rovnoběžka protne kružnici opsanou v bodě jediném. Úloha má právě jedno řešení.

Příklad 4. Je dán $\triangle KLM$ [$KL = 10$ cm; $LM = 5$ cm; $MK = 6$ cm]. Aniž provedete příslušné konstrukce, zjistěte, zda existuje k danému trojúhelníku $K_1L_1M_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ nebo $\triangle K_2L_2M_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle V

a jaké je pořadí vrcholů těchto trojúhelníků na přímkách VK, VL a VM.

Řešení. Nejdříve zjišťujeme, že $\overline{KL}^2 > \overline{LM}^2 + \overline{MK}^2$, neboť $10^2 > 5^2 + 6^2$.

Podle toho je daný trojúhelník tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu M. Existuje proto $\triangle K_2L_2M_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle V.

Užitím kosinové věty zjistíme přibližně velikosti vnitřních úhlů $\triangle KLM$ a to:

$$\sphericalangle LMK = 113° = \alpha, \ \sphericalangle KLM = 27° = \beta,$$
$$\sphericalangle MKL = 40° = \gamma.$$

Potom mají podle věty 34 vnitřní úhly $\triangle K_2L_2M_2$ velikosti

$$\sphericalangle K_2 = \gamma' = 2\gamma = 80°, \ \sphericalangle L_2 = \beta' = 2\beta = 54°,$$
$$\sphericalangle M_2 = \alpha' = 2\alpha - 180° = 46°.$$

Je proto $\gamma' > \beta' > \alpha'$ a podle tabulky u příkladu 7 v první části této kapitoly je pořadí bodů

na polopřímce $\overrightarrow{VK}$: VK_2K,

na polopřímce $\overrightarrow{VL}$: VL_2L,

na polopřímce $\overrightarrow{VM}$: VMM_2.

Příklad 5. Mějme dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V takovou, že velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí d. Potom vnitřní úhly $\triangle A_1B_1C_1$ tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $2d$.

Dokažte a proveďte diskusi vzhledem k parametru d!

Řešení. Podle zadání jsou velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ po řadě α, $\alpha + d$, $\alpha + 2d$.

Z věty 33 pak plyne: Rozdíl:

$$\begin{array}{ll} \alpha' = (180° - 2\alpha) & \\ \beta' = 180° - 2(\alpha + d) = (180° - 2\alpha) - 2d & 2d \\ \gamma' = 180° - 2(\alpha + 2d) = (180° - 2\alpha) - 4d & 2d \end{array}$$

Velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$ skutečně tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $|2d|$.

Sečteme-li velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$, dostaneme rovnici

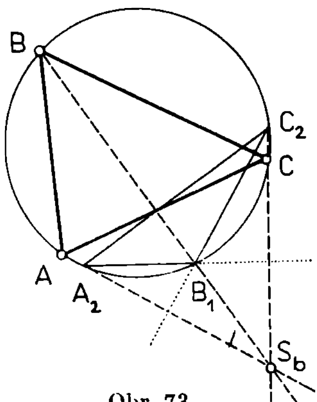
$3\alpha + 3d = 180°$ a odtud $\alpha = 60° - d$, $\beta = 60°$, $\gamma = 60° + d$.

Dosadíme-li tyto hodnoty podle věty 33, dostaneme: $\alpha' = 60° + 2d$, $\beta' = 60°$, $\gamma' = 60° - 2d$.

Předpokládejme, že je $d > 0$. Potom úhel velikosti $60° - 2d$ je nejmenší úhel a nutně je

$$60° - 2d > 0 \Rightarrow d > 30°.$$

Příklad 6. Je dán $\triangle A_2B_1C_2[A_2B_1 = 3\text{ cm}, \ B_1C_2 =$



Obr. 73

$= 4$ cm, $\sphericalangle A_2B_1C_2 = 120°$]. Sestrojte trojúhelník ABC z relace

$$[\triangle ABC, \triangle A_2B_1C_2] \in \boldsymbol{q} \text{ podle } S_b.$$

Rozbor. Podle věty 30 je $[\triangle A_2B_1C_2, \triangle ABC] \in \boldsymbol{q}$ podle V, kde $V \equiv S_b$

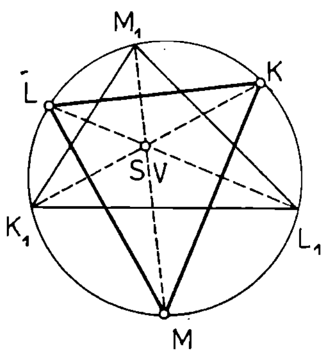
Konstrukce (obr. 73). Sestrojíme průsečík výšek $\triangle A_2B_1C_2$ a kružnici jemu opsanou k. Potom přímka VA_2 protne kružnici k v bodě A, přímka VB_1 v bodě B a přímka VC_2 v bodě C.

Diskuse. Protože $\triangle A_2B_1C_2$ je tupoúhlý, má úloha právě jedno řešení.

Příklad 7. K danému trojúhelníku $K_1L_1M_1$ [$K_1L_1 = 7$; $L_1M_1 = 6$; $M_1K_1 = 5$] sestrojte $\triangle KLM$ z relace $[\triangle KLM, \triangle K_1L_1M_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V.

Řešení (obr. 74). Užijeme opět věty 30, podle níž je

$$[\triangle A_1B_1C_1, \triangle ABC] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } S, \text{ kde } S \equiv V.$$



Obr. 74

Zde sestrojíme nejdříve střed kružnice vepsané $\triangle A_1B_1C_1$, potom kružnici jemu opsanou a na ní nám přímky A_1S, B_1S a C_1S určí body A, B a C hledaného trojúhelníku.

Cvičení

1. K danému trojúhelníku narýsujte druhou složku z relace p podle průsečíku výšek V.

   a) $\triangle ABC$ [$AB = 43$; $BC = 57$; $\sphericalangle BAC = 75°$],
   b) $\triangle DEF$ [$DE = 52$; $EF = 35$; $\sphericalangle DEF = 105°$].

2. Je dán $\triangle K_1L_1M_1$ z dvojice [$\triangle KLM$, $\triangle K_1L_1M_1$] $\in p$ podle V[$K_1L_1 = L_1M_1 = 6{,}2$; $K_1M_1 = 4{,}5$]. Narýsujte $\triangle KLM$.
3. K libovolně zvolenému tupoúhlému $\triangle E_1F_1G_1$ sestrojte $\triangle EFG$ z dvojice [$\triangle EFG$, $\triangle E_1F_1G_1$] $\in p$ podle V.
4. $\triangle A_2B_2C_2$ [$A_2B_2 = 4$; $B_2C_2 = 5$; $A_2C_2 = 6$] je z dvojice [$\triangle ABC$, $\triangle A_2B_2C_2$] $\in q$ podle V. Narýsujte $\triangle ABC$!
5. Do kružnice $k = (O; 33)$ vepište dvojici tupoúhlých trojúhelníků [$\triangle MNZ$, $\triangle M_1N_1Z_1$] $\in p$ podle V, víte-li, že úhel při vrcholu Z je tupý, dále $M_2Z_2 = 60°$ a $\sphericalangle Z_2M_2N_2 = 45°$.
6. Pokud jste v úlohách 2, 3, 5 rýsovali osy úhlů, opakujte konstrukce bez použití kružítka!
7. Vnitřní úhly daného trojúhelníku mají velikosti v poměru 2 : 3 : 4. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů druhé složky z relace p podle V k danému trojúhelníku.
8. Vnitřní úhly trojúhelníku mají velikosti v poměru $u : v : t$, kde u, v, t jsou kladná čísla. Vyslovte podmínky pro to, aby trojúhelník byl ostroúhlý, tupoúhlý nebo pravoúhlý.
9. Úlohu 7 řešte obecně a výsledky porovnejte.
10. Velikosti vnitřních úhlů první složky v relaci p podle V jsou v poměru 21 : 4 : 5. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů druhé složky a výsledek porovnejte s výsledkem 9. úlohy!
11. Poměr velikostí vnitřních úhlů druhé složky z relace q podle V je 7 : 8 : 25. Určete velikosti vnitřních úhlů první složky.
12. Na libovolně zvolené kružnici zvolte tři navzájem různé body X, Y, Z a kolem těchto bodů opište takové kružnice, které se po dvou protnou na dané kružnici a mimoto mají

společný ještě jeden další bod ve vnitřní nebo vnější oblasti zvolené kružnice.

13. Je dán trojúhelník FGH. Určete takový bod M, aby kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle FMG$, $\triangle FMH$, $\triangle GMH$ byly navzájem shodné.

14. Zvolte polopřímku $\overrightarrow{AM}$, bod V, který na ní neleží, a úsečku velikosti r. Sestrojte $\triangle ABC$, jehož strana AB leží na polopřímce $\overrightarrow{AM}$, bod V je průsečíkem jeho výšek a úsečka r poloměrem jeho kružnice opsané.

15. Zvolte polopřímku B_1M, bod V mimo ni ležící a úsečku velikosti r. Sestrojte dvojici $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ podle V tak, že strana B_1C_1 padne na polopřímku B_1M, bod V bude průsečíkem výšek $\triangle ABC$ a r velikost poloměru společné kružnice opsané této dvojici.

16. Úsečka $AB = 6$ cm je stranou $\triangle ABC$, $r = 3{,}5$ cm velikost poloměru kružnice jemu opsané a $OV = 1{,}5$ cm vzdálenost průsečíku výšek od středu kružnice opsané. Sestrojte dvojici $[\triangle ABC, \ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V.

17. Sestrojte dvojici $[\triangle KLM, \ \triangle K_1L_1M_1] \in \boldsymbol{q}$ podle V, víte-li, že $KL = 5{,}8$ cm, poloměr společné kružnice opsané $r = 3{,}4$ cm a vzdálenost průsečíku výšek V od středu opsané kružnice $OV = 5$ cm.

18. Na kružnici $k = (O; r)$ zvolte bod A a jeden bod vnitřní oblasti této kružnice označte V. Ukažte, že tyto tři prvky určují jednoznačně dvojici $[\triangle ABC, \ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V.

19. Opakujte úlohu 18 s tím rozdílem, že bod V zvolíte vně kružnice.

20. Je dána kružnice $k = (O; r)$, její bod vnitřní oblasti V a úsečka $c < 2r$. Sestrojte dvojici $[\triangle FGH, \ \triangle F_1G_1H_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V tak, aby bylo $FG = c$.

21. Opakujte úlohu 20 s tím rozdílem, že bod V bude ve vnější oblasti kružnice k.

22. Libovolný vnitřní bod zvolené kružnice $k = (O; r)$ označte V. Potom zvolte přímku h. Sestrojte dvojici $[\triangle KLM, \ \triangle K_1L_1M_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V tak, aby strana LM $\triangle KLM$ byla rovnoběžná s přímkou h a bod V byl příslušným pólem.

23. Do kružnice o poloměru $r = 3$ cm vepište dvojici $[\triangle KLM, \ \triangle K_1L_1M_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V tak, aby byl $\sphericalangle KVL = 120°$ a $\sphericalangle K_1VM_1 = 140°$.

24. Sestrojte dvojici $[\triangle EFG, \ \triangle E_2F_2G_2] \in \boldsymbol{q}$ podle V tak, aby $E_2F_2 = 6{,}5$ cm, $\sphericalangle E_2G_2F_2 = 25°$ a $\sphericalangle EFG = 35°$.

25. Zvolte tři navzájem různé body A, B, C, které neleží v přímce. Potom sestrojte trojúhelník KLM, v němž zvolené body A, B, C jsou po řadě patami výšek na strany KL, LM, MK.

26. Na dané kružnici $k = (O;\ 3{,}8)$ zvolte body A, B, A_1 a sestrojte dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle V. Udejte podmínky řešitelnosti!

27. Na kružnici $k = (O; 4{,}2)$ umístěte body A, A_1, B_1 a sestrojte dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle V. Udejte podmínky řešitelnosti!

28. V dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle V známe poloměr kružnice opsané $r = 4{,}2$ cm, $\sphericalangle ABC = \beta = 48°$, $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \alpha' = 64°$. Narýsujte!

29. Je dána kružnice $k = (O;\ 3{,}6)$, na ní bod C_1 a přímka h, která je rovnoběžná se stranou AB trojúhelníku ABC z dvojice $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V. Sestrojte tuto dvojici tak, aby $\sphericalangle BAC = \alpha = 60°$.

30. Vyšetřete množinu všech pólů Q sdružených s průsečíkem výšek V trojúhelníku ABC, když vrchol C probíhá oblouk kružnice $\triangle ABC$ opsané!

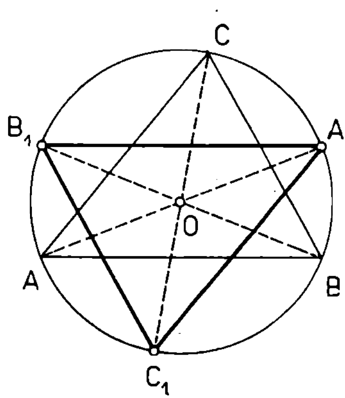
C. STŘED KRUŽNICE OPSANÉ A TĚŽIŠTĚ

Bude-li pólem střed kružnice danému trojúhelníku opsané nebo jeho těžiště, půjde v obou případech o relaci **p** podle definice 1. To proto, že jak střed kružnice trojúhelníku opsané, tak i těžiště jsou prvky podmnožiny, kterou jsme v úvodní kapitole označili K'.

Velmi jednoduché jsou vztahy mezi trojúhelníky z dvojice

$[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle O, kde O je střed kružnice oběma trojúhelníkům opsané.

Věta 37. *Jsou-li trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ v relaci **p** podle O, kde O je střed společné kružnice oběma trojúhelníkům opsané, je tato relace středovou souměrností se středem O.*



Obr. 75

Důkaz (obr. 75). Podle definice 1 procházejí v daném případě přímky AA_1, BB_1 a CC_1 středem kružnice $\triangle ABC$ opsané. Je tedy

$$AO = OA_1 \wedge BO = OB_1 \wedge CO = OC_1,$$

takže trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ jsou souměrně sdruženy podle středu O. Bezprostředním důsledkem toho je jejich shodnost $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, z čehož pak vyplývají další vlastnosti relace $\boldsymbol{p}$ podle O:

a) rovnost stran: $AB = A_1B_1$; $BC = B_1C_1$; $CA = C_1A_1$,

b) rovnoběžnost stran: $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$,

c) shodnost úhlů: $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$,

d) $\sphericalangle AOB = 2\gamma$, je-li $\gamma \leqq 90°$, nebo $\sphericalangle AOB = 360° - 2\gamma$, je-li $\gamma > 90°$ (s cyklickými obměnami pro úhly α a β).

K zajímavému důsledku dojdeme, utvoříme-li k relaci $\boldsymbol{p}$ podle O relaci $\bar{\boldsymbol{p}}$ podle O.

Věta 38. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* O *a dvojice* $[\triangle A_1B_1C_1, \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \bar{\boldsymbol{p}}$ *podle* O, *potom příslušný pól* $\bar{O}$ *je průsečíkem výšek* $\triangle A_1B_1C_1$ *a středem kružnice vepsané* $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ *a to:*

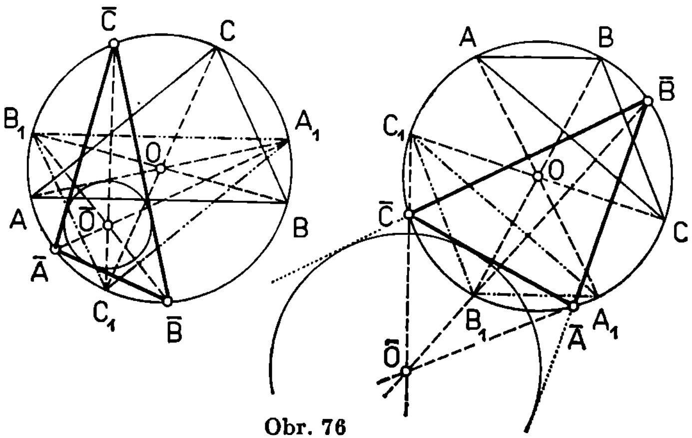
a) *uvnitř* $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, *je-li* $\triangle ABC$ *ostroúhlý,*

b) *vně* $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, *je-li* $\triangle ABC$ *tupoúhlý.*

Důkaz. a) Na obr. 76 vlevo je $\triangle ABC$ ostroúhlý. Protože přímky AA_1, BB_1 a CC_1 procházejí středem O kružnice $\triangle ABC$ opsané, jsou trojúhelníky $\triangle AA_1\bar{A}$, $\triangle BB_1\bar{B}$ a $\triangle CC_1\bar{C}$ podle věty Thaletovy pravoúhlé s pravými úhly při vrcholech $\bar{A}$, $\bar{B}$ a $\bar{C}$.

Je tedy A_1 ' $\perp A\bar{A}$ a současně podle věty 13 $A\bar{A} \parallel \parallel B_1C_1$, takže $\bar{A}A_1 \perp B_1C_1$ a obdobně i $\bar{B}B_1 \perp A_1C_1$; $\bar{C}C_1 \perp A_1B_1$.

Podle věty 13 však přímky $\bar{A}A_1$, $\bar{B}B_1$ a $\bar{C}C_1$ procházejí pólem $\bar{O}$, čímž je dokázáno, že pól $\bar{O}$ je průsečíkem výšek $\triangle A_1B_1C_1$, ale také podle věty 30 je středem kružnice vepsané $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.



Obr. 76

b) Na obr. 76 vpravo je $\triangle ABC$ tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu A. Ukázali jsme již v důkazu věty 13, že přímky $\bar{A}A_1$, $\bar{B}B_1$ a $\bar{C}C_1$ procházejí týmž bodem, který však v tomto případě leží vně kružnice $\triangle ABC$ opsané. Podle věty 10 je tu nutnou a postačující podmínkou, aby trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ byly opačného smyslu. Dokažme, že tomu tak skutečně je. Z vlastností středové souměrnosti vyplývá, že trojúhelníky $\triangle ABC$

a $\triangle A_1B_1C_1$ jsou téhož smyslu. Protože podle předpokladu jsou úhly $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle B_1A_1C_1$ tupé, odděluje přímka AA_1 bod B od bodu C, jakož i bod B_1 od bodu C_1, a to tak, že B_1 leží v polorovině $\overrightarrow{AA_1C}$ a bod C_1 v polorovině $\overrightarrow{AA_1B}$. Dále je podle věty 13

$$A\bar{A} \parallel B_1C_1 \parallel BC,$$

takže bod $\bar{A}$ leží v polorovině $\overrightarrow{BC\bar{A}}$. Proto i přímka $\bar{A}A_1$ odděluje shora uvedené dvojice bodů. Uvidíme dále, že přímky $B\bar{B}$ a $C\bar{C}$ se navzájem protínají na přímce $\bar{A}A_1$. Proto při konstrukci podle věty 13 padne bod $\bar{B}$ do poloroviny $\overrightarrow{\bar{A}A_1C}$, kde leží i bod B_1, a bod $\bar{C}$ do poloroviny $\overrightarrow{\bar{A}A_1B}$, kde leží i bod C_1. Jsou tedy trojúhelníky $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a $\triangle A_1B_1C_1$ opačného smyslu a podle věty 10 se polopřímky $\bar{B}B_1$, $\bar{C}C_1$ a ovšem i $\bar{A}A_1$ protínají vně kružnice $\triangle ABC$ opsané. Jejich průsečík je na obr. 76 vpravo označen $\bar{O}$.

Nyní už jenom musíme dokázat, že bod $\bar{O}$ je průsečík výšek $\triangle A_1B_1C_1$.

Postup bude stejný jako v části a) důkazu:

Také zde je $C\bar{C} \perp \bar{C}C_1 \Rightarrow \bar{C}C_1 \perp B_1A_1$, protože je $C\bar{C} \parallel B_1A_1$.

Obdobně je $\bar{B}B_1 \perp C_1A_1$ a tedy i $\bar{O}A_1 \perp B_1C_1$.

Bod $\bar{O}$ je proto průsečíkem výšek v $\triangle A_1B_1C_1$ a podle věty 30 současně středem kružnice vně vepsané $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, a to proti vrcholu $\bar{A}$.

Poznámka 1. Trojúhelníky v právě popsané složené relaci $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle pólu O mají ještě některé další vlastnosti, které stojí za zmínku. Na obr. 76 vpravo je průsečík polopřímek $B_1\bar{B}$ a $C\bar{C}$ (nevyznačený) středem kružnice vepsané trojúhelníku $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Pravdivost tohoto tvrzení vyplývá přímo z konstrukce:

$$B\bar{B} \parallel A_1C_1 \parallel CA \Rightarrow AB = C\bar{B}, \text{ protože čtyřúhelník } \bar{B}BAC \text{ je lichoběžník.} \tag{2.21}$$

$$A\bar{A} \parallel C_1B_1 \parallel BC \Rightarrow AB = \bar{A}C, \text{ protože také čtyřúhelník } \bar{A}CBA \text{ je lichoběžník.} \tag{2.22}$$

Podle (2.21) a (2.22) je potom $C\bar{B} = C\bar{A}$,

$$\text{neboli } \sphericalangle \bar{B}\bar{C}C = \sphericalangle \bar{A}\bar{C}C, \text{ takže polopřímka } \bar{C}C \text{ je osou } \sphericalangle \bar{A}\bar{C}\bar{B}. \tag{2.23}$$

Obdobně je v lichoběžníku $ABC\bar{C}$ $AC = B\bar{C}$ a v lichoběžníku $\bar{A}CBA$ $AC = B\bar{A}$, odkud pak plyne $B\bar{C} = B\bar{A}$,

$$\text{což znamená, že } \sphericalangle \bar{A}\bar{B}B_1 = \sphericalangle \bar{C}\bar{B}B_1 \text{ a polopřímka } \bar{B}B_1 \text{ je osou } \sphericalangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}. \tag{2.24}$$

Podle (2.23) a (2.24) se polopřímky $C\bar{C}$ a $\bar{B}B_1$ protnou v jednom bodě, a to ve středu S kružnice vepsané $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Přímým důsledkem toho pak je, že $CC_1 \perp \bar{A}\bar{B}$, $AA_1 \perp \bar{B}\bar{C}$, $BB_1 \perp \bar{C}\bar{A}$.

Podle předchozích úvah jsou body B a C po řadě středy oblouků $\bar{A}\bar{C}$ a $\bar{A}\bar{B}$, takže například přímka CC_1, která prochází středem O kružnice opsané $\triangle ABC$, je osou tětivy $\bar{A}\bar{B}$ a obdobně přímka BB_1 osou tětivy $\bar{A}\bar{C}$. Potom ovšem i přímka AA_1 je osou tětivy $\bar{B}\bar{C}$.

Poznámka 2. Zde je třeba ještě připomenout, že věta 38, jak ostatně vyplývá z jejího textu, neplatí pro trojúhelník pravoúhlý. To proto, že k pravoúhlému trojúhelníku lze sestrojit $\triangle A_1B_1C_1$ v relaci $\boldsymbol{p}$ podle O, avšak nikoliv $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ v relaci $\bar{\boldsymbol{p}}$ podle O. Má-li totiž $\triangle ABC$ pravý úhel například při vrcholu A, potom body $\bar{B}$ a $\bar{C}$ splynou.

Nyní obrátíme svou pozornost k vlastnostem relace $\boldsymbol{p}$ podle pólu T, kde T je těžiště daného trojúhelníku. Ukažme nejdříve, že v tom případě stojí za zmínku především zvláštní rozmístění vrcholů uvažovaných trojúhelníků na kružnici jim opsané.

Věta 39. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle pólu* T, *kde* T *je těžiště* $\triangle ABC$, *jehož strany mají velikosti* $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. *Potom vrcholy uvažovaných trojúhelníků leží na společné kružnici opsané tak, že je*

$$A_1B : A_1C = b : c,\ B_1C : B_1A = c : a,$$
$$C_1A : C_1B = a : b.$$

Důkaz (obr. 77). Na obr. 77 je T těžiště $\triangle ABC$ a A^+ střed strany BC. Z podobnosti $\triangle A_1BA^+ \sim \triangle CAA^+$ vyplývá

$$A_1B : BA^+ = CA : AA^+$$

a odtud

$$A_1B = \frac{CA \,.\, BA^+}{AA^+} = \frac{b \,.\, a}{2t_a},$$

dosadíme-li $CA = b$, $BA^+ = \frac{a}{2}$, $AA^+ = t_a$, kde t_a je těžnice příslušná ke straně BC. (2.25)

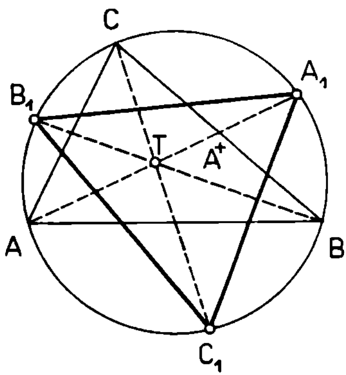
Obdobně pak z podobnosti $\triangle A_1CA^+ \sim \triangle BAA^+$ plyne

$$A_1C : CA^+ = BA : AA^+$$

a odtud

$$A_1C = \frac{BA \, . \, CA^+}{AA^+} = \frac{c \, . \, a}{2t_a}, \qquad (2.26)$$

když $BA = c$, $CA^+ = \frac{a}{2}$, $AA^+ = t_a$.



Obr. 77

Ze (2.25) a (2.26) už dostaneme dělením a po úpravě krácením:

$$A_1B : A_1C = b : c.$$

Zbývající dva vztahy jsou výsledkem cyklických záměn.

Protože důkaz se opírá o rovnost úseček $CA^+ = BA^+ = \frac{a}{2}$, má vlastnost uvedenou ve větě 39 právě relace p podle T. U všech v této kapitole probíraných relací jsme našli víceméně jednoduché vztahy mezi velikostmi vnitřních úhlů první a druhé složky, což umožňovalo řešení úlohy, kde jsme k dané druhé složce z relací p nebo q dovedli sestrojit složku první. Jak uvidíme dále, u relace p podle T žádný takový jednoduchý vztah neexistuje. Proto nejdříve věnujeme pozornost vztahům mezi velikostmi stran a těžnic uvažovaných trojúhelníků.

Věta 40. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ *podle* T*, kde strany* $\triangle ABC$ *mají velikosti po řadě* a, b, c *a k nim příslušné těžnice velikosti* t_a, t_b, t_c. *Potom platí*

$$\overline{B_1C_1} : \overline{C_1A_1} : \overline{A_1B_1} = a \,.\, t_a : b \,.\, t_b : c \,.\, t_c \,.$$

Důkaz (obr. 77). Z podobnosti $\triangle B_1C_1T \sim \triangle CBT$ plyne

$$\overline{B_1C_1} : \overline{CB} = \overline{B_1T} : \overline{CT} \text{ čili } \overline{B_1C_1} = \frac{\overline{CB} \,.\, \overline{B_1T}}{\overline{CT}} \,.$$

Dosadíme-li do této rovnosti $\overline{CB} = a$, $\overline{CT} = \frac{2}{3} t_c$, $\overline{B_1T} = \overline{B_1B^+} + \overline{B^+T}$, kde

$$\overline{B_1B^+} = \frac{\overline{AB^+} \,.\, \overline{CB^+}}{\overline{B^+B}} = \frac{b^2}{4 \,.\, t_b} \wedge \overline{B^+T} = \frac{1}{3} t_b \,,$$

dostaneme po úpravách

$$B_1C_1 = \frac{a(3b^2 + 4t_b^2)}{8t_bt_c}$$

V čitateli tohoto výrazu dále dosaďme

$$t_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

a po dalších úpravách dojdeme ke konečnému výsledku:

$$\overline{B_1C_1} = \frac{a(a^2 + b^2 + c^2)}{4t_bt_c}$$

s cyklickými záměnami:

$$\overline{C_1A_1} = \frac{b(a^2 + b^2 + c^2)}{4t_at_c},$$

$$\overline{A_1B_1} = \frac{c(a^2 + b^2 + c^2)}{4t_at_b}. \qquad (2.27)$$

Utvoříme-li z výrazů (2.27) postupný poměr, můžeme jej zkrátit výrazem

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4t_at_bt_c}$$

a dostaneme tvar, jehož pravdivost jsme měli dokázat:

$$\overline{B_1C_1} : \overline{C_1A_1} : \overline{A_1B_1} = a.t_a : b.t_b : c.t_c.$$

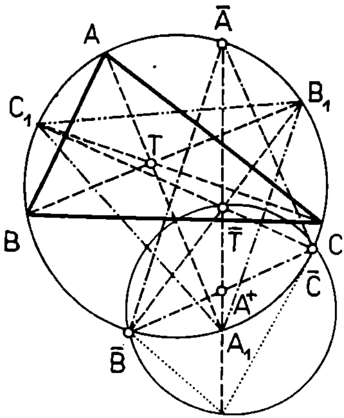
Užijeme-li sinové věty a současně vyjádříme velikosti těžnic pomocí velikostí stran $\triangle ABC$, bude

$$\sin\alpha' : \sin\beta' : \sin\gamma' = a\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} :$$
$$: b\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} : c\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Výsledek, ke kterému jsme právě dospěli, napovídá, že k danému $\triangle ABC$ lze početně i konstrukčně nalézt $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle T, avšak obrácenou úlohu nelze řešit ani početně, ani konstrukcí. Spokojíme se však tvrzením, že početní řešení vede k soustavě rovnic čtvrtého stupně, která má aspoň dvě reálná řešení, pokud $\triangle ABC$ není rovnostranný, a jedno řešení v tom případě, když rovnostranný je. Toto tvrzení nyní dokážeme.

Věta 41. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ *podle* T *a dvojice* $\triangle A_1B_1C_1,\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \bar{\mathbf{p}}$ *podle* T, *potom příslušný pól* $\bar{T}$ *je těžištěm* $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Důkaz (obr. 78). Na obr. 78 je zobrazen $\triangle ABC$, dále $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\mathbf{p}$ podle T a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle věty 13 z relace $\bar{\mathbf{p}}$ podle T. Trojúhelníku $\bar{B}\bar{T}\bar{C}$ je opsána kružnice a její průsečík s přímkou $\bar{A}A_1$ je označen A_0.



Obr. 78

Podle vět 4 a 14 je

$$\sphericalangle \bar{A}\bar{T}\bar{C} = \bar{\beta} + \beta' = 180° - \beta \Rightarrow \sphericalangle A_0\bar{T}\bar{C} = \beta = \\ = \sphericalangle A_0\bar{B}\bar{C},$$

$$\sphericalangle \bar{B}\bar{T}\bar{C} = \bar{\alpha} + \alpha' = 180° - \alpha \Rightarrow \sphericalangle \bar{B}A_0\bar{C} = \alpha.$$

Trojúhelníky $\triangle A_0\bar{B}\bar{C}$ a $\triangle ABC$ mají tudíž dva vnitřní úhly shodné, takže je

$$\triangle A_0\bar{B}\bar{C} \sim \triangle ABC. \tag{2.28}$$

Současně plyne z konstrukce

$$C_1B = A_1\bar{B} \Rightarrow \sphericalangle C_1CB \equiv \sphericalangle TCB = \sphericalangle\bar{B}\bar{C}A_1$$

a také

$$A_1\bar{C} = B_1C \Rightarrow \sphericalangle A_1\bar{B}\bar{C} = \sphericalangle CBB_1 \equiv \sphericalangle CBT$$

a odtud

$$\triangle BTC \sim \triangle\bar{B}A_1\bar{C}\,. \tag{2.29}$$

V podobnosti podle (2.28) a (2.29) odpovídá v obou trojúhelnících straně BC strana $\bar{B}\bar{C}$ a tudíž i bodu T bod A_1. Tím je dokázáno, že bod A_1 je těžištěm $\triangle A_0\bar{B}\bar{C}$ a současně že přímka $\bar{A}A_0$ protíná úsečku $\bar{B}\bar{C}$ v jejím středu A^+. Proto platí v kružnici k:

$$\bar{A}A^+ . A_1A^+ = \bar{B}A^+ . \bar{C}A^+$$

a v kružnici $\bar{k}$: $\bar{T}A^+ . A_0A^+ = \bar{B}A^+ . \bar{C}A^+$, neboli

$$\bar{A}A^+ . A_1A^+ = \bar{T}A^+ . A_0A^+ .$$

Dáme-li poslednímu výrazu tvar úměry, bude důkaz úplný, protože

$$\bar{A}A^+ : \bar{T}A^+ = A_0A^+ : A_1A^+ = 3 : 1\,,$$

takže bod $\bar{T}$ je těžištěm $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Současně je dokázáno, že v složené relaci $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle T je $\triangle ABC$ různý od $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, a to s jedinou výjimkou, když $\triangle ABC$ je rovnostranný, takže vrcholy $\bar{A}$, A splynou stejně jako B, $\bar{B}$ a C, $\bar{C}$.

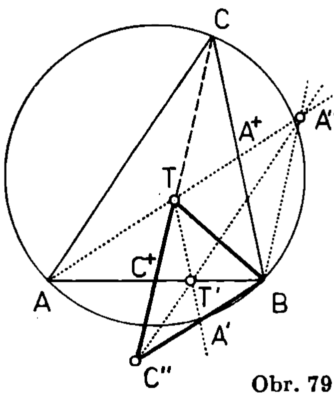
V této souvislosti je dobře si připomenout, že také složená relace $p \circ \bar{p}$ podle T je symetrická s relací $p \circ \bar{p}$ podle $\bar{T}$ a že i zde platí věta 14 o velikostech vnitřních úhlů v trojúhelnících $\triangle ABC$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Pro vztahy mezi velikostmi stran uvažovaných trojúhelníků pak platí další věta:

Věta 42. *Nechť trojúhelníky ve složené relaci $\triangle ABC$ $p \circ \bar{p}$ $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle T mají velikosti stran a, b, c, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ a velikosti těžnic t_a, t_b, t_c, $\bar{t}_a$, $\bar{t}_b$, $\bar{t}_c$, potom o těchto velikostech platí:*

a) $a : b : c = \bar{t}_a : \bar{t}_b : \bar{t}_c$,
b) $\bar{a} : \bar{b} : \bar{c} = t_a : t_b : t_c$.

Důkaz (obr. 79). Na obr. 79 je T těžiště $\triangle ABC$ a A^+ střed strany BC. Dále je $A^+A' = A^+T$ a obdobně $B^+B' = B^+T$, $C^+C' = C^+T$. Čtyřúhelník $TBA'C$ je rovnoběžník, a proto

$$BA' = TC = \frac{2}{3}t_c, \; TA' = \frac{2}{3}t_a, \; TB = \frac{2}{3}t_b. \quad (2.30)$$



Obr. 79

Obdobně je

$$CT = \frac{2}{3}t_c,\ B'C = \frac{2}{3}t_a,\ TB' = \frac{2}{3}t_b, \qquad (2.31)$$

a také

$$TC' = \frac{2}{3}t_c,\ AT = \frac{2}{3}t_a,\ C'A = \frac{2}{3}t_b. \qquad (2.32)$$

Podle (2.30), (2.31) a (2.32) je

$$\triangle TA'B \cong \triangle B'CT \cong \triangle ATC'. \qquad (2.33)$$

Pro lepší přehlednost nejsou na obr. 79 zakresleny trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ z uvažované relace. Předpokládáme-li, že tyto trojúhelníky mají velikosti vnitřních úhlů po řadě α', β', γ', $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, je dále

$$\sphericalangle ATB = (\gamma + \gamma') \Rightarrow \sphericalangle BTA' = 180° - (\gamma + \gamma') = \bar{\gamma},$$

$$\sphericalangle ATC = (\beta + \beta') \Rightarrow \sphericalangle ATC' = 180° - (\beta + \beta') = \bar{\beta},$$

$$\sphericalangle CTB = (\alpha + \alpha') \Rightarrow \sphericalangle CTB' = 180° - (\alpha + \alpha') = \bar{\alpha}.$$

Užijeme-li nyní věty 14, zjistíme, že například $\triangle BTA'$ a podle (2.33) i $\triangle ATC'$ a $\triangle CTB'$ jsou podobné $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, takže

$$\bar{a} : \bar{b} : \bar{c} = t_a : t_b : t_c,$$

$$\frac{a}{2} : \frac{b}{2} : \frac{c}{2} = \bar{t}_a : \bar{t}_b : \bar{t}_c$$

čili

$$a : b : c = \bar{t}_a : \bar{t}_b : \bar{t}_c,$$

protože v uvažovaných trojúhelnících mají těžnice BA^+, CB^+ a AC^+ velikosti $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ a $\frac{c}{2}$. Je ovšem možno namítnout, že jsme tu užili obrácení věty 14, jehož pravdivost jsme nikde nedokázali. Platnost obrácené věty 14 však jednoznačně vyplývá z věty 6.

Na závěr této kapitoly ještě uveďme důležitý důsledek věty 14, podle kterého je

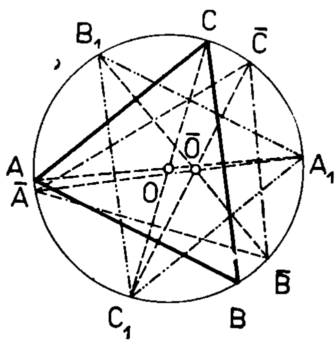
$$B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = \bar{a}.t_a : \bar{b}.t_b : \bar{c}.t_c.$$

Důkaz není nutno podávat, protože pravdivost tvrzení vyplývá ze symetričnosti relace $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ a věty 40.

K předchozím úvahám nyní opět připojme několik příkladů úloh a obvyklá cvičení.

Příklad 1. Na kružnici $k = (O;\ 3{,}5)$ zvolte tři navzájem různé body A, B_1, $\bar{C}$ a sestrojte trojici trojúhelníků $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}_1\ \triangle A_1B_1C_1\ \boldsymbol{p}_2\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle P tak, aby bylo $A_1\bar{A} \perp BC$, $B_1\bar{B} \perp AC$, $C_1\bar{C} \perp AB$.

Rozbor (obr. 80). Podle zadání splňují hledané trojúhelníky předpoklady věty 38, a proto je $P \equiv O$, kde O je střed dané kružnice.



Obr. 80

Konstrukce. Přímka AO protne kružnici k v bodě A_1, přímka B_1O v bodě B. Dále je $A_1\overline{C} = B_1C$ a přímka CO protne kružnici k v bodě C_1. Podle věty 13 pak je $A_1\overline{B} = C_1B$ a $C_1\overline{A} = B_1A$.

Důkaz. Správnost vyplývá z věty 13, neboť jsme při konstrukci postupovali přesně podle této věty.

Diskuse. Nutnou a postačující podmínkou, aby úloha měla řešení, je, aby přímky AB_1, $A\overline{C}$ a $B_1\overline{C}$ neprocházely středem O, neboť:

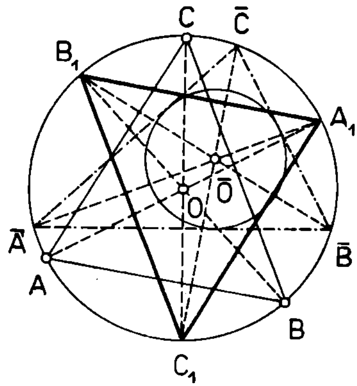
1. Je-li $O \in \overleftrightarrow{AB_1}$, je $B \equiv A_1 \wedge A \equiv B_1 \Rightarrow A \equiv B$.
2. Je-li $O \in \overleftrightarrow{A\overline{C}}$, je $A_1 \equiv \overline{C} \wedge A_1\overline{C} = B_1C = 0$ a odtud $B_1 \equiv C$, $C_1 \equiv B$, takže $\triangle ABC$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A. Podle poznámky 2 za větou 38 však tato věta v pravoúhlém trojúhelníku neplatí.
3. Je-li $O \in \overleftrightarrow{B_1\overline{C}}$, je $B_1 \equiv C_1$.

Zvolíme-li nejdříve body A a B_1, jsou již jednoznačně určeny body A_1 a B. Potom bod $\overline{C}$ můžeme zvolit na menším nebo na větším oblouku kružnice k $\triangle ABC$ opsané mezi body A a B_1. V prvním případě jakož i ve druhém může trojúhelník $\triangle ABC$ být ostroúhlý i tupoúhlý. Zajímavý je případ, kdy bod $\overline{C}$ je středem oblouku $\widehat{AB_1}$, neboť splynou body $\overline{C}$ a C_1, takže pól $\overline{O}$ leží na tečně kružnice k v jejím bodě $\overline{C}$.

Příklad 2. Ke zvolenému $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ sestrojte zbývající dva z trojice $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle O.

Rozbor. Podle věty 38 je pól $\overline{O}$ středem kružnice vepsané $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

Konstrukce (obr. 81). Vepíšeme kružnici $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a její střed označíme $\bar{O}$. $\triangle A_1B_1C_1$ je v relaci $\boldsymbol{p}$ podle $\bar{O}$ s $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a $\triangle ABC$ v relaci $\boldsymbol{p}$ podle O s $\triangle A_1B_1C_1$. Tím je dán postup konstrukce.



Obr. 81

Důkaz správnosti je dán větou 38.

Diskuse. Všechny body v průběhu konstrukce jsou zvolenými prvky určeny jednoznačně s výjimkou pravoúhlého trojúhelníku. Úloha proto má až na tuto výjimku řešení vždy a právě jedno.

Příklad 3. Stanovte postačující podmínku pro to, aby $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ze složené relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle O byl pravoúhlý.

Řešení. Podle věty 38 je především $\triangle ABC \cong$ $\cong \triangle A_1B_1C_1$ a pól $\bar{O}$ je průsečík výšek $\triangle A_1B_1C_1$. Platí proto podle věty 34 $\bar{\alpha} = 180° - 2\alpha'$ nebo $\bar{\beta} = 180° -$

— $2\beta'$, $\bar{\gamma} = 180° - 2\gamma'$. Je tedy podle zadání například $90° = 180° - 2\alpha$, odkud dostáváme $\alpha = \alpha' = 45°$.

Může ovšem být také $\beta' = 45°$ nebo $\gamma' = 45°$. Protože však $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ může mít nanejvýš jeden úhel velikosti 90°, je nutnou a postačující podmínkou, aby právě jeden vnitřní úhel $\triangle ABC$ měl velikost 45°.

Příklad 4. Je dán $\triangle ABC$ [$AB = 12$; $AC = 18$; $\sphericalangle CAB = 60°$].

Je-li dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle T, dělí polopřímka AA_1 $\sphericalangle CAB$ na dvě části, a to:

$$\alpha_1 = \sphericalangle A_1AB \text{ a } \alpha_2 = \sphericalangle A_1AC.$$

Ukažte, že v daném případě je $\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 = 3 : 2$, a potom vypočítejte velikosti úhlů α_1 a α_2!

Řešení. a) Podle věty 39 je

$$A_1B : A_1C = b : c = 18 : 12 = 3 : 2. \qquad (2.34)$$

Současně je $A_1B = 2 . r . \sin\alpha_1$ a $A_1C = 2r . \sin\alpha_2$. Dosadíme-li tyto hodnoty do (2.34), bude

$$\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 = 3 : 2.$$

b) Podle zadání je $\sin\alpha_1 = \sin(\alpha - \alpha_2)$, takže

$$\frac{\sin(\alpha - \alpha_2)}{\sin\alpha_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\sin(\alpha - \alpha_2) = 3\sin\alpha_2 \qquad (2.35)$$

za předpokladu, že $\alpha_2 \neq 0$, což v tomto případě platí.

Rovnici (2.35) upravíme nejdříve na tvar

$$2(\sin\alpha . \cos\alpha_2 - \cos\alpha . \sin\alpha_2) = 3\sin\alpha_2,$$

potom dosadíme

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = \frac{1}{2}, \cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}.$$

Ekvivalentními úpravami pak dojdeme ke konečnému tvaru

$$\sin^2 \alpha_2 = \frac{3}{19}.$$

Tato ryze kvadratická rovnice má jediný vyhovující kořen, a to $\alpha_2 = 23°25'$, odkud pak $\alpha_1 = 36°35'$. Druhý kořen je záporný, takže příslušný úhel je větší než 180°.

Příklad 5. Je dán $\triangle ABC$ [$a = \overline{BC} = 3$, $b = \overline{AC} = 5$, $c = \overline{AB} = 4$]. Narýsujte trojici $\triangle ABC$ $\mathbf{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ $\bar{\mathbf{p}}$ $\bar{\mathbf{p}}$ $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle T a potom vypočítejte velikosti všech stran, těžnic a vnitřních úhlů této trojice trojúhelníků. Výsledky porovnejte!

Řešení. Postup konstrukce snad není nutno popisovat. Připomeňme jenom, že jde o pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B, neboť je

$$b^2 = a^2 + c^2.$$

Velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ lze tedy určit velmi snadno a jsou to: $\alpha = 36°52'12''$, $\beta = 90°$, $\gamma = 53°07'48''$.

K výpočtu velikostí těžnic $\triangle ABC$ použijeme běžně používaných vzorců, zde například:

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = 4{,}272,$$

a obdobně

$$t_b = 2{,}5,$$

$$t_c = 3{,}605.$$

Velikosti stran $\triangle A_1B_1C_1$ dostaneme podle (2.27), kde například

$$\overline{B_1C_1} = \frac{a(a^2 + b^2 + c^2)}{4 \,.\, t_b \,.\, t_c} = 4{,}160,$$

a obdobně

$$\overline{A_1C_1} = 4{,}068,$$
$$\overline{A_1B_1} = 4{,}687.$$

Protože podle zadání je velikost poloměru opsané kružnice rovna jedné polovině přepony AC, je $r = 2{,}5$. Z toho snadno zjistíme velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$, neboť je například

$$\sin \alpha' = \frac{\overline{B_1C_1}}{2r} = \frac{4{,}160}{5} = \text{atd.},$$

takže

$$\alpha' = 56°18'38'', \beta' = 54°14'46'', \gamma' = 69°26'36''.$$

Velikosti vnitřních úhlů $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ zjistíme užitím věty 14, kde například

$$\bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha') = 86°49'10'', \bar{\beta} = 35°45'14'',$$
$$\bar{\gamma} = 57°25'36''.$$

Tím je usnadněn výpočet velikostí stran $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$:

$$\bar{a} = 2 \,.\, r \,.\, \sin \bar{\alpha} = 4{,}993, \bar{b} = 2{,}922, \bar{c} = 4{,}21.$$

Velikosti těžnic $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ pak zjistíme stejně jako velikosti těžnic $\triangle ABC$: $\bar{t}_a = 2{,}63$, $\bar{t}_b = 4{,}38$, $\bar{t}_c = 3{,}50$.

Všechny velikosti jsou tu ovšem určeny jen přibližně, a to u délek s přesností na tři až čtyři platné cifry, u úhlů s přesností na vteřiny. Podle toho je třeba i posuzovat výsledky získané měřením.

Příklad 6. I když výsledky získané v předcházející úloze jsou jenom přibližné, přece lze s výhradou tvrdit, že

$$a . t_a : b . t_b : c . t_c \doteq \bar{a} . \bar{t}_a : \bar{b} . \bar{t}_b : \bar{c} . \bar{t}_c .$$

Ukažte, že nejde o jev nahodilý!

Řešení. Víme, že složená relace $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ je symetrická. Z toho lze soudit, že platí-li pro dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle T věta 40, tj.

$$B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = a . t_a : b . t_a : c . t_a ,$$

musí platit i pro dvojici $[\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle $\bar{T}$, takže

$$B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = \bar{a} . \bar{t}_a : \bar{b} . \bar{t}_b : \bar{c} . \bar{t}_c .$$

Tím je dokázána obecná platnost vztahu uvedeného v úloze v přímém souladu s důsledkem věty 14 uvedeným na konci této kapitoly.

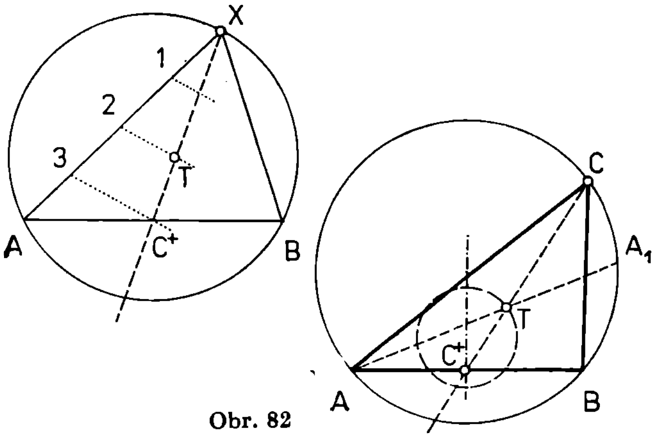
Příklad 7. Na dané kružnici $k = (O; 4)$ leží body A, B a A_1 tak, že $AB = 6$ cm, $BA_1 = 3$ cm.

a) Narýsujte dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle T.

b) Proveďte diskusi úlohy pro případ, kdy velikost BA_1 není známa a bod A_1 probíhá celou kružnici k.

a) *Rozbor.* Vyšetříme nejdříve množinu všech těžišť T trojúhelníků ABX, kde X je bod, který probíhá kružnici k. Na obr. 82 je C^+ střed strany AB hledaného $\triangle ABC$. T je jeho těžiště. Víme, že v tom případě je $C^+T : C^+X = 1 : 3$. Tím je dána stejnolehlost $H = \left[C^+; \frac{1}{3}\right]$, v níž obrazem kružnice k je opět kružnice s poloměrem velikosti $\frac{r}{3}$ $\left(\text{zde } \frac{4}{3}\right)$ opsaná $\triangle A'B'T$, kde A' a B' leží na

AB tak, že $C^+A' = C^+A : 3$, $C^+B' = C^+B : 3$. Tato kružnice je hledanou množinou s tím, že body A' a B' nejsou prvky této množiny. Její střed pak leží na polo-



Obr. 82

přímce C^+O tak, že $C^+O' = \frac{1}{3} C^+O$. Pro zjednodušení konstrukce je dobře si uvědomit, že je

$$A'O' = B'O' = \frac{1}{3} r = \frac{4}{3},$$

takže je $k' = \left(O'; \frac{4}{3}\right)$.

Popis *konstrukce*. Máme-li sestrojenu kružnici k', bude hledaný bod T průsečíkem polopřímky AA_1 s kružnicí k' a potom bod C průsečíkem polopřímky C^+T s kružnicí k.

b) Z předchozího je již zřejmé, že existence a počet řešení je závislý na tom, zda přímka AA_1 bude mít společné body s kružnicí k. Vedeme-li bodem A tečny ke kružnici k', protnou tyto tečny kružnici k v bodech M a N (viz obr. 82 vlevo). Potom bude mít úloha právě jedno řešení, bude-li $A_1 \equiv M$ nebo $A_1 \equiv N$, dvě řešení, bude-li A_1 uvnitř $\sphericalangle MAN$, a žádné řešení, bude-li A_1 ležet vně $\sphericalangle MAN$.

Cvičení

1. K danému $\triangle ABC$ [$AB = 6$; $BC = 4{,}5$; $CA = 7$] sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle O a $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ z relace $\boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}$ podle O. Sestrojte i pól $\overline{O}$.
2. Je dán $\triangle \overline{K}\overline{L}\overline{M}$ [$KL = 55$; $\overline{L}\overline{M} = 35$; $\sphericalangle \overline{M}\overline{K}\overline{L} = 30°$; $\sphericalangle \overline{L}$ je tupý] ze složené relace $\triangle KLM\ \boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle \overline{K}\overline{L}\overline{M}$ podle O. Sestrojte $\triangle KLM$. Udejte počet řešení a zdůvodněte!
3. Velikosti vnitřních úhlů v $\triangle ABC$ jsou v poměru $2 : 3 : 10$. V jakém poměru jsou velikosti vnitřních úhlů $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ z relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}$ podle O?
4. V dané dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle O známe velikosti vnitřních úhlů ve druhé složce, a to: $\overline{\alpha} = 36°54'$, $\overline{\beta} = 81°12'$. Určete velikosti vnitřních úhlů první složky, tj. $\triangle ABC$!
5. Úlohu 3 řešte obecně!
6. Úlohu 4 řešte obecně!
7. Na dané kružnici zvolte tři navzájem různé body A, C_1, $\overline{C}$. Potom sestrojte trojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle O.
8. Úlohu 7 opakujte s trojicí bodů A, B, $\overline{A}$!
9. Úlohu 7 opakujte s trojicí bodů $\overline{A}$, B_1, C_1.
10. Úlohu 7 opakujte s trojicí $\overline{A}$, $\overline{B}$, C_1. Tvořte dále obdobné úlohy!
11. Je dán $\triangle KLM$ velikostmi stran, a to: $KL = 6$, $LM = 5$, $MK = 7$. Sestrojte trojici $\triangle KLM\ \boldsymbol{p}\ \triangle K_1L_1M_1\ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle \overline{K}\overline{L}\overline{M}$ podle T.
12. K libovolně zvolenému $\triangle \overline{E}\overline{F}\overline{G}$ sestrojte trojici $\triangle \overline{E}\overline{F}\overline{G}\ \boldsymbol{p}\ \boldsymbol{p}\ \triangle E_1F_1G_1\ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle EFG$ podle $\overline{T}$!
13. Strany daného $\triangle ABC$ mají velikosti $a = \overline{BC} = 4$; $b =$

$= \overline{AC} = 5$; $c = \overline{AB} = 6$. Narýsujte trojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle T. Potom vypočítejte velikosti všech stran, všech vnitřních úhlů, těžnic v $\triangle ABC$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a poloměru kružnice opsané. Výsledky porovnejte s výsledky získanými konstrukcí!

14. Na kružnici $k = (O;\ 4)$ umístěte body A, B_1, C, A_1, B, C_1 v tomto daném pořadí tak, že $A_1B : A_1C = b : c$; $B_1C : B_1A = c : a$; $C_1A : C_1B = a : b$, kde a, b, c jsou velikosti úseček splňující trojúhelníkovou nerovnost.

15. Užitím věty 42 řešte známou úlohu: Sestrojit trojúhelník, jsou-li dány velikosti všech tří jeho těžnic.

16. V dané kružnici $k = (O;\ 4)$ sestrojte tětivy $AB = 6$ cm, $CC_1 = 7$ cm, tak aby bod C_1 byl vrcholem $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle T. Ukažte, že úloha má řešení, právě když je $CC_1 > AB$.

17. Úlohu 16 opakujte pro tětivy $\overline{BC} = 5{,}5$ cm a $\overline{AA_1} = 7$ cm a relaci $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle T.

18. Na kružnici $k = (O;\ 3{,}5\text{ cm})$ leží body E, F a F_1 tak, že $EF = 5{,}5$ cm, $EF_1 = 2{,}5$ cm. Narýsujte dvojici $[\triangle EFG, \triangle E_1F_1G_1] \in \boldsymbol{p}$ podle T.

19. V daném různostranném trojúhelníku jsou zakresleny všechny tři těžnice AA', BB', CC' a jejich průsečík T. Rozstřihneme-li tento trojúhelník podél těžnic, získáme šest různých trojúhelníků, z nichž lze po dvou složit tři shodné trojúhelníky podobné $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ze složené relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle T. Dokažte!

20. Obměňte úlohu 20 pro $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ z téže relace!

21. Vypočítejte velikosti úhlů $\beta_1 = \sphericalangle B_1BA$ a $\beta_2 = \sphericalangle B_1BC$ v dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle T, je-li $AB = 24$ mm, $BC = 32$ mm a $\sphericalangle CBA = 45°$.

22. Je-li $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle T, je $t_a : t_b : t_c = \sin \bar{\alpha} : \sin \bar{\beta} : \sin \bar{\gamma}$, kde t_a, t_b, t_c jsou velikosti těžnic $\triangle ABC$ a $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ velikosti vnitřních úhlů v $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Dokažte!

23. Je-li $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle T, $\bar{t}_a; \bar{t}_b : \bar{t}_c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$, kde α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů v $\triangle ABC$ a $\bar{t}_a$, $\bar{t}_b$, $\bar{t}_c$ velikosti těžnic v $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Dokažte!

24. Ukažte, že důsledkem úloh 22 a 23 je vztah: $t_a : t_b : t_c = \sin(\alpha + \alpha') : \sin(\beta + \beta') : \sin(\gamma + \gamma') = \bar{a} : \bar{b} : \bar{c}$, kde $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ jsou velikosti stran $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

KAPITOLA 3

PODOBNÁ ZOBRAZENÍ

A. OBECNÉ VLASTNOSTI

V závěru první kapitoly jsme naznačili, že v této kapitole pojednáme podrobněji o relacích „$\bar{\boldsymbol{p}}$ podle P“ nebo „$\bar{\boldsymbol{q}}$ podle Q“. Zatím jsme se těmito relacemi zabývali jenom natolik, že jsme dokázali existenci $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ předpokládaných vlastností (viz větu 13) a vztahy mezi velikostmi vnitřních úhlů trojice $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ $\bar{\boldsymbol{p}}$ $\bar{\boldsymbol{p}}$ $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle P, kde P je vnitřní bod $\triangle ABC$ (viz větu 14).

V tomto omezení jsme využili vět 13 a 14 při zkoumání vlastností složené relace $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle T, kde T bylo těžiště $\triangle$ ABC. Pro další úvahy však nyní již s tímto omezením nevystačíme. Především musíme odvodit větu obdobnou větě 14 pro pól P ležící vně $\triangle ABC$.

Věta 43. *Má-li trojice trojúhelníků ze složené relace $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ $\bar{\boldsymbol{p}}$ $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle P vnitřní úhly velikostí α, β, γ; α', β', γ'; $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, potom o těchto velikostech platí:*

$$\bar{\alpha} = (\alpha + \alpha') - 180°, \text{ když } \alpha + \alpha' > 180°,$$

$$\bar{\beta} = \beta + \beta',$$

$$\bar{\gamma} = \gamma + \gamma'.$$

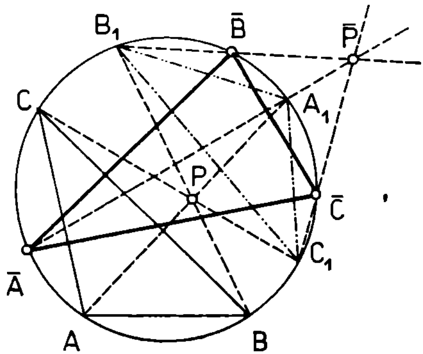
Důkaz (obr. 83). Na obr. 83 je v $\triangle ABC$ $\alpha + \alpha' >$

$> 180°$, takže pól P leží podle věty 4 v polorovině $\overrightarrow{BC\bar{A}}$*. Proto je

$$\bar{\beta} = \sphericalangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \sphericalangle B_1\bar{B}\bar{C} - \sphericalangle B_1\bar{B}\bar{A} . \qquad (3.1)$$

Dále pak podle věty 13 $B_1\bar{C} = A_1C$ a odtud

$$\sphericalangle B_1\bar{B}\bar{C} = 180° - \sphericalangle A_1AC = 180° - \sphericalangle PAC \qquad (3.2)$$



Obr. 83

současně je

$$B_1\bar{A} = C_1A \Rightarrow \sphericalangle B_1\bar{B}\bar{A} = \sphericalangle C_1CA = \sphericalangle PCA . \qquad (3.3)$$

Dosadíme-li podle (3.2) a (3.3) do (3.1), bude

$$\bar{\beta} = 180° - \sphericalangle PAC - \sphericalangle PCA = \sphericalangle APC = \beta + \beta'$$

a to podle věty 4 v $\triangle APC$.

Obdobně dostaneme v $\triangle ABP$ $\bar{\gamma} = \sphericalangle APB = \gamma + \gamma'$.

Protože je $\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \gamma = 180°$, bude

$$\bar{\alpha} = 180° - (\beta + \beta') - (\gamma + \gamma') = (\alpha + \alpha') - 180°.$$

Existují ovšem ještě cyklické záměny pro $(\beta + \beta') > > 180°$ a $(\gamma + \gamma') > 180°$. Ty uvedeme později v přehledné tabulce.

Věta 44. *Má-li trojice trojúhelníků ze složené relace $\triangle ABC\ \mathbf{q}\ \triangle A_2B_2C_2\ \bar{\mathbf{q}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle Q vnitřní úhly velikostí α, β, γ; α', β', γ'; $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$, potom o těchto velikostech platí:*

a) *leží-li pól Q uvnitř $\sphericalangle BAC$,* $\bar{\alpha} = 180° + (\alpha - \alpha')$; $\bar{\beta} = (\beta - \beta')$; $\bar{\gamma} = (\gamma - \gamma')$;

b) *leží-li pól Q uvnitř úhlu vrcholového k $\sphericalangle BAC$,* $\bar{\alpha} = = 180° + (\alpha' - \alpha)$; $\beta' = (\beta' - \beta)$; $\bar{\gamma} = (\gamma' - \gamma)$.

Důkaz. Pravdivost tvrzení a) vyplývá z obrácení věty 43. K důkazu proto použijeme obrázku 83. Zde leží pól $\bar{P}$ vně kružnice $\triangle ABC$ opsané.

Zaměňme označení pólů $\bar{P} \equiv Q \wedge \bar{Q} \equiv P$, takže je-li

$$\triangle ABC\ \mathbf{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\mathbf{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} \text{ podle } P,$$

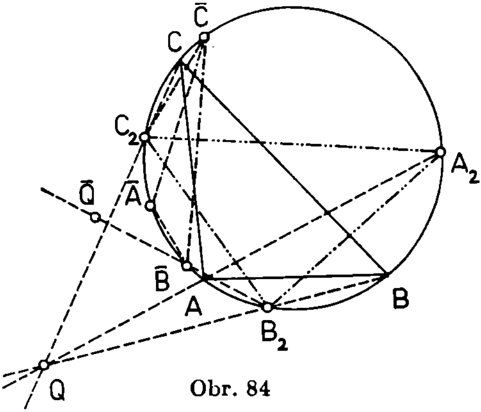
bude

$$\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}\ \mathbf{q}\ \triangle A_2B_2C_2\ \bar{\mathbf{q}}\ \triangle ABC \text{ podle } Q,$$

když $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2C_2$. Zaměníme-li současně označení ABC za $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a naopak, jakož i označení příslušných vnitřních úhlů, bude

$$\begin{aligned}
\alpha &= \bar{\alpha} + \alpha' - 180° && \Rightarrow \bar{\alpha} = 180° + (\alpha - \alpha'),\\
\beta &= \bar{\beta} + \beta' && \Rightarrow \bar{\beta} = \beta - \beta',\\
\gamma &= \bar{\gamma} + \gamma' && \Rightarrow \bar{\gamma} = \gamma - \gamma'.
\end{aligned}$$

b) Druhé tvrzení věty 44 se týká pólu Q ležícího uvnitř vrcholového úhlu $\sphericalangle BAC$ (obr. 84).



Obr. 84

Zde je

$$\bar{\gamma} = \sphericalangle C_2\bar{C}\bar{B} - \sphericalangle C_2\bar{C}\bar{A} \tag{3.4}$$

a současně

$$C_2\bar{B} = A_2B \Rightarrow \sphericalangle C_2\bar{C}\bar{B} = \sphericalangle A_2B_2B = $$
$$= 180° - \sphericalangle A_2B_2Q. \tag{3.5}$$

$$C_2\bar{A} = B_2A \Rightarrow \sphericalangle C_2\bar{C}\bar{A} = \sphericalangle B_2A_2A = $$
$$= \sphericalangle B_2A_2Q. \tag{3.6}$$

Dosadíme-li také zde podle (3.5) a (3.6) do (3.4), bude v $\triangle A_2B_2Q$

$$\bar{\gamma} = 180° - \sphericalangle A_2B_2Q - \sphericalangle B_2A_2Q = \sphericalangle AQB = \gamma' - \gamma .$$

Obdobně je $\bar{\beta} = \beta' - \beta$ a odtud

$$\bar{\alpha} = 180° - (\beta' - \beta) - (\gamma' - \gamma) = 180° - (\beta' + \gamma') + $$
$$+ (\beta + \gamma) = 180° - (180° - \alpha') + (180° - \alpha) = 180° + $$
$$+ (\alpha' - \alpha).$$

Příslušné cyklické záměny shrneme nyní spolu se záměnami vyplývajícími z vět 14 a 44 do přehledné tabulky:

Poloha pólu P nebo Q	Velikosti vnitřních úhlů v $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$		
	$\bar{\alpha} = \sphericalangle \bar{B}\bar{A}\bar{C}$	$\bar{\beta} = \sphericalangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{\gamma} = \sphericalangle \bar{A}\bar{C}\bar{B}$
	velikosti úhlů jim odpovídajících		
	$\sphericalangle CA_0B$	$\sphericalangle AB_0C$	$\sphericalangle BC_0A$
P vnitřní bod $\triangle ABC$	$180° - (\alpha + \alpha')$	$180° - (\beta + \beta')$	$180° - (\gamma + \gamma')$
P v polorovině $\overrightarrow{BCA}$* $\overrightarrow{ACB}$* $\overrightarrow{ABC}$*	$(\alpha + \alpha') - 180°$ $\alpha + \alpha'$ $\alpha + \alpha'$	$\beta + \beta'$ $(\beta + \beta') - 180°$ $\beta + \beta'$	$\gamma + \gamma'$ $\gamma + \beta'$ $(\gamma + \gamma') - 180°$
Q uvnitř $\sphericalangle CAB$ $\sphericalangle ABC$ $\sphericalangle BCA$	$180° + (\alpha - \alpha')$ $\alpha - \alpha'$ $\alpha - \alpha'$	$\beta - \beta'$ $180° + (\beta - \beta')$ $\beta - \beta'$	$\gamma - \gamma'$ $\gamma - \gamma'$ $180° + (\gamma - \gamma')$
Q uvnitř vrcholového úhlu k $\sphericalangle CAB$ $\sphericalangle ABC$ $\sphericalangle BCA$	$180° + (\alpha' - \alpha)$ $\alpha' - \alpha$ $\alpha' - \alpha$	$\beta' - \beta$ $180° + (\beta' - \beta)$ $\beta' - \beta$	$\gamma' - \gamma$ $\gamma' - \gamma$ $180° + (\gamma' - \gamma)$

tab. 3

Poznámka. V záhlaví tabulky jsou vedle velikostí vnitřních úhlů v $\triangle\overline{ABC}$ uvedeny v příslušných rubrikách i velikosti úhlů $\sphericalangle CA_0B$, $\sphericalangle AB_0C$ a $\sphericalangle BC_0A$, o kterých zatím nebyla řeč. Brzy však poznáme, že jde o velikosti vnitřních úhlů v podobných trojúhelnících, takže je výhodné je uvést do jedné společné tabulky. Tabulka nám dobře poslouží při rozvíjení dalších úvah i při řešení úloh.

Nyní již můžeme přikročit k vlastní látce této kapitoly. Začneme definicí:

Definice 3. Mějme dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle P nebo $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ podle Q, kde póly P nebo Q neleží na žádné straně $\triangle ABC$ ani na žádném jejich prodloužení. Potom množinami $\boldsymbol{M}_{Ta}$, $\boldsymbol{M}_{Tb}$ a $\boldsymbol{M}_{Tc}$ rozumíme po řadě množiny všech trojúhelníků vepsaných do kružnic l_a, l_b a l_c, kde

$$\{B, C, P\} \vee \{B, C, Q\} \subset l_a,$$

$$\{A, C, P\} \vee \{A, C, Q\} \subset l_b,$$

$$\{A, B, P\} \vee \{A, B, Q\} \subset l_c.$$

Připomeňme si, že již v první kapitole jsme se zabývali vlastnostmi kružnicových oblouků procházejících například body A, B, P nebo A, B, Q. Tam šlo o množiny všech pólů P nebo Q předpokládaných vlastností. V definici 3 se teď objevuje celá kružnice l_c obsahující uvedené body jako nositelka vrcholů trojúhelníků z množiny $\boldsymbol{M}_{Tc}$. Jedním prvkem této množiny je také $\triangle ABC_0$, kde C_0 je průsečík přímky CC_1 s kružnicí l_c. Podobně lze utvořit i $\triangle A_0BC$ v kružnici l_a nebo AB_0C v kružnici l_b.

Vlastnosti trojúhelníků tohoto typu vyjadřují další dvě věty:

Věta 45. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ *podle* P *a trojici trojúhelníků* $[\triangle A_0BC, \triangle AB_0C$ *a* $\triangle ABC_0]$, *kde* A_0 *je průsečík přímky* AP *s kružnicí opsanou* $\triangle PBC$, B_0 *průsečík přímky* BP *s kružnicí opsanou* $\triangle APC$ *a* C_0 *průsečík přímky* CP *s kružnicí opsanou* $\triangle ABP$. *Je-li současně*

$$\triangle ABC\ \mathbf{p} \circ \bar{\mathbf{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} \text{ podle } P,$$

potom

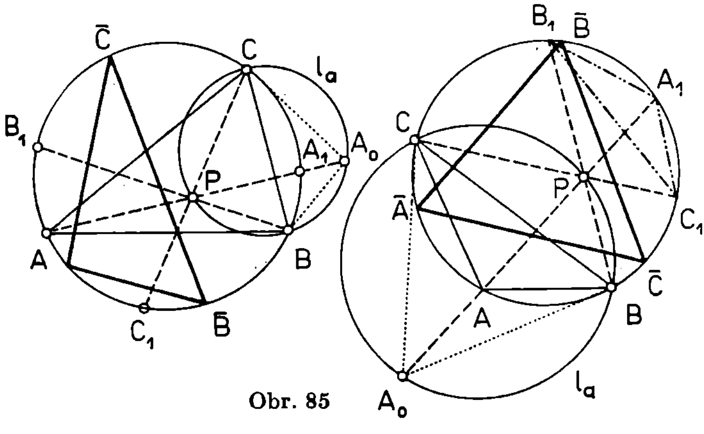
$$\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

Důkaz (obr. 85). Na obr. 85 vlevo je pól P vnitřní bod $\triangle ABC$ a kružnice l_a je opsána $\triangle BCP$.

V kružnici l_a je

$$\measuredangle BA_0C = 180° - \measuredangle BPC = 180° - (\alpha + \alpha') \quad (3.7)$$

podle věty 4.



Obr. 85

Dále je

$$\sphericalangle A_0BC = \sphericalangle A_0PC = 180° - \sphericalangle APC =$$
$$= 180° - (\beta + \beta') \tag{3.8}$$

rovněž podle věty 4.

Podle (3.7) a (3.8) mají trojúhelníky $\triangle A_0BC$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ (z relace $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle P) dva vnitřní úhly shodné, a proto je $\triangle A_0BC \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Tento výsledek je v dobrém souladu s údaji v tabulce 3 právě tak jako závěry z cyklických záměn:

$$\triangle AB_0C \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} \wedge \triangle ABC_0 \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C},$$

takže

$$\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

Na obr. 85 vpravo je pól P v polorovině $\overrightarrow{BCA}*$. Zde je $\sphericalangle BA_0C = 180 - \sphericalangle BPC = 180° - [360° - (\alpha + \alpha')]$ podle věty 4 a odtud

$$\sphericalangle BA_0C = (\alpha + \alpha') - 180°. \tag{3.9}$$

Dále je

$$\sphericalangle CBA_0 = \sphericalangle CPA = \beta + \beta' \tag{3.10}$$

a potom i

$$\sphericalangle BCA_0 = \sphericalangle BPA = \gamma + \gamma' \tag{3.11}$$

obojí podle věty 4.

Porovnáme-li (3.9), (3.10) a (3.11) s tabulkou 3, vidíme, že tam uvedené dvojice úhlů jsou skutečně shodné, takže je $\triangle A_0BC \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

V kružnici l_b pak je $\sphericalangle AB_0C = \sphericalangle APC = \beta + \beta'$ a také $\sphericalangle B_0AC = \sphericalangle BA_0C = (\alpha + \alpha') - 180°$.

Je proto $\triangle AB_0C \sim \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a obdobně i $\triangle ABC_0 \sim \sim \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ opět v dobrém souladu s tabulkou 3. Věta 45 proto platí i tehdy, když pól P leží vně $\triangle ABC$.

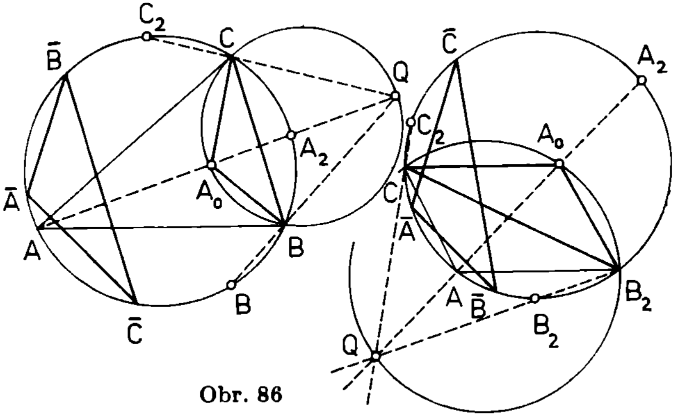
Věta 46. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* Q *a trojici trojúhelníků* $[\triangle A_0BC, \triangle AB_0C$ *a* $\triangle ABC_0]$, *kde* A_0 *je průsečík přímky* AQ *s kružnicí opsanou* $\triangle QBC$, B_0 *průsečík přímky* BQ *s kružnicí opsanou* $\triangle AQB$ *a* C_0 *průsečík přímky* CQ *s kružnicí opsanou* $\triangle ABQ$. *Potom je*

$$\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C},$$

kde $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ *je druhá složka ze složené relace* $[\triangle ABC, \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \boldsymbol{q} \circ \bar{\boldsymbol{q}}$ *podle* Q.

Důkaz (obr. 86). Na obr. 86 vlevo je pól Q vnitřní bod $\sphericalangle BAC$, a proto:

$$\sphericalangle BA_0C = 180° - \sphericalangle BQC = 180° - (\alpha' - \alpha) = \\ = 180° + (\alpha - \alpha'), \tag{3.12}$$



Obr. 86

dále je

$$\sphericalangle A_0BC = \sphericalangle AQC = (\beta - \beta') \qquad \mathbf{(3.13)}$$

podle věty 5 a obdobně

$$\sphericalangle A_0CB = \sphericalangle AQB = (\gamma - \gamma') \qquad (3.14)$$

také podle věty 5. Srovnáme-li tento výsledek s tabulkou 3, zjistíme, že vnitřní úhly $\triangle A_0BC$ jsou shodné s vnitřními úhly $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, takže je $\triangle A_0BC \sim \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Z cyklických záměn dále plyne

$$\triangle AB_0C \sim \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C} \wedge \triangle ABC_0 \sim \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

a odtud

$$\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

b) Na obr. 86 vpravo je pól Q uvnitř úhlu vrcholového k úhlu BAC, a proto:

$$\sphericalangle BA_0C = 180° - \sphericalangle BQC = 180° - (\alpha - \alpha') =$$
$$= 180° + (\alpha' - \alpha),$$

potom

$$\sphericalangle A_0BC = \sphericalangle A_0QC = \sphericalangle AQC = \beta' - \beta$$

a konečně

$$\sphericalangle A_0CB = \sphericalangle A_0QB = \sphericalangle AQB = \gamma' - \gamma.$$

Opět jsme došli k shodnému závěru, že uvažované trojúhelníky mají shodné velikosti vnitřních úhlů a jsou proto podobné. Spolu s cyklickými záměnami pak platí:

$$\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

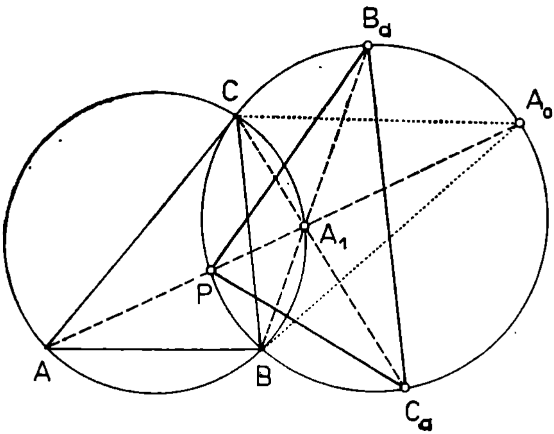
V předcházejících důkazech jsme nejenom prokázali pravdivost vět 45 a 46, ale současně i oprávněnost uspořádání tabulky 3, kde jsme uvedli rovnosti:

$$\bar{\alpha} = \sphericalangle A_0BC,\ \bar{\beta} = \sphericalangle AB_0C,\ \bar{\gamma} = \sphericalangle ABC_0.$$

Budeme proto tabulky 3 používat také v souvislosti s vlastnostmi trojúhelníků $\triangle A_0BC \in \boldsymbol{M}_{Ta}$, $\triangle AB_0C \in \boldsymbol{M}_{Tb}$ a $\triangle ABC_0 \in \boldsymbol{M}_{Tc}$. Přitom je třeba si uvědomit, že je-li dána dvojice $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle P, nebo dvojice $[\triangle ABC,\ \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ podle Q, lze kružnice l_a, l_b a l_c narýsovat jediným způsobem, a právě tak i body A_0, B_0 a C_0 jsou jednoznačně určeny. Tím ovšem je dána jednoznačně také trojice trojúhelníků $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$. Jistě je na místě tato úmluva:

Právě popsaný vztah mezi uvažovanými trojúhelníky budeme nadále vyjadřovat takto:

dvojice $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ a k ní příslušná tro-



Obr. 87

jice, nebo $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ a k ní příslušná trojice. Téhož obratu použijeme v případě, že bude následovat jenom jeden nebo dva z uvažované trojice trojúhelníků.

V množině $\boldsymbol{M}_{Ta}$ utvořme nyní relaci $\boldsymbol{p} \in (\boldsymbol{M}_{Ta} \times \boldsymbol{M}_{Ta})$, a to $[\triangle A_0BC, \triangle PB_aC_a] \in \boldsymbol{p}$ podle A_1.

Z obrázku 87 je zřejmé, že body B_a a C_a jsou průsečíky polopřímek BA_1 a CA_1 s kružnicí l_a podle definice 1. Protože jsme relaci $\boldsymbol{p}$ v úvodní kapitole uvedli jako zobrazení, je zřejmé, že pól P zde je obrazem bodu A_0, zatímco bod A_1 převzal úlohu pólu v relaci $\boldsymbol{p}$ v množině $\boldsymbol{M}_{Ta}$.

Obdobné relace pak lze utvořit i v množinách $\boldsymbol{M}_{Tb}$, $\boldsymbol{M}_{Tc}$. Změní se jenom označení vrcholů příslušných trojúhelníků. Tak dostaneme další dvojice trojúhelníků.

$$[\triangle AB_0C, \triangle A_bPC_b] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } B_1 \text{ v množině } \boldsymbol{M}_{Tb},$$

$$[\triangle ABC_0, \triangle A_cB_cP] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } C_1 \text{ v množině } \boldsymbol{M}_{Tc}.$$

Protože právě zavedená relace je relací $\boldsymbol{p}$ podle P, má všechny dosud popsané vlastnosti této relace. Podle popisu konstrukce jednotlivých bodů je opět zřejmé, že jejich poloha jednoznačně vyplývá z poloh v dané dvojici trojúhelníků $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$. Proto vztáhneme úmluvu z předcházejícího textu i na právě popsanou trojici, takže budeme psát:

dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle P a k ní příslušná trojice $[\triangle PB_aC_a, \triangle A_bPC_b, \triangle A_cB_cP]$.

Věta 47. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* P *a k ní příslušnou dvojici* $[\triangle A_0BC, \triangle PB_aC_a] \in \boldsymbol{p}$ *podle* A_1. *Potom je*

$$\triangle PB_aC_a \sim \triangle A_1B_1C_1.$$

Důkaz. a) Nechť pól P je vnitřní bod $\triangle ABC$ (obr. 87). Potom je v kružnici l_a $\sphericalangle B_aC_aP = \sphericalangle B_aBP$ a v kružnici k je

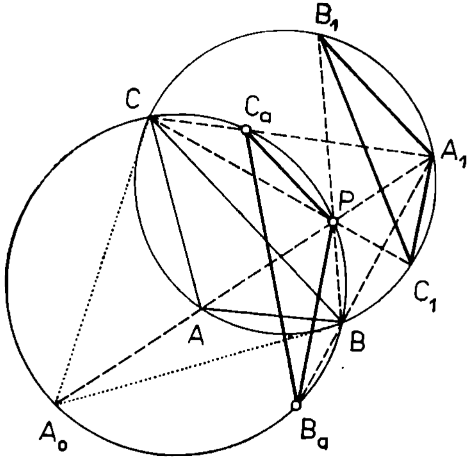
$$\sphericalangle B_aBP \equiv \sphericalangle A_1BB_1 = \sphericalangle A_1C_1B_1 = \gamma'. \qquad (3.15)$$

Současně je v kružnici l_a $\sphericalangle C_aB_aP = \sphericalangle C_aCP$ a v kružnici k

$$\sphericalangle C_aCP \equiv \sphericalangle A_1CC_1 = \sphericalangle A_1B_1C_1 = \beta'. \qquad (3.16)$$

Trojúhelníky $\triangle PB_aC_a$ a $\triangle A_1B_1C_1$ mají podle (3.15) a (3.16) dva vnitřní úhly shodné, a proto jsou podobné.

b) Nechť pól P je vnější bod $\triangle ABC$, takže leží například v polorovině $\overrightarrow{BCA}*$ (obr. 88).



Obr. 88

Na první pohled se obrázky 87 a 88 podstatně liší, protože například bod A_1 je zde jednou bodem vnitřní, podruhé bodem vnější oblasti kružnice l_a. Postup důkazu však je v obou případech naprosto stejný, jak je možno se přesvědčit. Nemusíme proto důkaz znovu opakovat. Nesmíme však přehlédnout důsledky vyplývající z právě dokázané věty:

Z cyklických záměn totiž dostáváme

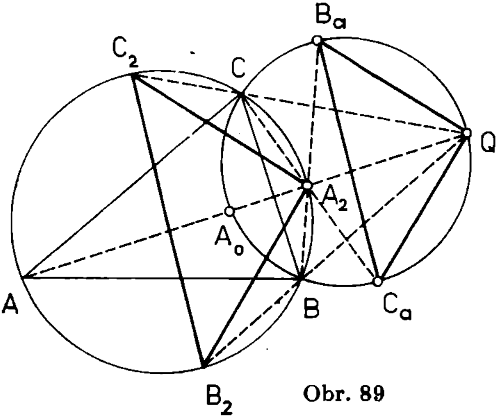
$$\triangle A_bPC_b \sim \triangle A_1B_1C_1 \wedge A_cB_cP \sim \triangle A_1B_1C_1,$$

takže z věty 47 plyne:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle PB_aC_a \sim \triangle A_bPC_b \sim \triangle A_cB_cP.$$

Věta 48. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* Q *a k ní příslušnou dvojici* $[\triangle A_0BC, \triangle QB_aC_a] \in \boldsymbol{p}$ *nebo* $\boldsymbol{q}$ *podle* A_2. *Potom je*

$$\triangle QB_aC_a \sim \triangle A_2B_2C_2.$$



Obr. 89

Důkaz (obr. 89 a 90). a) Nechť pól Q leží nejdříve uvnitř $\sphericalangle BAC$.

V kružnici l_a je $\sphericalangle QB_aC_a = \sphericalangle QCC_a = 180° - \sphericalangle A_2CC_2$ a v kružnici k je $\sphericalangle A_2CC_2 = 180° - \sphericalangle A_2B_2C_2$, neboli

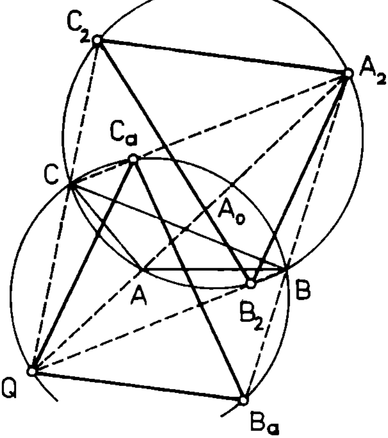
$$\sphericalangle QB_aC_a = \sphericalangle A_2B_2C_2 = \beta'. \tag{3.17}$$

Současně je v l_a $\sphericalangle QC_aB_a = \sphericalangle QBB_a = 180° - \sphericalangle$ $\sphericalangle A_2BB_2$ a v kružnici k je $\sphericalangle A_2BB_2 = 180° - \sphericalangle A_2C_2B_2$, neboli

$$\sphericalangle QC_aB_a = \sphericalangle A_2C_2B_2 = \gamma'. \tag{3.18}$$

Trojúhelníky $\triangle QB_aC_a$ a $\triangle A_2B_2C_2$ mají podle (3.17) a (3.18) dva vnitřní úhly shodné, a proto jsou také podobné.

b) Na obr. 90 je pól Q vnitřní bod úhlu vrcholového k $\sphericalangle BAC$.



Obr. 90

Zde se opět změnil jenom obrázek, protože bod A_2 tu je bod vnější oblasti kružnice l_a, ale postup důkazu je opět zcela shodný s předchozím s tím rozdílem, že

$$\sphericalangle QCC_a = \sphericalangle A_2B_2C_2 = \beta',$$

$$\sphericalangle QC_aB_a = 180° - \sphericalangle QBB_a = \sphericalangle B_2C_2A_2 = \gamma'.$$

Odtud pak plyne: $\triangle QB_aC_a \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Také zde je třeba vzít v úvahu i cyklické záměny:

$$\triangle A_bQC_b \sim \triangle A_2B_2C_2 \wedge \triangle A_cB_cQ \sim \triangle A_2B_2C_2,$$

takže

$$\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle QB_aC_a \sim \triangle A_bQC_b \sim \triangle A_cB_cQ.$$

Zde je ovšem možné namítnout, že důkazy vět 45—48 nebyly dovedeny až do konce a že jsme snad neoprávněně použili důkazu z analogie, když jsme ze vztahů v kružnici l_a usuzovali, že stejné vztahy nalezneme i v kružnicích l_b a l_c. Formálně je ovšem tato námitka oprávněná. Ukážeme však například postup v části a) důkazu věty 48. Zde v kružnici l_c platí:

$$\sphericalangle QB_cA_c = \sphericalangle QAA_c = \sphericalangle A_2AC_2 = \sphericalangle A_2B_2C_2 = \beta',$$

$$\sphericalangle QA_cB_c = 180° - \sphericalangle QBB_c = \sphericalangle C_2BB_2 =$$
$$= \sphericalangle C_2A_2B_2 = \alpha'.$$

Z tohoto příkladu je zřejmé, že jde skutečně o analogii a příslušné důkazy se hodí spíše do cvičení.

Mnohem zajímavější zde jsou důsledky vět 45—48. Podle věty 45 a 46 je například $\triangle A_0BC \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a podle věty 47 a 48 $\triangle PB_aC_a \sim \triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle QB_aC_a \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Současně však víme, že je

$$[\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C},\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } \bar{P}$$

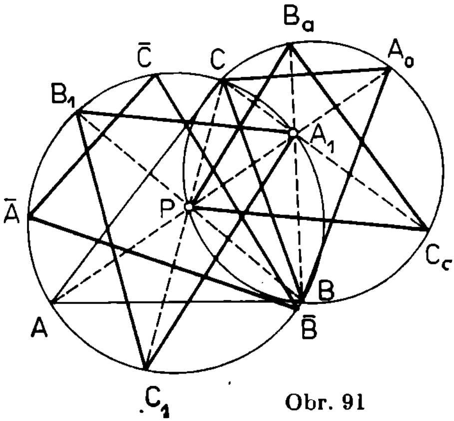
a také

$$[\triangle A_0BC,\ \triangle PB_aC_a] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } A_1.$$

Zřejmě je tedy v podobnosti $\boldsymbol{M}_T \to \boldsymbol{M}_{Ta}$ dvojice $[\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C},\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle $\bar{P}$ vzorem a dvojice $[\triangle A_0BC,\ \triangle PB_aC_a] \in \boldsymbol{p}$ podle A_1 jejím obrazem a naopak.

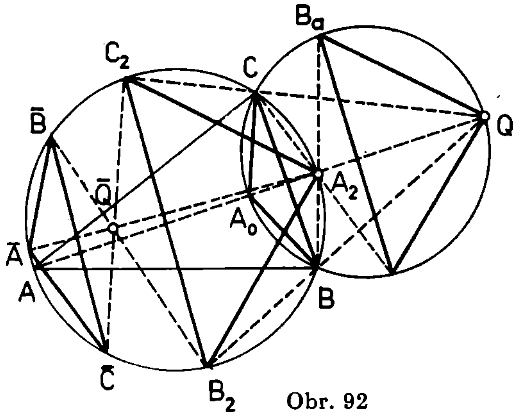
I zde je třeba vzít v úvahu cyklické záměny, takže tyto důsledky vět 45—48 platí i pro podobnosti $\boldsymbol{M}_T \to \boldsymbol{M}_{Tb}$ a $\boldsymbol{M}_T \to \boldsymbol{M}_{Tc}$, přičemž je vždy pól $\bar{P}$ vzorem a póly A_1, B_1 a C_1 jeho obrazy a naopak. Jedno z těchto podobných zobrazení ukazuje obr. 91.

Dodejme ještě, že také dvojice $[\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C},\ \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{p}$ podle $\bar{Q}$ je vzorem a dvojice $[\triangle A_0BC,\ \triangle QB_aC_a] \in \boldsymbol{p}$



Obr. 91

podle A_2 jejím obrazem, jak ukazuje obr. 92, a to se všemi dalšími důsledky včetně těch, které jsou vyjádřeny v další větě.



Obr. 92

Věta 49. *Mějme dvojici trojúhelníků* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* P *nebo* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* Q *a k nim příslušné trojice trojúhelníků* $\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$ *a* $\triangle A_cB_cP$, *nebo* $\triangle QB_aC_a$, $\triangle A_bQC_b$ *a* $\triangle A_cB_cQ$, *potom*

a) *přímky* A_bA_c, B_aB_c *a* C_aC_b *procházejí póly* P *nebo* Q *a současně je*

b) $$\overleftrightarrow{A_bA_c} \parallel \overleftrightarrow{B_1C_1} \text{ nebo } \overleftrightarrow{A_bA_c} \parallel \overleftrightarrow{B_2C_2},$$
$$\overleftrightarrow{B_aB_c} \parallel \overleftrightarrow{A_1C_1} \textit{ nebo } \overleftrightarrow{B_aB_c} \parallel \overleftrightarrow{A_2C_2},$$
$$\overleftrightarrow{C_aC_b} \parallel \overleftrightarrow{A_1B_1} \textit{ nebo } \overleftrightarrow{C_aC_b} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2}.$$

Důkaz zde musíme provést pro čtyři různé polohy pólů P nebo Q.

a) Na obr. 93 je pól P vnitřní bod $\triangle ABC$, a proto:
v kružnici l_a je

$$\sphericalangle CC_aP = \sphericalangle CBP, \tag{3.19}$$

v kružnici k pak je

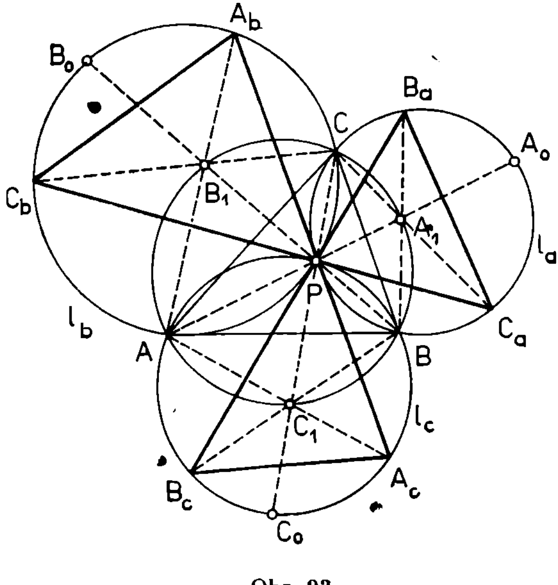
$$\sphericalangle CBP = \sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle CA_1B_1, \tag{3.20}$$

takže podle (3.19) a (3.20) je

$$\sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle CC_aP, \text{ neboli } A_1B_1 \parallel C_aP. \tag{3.21}$$

Dále je v kružnici l_b

$$\sphericalangle CC_bP = \sphericalangle CAP, \tag{3.22}$$



Obr. 93

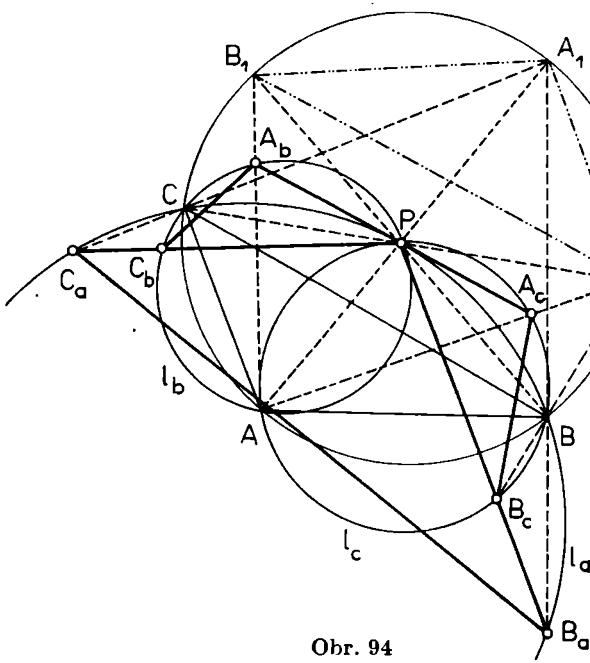
v kružnici k pak je

$$\sphericalangle CAP \equiv \sphericalangle CAA_1 = \sphericalangle CB_1A_1, \qquad (3.23)$$

takže podle (3.22) a (3.23) je

$$\sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle CC_bP \text{ a odtud } A_1B_1 \parallel C_bP. \qquad (3.24)$$

Podle (3.12) a (3.24) jsou přímky C_aP a C_bP rovnoběžné s přímkou A_1B_1 a tedy i navzájem rovnoběžné. Mají-li současně společný bod P, potom musí splývat a je $P \in C_aC_b$.



Obr. 94

Tím je důkaz proveden pro přímku C_aC_b a z cyklických záměn dostaneme také

$$\overleftrightarrow{A_bA_c} \parallel \overleftrightarrow{B_1C_1} \wedge P \in \overleftrightarrow{A_bA_c},$$
$$\overleftrightarrow{B_aB_c} \parallel \overleftrightarrow{A_1C_1} \wedge P \in \overleftrightarrow{B_aB_c}.$$

b) V případě, že pól P leží vně $\triangle ABC$, je situace poněkud složitější, avšak myšlenkový postup důkazu je stejný jako v případě a), proto zde provedeme jenom stručný zápis důkazu (obr. 94).

V kružnici l_a je $\sphericalangle CC_aP = \sphericalangle CBP$, v k je $\sphericalangle CBP = \sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle CA_1B_1$, a proto

$$\sphericalangle CC_aP = \sphericalangle CA_1B_1 \Rightarrow C_aP \parallel A_1B_1. \qquad (3.25)$$

Dále v l_b je $\sphericalangle CC_bP = \sphericalangle CAP$, v k je $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CAA_1 = 180° - \sphericalangle CB_1A_1$, a proto

$$CC_bP = 180° - \sphericalangle CB_1A_1 \Rightarrow C_bP \parallel A_1B_1. \qquad (3.26)$$

Konečně podle (3.25) a (3.26) je $C_aP \parallel C_bP$, neboli

$$C_aC_b \parallel A_1B_1 \wedge P \in C_aC_b.$$

Obdobně pak platí: $\sphericalangle AA_bP = \sphericalangle ACP = \sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle AB_1C_1$, takže

$$\sphericalangle AA_bP = \sphericalangle AB_1C_1 \Rightarrow A_bP \parallel B_1C_1, \qquad (3.27)$$

$\sphericalangle AA_cP = \sphericalangle ABP = \sphericalangle ABB_1 = \sphericalangle AC_1B_1$, takže

$$\sphericalangle AA_cP = \sphericalangle AC_1B_1 \Rightarrow A_cP \parallel C_1B_1. \qquad (3.28)$$

A zase podle (3.27) a (3.28) je $A_bP \parallel A_cP$, neboli

$$\overleftrightarrow{A_bA_c} \parallel \overleftrightarrow{B_1C_1} \wedge P \in \overleftrightarrow{A_bA_c} \qquad (3.29)$$

Tím je dokázáno i třetí tvrzení, neboť z podobnosti trojúhelníků $\triangle PB_aC_a \triangle \sim A_bPC_b \triangle \sim A_cB_cP$ vyplývá

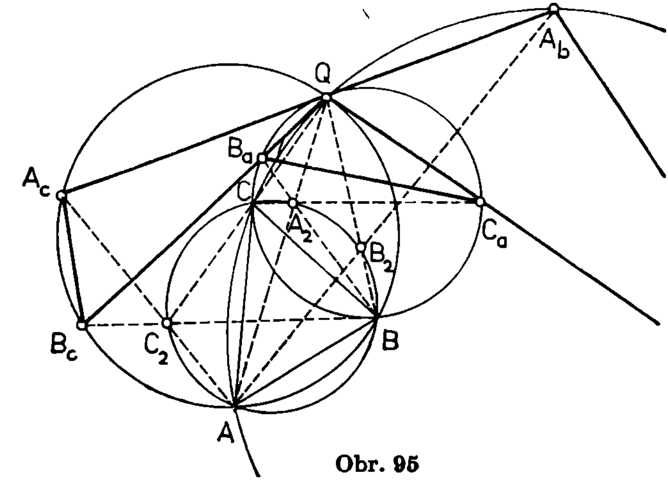
$$\sphericalangle C_aPB_a = \sphericalangle C_bPB_c, \text{ takže } PB_c \equiv PB_a. \qquad (3.30)$$

c) Na obr. 95 leží pól Q uvnitř úhlu BAC.

Protože i zde jde o zcela shodný myšlenkový postup, použijeme ještě stručnějšího zápisu:

$$\sphericalangle AA_cQ = 180° - \sphericalangle AC_2B_2 \Rightarrow A_cQ \parallel C_2B_2, \tag{3.31}$$

$$\sphericalangle AA_bQ = \sphericalangle AB_2C_2 \Rightarrow A_bQ \parallel C_2B_2. \tag{3.32}$$



Obr. 95

Ze (3.31) a (3.32) plyne

$$\overleftrightarrow{A_bA_c} \parallel \overleftrightarrow{B_2C_2} \wedge Q \in \overleftrightarrow{A_bA_c}, \tag{3.33}$$

$$\sphericalangle BB_aQ = 180° - \sphericalangle BA_2C_2 \Rightarrow B_aQ \parallel A_2C_2, \tag{3.34}$$

$$\sphericalangle BB_cQ = \sphericalangle BC_2A_2 \Rightarrow B_cQ \parallel A_2C_2. \tag{3.35}$$

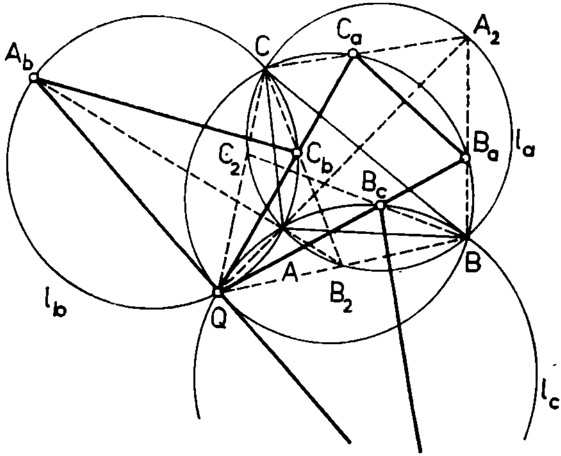
Ze (3.34) a (3.35) plyne

$$\overleftrightarrow{B_aB_c} \parallel \overleftrightarrow{A_2C_2} \wedge Q \in \overleftrightarrow{A_2C_2}. \tag{3.36}$$

Obdobně jako v případě b) můžeme i zde z (3.33) a (3.36) usuzovat z podobnosti na pravdivost tvrzení třetího, tj.

$$\overleftrightarrow{C_aC_b} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2} \wedge Q \in \overleftrightarrow{C_aC_b}. \tag{3.37}$$

d) Zbývá už jenom případ, kdy pól Q leží uvnitř úhlu vrcholového k $\sphericalangle BAC$, jak ukazuje obr. 96.



Obr. 96

Zde je $\sphericalangle AA_b.Q = \sphericalangle ACQ = \sphericalangle ACC_2 = \sphericalangle AB_2C_2$, takže $\sphericalangle AA_bQ = \sphericalangle AB_2C_2 \Rightarrow A_bQ \parallel C_2B_2$, a také $\sphericalangle AA_cQ = \sphericalangle ABQ = \sphericalangle ABB_2 = \sphericalangle AC_2B_2$, takže $\sphericalangle AA_cQ = \sphericalangle AC_2B_2 \Rightarrow A_cQ \parallel C_2B_2$ a odtud

$$\overleftrightarrow{A_bA_c} \parallel \overleftrightarrow{C_2B_2} \wedge Q \in \overleftrightarrow{A_bA_c}. \tag{3.38}$$

Současně je $\sphericalangle BB_aQ = \sphericalangle BA_2C_2 \Rightarrow B_aQ \parallel A_2C_2$, dále $\sphericalangle BB_cQ = 180° - \sphericalangle BC_2A_2 \Rightarrow B_cQ \parallel A_2C_2$ a odtud

$$\overleftrightarrow{B_aB_c} \parallel \overleftrightarrow{A_2C_2} \wedge Q \in \overleftrightarrow{B_aB_c}. \tag{3.39}$$

Podobně jako v předchozích dvou důkazech vyplývá z (3.38) a (3.39) také třetí tvrzení, a to:

$$\overleftrightarrow{C_aC_b} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2} \wedge Q \in \overleftrightarrow{C_aC_b}. \tag{3.40}$$

Tím jsme získali dostatečnou představu o obecných vlastnostech podobných zobrazení z množiny $\boldsymbol{M}_T$ do množin $\boldsymbol{M}_{Ta}$, $\boldsymbol{M}_{Tb}$ a $\boldsymbol{M}_{Tc}$ a naopak, takže můžeme opět na několika příkladech ukázat řešení konstrukčních úloh užitím příslušných vět.

Příklad 1. Je dán trojúhelník PB_aC_a [$PB_a = 7$; $B_aC_a = 6$; $C_aP = 4$], o němž víme, že je největší z trojice trojúhelníků $\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$ a $\triangle A_cB_cP$ příslušné k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] z relace $\boldsymbol{p}$ podle P. Sestrojte $\triangle ABC$, víte-li, že pól P je jeho vnitřní bod a velikosti trojúhelníků z dané trojice jsou v poměru 5 : 4 : 3.

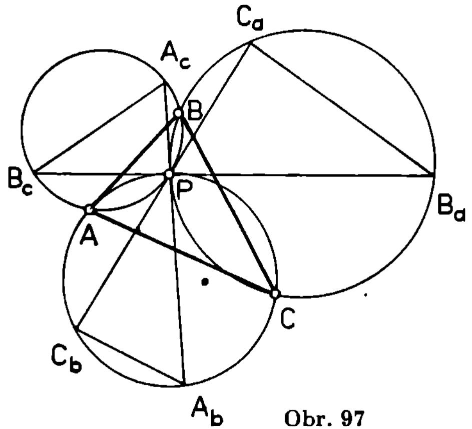
Řešení (obr. 97). Především uvažme, že za nejmenší z uvažované trojice trojúhelníků můžeme považovat buď $\triangle A_bPC_b$ nebo $\triangle A_cB_cP$. Zde provedeme pouze druhý případ.

Potom je podle zadání poměr podobnosti prvých dvou trojúhelníků $k_1 = 4 : 5$ a poměr podobnosti druhého a třetího $k_2 = 3 : 4$. Můžeme proto zjistit konstrukcí nebo výpočtem i velikosti stran druhého a třetího trojúhelníku, a to:

$$A_bP = 5{,}6;\ PC_b = 4{,}8;\ C_bA_b = 3{,}2;$$

$$A_cB_c = 4{,}2;\ B_cP = 3{,}6;\ PA_c = 2{,}4.$$

Sestrojíme-li daný $\triangle PB_aC_a$, máme již polohy přímek $B_aB_c \equiv PB_a$ a $C_aC_b \equiv PC_a$, které podle věty 49 procházejí pólem P. Naneseme-li na příslušné polopřímky od pólu P úsečky PA_b, PC_b a PB_c, dostaneme chybějící vrcholy hledané trojice trojúhelníků. Tím je úloha vyřešena.



Obr. 97

K vlastní *konstrukci* je třeba dodat, že nebude vždy možné získat výpočtem přesné velikosti chybějících rozměrů, a proto raději užijeme vhodných redukčních úhlů k sestrojení požadovaných velikostí. K sestrojení přímky A_bA_c pak je nutno uvážit, že podle věty 49 je

$$\sphericalangle A_bPC_b = \sphericalangle PB_aC_a.$$

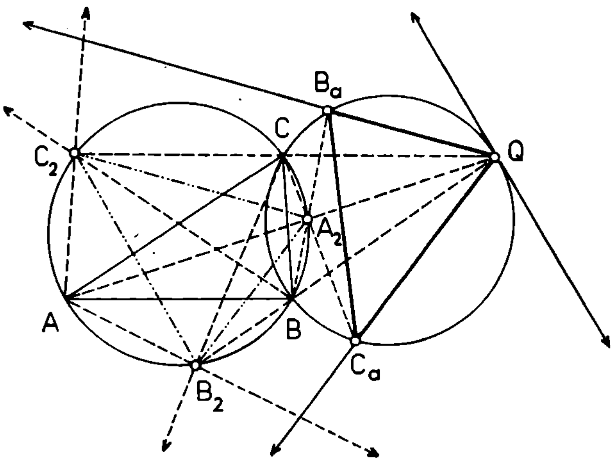
Diskuse. Řešení existuje nepochybně tehdy, když kružnice opsané uvažované trojici trojúhelníků se protnou po dvou ve dvou různých bodech, z nichž jeden je pól P. To musí ovšem nastat vždy, protože v případě, že by kterékoliv dvě kružnice vedle pólu P neměly další společný bod, musely by se dotýkat právě v tomto pólu, a to při seskupení trojúhelníků odpovídajícím větě 49 nemůže nastat.

Bude mít proto takto daná úloha vždy právě jedno řešení. V našem případě, jak jsme uvedli v rozboru, je zadání dvojznačné, a proto úloha má dvě řešení.

Příklad 2. Jsou dány velikosti strany AB a poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC i poloha pólu Q. Určete polohu třetího vrcholu C v $\triangle ABC$ tak, aby trojúhelníky $\triangle QB_aC_a$, $\triangle A_bQC_b$ a $\triangle A_cB_cQ$ byly rovnoramenné a tvořily trojici příslušnou k $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in$ $\in \boldsymbol{q}$ podle Q.

Rozbor. Zvolme například $AB = 6$ cm; $r = 3{,}5$ cm; $AQ = 12$ cm, $BQ = 6{,}5$ cm (viz obr. 98).

Protože je dána kružnice opsaná $\triangle ABC$ i pól Q, mů-



Obr. 98

žeme na dané kružnici určit polohy bodů A_2 a B_2. Podle věty 48 pak bude například $\triangle QB_aC_a$ podobný $\triangle A_2B_2C_2$, takže řešení úlohy spočívá v tom, že musíme určit polohou C_2 tak, aby $\triangle A_2B_2C_2$ byl rovnoramenný. To lze provést celkem čtyřmi způsoby. První dva trojúhelníky dostaneme, když za hlavní vrchol zvolíme body A_2 nebo B_2, druhé dva, když hlavním vrcholem bude bod C_2. Zde provedeme jednu z druhých dvou možností, a to tu, kde $\triangle A_2B_2C_2$ je ostroúhlý. Spojnice vrcholu C_2 s Q určí na opsané kružnici polohu třetího vrcholu C. Nyní již známe všechny prvky potřebné k sestrojení hledané trojice trojúhelníků. Ve zvoleném případě však se setkáváme s jistými potížemi, protože některé důležité body leží mimo nákresnu. A tu je dobrá příležitost k tomu, abychom využili všech poznaných vlastností této trojice podle dokázaných vět.

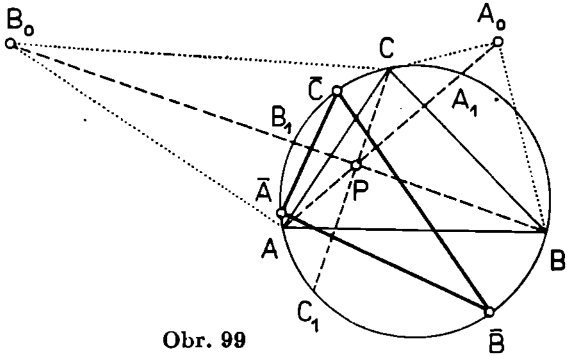
Diskuse. Z rozboru je zřejmé, že úloha může mít až čtyři řešení. To ovšem za předpokladu, že pól Q neleží na žádné straně $\triangle ABC$ ani na jejím prodloužení. Současně ovšem musí být $AB \leqq 2r$.

Příklad 3. Je dán $\triangle ABC$ [$AB = 7$ cm; $BC = 6$ cm; $CA = 5$ cm]. Určete polohu pólu P tak, aby $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ze složené relace $\triangle ABC \; \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}} \; \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ byl pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu $\bar{A}$ a ostrým úhlem velikosti 30° při vrcholu $\bar{B}$.

Řešení. Užijeme-li důsledků věty 14, můžeme velikosti úhlů α', β' a γ' určit ze vztahů $\alpha + \alpha' + \bar{\alpha} = 180°$, $\beta + \beta' + \bar{\beta} = 180°$ a $\gamma + \gamma' + \bar{\gamma} = 180°$. Potom už sestrojíme $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. To je ovšem postup dosti zdlouhavý, zvláště když musíme uvažované úhly sčítat graficky.

Zde se však nabízí řešení mnohem jednodušší (obr. 99). Užijeme vlastností trojice $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$, o níž víme, že podle věty 45 a podmínek v zadání úlohy má vnitřní úhly velikostí po řadě 90°, 30° a 60°. Narýsujeme-li aspoň dva z této trojice trojúhelníků, například $\triangle A_0BC$ a $\triangle AB_0C$, potom se přímky AA_0 a BB_0 protnou v bodě P, který je hledaným pólem.

Konstrukce je vlastně již popsána v rozboru, jenom připomeňme, že $\sphericalangle BCA_0 = 60°$, $\sphericalangle CBA_0 = 30°$, $\sphericalangle ACB_0 = 60°$ a konečně $\sphericalangle CAB_0 = 90°$.



Obr. 99

Příklad 4. K dané dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle P $[AB = 5;\ BC = 5{,}5;\ CA = 6{,}5;\ AP = 4;\ BP = 2{,}5]$ sestrojte trojici k ní příslušných trojúhelníků $\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$ a $\triangle A_cB_cP$, avšak tak, že nenarýsujete kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ a $\triangle ACP$.

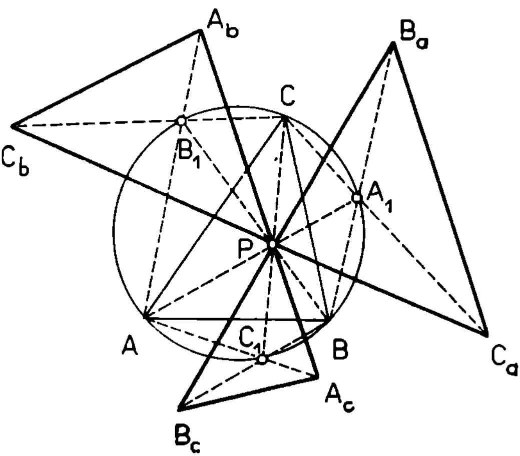
Řešení. Užijeme opět věty 49. Nejdříve narýsujeme přímky, které procházejí pólem P a jsou po řadě rovnoběžné se stranami $\triangle A_1B_1C_1$, a to $C_aC_b \parallel A_1B_1$, $A_bA_c \parallel B_1C_1$ a $B_aB_c \parallel A_1C_1$ (obr. 100).

Chybějících šest vrcholů hledané trojice trojúhelníků nyní již snadno sestrojíme, neboť:

vrchol A_b leží na polopřímce $\overrightarrow{AB_1}$,

vrchol A_c na polopřímce $\overrightarrow{AC_1}$,

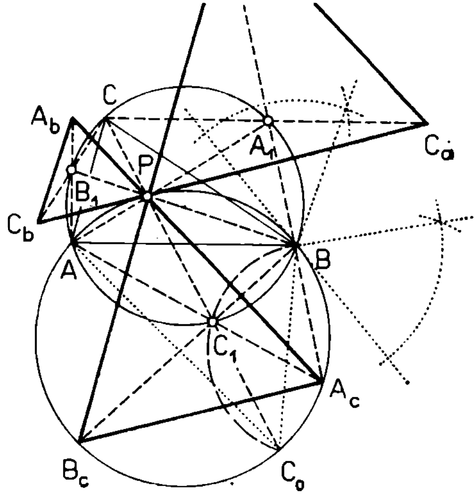
B_a na $\overrightarrow{BA_1}$, C_a na $\overrightarrow{CA_1}$, B_c na $\overrightarrow{BC_1}$, C_b na $\overrightarrow{CB_1}$.



Obr. 100

Příklad 5. Je dán $\triangle ABC_0$ příslušný k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] z relace $\boldsymbol{p}$ podle P. Jeho strany mají velikosti $AB = 6$ cm, $BC_0 = 5{,}4$ cm, $AC_0 = 7{,}8$ cm. Sestrojte příslušnou trojici $\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$ a $\triangle A_cB_cP$, víte-li, že jde o trojici rovnostranných trojúhelníků.

Rozbor (obr. 101). Ze zadání vyplývá, že v množině $\boldsymbol{M}_{Tc}$ předpokládáme existenci dvojice $[\triangle ABC_0, \triangle A_cB_cP] \in \boldsymbol{p}$ podle C_1 v souladu s důsledky věty 46



Obr. 101

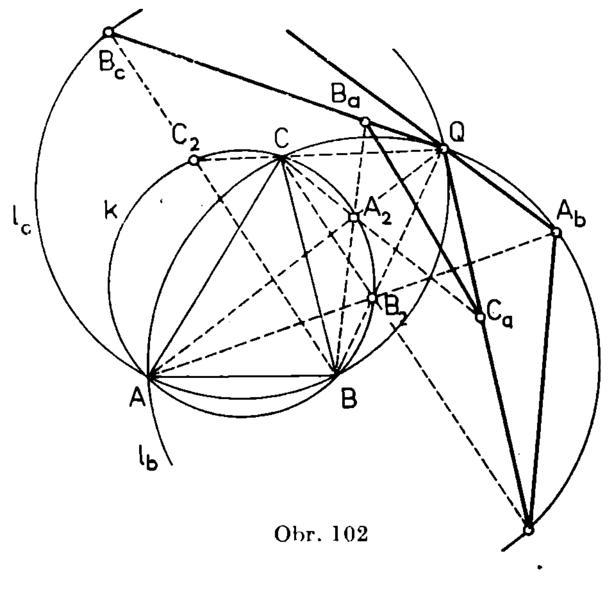
(viz obr. 87). Řešení dané úlohy tedy bude spočívat v tom, že v kružnici l_c opsané danému $\triangle ABC_0$ sestrojíme takový pól C_1, aby obraz $\triangle ABC_0$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle C_1 byl rovnostranný trojúhelník. Podle věty 4 takový trojúhelník dovedeme sestrojit.

Konstrukce. Především opíšeme $\triangle ABC_0$ kružnici l_c a s pomocí úsekových úhlů sestrojíme kružnicové oblouky $\widehat{AC_1B}$ a $\widehat{BC_1C_0}$ s obvodovými úhly velikostí $\sphericalangle AC_1B = \sphericalangle AC_0B + 60°$, $\sphericalangle BC_1C_0 = \sphericalangle BAC_0 + 60°$. Tyto oblouky se protínají v hledaném bodě C_1. Opíšeme-li nyní kružnici k trojúhelníku ABC_1, protne přímka C_0C_1 kružnici l_c v bodě P a kružnici k v bodě C. Známe-li $\triangle ABC$ a hledaný pól P, snadno sestrojíme i $\triangle A_1B_1C_1$ a tři hledané trojúhelníky. Kružnice l_b a l_a ani rýsovat nemusíme (viz příklad 4).

Příklad 6. Do kružnice $k = (O; 3{,}5 \text{ cm})$ vepište $\triangle ABC$ $[AB = 5 \text{ cm}, BC = 6 \text{ cm}]$ a určete polohu pólu Q tak, aby o rozměrech trojúhelníků z dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ podle Q a k ní příslušné trojice $\triangle QB_aC_a$, $\triangle A_bQC_b$ a $\triangle A_cB_cQ$ platilo:

$$\overline{B_2C_2} : \overline{QC_b} : \overline{B_cQ} = 7 : 12 : 11 .$$

Řešení. Podle věty 48 je $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_bQC_b \sim$



Obr. 102

$\sim \triangle A_cB_cQ$, takže rozměry těchto trojúhelníků mají velikosti úměrné. Platí-li to o stranách těchto trojúhelníků, platí to také o velikostech poloměrů kružnic jim opsaných. Je tedy podle zadání

$$r : r_b : r_c = 7 : 12 : 11 = 35 : 60 : 55,$$

protože je $r = 35$ poloměr kružnice opsané $\triangle A_2B_2C_2$. Známe tedy velikosti $r_b = 60$ mm, $r_c = 55$ mm.

Konstrukce (obr. 102). Narýsujeme nejdříve kružnici l_b, která prochází body A a C a má poloměr velikosti 60 mm, potom kružnici l_c poloměrem 55 mm tak, aby procházela body A a B. Tyto kružnice se protínají v hledaném pólu Q.

Diskuse. Kružnice l_b a l_c lze narýsovat ve čtyřech odlišných polohách, takže úloha má čtyři řešení. Zde jsme však uvedli jenom jedno z nich.

Cvičení

1. K danému $\triangle ABC$ [$AB = 7$; $BC = 5$; $\sphericalangle ABC = 90°$] sestrojte trojici $\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$, $\triangle A_cB_cP$ příslušnou k dvojici z relace **p** podle P, leží-li pól P uvnitř $\triangle ABC$ tak, že $\sphericalangle BCP = \sphericalangle CBP = 30°$.
2. Opakujte cvičení 1, avšak tak, že pól P umístíte vně $\triangle ABC$ tak, že $\sphericalangle CAP = \sphericalangle ACP = 15°$.
3. Je dán $\triangle KLM$ [$KL = 9$; $LM = 5$; $KM = 7$] a pól Q, který leží v polorovině $\overrightarrow{KLM}$ na tečně sestrojené v bodě L ke kružnici $\triangle KLM$ opsané, přičemž $LQ = 4$. Sestrojte trojici $\triangle QB_aC_a$, $\triangle A_bQC_b$, $\triangle A_cB_0Q$ příslušnou k dvojici z relace **q** podle Q.
4. Do kružnice o poloměru $r = 3{,}5$ cm vepište pravoúhlý rovnoměrný $\triangle EFG$ s pravým úhlem při vrcholu F. Na prodloužení výšky příslušné ke straně EG určete bod Q tak, aby FQ mělo velikost této výšky. Potom sestrojte trojici $\triangle ABC_0$, $\triangle AB_0C$, $\triangle A_0BC$ i trojici $\triangle QB_aC_a$, $\triangle A_bQC_b$, $\triangle A_cB_0Q$ příslušné k dvojici z relace **q** podle Q.

K přesnému sestrojení jednotlivých bodů využijte známých pomocných konstrukcí.

5. Jsou dány velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků ze složené relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle P nebo Q (když střední složka je $\triangle A_2B_2C_2$). Zjistěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků z trojice $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$, $\triangle ABC_0$ příslušné k dané trojici. Podle výsledku udejte polohu příslušného pólu.

   a) $\alpha = 58°, \beta = 73°, \alpha' = 49°, \beta' = 28°, \overline{\gamma} = 28°$;
   b) $\alpha = 12°, \beta = 115°, \alpha' = 21°, \beta' = 135°, \overline{\gamma} = 77°$;
   c) $\alpha = 69°, \beta = 54°, \alpha' = 13°, \beta' = 23°, \overline{\gamma} = 93°$;
   d) $\alpha = 81°, \beta = 44°, \alpha' = 55°, \beta' = 42°, \overline{\gamma} = 152°$;

6. Je dán $\triangle MNZ$ [$MN = 5$; $NZ = 6$; $ZM = 7$]. Sestrojte pól P tak, aby rozměry trojúhelníků v trojici $\triangle M_0NZ$, $\triangle MN_0Z$ a $\triangle MNZ_0$ příslušné k relaci $\boldsymbol{p}$ podle P byly v poměru $3 : 4 : 6$. Stanovte nejdříve počet řešení a potom některé sestrojte.
7. Opakujte úlohu 6 pro pól Q a poměr velikostí stran uvažovaných trojúhelníků $2 : 6 : 7$.
8. Narýsujte libovolnou dvojici trojúhelníků z relace $\boldsymbol{p}$ podle pólu P, který leží uvnitř zvolené dvojice, a současně i trojúhelník z relace $\boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}$ podle téhož pólu P.
   a) Označte první složku relace $\triangle ABC$ a na $\triangle PBC_1$ ověřte pravdivost tvrzení:
   $$\alpha + \alpha' + \overline{\alpha} = \beta + \beta' + \overline{\beta} = \gamma + \gamma' + \overline{\gamma},$$
   kde užité znaky mají význam podle textu.
   b) V narýsovaném obrázku vyhledejte další trojúhelníky podobné $\triangle PBC_1$.
9. Je dán $\triangle A_cB_cP$ [$A_cB_c = 8$; $PA_c = 6$; $PB_c = 5$] z trojice příslušné k relaci $\boldsymbol{p}$ podle P. Sestrojte zbývající dva trojúhelníky z této trojice, víte-li, že $PB_a = 4$, $PA_b = 7$. Narýsujte i $\triangle A_1B_1C_1$, avšak kružnici jemu opsanou nerýsujte!
10. Je dána úsečka $A_bA_c = 11$ cm, jejíž krajní body jsou vrcholy trojúhelníků z trojice příslušné k relaci podle pólu Q s první složkou $\triangle ABC$. Pól Q dělí úsečku A_bA_c tak, že $A_bQ = 7$ cm a bod B_a půlí úsečku QB_c. Dále je známa velikost vnitřního úhlu $\sphericalangle B_2A_2C_2 = 120°$ příslušného rovnoramenného $\triangle A_2B_2C_2$. Sestrojte $\triangle ABC$!

11. Na kružnici $k = (O;\ 3{,}5)$ jsou dány body A a B [$AB = 4{,}5$] a body B_1, C_1 [$AB_1 = 6$; $AC_1 = 2$]. Pól P je hlavním vrcholem rovnoramenného $\triangle A\overline{A}P$, kde $\overline{A}$ je vrchol $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ z relace $\boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}$ podle P. Sestrojte $\triangle ABC$ a $\triangle ABC_0$ příslušný k dvojici z relace $\boldsymbol{p}$ podle P.

12. Je dán $\triangle K_1L_1M_1$ [$K_1L_1 = 7$; $L_1M_1 = 5{,}5$; $\sphericalangle K_1L_1M_1 = 60°$] a velikosti úseček $K\overline{K} = L\overline{L} = 2$, kde $\sphericalangle K_1L_1M_1$ je druhá složka z relace $\boldsymbol{p}$ podle P a $\overline{K}$, $\overline{L}$ vrcholy $\triangle \overline{K}\overline{L}\overline{M}$ z relace $\boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}$ podle P. Narýsujte trojici trojúhelníků $\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$, $\triangle A_cB_cP$ příslušnou k těmto relacím, aniž narýsujete kružnice hledané trojici opsané.

13. Je dán $\triangle U_1V_1Z_1$ [$U_1V_1 = 6{,}5$; $V_1Z_1 = 7$; $r = 3{,}8$] a velikosti úseček $U_1Z = U_1\overline{V} = 3$, kde $\overline{V}$ je vrchol $\triangle \overline{U}\overline{V}\overline{Z}$ z relace $\boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}$. Sestrojte trojici $\triangle U_0VZ$, $\triangle UV_0Z$, $\triangle UVZ_0$, aniž narýsujete kružnice jim opsané.

14. Je dán $\triangle EFG$ [$EF = 4{,}5$; $FG = 6$; $GE = 6{,}5$] a dva vnitřní úhly $\sphericalangle EF_0G = 45°$ a $\sphericalangle EG_0F$ trojúhelníků z trojice příslušné k relaci [$\triangle EFG$, $\triangle E_1F_1G_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle P. Sestrojte tuto trojici i trojici $\triangle PF_eG_e$, $\triangle E_fPG_f$, $\triangle E_gF_gP$, aniž narýsujete kružnice těmto trojicím opsané.

15. Opakujte úlohu 14, avšak s úhly velikostí $\sphericalangle EF_0G = 135°$, $\sphericalangle GE_0F = 25°$. Zdůvodněte, proč v tomto případě nelze užít relace $\boldsymbol{p}$ podle P, ale relace $\boldsymbol{q}$ podle Q. Potom sestrojte $\triangle E_fQC_f$.

16. K libovolně zvolenému $\triangle ABC$ sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle pólu P, který leží uvnitř $\triangle ABC$. Potom pokládejte $\triangle A_1B_1C_1$ za první složku v relaci [$\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ABC$] $\in \boldsymbol{p}$ podle P a sestrojte k ní příslušný trojúhelník $A_1B_1C_0'$ a v kružnici jemu opsané $\triangle A_c'B_c'P$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle pólu C. Dokažte, že je $\triangle A_c'B_c'P \sim \triangle ABC$.

17. Úlohu 16 opakujte pro pól P ležící vně $\triangle ABC$.

18. Úlohu 16 opakujte pro pól Q ležící uvnitř $\sphericalangle BAC$.

19. Úlohu 16 opakujte pro pól Q ležící v úhlu vrcholovém k $\sphericalangle BAC$.

20. K zvolenému $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle P sestrojte první složku $\triangle ABC$, víte-li, že k této dvojici příslušné trojúhelníky $\triangle ABC_0$, $\triangle AB_0C$, $\triangle A_0BC$ jsou rovnostranné.

21. Uvažte, lze-li úlohu 20 za stejných podmínek řešit i pro vnější pól Q.

22. Vně libovolného $\triangle ABC$ narýsujte trojúhelníky $\triangle ABC_0 \sim \sim \triangle AB_0C \sim \triangle A_0BC$ takové, že $\overline{AB} : \overline{BC_0} : \overline{C_0A} = 5 : 6 : 7$. Přímky AA_0, BB_0 a CC_0 procházejí jedním bodem. Dokažte! O který bod jde?

23. Je dána dvojice $[\triangle A_bPC_b, \triangle AB_0C] \in \boldsymbol{p}$ podle B_1 příslušná k dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle P: $A_bP = 7{,}3$; $C_bP = 6{,}2$; $\sphericalangle A_bPC_b = 43°$; $AC = 5{,}8$; $\sphericalangle B_0AC = 67°$.
a) Určete velikosti stran a vnitřních úhlů $\triangle ABC$.
b) Sestrojte a proveďte přibližnou kontrolu měřením!

24. Je dán $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ze složené relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ $[\overline{A}\overline{B} = 4{,}8$; $\sphericalangle \overline{B}\overline{A}\overline{C} = 72°$; $\sphericalangle \overline{C}\overline{B}\overline{A} = 65°]$ a některé rozměry trojúhelníků k této dvojici příslušných, a to: $AB_0 = 6$; $BC_0 = 7{,}4$; $CA_0 = 5{,}2$. Narýsujte všechny v textu uvedené trojúhelníky.

25. Zvolte libovolný $\triangle EFG$, jeho vnitřní bod označte P a sestrojte dvojici $\triangle EFG\ \boldsymbol{p}\ \triangle E_1F_1G_1$ podle P a k ní příslušné trojice $[\triangle ABC_0, \triangle AB_0C, \triangle A_0BC]$, $[\triangle A_cB_cP, \triangle A_bPC_b, \triangle PB_aC_a]$, aniž narýsujete kružnice těmto trojicím opsané l_a, l_b, l_c.

26. Opakujte úlohu 25 pro relaci $[\triangle KLM, \triangle K_2L_2M_2] \in \boldsymbol{q}$ podle Q.

27. Zvolte libovolný $\triangle ABC$ a vnější pól Q na tečně vedené v bodě B ke kružnici $\triangle ABC$ opsané. Potom narýsujte dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{q}\ \triangle A_2B_2C_2$ podle Q a trojice trojúhelníků k ní příslušné.

28. Úlohu 27 opakujte s tím rozdílem, že pól Q bude průsečíkem tečen vedených ke kružnici $\triangle ABC$ opsané v jeho vrcholech B a C.

B. ZVLÁŠTNÍ PŘÍPADY PODOBNÝCH ZOBRAZENÍ

Ve druhé kapitole jsme shledali, že zvláštním polohám pólů P nebo Q odpovídají zvláštní vlastnosti dvojic trojúhelníků podle nich utvořených. Můžeme proto právem předpokládat, že se tyto zvláštní vlastnosti projeví i u trojic trojúhelníků k nim příslušných, tj. $[\triangle A_0BC, \triangle AB_0C, \triangle ABC_0]$ a $[\triangle PB_aC_a, \triangle A_bPC_b, \triangle A_cB_cP]$ nebo $[\triangle QB_aC_a, \triangle A_bQC_b, \triangle A_cB_cQ]$.

Ukažme nejdříve, jaké důsledky z toho plynou pro dvojice utvořené podle středů kružnic danému trojúhelníku vepsaných.

Věta 50. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S, *kde* S *je střed kružnice* $\triangle ABC$ *uvnitř vepsané, a k ní příslušné trojice* $[\triangle A_0BC, \triangle AB_0C, \triangle ABC_0]$ *a* $[\triangle SB_aC_a, \triangle A_bSC_b, \triangle A_cB_cS]$. *Potom platí:*

a) $\triangle A_0BC \cong \triangle SB_aC_a$, $\triangle AB_0C \cong \triangle A_bSC_b$, $\triangle ABC_0 \cong \triangle A_cB_cS$,

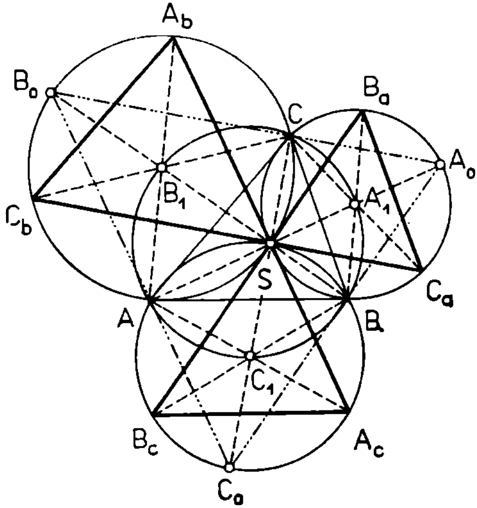
b) $\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle A_1B_1C_1$,

c) *Vrcholy* A_0, B_0 *a* C_0 *jsou středy kružnic* $\triangle ABC$ *vně vepsaných.*

Důkaz. Všechna tvrzení uvedená v této větě vyplývají přímo z dříve dokázaných vět. Stačí je jenom připomenout podle obr. 103.

a) Podle věty 19 jsou body A_1, B_1 a C_1 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům $\triangle SBC$, $\triangle ASC$ a $\triangle ABS$. Protože tyto vrcholy jsou póly v relacích $\boldsymbol{p}$ podle A_1, B_1 a C_1, jde o středovou souměrnost v množinách $\boldsymbol{M}_{Ta}$, $\boldsymbol{M}_{Tb}$ a $\boldsymbol{M}_{Tc}$ a uvažované dvojice jsou shodné. (3.41)

b) Podle věty 47 je například $\triangle SB_aC_a \sim \triangle A_1B_1C_1$ a současně podle (3.41) $\triangle SB_aC_a \cong \triangle A_0BC$, takže je také $\triangle A_0BC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Obdobně pak $\triangle AB_0C \sim \sim \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ABC_0 \sim \triangle A_1B_1C_1$.



Obr. 103

c) Zde podle věty 25 je například přímka $\overleftrightarrow{AA_0}$ osou $\sphericalangle BAC$ a střed S_a leží na kružnici opsané $\triangle BSC$, takže je $S_a \equiv A_0$ a obdobně také $S_b \equiv B_0$ i $S_c \equiv C_0$.

Právě dokázaná věta má ještě další důsledky, z nichž nejdůležitější jsou:

1. O velikostech vnitřních úhlů v trojúhelnících $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$ platí

$$\bar{\alpha} = \alpha' = 90° - \frac{\alpha}{2}, \ \bar{\beta} = \beta' = 90° - \frac{\beta}{2},$$

$$\bar{\gamma} = \gamma' = 90° - \frac{\gamma}{2};$$

2. Ze středové souměrnosti v množinách $\boldsymbol{M}_{Ta}$, $\boldsymbol{M}_{Tb}$, $\boldsymbol{M}_{Tc}$ vyplývá:

$$\overleftrightarrow{A_cB_c} \parallel \overleftrightarrow{AB} \wedge \overline{A_cB_c} = \overline{AB}, \ \overleftrightarrow{B_aC_a} \parallel \overleftrightarrow{BC} \wedge \overline{B_aC_a} = \overline{BC},$$

$$\overleftrightarrow{C_bA_b} \parallel \overleftrightarrow{CA} \wedge \overline{C_bA_b} = \overline{CA};$$

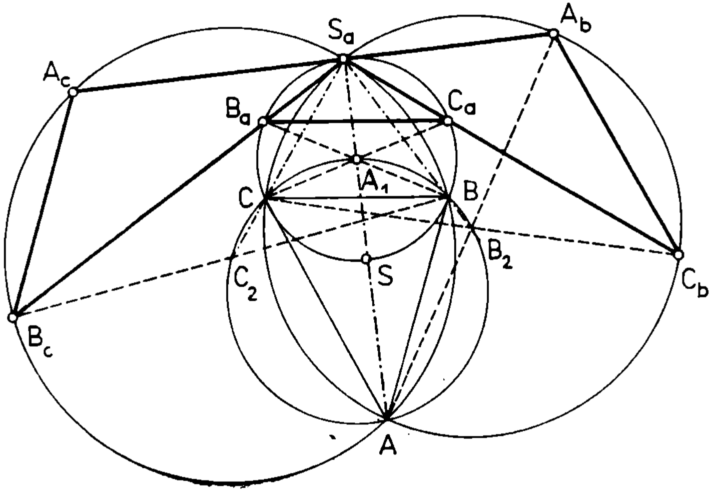
3. Vrcholy A_0, B_0 a C_0 jsou vrcholy trojúhelníku, v němž kružnice opsaná $\triangle ABC$ je kružnicí Feuerbachovou (viz větu 27).

Věta 51. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \ \triangle A_1A_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* S_a, *kde* S_a *je střed kružnice vně vepsané* $\triangle ABC$ *proti vrcholu* A *a k této dvojici příslušné trojice* $[\triangle A_0BC, \triangle AB_0C, \triangle ABC_0]$ *a* $[S_aB_aC_a, \ \triangle A_bS_aC_b, \ \triangle A_cB_cS_a]$.
Potom platí:
a) $\triangle A_0BC \cong \triangle S_aB_aC_a$, $\triangle AB_0C \cong \triangle A_bS_aC_b$, $\triangle ABC_0 \cong \triangle A_cB_cS_a$;
b) $\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle A_1B_2C_2$;
c) *Vrchol* A_0 *je středem kružnice* $\triangle ABC$ *uvnitř vepsané.*

Důkaz (obr. 104). Z věty 25 opět vyplývá, že bod A_1 je středem kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle A_0BC$ a $\triangle S_aB_aC_a$, takže příslušná relace $\boldsymbol{p}$ podle A_1 v množině $\boldsymbol{M}_{Ta}$ je středovou souměrností. To však pro důkaz věty 51 nestačí, neboť musíme ještě dokázat, že bod B_2 je středem kružnice opsané $\triangle ABS_a$ a bod C_2 středem kružnice opsané $\triangle ACS_a$.

Především je podle věty 5 $\sphericalangle CS_aB = \alpha' - \alpha$. Dosadíme-li sem podle věty 23 a $\alpha' = 90° + \frac{\alpha}{2}$, dostaneme

$$\sphericalangle CS_aB = 90° + \frac{\alpha}{2} - \alpha = 90° - \frac{\alpha}{2}. \qquad (3.42)$$



Obr. 104

Dále je v kružnici k $\sphericalangle CC_2B = \sphericalangle CAB = \alpha$, takže v $\triangle C_2BS_a$ $\sphericalangle C_2BS_a = 180° - \sphericalangle CS_aB - \sphericalangle CC_2B$ a potom podle (3.42)

$$\sphericalangle C_2BS_a = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

(3.43)

Porovnáme-li (3.42) a (3.43), zjistíme, že $\triangle C_2S_aB$ má dva úhly shodné a je rovnoramenný, čili $\overline{C_2S_a} = \overline{C_2B}$. Rovnost $\overline{C_2A} = \overline{C_2B}$ plyne z věty 22, a proto body A, B a S_a leží na kružnici opsané kolem středu C_2. Cyklickou záměnou dostaneme i další rovnosti

$$\overline{B_2A} = \overline{B_2C} = \overline{B_2S_a}.$$

Tím jsme současně dokázali, že relace $\boldsymbol{p}$ podle A_1, B_2 a C_2 v množinách $\boldsymbol{M}_{Ta}$, $\boldsymbol{M}_{Tb}$ a $\boldsymbol{M}_{Tc}$ jsou středovými souměrnostmi a odtud plyne shodnost dvojic trojúhelníků uvedených v tvrzení a) věty 51.

Tvrzení b) snadno odvodíme z věty 48, protože podle této věty je například $\triangle S_aB_aC_a \sim \triangle A_1B_2C_2$ a současně podle tvrzení a) věty 51 $\triangle A_0BC \cong \triangle S_aB_aC_a$, takže je $\triangle A_0BC \sim \triangle A_1B_2C_2$ a z cyklických záměn pak plyne: $\triangle AB_0C \sim \triangle A_1B_2C_2$, $\triangle ABC_0 \sim \triangle A_1B_2C_2$.

Tvrzení c) je jako u věty 50 důsledkem věty 25, neboť je $A_0 \equiv S$.

Nežli uvedeme důsledky právě dokázané věty, je třeba vzít v úvahu ještě cyklické záměny pro póly S_b a S_c, protože věta 51 byla vyslovena pouze ve vztahu k pólu S_a.

Tyto záměny ovšem uvedeme bez důkazu:

Je-li pólem střed kružnice vně vepsané $\triangle ABC$ proti vrcholu B, bude

a) $\triangle AB_0C \cong \triangle A_bS_bC_b$, $\triangle ABC_0 \cong \triangle A_cB_cS_b$,
$\triangle A_0BC \cong \triangle S_bB_aC_a$;

b) $\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle A_2B_1C_2$;

c) Vrchol B_0 je středem kružnice $\triangle ABC$ uvnitř vepsané.

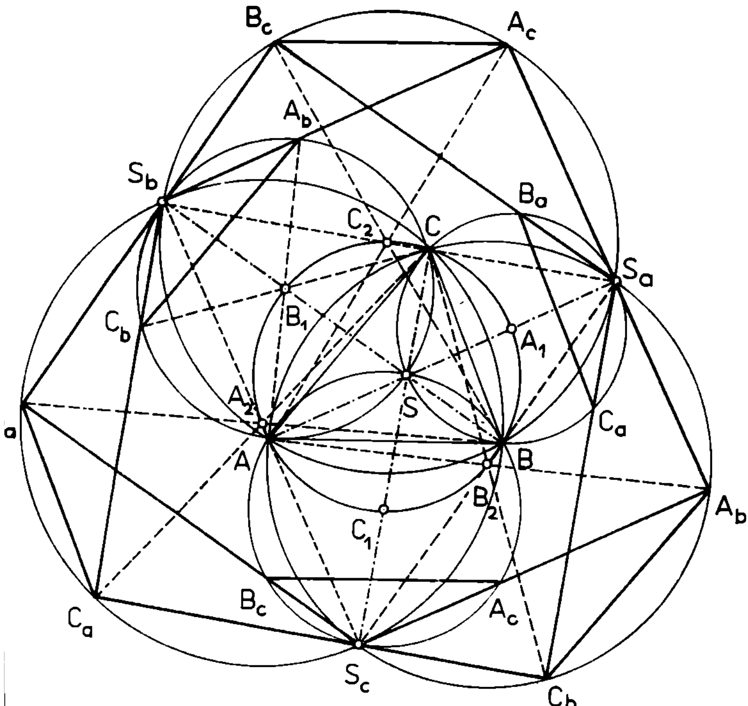
Je-li pólem střed kružnice vně vepsané $\triangle ABC$ proti vrcholu C, bude

a) $\triangle ABC_0 \cong \triangle A_cB_cS_c$, $\triangle A_0BC \cong \triangle B_aC_aS_c$,
$\triangle AB_0C \cong \triangle A_bS_cC_b$;

b) $\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle A_2B_2C_0$;

c) Vrchol C_0 je středem kružnice $\triangle ABC$ uvnitř vepsané.

Na obr. 105 jsou v jednom obrázku zakresleny všechny tři trojice trojúhelníků příslušných k dvojicím uvedeným ve větě 51 a jejích důsledcích podle cyklických záměn. Z obrázku lze snadno zjistit, že se některé vrcholy zobrazených trojúhelníků navzájem kryjí a mimoto se jejich označení vyskytuje ještě jednou v jiné trojici. Najdeme proto každou z dvojic $[A_cB_c]$, $[B_aC_a]$ a $[C_bA_b]$



Obr. 105

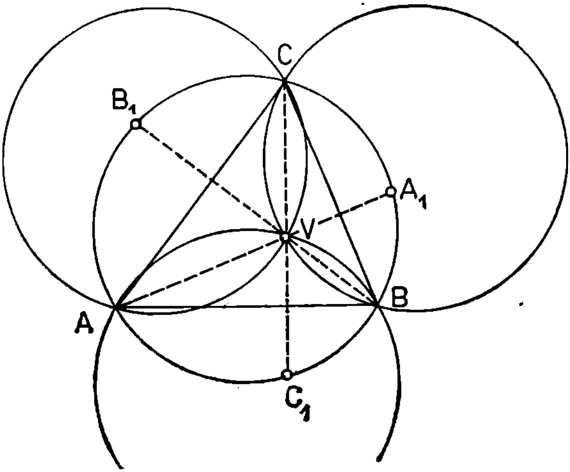
v obrazci třikrát. Současně pak některé vrcholy splývají, a to:
$S_a \equiv B_0 \equiv C_0$, $A_0 \equiv S_b \equiv C_0$, $A_c \equiv B_c \equiv S_0$. Ovšem také $S \equiv A_0 \equiv B_0 \equiv C_0$, kde S je střed kružnice uvnitř vepsané $\triangle ABC$.

Z téhož obrázku lze vyčíst i další důsledky věty 51 zcela obdobné důsledkům uvedeným za větou 50. Není nutné je proto opakovat. Jsou tu však ještě další, z nichž uveďme aspoň jeden:
V šestiúhelníku $A_bC_bC_aB_aB_cA_c$ lze nalézt několik čtyřúhelníků pravoúhlých, jako například $A_cA_bS_cS_b$ nebo také $AS_aA_bS_c$ a podobně. Že jde o pravoúhlé čtyřúhelníky, není nutno dokazovat, vyplývá to z Thaletovy věty, nebo z věty 27, podle níž je kružnice opsaná $\triangle ABC$ Feuerbachovou kružnicí $\triangle S_aS_bS_c$. Také dvojice $[A_cB_c]$, $[B_aC_a]$ a $[C_bA_b]$, které se v obr. 105 opakují, jsou vrcholy obdélníků, jak dokážeme v příkladech připojených na konci této části kapitoly.

Věta obecné platnosti, kterou nyní uvedeme, zahajuje úvahy o vlastnostech trojic trojúhelníků odvozených z relace $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ podle průsečíku výšek $\triangle ABC$.

Věta 52. *Je-li bod V průsečíkem výšek daného $\triangle ABC$, potom kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle VBC$, $\triangle AVB$, $\triangle ABV$ a $\triangle ABC$ jsou navzájem shodné.*

Důkaz (obr. 106). Připomeňme si větu 36. Podle ní je například vrchol A_1 $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle V souměrně sdružený podle osy BC s pólem V. Je tedy $\triangle VBC \cong \triangle A_1BC$ a odtud plyne, že i kružnice opsané těmto dvěma trojúhelníkům jsou navzájem shodné. Obdobně platí $\triangle AVC \cong \triangle AB_1C$ a také $\triangle ABV \cong$ $\cong \triangle ABC_1$, takže všechny čtyři uvažované kružnice jsou navzájem shodné. Bude-li trojúhelník ABC pravoúhlý, potom neexistují trojúhelníky $\triangle VBC$, $\triangle AVB$, $\triangle ABV$ a nemá smyslu uvažovat, zda věta 52 platí i pro takový trojúhelník. Bude-li však tupoúhlý, platí věta 36 a tudíž i věta 52.



Obr. 106

Věta 53. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* V *nebo dvojici* $[\triangle ABC,\ \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* V *takové, že žádný vnitřní úhel* $\triangle ABC$ *není pravý a* V *je průsečík výšek* $\triangle ABC$.

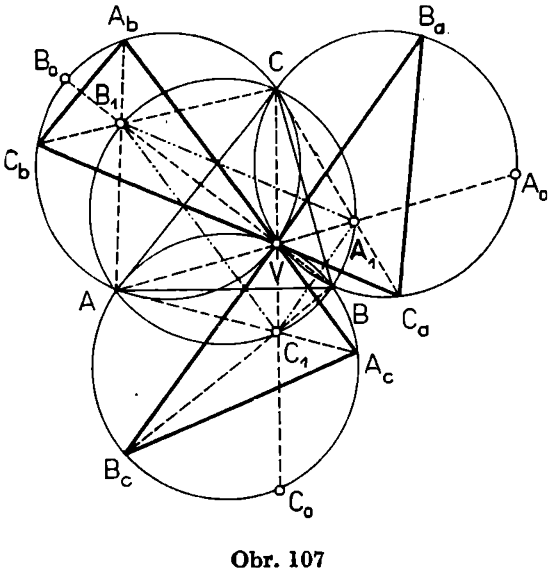
Potom o trojúhelnících z trojic příslušných k dané dvojici platí:

a) $\triangle A_0BC \cong \triangle AB_0C \cong \triangle ABC_0 \cong \triangle ABC$.

b) *Trojúhelníky* $\triangle VB_aC_a$, $\triangle A_bVC_b$ *a* $\triangle A_cB_cV$ *jsou souměrně sdruženy s* $\triangle A_1B_1C_1$ *nebo* $\triangle A_2B_2C_2$ *podle stran* $\triangle ABC$.

c) ***Body A_1, B_1, C_1 nebo A_2, B_2, C_2 jsou po řadě průsečíky výšek v trojúhelnících $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$, současně pak středy kružnic vepsaných trojúhelníkům $\triangle VB_aC_a$, $\triangle A_bVC_b$ a $\triangle A_cB_cV$.***

Důkaz (obr. 107). a) Na obr. 107 je $\triangle ABC$ ostroúhlý. Podle věty 36, jak jsme již připomněli, je přímka BC osou úsečky VA_1 a podle věty 52 i osou souměrnosti kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle VBC$ a $\triangle A_1BC$. Přímka VA_1 proto protíná tyto kružnice v bodech souměrně sdružených podle osy BC, takže trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_0BC$ jsou rovněž souměrně sdruženy podle



Obr. 107

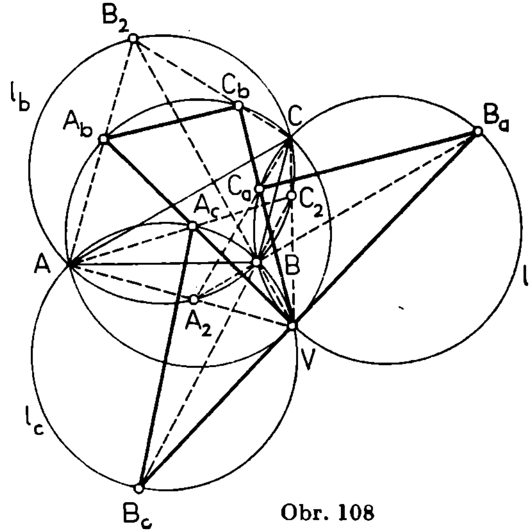
osy BC a jsou shodné. Doplníme-li tento výsledek cyklickými záměnami, dostáváme:

$$\triangle A_0BC \cong \triangle AB_0C \cong \triangle ABC_0 \cong \triangle ABC.$$

b) Protože v popsané osové souměrnosti je bod A_1 obrazem bodu V, je dvojice $[\triangle A_0BC, \triangle VB_aC_a] \in p$ podle A_1 obrazem dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ podle V.

c) Z toho dále plyne, že body A_1, B_1 a C_1 jsou průsečíky výšek v trojúhelnících $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$. To však podle věty 30 současně znamená, že tyto body jsou středy kružnic vepsaných trojúhelníkům $\triangle VB_aC_a$, $\triangle A_bVC_b$ a $\triangle A_cB_cV$.

Tím je důkaz věty 53 podán pouze pro trojúhelník ostroúhlý. Z obr. 108 však je zřejmé, že tato věta platí



Obr. 108

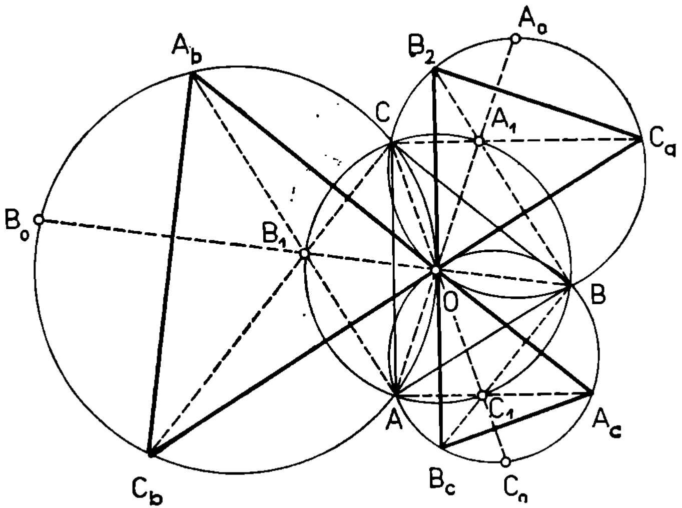
i v trojúhelníku tupoúhlém, neboť rozdíly jsou právě jenom v indexech, jak je možno se přesvědčit.

Pozornému čtenáři jistě neušla skutečnost, že se tu projevují důsledky vět 45 a 46 týkajících se podobných dvojic z množin M_T, M_{Ta}, M_{Tb} a M_{Tc}. Ukažme ještě, jak se to projeví v relacích podle středu kružnice $\triangle ABC$ opsané nebo podle jeho těžiště.

Věta 54. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle O, kde O je střed kružnice $\triangle ABC$ opsané. Potom o trojicích trojúhelníků k ní příslušných platí:*

Vrcholy A_1, B_1 a C_1 jsou po řadě

a) *středy kružnic uvnitř vepsaných trojúhelníkům $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$,*



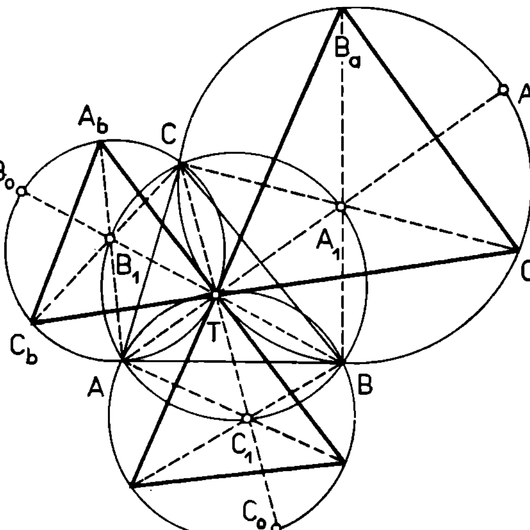
Obr. 109

b) *průsečíky výšek trojúhelníků* $\triangle OB_aC_a$, $\triangle A_bOC_b$ *a* $\triangle A_cB_cO$.

Důkaz (obr. 109). Pravdivost věty vyplývá přímo z vět 38 a 45. Srovnáme-li totiž obr. 91 a 92 s obr. 109, vidíme, že na obr. 109 je například bod A_1 obrazem pólu $\overline{O}$ v podobnosti $[\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle $\overline{O} \sim [\triangle A_0BC, \triangle OB_aC_a] \in \boldsymbol{p}$ podle A. V této podobnosti pak platí jak tvrzení a), tak i tvrzení b).

K zcela obdobnému výsledku dospějeme, bude-li pólem těžiště T daného $\triangle ABC$.

Věta 55. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle*



Obr. 110

T, kde T je těžiště $\triangle ABC$. Potom o trojici k ní příslušných trojúhelníků platí:

Vrcholy A_1, B_1 a C_1 jsou po řadě těžišti trojúhelníků $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$.

Důkaz (obr. 110). Podobně jako předcházející věta i tato věta plyne přímo z dříve dokázaných vět, a to věty 41 a 45. Podle věty 41 totiž víme, že v relaci

$$[\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C},\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } \bar{T}$$

je pól $\bar{T}$ těžištěm $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, takže z podobnosti $[\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C},\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle $\bar{T} \sim [\triangle A_0BC,\ \triangle TB_aC_a] \in \boldsymbol{p}$ podle A_1 přímo vyplývá, že bod A_1 je obrazem pólu $\bar{T}$, tedy těžištěm $\triangle A_0BC$. Dále pak podle cyklických záměn je B_1 těžištěm $\triangle AB_0C$, C_1 těžištěm $\triangle ABC_0$.

Na závěr této kapitoly si ještě ukážeme, že užitím vlastností relace $\boldsymbol{p}$ podle T je možno řešit úlohu z příkladu 6 v první kapitole. Tam byly dány tři úsečky velikostí a, b, c. Úsečku c jsme měli rozdělit na dvě části, jejichž velikosti jsou v poměru $a^2 : b^2$. Zde je možno tuto úlohu řešit dvěma způsoby, z nichž jeden ukážeme v příkladech po odvození příslušné věty:

Věta 56. *Mějme dvojici $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle T takovou, že těžnice $\triangle ABC$ mají velikosti t_a, t_b a t_c. Dále nechť na stranách $\triangle A_1B_1C_1$ leží body*

$$A^+ = (AA_1 \cap B_1C_1);\ B^+ = (BB_1 \cap A_1C_1);$$
$$C^+ = (CC_1 \cap A_1B_1).$$

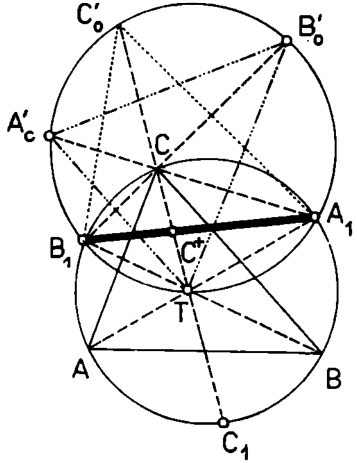
Potom je:

$$A_1C^+ : B_1C^+ = t_b^2 : t_a^2,\ B_1A^+ : C_1A^+ = t_c^2 : t_b^2,$$
$$A_1B^+ : C_1B^+ = t_c^2 : t_a^2.$$

Důkaz (obr. 111). Na obr. 111 je l'_c kružnice opsaná $\triangle A_1B_1T$, C'_0 průsečík této kružnice s přímkou C_1C a konečně C^+ průsečík přímky CT s přímkou A_1B_1.

V kružnici l'_c je $\sphericalangle C'_0B_1A_1 = \sphericalangle C'_0TA_1 = 180° - (\beta + \beta')$, protože $\sphericalangle A_1TC_1 = \beta + \beta'$ podle věty 4.

Obdobně pak $\sphericalangle C'_0A_1B_1 = 180° - (\alpha + \alpha')$.



Obr. 111

Trojúhelník $A_1B_1C'_0$ podle toho má dva úhly shodné s trojúhelníkem $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ z relace $\triangle A_1B_1C_1$ **p** $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle $\overline{T}$, jak vyplývá z věty 14. Jsou proto uvažované trojúhelníky podobné: $\triangle A_1B_1C'_0 \sim \triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

Vezmeme-li současně v úvahu větu 42, bude

$$A_1C'_0 : B_1C'_0 = t_b : t_a. \tag{3.44}$$

Dále z podobnosti $\triangle A_1B_1T \sim \triangle BAT$ plyne

$$A_1T : B_1T = BT : AT = t_b : t_a. \qquad (3.45)$$

Ze vztahů (3.44) a (3.45) utvořme součin v rovnosti

$$\frac{A_1C_0'}{B_1C_0'} \cdot \frac{A_1T}{B_1T} = \frac{t_b^2}{t_a^2} \qquad (3.46)$$

a levou stranu násobme výrazem

$$\frac{\frac{1}{2} \sin |\sphericalangle C_0'A_1T|}{\frac{1}{2} \sin |\sphericalangle C_0'B_1T|},$$

který se rovná jedné, protože jde o siny protějších úhlů v tětivovém čtyřúhelníku $C_0'A_1TB_1$.

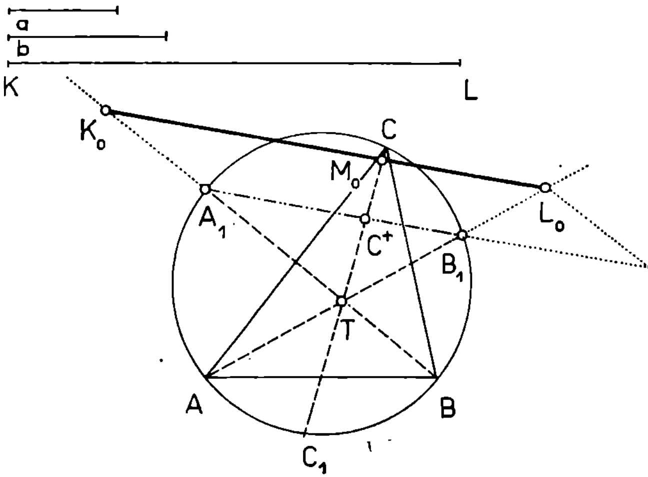
Po vynásobení bude mít (3.46) tento tvar: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{t_b^2}{t_a^2}$, kde P_1 je velikost obsahu $\triangle C_0'A_1T$, P_2 pak velikost obsahu $\triangle C_0'B_1T$. Tím se důkaz značně zkrátí, protože obsahy P_1 a P_2 jsou přímo úměrné velikostem úseček A_1C^+, B_1C^+.

Platí proto $A_1C^+ : B_1C^+ = t_b^2 : t_a^2$ a podle cyklických záměn také zbývající dva vztahy z věty 56.

Jak této věty využijeme při řešení zmíněné úlohy, ukažme hned na příkladu:

Příklad 1. Danou úsečku $KL = 12$ cm rozdělte na dvě části, jejichž velikosti jsou v poměru $a^2 : b^2$, kde $a > b$ jsou velikosti libovolně zvolených úseček.

Konstrukci provedeme užitím věty 56. Zvolíme libovolnou úsečku menší, než je součet daných dvou úseček, tak, že lze sestrojit $\triangle ABT$, kde $\overline{AT} = a$, $\overline{BT} = b$, AB je vhodně zvolená třetí strana $\triangle ABT$ (obr. 112).



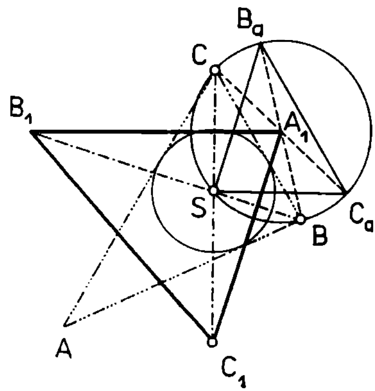
Obr. 112

Nyní určíme bod C tak, aby bod T byl těžištěm $\triangle ABC$. Na prodloužení úsečky AT za bod T určíme bod A^+ tak, že $TA^+ = \frac{1}{2}\,a$, na prodloužení úsečky BT za bod T určíme bod B^+ tak, že $TB^+ = \frac{1}{2}\,b$. Polopřímky BA^+ a AB^+ se protnou v hledaném bodě C.

Trojúhelníku ABC opíšeme kružnici a její průsečík s přímkou AT označíme A_1, průsečík s přímkou BT pak B_1. Podle věty 56 přímka CT dělí úsečku A_1B_1 v požadovaném poměru. K rozdělení dané úsečky KL v tomtéž poměru užijeme například stejnolehlosti, jako je tomu na obr. 112.

Příklad 2. Je dán $\triangle SB_aC_a$ [$SB_a = 4$; $SC_a = 3{,}5$; $B_aC_a = 4{,}5$] příslušný k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in$ $\in \boldsymbol{p}$ podle S. Sestrojte tuto dvojici, je-li S střed kružnice uvnitř vepsané $\triangle ABC$.

Řešení (obr. 113). Víme, že vrchol A_1 je středem kružnice opsané danému $\triangle SB_aC_a$ (věta 19). Dále je strana BC $\triangle \boldsymbol{ABC}$ souměrně sdružená podle středu A_1 se stranou B_aC_a daného trojúhelníku (věta 50). Sestrojíme-li úsečku $\boldsymbol{BC}$, můžeme narýsovat i kružnici vepsanou $\triangle ABC$, protože známe střed kružnice jemu vepsané a jednu stranu. Zbývající dvě strany pak leží na tečnách vedených z bodů B a C ke kružnici vepsané. Vrchol A je potom jejich průsečík. Můžeme ovšem vrchol A sestrojit

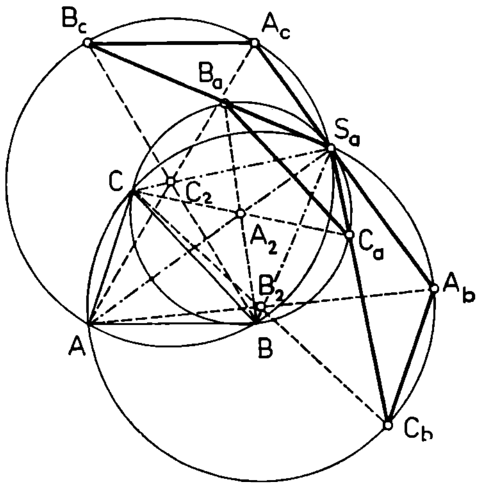


Obr. 113

také tak, že přeneseme úhly $\sphericalangle CBS$ a $\sphericalangle BCS$ do polorovin opačných k polorovinám $\overrightarrow{CBS}$ a $\overrightarrow{BCS}$.

Příklad 3. Je dána strana AB $\triangle ABC$ a střed S_a kružnice jemu vně vepsané proti vrcholu A [$AB = 4{,}5$ cm; $AS_a = 8$ cm; $BS_a = 5$ cm]. Sestrojte trojici trojúhelníků $\triangle S_aB_aC_a$, $\triangle A_bS_aC_b$ a $\triangle A_cB_cS_a$, aniž narýsujete kružnici opsanou $\triangle ABC$.

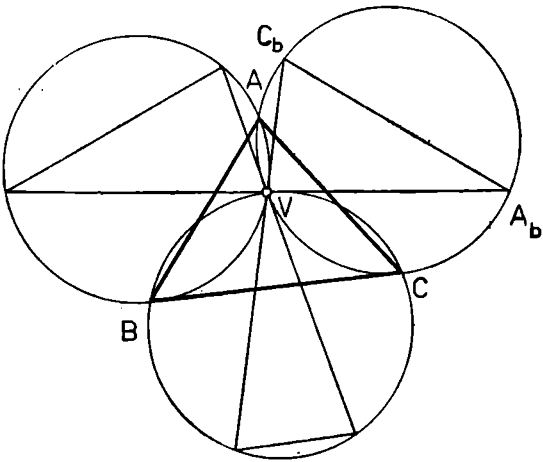
Řešení (obr. 114). Přímka AS_a je osou vnitřního úhlu $\triangle ABC$ při vrcholu A a přímka BS_a osou vnějšího úhlu při vrcholu B. Můžeme tedy sestrojit polopřímky $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BC}$, které se protnou ve vrcholu C. Opíšeme kružnice



Obr. 114

l_a, l_b a l_c trojúhelníkům $\triangle S_aBC$, $\triangle AS_aC$ a $\triangle ABS_a$. Víme, že středem kružnice opsané $\triangle S_aBC$ je bod A_1 a polopřímky BA_1 a CA_1 protnou kružnici l_a ve vrcholech B_a a C_a jednoho z hledaných trojúhelníků $S_aB_aC_a$. Potom polopřímka S_aC_a protne kružnici l_b ve vrcholu C_b a polopřímka S_aB_a kružnici l_c ve vrcholu B_c. Zbývající dva vrcholy, totiž A_b a A_c, sestrojíme užitím podobnosti $\triangle S_aB_aC_a \sim \triangle A_bS_aC_b \sim \triangle A_cB_cS_a$, například přenesením vnitřních úhlů v $\triangle S_aB_aC_a$.

Příklad 4. Řešte co nejjednoduššími prostředky úlohu: Je dán $\triangle A_bVC_b$ [$VA_b = 65$ mm, $VC_b = 35$ mm, $A_bC_b = 70$ mm] příslušný k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in$ $\in \boldsymbol{p}$ podle V, kde V je průsečík výšek $\triangle ABC$. Sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle V a zbývající dva trojúhelníky z trojice k této relaci příslušné.



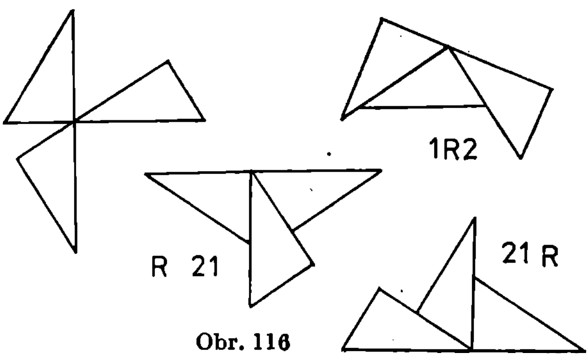
Obr. 115

Řešení. Danému trojúhelníku opíšeme kružnici l_b a sestrojíme střed kružnice uvnitř vepsané B_1. Osa úsečky VB_1 protne kružnici l_b v bodech C a A. Tím je úloha vyřešena, protože zbývající tři kružnice, tj. k, l_a a l_c, jsou shodné s l_b, takže je $AO = CO$, $B_1B \perp AC$ atd. Celá konstrukce je provedena na obr. 115.

Příklad 5. O trojici shodných pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnami velikosti 6 cm a 3,6 cm víme, že přísluší k dvojici z relace p nebo q podle V. Rozhodněte, kolika způsoby lze tuto trojici umístit tak, aby vyhovovala uvedené podmínce, a potom sestrojte jednu z těch možností, kde první trojúhelník v uvažované dvojici je tupoúhlý.

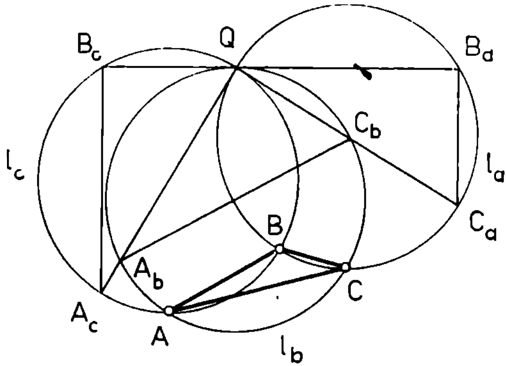
Řešení. Nepřihlédneme-li k označení vrcholů dané trojice trojúhelníků, existují právě čtyři možnosti, jak je umístit vzhledem k daným podmínkám. Tyto čtyři způsoby jsou zobrazeny na obr. 116.

Jestliže první v dvojici trojúhelníků má být ostroúhlý, existuje právě jedno uspořádání, neboť v bodě V,



Obr. 116

který je společným vrcholem daných tří trojúhelníků, se musí krýt vrcholy těchto trojúhelníků tak, že bod V je vrcholem pravého úhlu v jednom trojúhelníku, vrcholem menšího ostrého úhlu ve druhém a většího ostrého ve třetím trojúhelníku.



Obr. 117

Nejinak je tomu v případě, že půjde o trojúhelník tupoúhlý. Zde však existují tři možnosti, které se liší pořadím těchto úhlů v trojici tvořící úhel přímý. Označíme-li pravý úhel R a ostré číslicemi 1 a 2, existují tato tři různá uspořádání: 1 R 2, R 1 2, 1 2 R. Zbývající tři možnosti 2 R 1, 2 1 R, R 2 1 vedou k shodným řešením.

Případ 1 2 R je proveden na obr. 117.

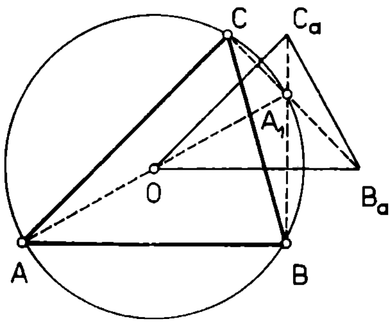
Postup *konstrukce* je zde velmi jednoduchý. Narýsujeme zvolené seskupení dané trojice trojúhelníků a opíšeme jim kružnice l_a, l_b a l_c. Tak dostaneme přímo vrcholy hledaného trojúhelníku. Na obrázku to jsou:

A průsečík kružnic l_b a l_c.
B průsečík ružnic l_a a l_c.
C průsečík kružnic l_a a l_b.

Příklad 6. Daný trojúhelník OB_aC_a [$OB_a = 5{,}5$; $B_aC_a = 4$; $OC_a = 5$] přísluší k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in$ $\in \boldsymbol{p}$ podle O, kde O je střed kružnice opsané $\triangle ABC$. Sestrojte $\triangle ABC$.

Řešení. Víme, že podle věty 54 je průsečík výšek v $\triangle OB_aC_a$ vrcholem A_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle O. Sestrojíme-li tedy tento průsečík, získáme i velikost poloměru kružnice opsané $\triangle ABC$. Je to velikost úsečky A_1O. Opíšeme-li tuto kružnici, je vrchol A její průsečík s přímkou A_1O, vrchol C její průsečík s přímkou C_aA_1 a konečně vrchol B její průsečík s přímkou B_aA_1.

Konstrukce je provedena na obr. 118.



Obr. 118

Příklad 7. Je dán obdélník $S_aS_bC_aC_b$ [$S_aS_b = 96$ mm, $S_bC_a = 64$ mm] a na jeho straně S_aS_b bod C takový, že $S_aC = 36$ mm. Bod C je vrchol $\triangle ABC$ a body S_a, S_b středy kružnic jemu vně vepsaných. Body C_a a C_b jsou vrcholy trojúhelníků z trojic příslušných k dvojicím z relací q podle S_c nebo S_a a S_b. Narýsujte $\triangle ABC$ a uvedené trojice trojúhelníků.

Řešení. Podle věty 49 leží pól S_c na přímce C_aC_b a podle věty 27 je úsečka CS_c výškou v trojúhelníku $S_aS_bS_c$. Další dva vrcholy $\triangle ABC$ jsou patami výšek v témž trojúhelníku. Tím je úloha vyřešena. Konstrukci zde neuvádíme, jde o opakování situace na obr. 105.

Cvičení

1. K danému $\triangle ABC$ $[AB = 60;\ BC = 52;\ AC = 67]$ sestrojte trojici trojúhelníků $\triangle SB_aC_a$, $\triangle A_bSC_b$, $\triangle A_cB_cS$ příslušnou k relaci p podle S.
2. Je dán $\triangle DEF$ $[DE = 50;\ \sphericalangle FDE = 70°;\ \sphericalangle FED = 50°]$ a relace q podle S_f, kde S_f je střed kružnice $\triangle DEF$ vně vepsané. Sestrojte trojici $\triangle S_fE_dF_d$, $\triangle D_eS_fF_e$, $\triangle D_fE_fS_f$.
3. K danému $\triangle KLM$ $[KL = 45;\ LM = 55;\ \sphericalangle KLM = 60°]$ sestrojte trojici $\triangle VL_kM_k$, $\triangle K_1VM_1$, $\triangle K_mL_mV$ příslušnou k relaci p podle V.
4. Je dán $\triangle ZMN$ $[ZM = 58;\ MN = 40;\ \sphericalangle ZMN = 110°]$ a relace q podle V. Sestrojte k ní příslušnou trojici $\triangle VM_zN_z$, $\triangle Z_mVN_m$, $\triangle Z_nM_nV$.
5. Je dán $\triangle ABC_0$ z trojice příslušné k relaci $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ podle S $[AB = 70;\ BC_0 = 80;\ AC_0 = 85]$. Sestrojte dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1]$.
6. O daném $\triangle BCS$ $[BC = 50;\ \sphericalangle BCS = 25°;\ \sphericalangle CBS = 30°]$ víme, že je částí $\triangle ABC$ a bod S je středem kružnice tomuto trojúhelníku vepsané. Sestrojte střed S_a kružnice $\triangle ABC$ vně vepsané proti vrcholu A a trojice trojúhelníků příslušných k dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ podle S_a.
7. Trojúhelník ACB_0 $[AC = 60;\ \sphericalangle ACB_0 = 50°;\ \sphericalangle CAB_0 = 60°]$ je z trojice trojúhelníků příslušných k relaci $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ podle V. Sestrojte zbývající dva trojúhelníky z této trojice.
8. K danému $\triangle EFG_0$ $[EF = 65;\ \sphericalangle EFG_0 = 30°;\ \sphericalangle FEG_0 = 80°]$ sestrojte trojici $\triangle OF_eG_e$, $\triangle E_fOG_f$, $\triangle E_gF_gO$ příslušnou k relaci p podle O.

9. Daný $\triangle KLM_0$ $[KL = 5; KM_0 = 6; LM_0 = 7]$ je z trojice příslušné k dvojici $[\triangle KLM, \triangle K_1L_1M_1] \in \boldsymbol{p}$ podle T. Sestrojte tuto dvojici i trojici $\triangle TB_aC_a$, $\triangle A_bTC_b$, $\triangle A_cB_cT$.
10. Vrcholy $\triangle A_0B_0C_0$ $[A_0B_0 = 12; B_0C_0 = 10; C_0A_0 = 15]$ jsou vrcholy trojice trojúhelníků příslušné k relaci $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S. Sestrojte co nejjednodušším způsobem $\triangle ABC$.
11. Sestrojte $\triangle ABC$ k danému $\triangle SB_aC_a$ $[B_aC_a = 55, SC_a = 60; SB_a = 45]$ z trojice příslušné k dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S.
12. Trojúhelník A_bVC_b $[A_bC_b = 70; VA_b = 80; VC_b = 45]$ je příslušný k dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V. Sestrojte tuto dvojici.
13. Sestrojte dvojici $[\triangle EFG, \triangle E_2F_2G_2] \in \boldsymbol{q}$ podle S_g, je-li $\triangle E_gF_gS_g$ $[E_gS_g = 45; F_gS_g = 30; \sphericalangle E_gS_gF_g = 130°]$ z trojice příslušné k relaci $\boldsymbol{q}$ podle S_g.
14. Víte-li, že $\triangle A_cB_cO$ $[A_cB_c = 6; A_cO = 6{,}5; B_cO = 4{,}5]$ je z trojice trojúhelníků příslušných k relaci $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle O, sestrojte $\triangle ABC$.
15. Zvolte trojici bodů E, F, G takových, že neleží v přímce. Dokažte, že v rovině EFG existuje aspoň jeden bod M, který spolu s body E, F, G určuje tři shodné kružnice.
16. Zvolte libovolný trojúhelník a kolem jeho vrcholů opište kružnice l_1, l_2, l_3 takové, aby procházely jedním bodem a po dvou určovaly společné tětivy, jejichž velikosti jsou shodné.
17. Daný trojúhelník DEF má velikosti stran v poměru $6 : 7 : 8$ a víme o něm, že patří do trojice trojúhelníků příslušných k relaci $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ podle neurčeného pólu. Máme sestrojit první složku z těchto relací, kterou je $\triangle ABC$ a daný trojúhelník přísluší

    a) k relaci $\boldsymbol{p}$ podle S,
    b) k relaci $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ podle V,
    c) k relaci $\boldsymbol{q}$ podle S_a,
    d) k relaci $\boldsymbol{p}$ podle O.

18. Do kružnice $k = (O; 3{,}8)$ vepište $\triangle ABC$, jehož vnitřní úhly mají velikosti v poměru $5 : 6 : 7$, a sestrojte trojice trojúhelníků příslušné k relaci $\boldsymbol{p}$ podle T.
19. Kružnice l_a, l_b a l_c opsané trojici trojúhelníků $\triangle SB_aC_a$, $\triangle A_bSC_b$, $\triangle A_cB_cS$ příslušné k relaci $\boldsymbol{p}$ podle S se dotýkají přímek $\overleftrightarrow{A_bA_c}$, $\overleftrightarrow{B_aB_c}$ a $\overleftrightarrow{C_aC_b}$. Dokažte!

20. Narýsujte trojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle T a sestrojte pól $\bar{T}$. Potom pokládejte $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ za první složku v relaci $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ a sestrojte k ní příslušnou trojici v kružnicích opsaných $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{T}$, $\triangle \bar{A}\bar{T}\bar{C}$ a $\triangle \bar{T}\bar{B}\bar{C}$. Výsledek zhodnoťte!

21. V dvojici trojúhelníků z relace $\boldsymbol{p}$ podle S a k ní příslušných trojicích známe velikosti úhlů $\sphericalangle A_bSC_b = 49°53'18''$; $\sphericalangle CA_0B = 62°13'46''$; $\sphericalangle ACB = 73°29'14''$. Určete velikosti všech zbývajících úhlů.

22. V $\triangle S_aB_aC_a$ je $\sphericalangle S_aB_aC_a = 15°26'19''$; $\sphericalangle B_aS_aC = 143°42'11''$. Určete velikosti úhlů v příslušném $\triangle ABC$.

23. Je dán $\triangle ABC_0$ $[AB = 4{,}6;\ VC_0 = 5{,}4;\ C_0A = 6{,}8]$ příslušný k dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle T. Sestrojte tuto dvojici!

24. Opakujte úlohu 23 pro dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle O!

25. Opakujte úlohu 23 pro dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S!

26. Opakujte úlohu 23 pro dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V!

27. Trojúhelník ABC_0 $[AB = 8{,}5;\ \sphericalangle C_0AB = 15°;\ \sphericalangle C_0BA = 20°]$ přísluší k dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ podle S_a. Narýsujte tuto dvojici!

28. Opakujte úlohu 27 pro dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ podle V!

KAPITOLA 4

NĚKTERÉ METRICKÉ VZTAHY

V předcházejících třech kapitolách jsme se převážně zabývali především vztahy polohovými. Vztahy metrické jsme zatím brali v úvahu v souvislosti s velikostmi úhlů a v několika málo dalších případech. Proto v této závěrečné kapitole obrátíme svou pozornost k velikostem stran uvažovaných dvojic a trojic trojúhelníků a k velikostem poloměrů kružnic jim opsaných.

Pro zjednodušení textu budeme i zde používat dříve zavedených symbolů ve stejném významu. Především budeme velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ značit po řadě α, β, γ a velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ po řadě α', β', γ'. Stejného značení pak užijeme i v trojúhelnících jim podobných. Nebudeme ani zdůvodňovat obecně platné vztahy, například:

Leží-li pól P uvnitř $\triangle ABC$, potom je podle sinové věty

$$BC : CA : AB = \sin \alpha ; \sin \beta : \sin \gamma,$$

$$B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = \sin \alpha' : \sin \beta' : \sin \gamma',$$

$$\overline{B}\overline{C} : \overline{A}\overline{C} : \overline{A}\overline{B} = \sin (\alpha + \alpha') : \sin (\beta + \beta') : \\ : \sin (\gamma + \gamma').$$

Odtud pak plyne z podobnosti například:

$$B_aC_a : C_aP : PB_a = \sin \alpha' : \sin \beta' : \sin \gamma'$$

nebo

$$BC : CA_0 : A_0B = \sin(\alpha + \alpha') : \sin(\beta + \beta') :$$
$$: \sin(\gamma + \gamma').$$

Samozřejmě vezmeme v úvahu rozdíly, které se tu mohou objevit, když bude například podle věty 4 $(\alpha + \alpha') > 180°$, nebo $\gamma - \gamma' < 0°$, kde potom příslušné hodnoty sinu budou záporné. Na tyto případy upozorňuje tabulka 3 za větou 44, které v těchto případech opět s výhodou využijeme.

Vedle důsledků věty sinové uvedeme bez důkazu ještě vztah mezi velikostí strany, poloměru kružnice opsané a sinu protilehlého úhlu. Například

$$AB = 2r \sin\gamma = 2r_c \sin(\gamma + \gamma'),$$
$$A_1B_1 = 2r \sin\gamma',$$
$$A_2B_2 = 2r \sin\gamma',$$
$$A_cB_0 = 2r_c \sin\gamma'$$

a podobně.

Nebudeme se zabývat vztahy mezi velikostmi stran a úhlů v trojúhelnících $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$, $\triangle ABC_0$, a to proto, že v úlohách bychom těchto vztahů příliš nevyužili. Na druhé straně je podle potřeby velmi snadno odvodíme ze vztahů, které dále probereme podrobněji.

Věta 57. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ *podle* P *nebo* $[ABC\triangle, \triangle A_2B_2C_2] \in \mathbf{q}$ *podle* Q, *potom o velikostech stran a úhlů v uvažovaných trojúhelnících platí:*

$$A_1B_1 : AB = \sin\gamma' : \sin\gamma, \quad A_2B_2 : AB = \sin\gamma'' : \sin\gamma,$$
$$B_1C_1 : BC = \sin\alpha' : \sin\alpha, \quad B_2C_2 : BC = \sin\alpha' : \sin\alpha,$$
$$C_1A_1 : CA = \sin\beta' : \sin\beta, \quad C_2A_2 : CA = \sin\beta' : \sin\beta.$$

Důkaz. Uvedli jsme, že je $AB = 2r \sin \gamma$ a také $A_1B_1 = 2r \sin \gamma'$ nebo $A_2B_2 = 2r \sin \gamma'$, a proto

$$A_1B_1 : AB = 2r \sin \gamma' : 2r \sin \gamma = \sin \gamma' : \sin \gamma,$$
$$A_2B_2 : AB = 2r \sin \gamma' : 2r \sin \gamma = \sin \gamma' : \sin \gamma.$$

Dále už jde jenom o cyklické záměny.

Zajímavé jsou důsledky této věty v případech, kdy dvojice trojúhelníků jsou utvořeny podle pólů ve zvláštních polohách.

Věta 58. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle S, kde S je střed kružnice* $\triangle ABC$ *uvnitř vepsané, potom je:*

a) $A_1B_1 : AB = 1 : 2 \sin \frac{\gamma}{2}$, b) $A_1B_1 = 2r \cos \frac{\gamma}{2}$,

$B_1C_1 : BC = 1 : 2 \sin \frac{\alpha}{2}$, $B_1C_1 = 2r \cos \frac{\alpha}{2}$,

$C_1A_1 : CA = 1 : 2 \sin \frac{\beta}{2}$, $C_1A_1 = 2r \cos \frac{\beta}{2}$,

c) $B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = \cos \frac{\alpha}{2} : \cos \frac{\beta}{2} : \cos \frac{\gamma}{2}$.

Důkaz. Podle věty 17 je $\alpha' = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\beta' = 90° - \frac{\beta}{2}$, $\gamma' = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Proto je podle věty 57:

a) $A_1B_1 : AB = \sin\gamma' : \sin\gamma = \sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) : \sin\gamma =$

$= \cos\frac{\gamma}{2} : 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 1 : 2\sin\frac{\gamma}{2}$ a cyklické záměny.

b) $A_1B_1 = 2r\sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = 2r\cos\frac{\gamma}{2}$ a cyklické záměny;

c) Vyplývá přímo z b).

Věta 59. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* S_a, *kde* S_a *je střed kružnice vně vepsané* $\triangle ABC$ *proti vrcholu* A, *potom je:*

a) $A_1B_2 : AB = 1 : 2\cos\frac{\gamma}{2}$, b) $A_1B_2 = 2r\sin\frac{\gamma}{2}$,

$B_2C_2 : BC = 1 : 2\sin\frac{\alpha}{2}$, $B_2C_2 = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$,

$C_2A_1 : CA = 1 : 2\cos\frac{\beta}{2}$, $C_2A_1 = 2r\sin\frac{\beta}{2}$,

c) $B_2C_2 : C_2A_1 : A_1B_2 = \cos\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2}$.

Důkaz. Zde budeme dosazovat podle věty 23 a to:

$$\alpha' = 90^\circ + \frac{\alpha}{2};\quad \beta' = \frac{\beta}{2};\quad \gamma' = \frac{\gamma}{2}.$$

a) $A_1B_2 : AB = \sin\gamma' : \sin\gamma = \sin\frac{\gamma}{2} : \sin\gamma =$

$= \sin\frac{\gamma}{2} : 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 1 : 2\cos\frac{\gamma}{2}$.

Obdobně je $C_2A_1 = 1 : \cos \frac{\beta}{2}$, avšak

$$B_2C_2 : BC = \sin \alpha' : \sin \alpha = \sin \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} :$$

$$: \sin \alpha = \cos \frac{\alpha}{2} : 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 1 : 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

b) $A_1B_2 = 2r \sin \gamma' = 2r \sin \frac{\gamma}{2}$. Obdobně je $C_2A_1 =$ $= 2r \sin \beta' = 2r \sin \frac{\beta}{2}$, avšak

$$B_2C_2 = 2r \sin \alpha' = 2r \sin \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = 2r \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Zde je ovšem třeba ještě utvořit cyklické záměny vzhledem k pólům S_b a S_c. Provedení ponechme do cvičení.

c) Toto tvrzení opět vyplývá přímo z tvrzení b).

Věta 60. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* V, *nebo dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* V, *kde* V *je průsečík výšek* $\triangle ABC$, *potom je*

a) v ostroúhlém $\triangle ABC$

$$A_1B_1 : AB = 2 \cos \gamma : 1, \qquad A_1B_1 = 2r \sin 2\gamma,$$
$$B_1C_1 : BC = 2 \cos \alpha : 1, \qquad B_1C_1 = 2r \sin 2\alpha,$$
$$C_1A_1 : CA = 2 \cos \beta : 1, \qquad C_1A_1 = 2r \sin 2\beta,$$
$$B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma,$$

b) *v tupoúhlém* $\triangle ABC$, *kde* $\alpha > 90°$,

$$A_2B_2 : AB = 2 \cos \gamma : 1, \qquad A_2B_2 = 2r \sin 2\gamma,$$
$$B_2C_2 : BC = -2 \cos \alpha : 1, \qquad B_2C_2 = -2r \sin 2\alpha,$$
$$C_2A_2 : CA = 2 \cos \beta : 1, \qquad C_2A_2 = 2r \sin 2\beta,$$
$$B_2C_2 : C_2A_2 : A_2B_2 = -\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$

Důkaz. a) Je-li $\triangle ABC$ ostroúhlý, musíme dosadit podle věty 33 a to:

$$\alpha' = 180° - 2\alpha,\ \beta' = 180° - 2\beta,\ \gamma' = 180° - 2\gamma .$$

$$A_1B_1 : AB = \sin\gamma' : \sin\gamma = \sin(180° - 2\gamma) : \sin\gamma =$$
$$= \sin 2\gamma : \sin\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma : \sin\gamma = 2\cos\gamma : 1$$

a všechny cyklické záměny,

$$A_1B_1 = 2r\sin\gamma' = 2r\sin(180° - 2\gamma) = 2r\sin 2\gamma$$

a odtud také

$$B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma .$$

b) Je-li $\triangle ABC$ tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu A, je $\cos\alpha < O$ a také $\sin 2\alpha < O$. Proto se v příslušných rovnostech objevuje znaménko minus. Jinak není mezi a) a b) rozdíl.

Metrické vlastnosti dvojic typu $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \in \boldsymbol{p}$ podle středu O kružnice $\triangle ABC$ opsané nemusíme zkoumat. Podle věty 37 tu jde o souměrnost podle středu, tedy shodnost, takže zde není nic nového k objevení.

Pokud jde o relaci $\boldsymbol{p}$ podle těžiště T $\triangle ABC$, té jsme věnovali pozornost z hlediska metrických vlastností už v kapitole druhé, takže ani jí se zde nemusíme zatím věnovat.

Naopak bude účelné uvědomit si vztahy mezi velikostmi poloměrů kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ a trojúhelníkům $\triangle PBC$, $\triangle APB$, $\triangle ABP$ nebo $\triangle QBC$, $\triangle AQC$, $\triangle ABQ$. K označení velikostí těchto poloměrů užijeme symbolů:

a) r pro velikost poloměru kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$,

b) r_a, r_b, r_c pro velikosti poloměrů kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle PBC$, $\triangle A_0BC$, $\triangle PB_aC_a$, $\triangle APC$, $\triangle AB_0C$, $\triangle A_bPC_b$, $\triangle ABP$, $\triangle ABC_0$, $\triangle A_cB_cP$, nebo trojúhelníkům $\triangle QBC$, $\triangle A_0BC$, $\triangle QB_aC_a$, $\triangle AQC$, $\triangle AB_0C$, $\triangle A_bQC_b$, $\triangle ABQ$, $\triangle ABC_0$, $\triangle A_cB_cQ$.

Věta 61. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ *podle* P *a nechť poloměry kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům* $\triangle ABC$, $\triangle PBC$, $\triangle APC$ *a* $\triangle ABP$ *mají velikosti* r, r_a, r_b *a* r_c, *potom je*

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : \frac{\sin \alpha}{|\sin (\alpha + \alpha')|} : \frac{\sin \beta}{|\sin (\beta + \beta')|} : \\ : \frac{\sin \gamma}{|\sin (\gamma + \gamma')|}.$$

Důkaz. V kružnici k opsané $\triangle ABC$ je například

$$BC = 2r \sin \alpha \Rightarrow r = \frac{BC}{2 \sin \alpha}, \tag{4.1}$$

v kružnici l_a opsané $\triangle PBC$ pak $BC = 2r_a \sin (\alpha + \alpha')$ podle věty 4, takže

$$r_a = \frac{BC}{2 \sin (\alpha + \alpha')}. \tag{4.2}$$

Podle (4.1) a (4.2) je proto

$$r : r_a = \frac{BC}{2 \sin \alpha} : \frac{BC}{2 \sin (\alpha + \alpha')}$$

a po úpravě

$$r : r_a = 1 : \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \alpha')}.$$

Obdobně pak je

$$r : r_b = 1 : \frac{\sin \beta}{\sin (\beta + \beta')},$$

$$r : r_c = 1 : \frac{\sin \gamma}{\sin (\gamma + \gamma')}.$$

Tím je dokázána i pravdivost postupného poměru

$$r : r_a; r_b : r_c = 1 : \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \alpha')} : \frac{\sin \beta}{\sin (\beta + \beta')} : \\ : \frac{\sin \gamma}{\sin (\gamma + \gamma')}.$$

V tvrzení věty 61, jehož pravdivost jsme právě dokázali, jsou však hodnoty sinů ve jmenovatelích uvedeny v absolutní hodnotě. Není proto náš důkaz ještě úplný. Musíme zde vzít v úvahu i případ, kdy příslušný pól leží vně uvažovaného $\triangle ABC$, a proto je $(\alpha + \alpha')$ nebo $(\beta + \beta')$ či $(\gamma + \gamma')$ větší než 180°. Potom ovšem jeho sinus je záporný a museli bychom jej uvést se záporným znaménkem, aby postupný poměr měl všechny členy kladné. Je proto výhodnější do tohoto poměru uvést uvažované siny v absolutních hodnotách. To jistě můžeme, protože nám v tomto případě jde pouze o velikosti uvedených sinů.

Věta 62. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* Q *a nechť poloměry kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům* $\triangle ABC$, $\triangle QBC$, $\triangle AQC$ *a* $\triangle ABQ$ *mají velikosti* r, r_a, r_b, a r_c; *potom je*

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : \frac{\sin \alpha}{\sin |\alpha - \alpha'|} : \frac{\sin \beta}{\sin |\beta - \beta'|} : \\ : \frac{\sin \gamma}{\sin |\gamma - \gamma'|}.$$

Důkaz. Na rozdíl od důkazu věty 61 zde použijeme věty 5. Jinak je důkaz úplnou analogií důkazu věty 61, takže není nutno jej dopodrobna opakovat. Rozdíl je pouze v tom, že úhly $(\alpha - \alpha')$, $(\beta - \beta')$ a $(\gamma - \gamma')$ nemohou mít absolutní hodnotu nikdy větší než 180°. Mohou být ovšem záporné, a proto jsou ve jmenovatelích v tvrzení této věty uvedeny v absolutní hodnotě. Na poloze pólu Q vzhledem k vnitřním úhlům $\triangle ABC$ zde nezáleží.

Pro zvláštní polohy pólů P nebo Q dostaneme ovšem po vhodném dosazení a úpravách výrazy mnohem jednodušší.

Věta 63. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S, *kde* S *je střed kružnice* $\triangle ABC$ *uvnitř vepsané a nechť* r, r_a r_b, *a* r_c *jsou velikosti poloměrů kružnic opsaných trojúhelníkům* $\triangle ABC$, $\triangle SBC$, $\triangle ASC$ *a* $\triangle ABS$; *potom je*

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : 2 \sin \frac{\alpha}{2} : 2 \sin \frac{\beta}{2} : 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot$$

Důkaz. Dosaďme do výrazu z věty 61 podle věty 17 například $\sin(\alpha + \alpha') = \sin\left(\alpha + 90° - \frac{\alpha}{2}\right) =$

$= \sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}$. Potom ovšem bude

$$r : r_a = 1 : \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} = 1 : \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 1 : \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 1 : 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot$$

Stejným postupem dojdeme i k úměrám

$$r : r_b : 1 : 2 \sin \frac{\beta}{2}; \qquad r : r_c = 1 : 2 \sin \frac{\gamma}{2},$$

takže platí

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : 2 \sin \frac{\alpha}{2} : 2 \sin \frac{\beta}{2} : 2 \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Zbývá jenom dodat, že v tomto vztahu není nutné uvádět hodnoty sinů v absolutních hodnotách, protože střed kružnice uvnitř vepsané leží vždy uvnitř $\triangle ABC$, takže žádný z uvažovaných sinů nenabude záporné hodnoty.

Bude-li pólem některý ze středů kružnic $\triangle ABC$ vně vepsaných, jsou tři možnosti, například:

Věta 64. *Je-li* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* S_a, *kde* S_a *je střed kružnice vně vepsané trojúhelníku* ABC *proti vrcholu* A, *je*

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : 2 \sin \frac{\alpha}{2} : 2 \cos \frac{\beta}{2} : 2 \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Důkaz. Zde ovšem vyjdeme z tvrzení věty 62 a dosadíme podle věty 23, kde

$$\alpha' = 90° + \frac{\alpha}{2}; \quad \beta' = \frac{\beta}{2}; \quad \gamma' = \frac{\gamma}{2}.$$

Bude proto $|\alpha - \alpha'| = \left|\alpha - 90° - \frac{\alpha}{2}\right| = \left|\frac{\alpha}{2} - 90°\right|$.

V každém případě je $\frac{\alpha}{2} < 90°$, a proto $\sin |\alpha - \alpha'| = \cos \frac{\alpha}{2}$.

Po dosazení a úpravě je jako v předešlé větě

$$r : r_a = 1 : 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Dále však je $|\beta - \beta'| = \left|\beta - \frac{\beta}{2}\right|$ a $|\gamma - \gamma'| = \left|\gamma - \frac{\gamma}{2}\right|$, takže musíme dosadit $\sin |\beta - \beta'| = \sin \frac{\beta}{2}$, $\sin |\gamma - \gamma'| = \sin \frac{\gamma}{2}$.

Je tedy

$$r : r_b = 1 : \frac{\sin \beta}{\sin \frac{\beta}{2}} = 1 : \frac{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = 1 : 2 \cos \frac{\beta}{2}$$

a obdobně také

$$r : r_c = 1 : \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Tím je dokázána pravdivost jedné ze tří možností. Další dvě vyjdou z cyklických záměn, a to:

Bude-li S_b střed kružnice vně vepsané $\triangle ABC$ proti vrcholu B pólem, bude

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : 2 \cos \frac{\alpha}{2} : 2 \sin \frac{\beta}{2} : 2 \cos \frac{\gamma}{2},$$

nebo

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : 2 \cos \frac{\alpha}{2} : 2 \cos \frac{\beta}{2} : 2 \sin \frac{\gamma}{2},$$

když pólem bude S_c střed kružnice vně vepsané $\triangle ABC$ proti vrcholu C.

Vezmeme-li v úvahu větu 52 a obr. 106, zjistíme, že dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ podle V a $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C] \in \mathbf{q}$ podle V jsou z hlediska metrických vztahů zcela nezajímavé, protože v tomto případě kružnice opsané $\triangle ABC$, $\triangle VBC$, $\triangle AVC$ a $\triangle ABV$ jsou navzájem shodné a platí $r : r_a : r_b : r_c = 1 : 1 : 1 : 1$ bez ohledu na to, jde-li o trojúhelník ostroúhlý či tupoúhlý.

Zajímavější je případ, kdy pólem je střed kružnice $\triangle ABC$ opsané.

Věta 65. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ *podle* O, *kde* O *je střed kružnice* $\triangle ABC$ *opsané, potom je*

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : \frac{1}{2\cos\alpha} : \frac{1}{2\cos\beta} : \frac{1}{2\cos\gamma}.$$

Důkaz. Víme, že relace $\mathbf{p}$ podle O je středovou souměrností, tedy shodností, a proto $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$. Potom ovšem $\alpha + \alpha' = 2\alpha$, $\beta + \beta' = 2\beta$, $\gamma + \gamma' = 2\gamma$, takže například

$$r : r_a = 1 : \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = 1 : \frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= 1 : \frac{1}{2\cos\alpha},$$

neboli

$$r : r_a : r_b : r_c = \frac{1}{2\cos\alpha} : \frac{1}{2\cos\beta} : \frac{1}{2\cos\gamma}.$$

V těchto úvahách bychom mohli ještě pokračovat tak, že bychom odvodili i vzorce pro výpočet velikostí stran trojúhelníků typu $\triangle A_0BC$ nebo $\triangle PB_aC_a$ či $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ apod. Ve třetí kapitole jsme však již ukázali, že tyto trojúhelníky jsou z dvojic navzájem podobných, takže dobře vystačíme s dosud odvozenými vzorci.

Způsob použití těchto vzorců vysvitne z následujících příkladů řešených úloh.

Příklad 1. Je dána relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle P taková, že $AB = 7$ cm, $A_1B_1 = 5$ cm, $\sphericalangle ACB = \gamma = 64°$. Vypočítejte:

a) velikost poloměru kružnice opsané $\triangle ABC$,
b) velikost úhlu $\gamma' = \sphericalangle A_1C_1B_1$,
c) velikost poloměru kružnice opsané $\triangle ABP$,
d) velikost úhlu $\gamma' = \sphericalangle \overline{A}\overline{C}\overline{B} = \sphericalangle AC_0B$,
e) velikost strany A_cB_c trojúhelníku PA_cB_c příslušného k dvojici $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle P.

Řešení. a) Protože je $AB = 2r \sin \gamma$, je

$$r = \frac{AB}{2 \sin \gamma} = \frac{7}{2 . 0{,}89\,789} \doteq 3{,}89 \text{ cm}.$$

b) Podle věty 57 je $A_1B_1 : AB = \sin \gamma' : \sin \gamma$, odkud

$$\sin \gamma' = \frac{A_1B_1 \sin \gamma}{AB} = \frac{5 . 0{,}89\,879}{7} = 0{,}64190.$$

Tomu vyhovují dva úhly a to: $\gamma' \doteq 39°56'$ nebo: $\gamma' \doteq 140°04'$ (přesněji $39°56'26''$, $140°03'34''$).

c) Zde musíme rozlišovat dvě možnosti:

I. Je-li $\gamma' = 39°56'$, je $\gamma + \gamma' = 103°56'$, takže $\gamma + \gamma' < 180°$ a pól P leží uvnitř $\triangle ABC$. V tom případě je podle věty 61

$$r_c = \frac{r \sin \gamma}{\sin (\gamma + \gamma)} \doteq \frac{3{,}89 . \sin 64°}{\sin 103°56'} = \frac{3{,}89 . 0{,}89\,879}{0{,}97\,058}$$

$$r_c \doteq 3{,}60 \text{ [cm]}.$$

II. Je-li $\gamma' = 140°04'$, je $\gamma + \gamma' = 204°04'$, takže $\gamma + \gamma' > 180°$ a pól P leží vně $\triangle ABC$. V tomto případě je proto

$$r_c = -\frac{r \sin \gamma}{\sin(\gamma + \gamma')} \doteq \frac{3{,}89 . 0{,}89\,879}{0{,}40\,780} \doteq 8{,}58 \text{ [cm]}.$$

d) V tomto případě stačí nahlédnout do tabulky 3, abychom zjistili, že
I. $\bar{\gamma} = 180° - (\gamma + \gamma') = 180° - (64° + 39°56') =$ $= 75°04'$, což je současně i velikost $\sphericalangle AC_0B$.
II. $\bar{\gamma} = (\gamma + \gamma') - 180° = (64° + 140°04') - 180° =$ $= 24°04'$, což i zde je velikost $\sphericalangle AC_0B$.
e) V obou případech užijeme vzorce

$$A_cB_c = 2r \sin \gamma'.$$

I. $A_cB_c \doteq 2 . 3{,}60 . 0{,}64\,190 \doteq 4{,}62$ [cm]
II. $A_cB_c \doteq 2 . 8{,}58 . 0{,}64\,190 \doteq 11{,}01$ [cm]

Příklad 2. Do kružnice k o poloměru $r = 3{,}8$ cm vepište trojúhelník, jehož strany mají velikosti v poměru $\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$, kde $\alpha + \beta + \gamma = 90°$ jsou poloviční velikosti vnitřních úhlů daného $\triangle KLM$ [$KL = 6$ cm, $LM = 7$ cm, $MK = 8$ cm].

Rozbor. Podle věty 58 je hledaný trojúhelník druhou složkou v relaci $\triangle ABC \ \mathbf{p} \ \triangle A_1B_1C_1$ podle S za předpokladu, že 2α, 2β a 2γ jsou velikosti vnitřních úhlů

$$\triangle KLM \sim \triangle ABC \vee \triangle KML \sim \triangle ABC \vee \triangle LKM \sim$$
$$\sim \triangle ABC \vee \triangle LMK \sim \triangle ABC \vee \triangle MKL \sim$$
$$\sim \triangle ABC \vee \triangle MLK \sim \triangle ABC.$$

Konstrukce. Sestrojíme $\triangle KLM$ a jemu podobný $\triangle ABC$ tak, aby poloměr kružnice jemu opsané měl danou velikost 3,8 cm. Potom narýsujeme $\triangle A_1B_1C_1$ z relace **p** podle S, který již má požadované vlastnosti.

Důkaz správnosti konstrukce je dán větou 58.

Diskuse. Jak již bylo v rozboru naznačeno, lze dvojici $\triangle ABC$ a $\triangle KLM$ navzájem přiřadit šesti různými způsoby. Odtud plyne, že úloha má šest řešení.

Příklad 3. Je dán $\triangle ABC$, jehož obsah má velikost $P = 256\ \mathrm{m}^2$ a dva vnitřní úhly velikosti $\alpha = 42°$, $\beta = 58°$. Vypočítejte velikost obsahu P_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ z relace $\triangle ABC$ **p** $\triangle A_1B_1C_1$ podle S. Úlohu řešte nejdříve obecně, potom teprve dosaďte podle zadání.

Řešení. Především zjistíme velikost úhlu $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 80°$.

Obsahy P a P_1 vyjádříme takto:

$$P = \frac{1}{2}\,ab\sin\gamma, \qquad P_1 = \frac{1}{2}\,a_1b_1\sin\gamma', \tag{4.3}$$

kde a, b, a_1 a b_1 jsou velikosti stran uvažovaných trojúhelníků.

Podle věty 58 je $B_1C_1 : BC = 1 : 2\sin\frac{\alpha}{2}$ a odtud

$$B_1C_1 = \frac{BC}{2\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{4.4}$$

Obdobně pak

$$A_1C_1 = \frac{AC}{2\sin\frac{\beta}{2}}. \tag{4.5}$$

Současně je podle věty 17

$$\gamma' = 90° - \frac{\gamma}{2}. \tag{4.6}$$

Hodnoty (4.4), (4.5) a (4.6) dosaďme do (4.3):

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{BC.AC}{2 \sin \frac{\alpha}{2} . 2 \sin \frac{\beta}{2}} \sin \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Protože však velikosti stran BC a AC neznáme, musíme se snažit je ze vztahu vyloučit vhodným dosazením. K tomu nám dopomůže tato úprava výrazu $\sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos \frac{\gamma}{2}$. Víme, že $\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$, odkud $\cos \frac{\gamma}{2} = \dfrac{\sin \gamma}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}$.

Můžeme proto psát

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{BC.AC.\sin \gamma}{2 \sin \frac{\alpha}{2}\, 2 \sin \frac{\beta}{2}\, 2 \sin \frac{\gamma}{2}},$$

a protože $\frac{1}{2} BC.AC.\sin \gamma = P$, bude konečně

$$P_1 = \frac{P}{8 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Tím je úloha obecně vyřešena. Dosadíme-li podle zadání, bude

$$P_1 = \frac{256}{8.0{,}35\,837.0{,}48\,471.0{,}64\,279} = 286{,}5 \text{ m}^2.$$

Příklad 4. Je dán postupný poměr velikostí poloměrů kružnic opsaných dvojici $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ podle

S_a a k ní příslušným trojúhelníkům $\triangle S_aB_aC_a$ a $\triangle A_bS_aC_b$, a to:

$r : r_a : r_b = u : v : t$, kde u, v, t jsou čísla přirozená.

a) Dokažte, že danou složenou úměrou je jednoznačně určen i čtvrtý člen postupných poměrů na obou stranách úměry a stanovte podmínky řešitelnosti.

b) Na základě výsledku úlohy a) ukažte, že ve zvláštním případě, kdy $r = 10$ a $u : v = 3 : 2$ je daná úloha jednoznačná, právě když $u = 3$. Tento případ řešte početně!

Řešení. a) Především platí podle věty 64

$$r : r_a : r_b : r_c = \frac{1}{2} : \sin\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\beta}{2} : \cos\frac{\gamma}{2}. \qquad (4.7)$$

Daný postupný poměr $u : v : t$ upravíme tak, aby první člen byl $\frac{1}{2}$. Proto celý poměr vydělíme číslem $2u$, o kterém ze zadání víme, že je různé od nuly. Současně doplníme čtvrté členy obou postupných poměrů v dané úměře, a to na levé straně r_c, na pravé straně x. Po těchto úpravách dostaneme:

$$r : r_a : r_b : r_c = \frac{1}{2} : \frac{v}{2u} : \frac{t}{2u} : \frac{x}{2u}. \qquad (4.8)$$

Porovnáme-li nyní pravou stranu výrazu (4.8) s pravou stranou výrazu (4.7), vidíme, že je

$$\frac{v}{2u} = \sin\frac{\alpha}{2};\quad \frac{t}{2u} = \cos\frac{\beta}{2};\quad \frac{x}{2u} = \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Tím jsou velikosti úhlů α, β, γ určeny, a to jednoznačně, protože je $\frac{\beta}{2} < 90° \wedge \frac{\gamma}{2} < 90°$ a příslušné kosiny jsou kladné a ani $\frac{\alpha}{2}$ nemůže být větší než 90°. Protože pak $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, známe i $x = 2u . \cos \frac{\gamma}{2}$.

První část důkazu je provedena.

Dále víme, že absolutní hodnoty sinu a kosinu jsou menší než 1.

Je proto:

$$\frac{v}{2u} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{v}{2u} < 1, \text{neboli } 0 < v < 2u,$$

$$\frac{t}{2u} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{t}{2u} < 1, \text{neboli } 0 < t < 2u. \tag{4.9}$$

Musíme ovšem vzít v úvahu i to, že $\triangle A_1B_2C_2$ je tupoúhlý, protože podle věty 23 je zde $\alpha' = 90° + \frac{\alpha}{2}$, takže $\beta' + \gamma' < 90° \Rightarrow \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} < 90°$. To však znamená, že aspoň jeden z úhlů $\frac{\beta}{2}$ nebo $\frac{\gamma}{2}$ je menší než 45°. Můžeme předpokládat, že je to například úhel $\frac{\beta}{2}$. Potom jeho kosinus bude větší než cos 45° a platí:

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{t}{2u} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t > u\sqrt{2}.$$

Tím se interval (4.9) ještě více zúží a bude $u\sqrt{2} < t < 2u$, což je hledaná podmínka.

b) Dosadíme-li $u = 3$, je $v = 2$ a potom $3.\sqrt{2} < t < 6$, takže $t = 5$, protože podle zadání je t přirozené číslo. Dosadíme-li však $u = 6$, potom $v = 4$ a t nabude hodnot 9, 10, 11, takže úloha už není jednoznačná.

Je-li tedy $u = 3$, $v = 2$, $t = 5$, bude:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{2u} = \frac{2}{6} \doteq 0{,}33\,333 \text{ a odtud } \alpha \doteq 38°56',$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{t}{2u} = \frac{5}{6} \doteq 0{,}83\,333 \text{ a odtud } \beta \doteq 67°06',$$

$$\text{takže } \gamma \doteq 74°48'.$$

Nyní již můžeme určit i velikost čísla x, neboť $x = 2u \,.\, \cos \frac{\gamma}{2} = 6 \,.\, \cos 37°24' \doteq 4{,}77$.

Velikosti jednotlivých poloměrů dostaneme ze vztahu
$r : r_a : r_b : r_c = \frac{1}{2} : \sin \frac{\alpha}{2} : \cos \frac{\beta}{2} : \cos \frac{\gamma}{2}$.

První člen postupného poměru na levé straně má být 10. Proto postupný poměr na pravé straně rozšíříme 20, takže $r : r_a : r_b : r_c = 10 : 20 \sin \frac{\alpha}{2} : 20 \cos \frac{\beta}{2} : 20 \cos \frac{\gamma}{2} = 10 : 6{,}67 : 17{,}67 : 15{,}9$, neboli $r = 10$, $r_a = 6{,}67$, $r_b = 17{,}67$, $r_c = 15{,}9$.

Příklad 5. Do kružnice $k = (O;\ 10)$ je vepsána dvojice $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle O taková, že poloměr kružnice opsané $\triangle OBC$ má velikost $r_a = 12$, poloměr kružnice opsané $\triangle AOC$ velikost $r_b = 15$. Vypočítejte velikosti stran a vnitřních úhlů v trojúhelnících ABC a $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, kde $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ je ze složené relace $[\triangle ABC,\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle O.

Řešení. Nejdříve zjistíme velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ užitím věty 65. Je-li podle této věty například

$$r : r_a = 1 : \frac{1}{2 \cos \alpha}, \text{ bude } \cos \alpha = \frac{r}{2r_a}$$

$$\text{a obdobně } \cos \beta = \frac{r}{2r_b}.$$

Dosadíme-li podle zadání, bude

$$\cos \alpha = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \Rightarrow \alpha = 65°22'32'',$$

$$\cos \beta = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = 70°31'43''.$$

Tím je dána i velikost třetího úhlu, $\gamma = 44°05'45''$.

Velikosti stran $\triangle ABC$ vypočítáme ze vzorců $a = 2r \sin \alpha$, $b = 2r \sin \beta$, $c = 2r \sin \gamma$. Příslušné hodnoty jsou:

$$a \doteq 18{,}2;\ b \doteq 18{,}6;\ c \doteq 13{,}9.$$

Známe-li velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$, známe i velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle O, který je shodný s $\triangle ABC$, a tedy i velikosti vnitřních úhlů $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, protože podle věty 14 je například

$$\bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha') = 180° - (\alpha + \alpha) =$$
$$= 180° - 2\alpha = 49°14'56''.$$

Potom také

$$\beta = 180° - 2\beta = 38°56'34'',$$
$$\gamma = 180° - 2\gamma = 91°48'30''.$$

Konečně jsou velikosti stran $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$$\bar{a} = 2r \sin \bar{\alpha} \doteq 15{,}2,\ \bar{b} = 2r \sin \bar{\beta} \doteq 12{,}6,$$
$$\bar{c} = 2r \sin \bar{\gamma} \doteq 20{,}0$$

(zaokrouhleno na 3 pl. c.).

Příklad 6. Je dán $\triangle A_cB_cV$ $[A_cB_c = 6{,}4;\ B_cV = 8;\ VA_c = 4{,}8]$ příslušný k dvojici $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p}$ podle V. Určete přibližné velikosti stran $\triangle ABC$, jeho vnitřních úhlů a poloměru kružnice jemu opsané.

Řešení. Zde je dobře si uvědomit, že o velikostech stran daného trojúhelníku platí

$$8^2 = 6{,}4^2 + 4{,}8^2 = 40{,}96 + 23{,}04 = 64.$$

Trojúhelník A_cB_cV je tedy pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A_c. Tím je dána i velikost poloměru kružnice opsané $r = \frac{1}{2} VB_c = 4$ a velikosti sinů obou ostrých úhlů

$$\sin \gamma' = \frac{6{,}4}{8} = 0{,}8 \Rightarrow \gamma' \doteq 53°08',$$

$$\sin \beta' = \frac{4{,}8}{8} = 0{,}6 \Rightarrow \beta' \doteq 36°52'.$$

Dále již musíme rozlišovat dvě odlišné situace.

a) Bude-li $\triangle ABC$ ostroúhlý, bude se další výpočet řídit větou 33, takže

$$\alpha' = 180° - 2\alpha \Rightarrow \alpha = 90° - \frac{\alpha'}{2} = 45°,$$

$$\gamma' = 180° - 2\gamma \Rightarrow \gamma = 90° - \frac{\beta'}{2} = 63°26',$$

$$\beta' = 180° - 2\beta \Rightarrow \beta = 90° - \frac{\gamma'}{2} = 71°34''.$$

Potom známe i velikosti stran $\triangle ABC$, neboť:

$$a = 2r \sin \alpha = 8.0{,}70\,711 \doteq 5{,}7,$$

$$b = 2r \sin \beta = 8.0{,}89\,411 \doteq 7{,}2,$$

$$c = 2r \sin \gamma = 8.0{,}58\,952 \doteq 7{,}6.$$

b) Bude-li $\triangle ABC$ tupoúhlý, musíme k výpočtu užít věty 34, a proto

$$\alpha' = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\alpha'}{2} = 45°,$$

$$\beta' = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{\beta'}{2} = 26°34',$$

$$\gamma' = 2\gamma - 180° \Rightarrow \gamma = 90° + \frac{\gamma'}{2} = 108°26'.$$

Také zde již známe velikosti stran $\triangle ABC$, neboť:

$$a = 2r \sin \alpha = 8.0{,}70\,711 \doteq 5{,}7,$$

$$b = 2r \sin \beta = 8.0{,}44\,724 \doteq 3{,}6,$$

$$c = 2r \sin \gamma = 8.0{,}58\,952 \doteq 7{,}6.$$

Možnosti, jak zadat úlohy určené k numerickému řešení, jsou zde velmi pestré, jak ostatně ukazují i cvičení navazující na tuto poslední kapitolu.

Cvičení

1. Je dán poloměr $r = 5{,}2$ cm kružnice opsané $\triangle ABC$, velikost jeho strany $AB = 6{,}7$ cm a velikost úhlu $\gamma' = \sphericalangle A_1C_1B_1 = 37°24'$ v $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\triangle ABC$ **p**

$\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ podle P. Určete velikosti dalších prvků, a to:

a) úhlu γ z $\triangle ABC$,
b) strany A_1B_1 z $\triangle A_1B_1C_1$,
c) úhlu $\bar{\gamma}$ z $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ v relaci $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ s $\triangle ABC$,
d) poloměru r_c kružnice opsané $\triangle ABP$,
e) strany A_cB_cv $\triangle A_cB_cP$ z trojice příslušné k relaci $\boldsymbol{p}$ podle P.

2. Odvoďte vzorec pro výpočet velikosti obsahu $\triangle ABC$, jsou-li dány velikosti poloměru kružnice jemu opsané a vnitřních úhlů. Tento vzorec potom upravte pro výpočet velikosti obsahů trojúhelníků $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ z relací $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ a trojúhelníků z trojic příslušných k těmto relacím.
3. Do kružnice $k = (O; 5,8)$ je vepsán $\triangle ABC$ s vnitřními úhly velikosti $\alpha = 72°39'$, $\beta = 46°23'$. Určete velikosti stran $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S.
4. Určete velikosti obsahů obou složek z relace $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ podle S, když $AB = 9,4$ cm, $BC = 5,6$ cm, $\sphericalangle ABC = 112°$.
5. Je dán $\triangle EFG$ vepsaný do kružnice $k = (O; 7,2)$ s vnitřními úhly velikostí $\sphericalangle EFG = 82°$, $\sphericalangle FGE = 58°$. Určete velikosti stran E_1F_2 a E_1G_2 i úhlu $\sphericalangle F_2E_1G_2$ v trojúhelníku $E_1F_2G_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle S_e a jeho obsah.
6. Trojúhelník $A_1B_2C_2$ z relace $\triangle ABC$ $\boldsymbol{q}$ $\triangle A_1B_2C_2$ podle S_a má rozměry $A_1B_2 = 4,6$; $B_2C_2 = 9,2$; $C_2A_1 = 5,6$. Určete velikost poloměru r kružnice opsané $\triangle ABC$.
7. Strany $\triangle ABC$ mají velikosti v poměru 7 : 9 : 8. Určete přibližný poměr velikostí stran $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V.
8. Trojúhelník ABC s vnitřními úhly dané velikosti $\alpha = 42°$, $\beta = 74°$, $\gamma = 64°$ má obsah $P = 200$. Určete velikost obsahu $\triangle A_1B_1C_1$ z dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V. Nejdříve udejte obecný vzorec.
9. Je dán $\triangle EFG$ [$EF = 50$ mm, $FG = 70$ mm, $GE = 100$ mm]. Určete velikosti stran $\triangle E_2F_2G_2$ z relace $\triangle EFG$ $\boldsymbol{q}$ $\triangle E_2F_2G_2$ podle V.
10. Jsou-li velikosti vnitřních úhlů v $\triangle ABC$ v poměru 3 : 4 : 5 a velikosti vnitřních úhlů $A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle P v poměru 7 : 8 : 9, určete velikosti vnitřních úhlů $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ze složené relace $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle P a poměr jejich velikostí.

11. Je dána dvojice [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle O vepsaná do kružnice $k = (O; 7{,}2)$ s vnitřními úhly $\sphericalangle ABC = 78°$, $\sphericalangle CAB = 46°$. Vypočítejte velikost obsahu $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ze složené relace $\boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}$ podle O. Udejte obecný vzorec pro dané r, α, β.

12. Dané trojúhelníky $\triangle ABC$ [$AB = 8$ cm, $BC = 6{,}5$ cm, $\sphericalangle ABC = 70°$] a $\triangle A_cB_cP$ [$A_cB_c = 5{,}8$ cm, $B_cP = 6{,}9$ cm, $\sphericalangle A_cB_cP = 48°$] jsou z relace $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ podle P a k ní příslušné trojice trojúhelníků. Určete velikosti stran $\triangle A_1B_1C_1$.

13. Do kružnice $k = (O; 6{,}4)$ je vepsán $\triangle ABC$ s vnitřními úhly velikostí $\alpha = 76°28'35''$, $\beta = 41°32'53''$. Určete velikosti poloměrů kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle OBC$, $\triangle AOC$, $\triangle ABO$.

14. Známe-li v relaci [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle P velikost poloměru společné kružnice opsané $r = 8{,}3$ cm a velikosti úhlů $\beta = 42°36'$, $\beta' = 71°18'$, můžeme určit velikosti
   a) stran AC a A_1C_1,
   b) poloměru r_b kružnice opsané $\triangle APC$,
   c) strany A_bC_b v $\triangle A_bPC_b$ z trojice k dané relaci příslušné; naznačené výpočty proveďte.

15. V dvojici [$\triangle ABC_0$, $\triangle A_cB_cP$] $\in \boldsymbol{p}$ podle C_1 příslušné k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle P známe: $A_cB_c = 5{,}6$ cm; $\sphericalangle A_cPB_c = 48°12'$; $AB = 4{,}2$ cm. Určete velikosti r, r_c, $\sphericalangle BCA$.

16. Určete polohu pólu Q v relaci $\triangle ABC$ $\boldsymbol{q}$ $\triangle A_2B_2C_2$ podle Q, je-li dán postupný poměr velikostí poloměrů $r : r_a : r_b : : r_c = 3 : 4 : 5 : 6$ a velikosti úhlů $\alpha = 42°$, $\beta = 26°$.

17. Jsou-li r, r_a, r_b a r_c velikosti poloměrů kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům $\triangle ABC$, $\triangle SBC$, $\triangle ASC$ a $\triangle ABS$ a velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ α, β, γ, potom je:

$$r^2 : r_a^2 : r_b^2 : r_c^2 =$$

$$= 0{,}25 : (1 - \cos \alpha) : (1 - \cos \beta) : (1 - \cos \gamma).$$

Dokažte!

18. V pravoúhlém $\triangle KLM$ má jeden vnitřní úhel velikost 30°. Dokažte, že ze čtveřice poloměrů kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům $\triangle KLM$, $\triangle SLM$, $\triangle KSM$, $\triangle KLS$ mají právě dva shodné velikosti.

19. Je dán $\triangle ABC$ [$AB = 7$; $BC = 5$; $CA = 6$] a pól Q

$[BQ = 9;\ CQ = 10;\ Q \in \overrightarrow{BCA^*}$. Určete velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_2B_2C_2$ z relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{q}\ \triangle A_2B_2C_2$ podle Q.

20. V dvojici $[\triangle ABC,\ \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ podle Q je $\triangle A_2B_2C_2$ rovnostranný, vepsaný do kružnice $k = (O;\ 7\ \mathrm{m})$. Určete velikosti úseček AQ, BQ a CQ, víte-li, že vnitřní úhly $\triangle ABC$ mají velikosti $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$.

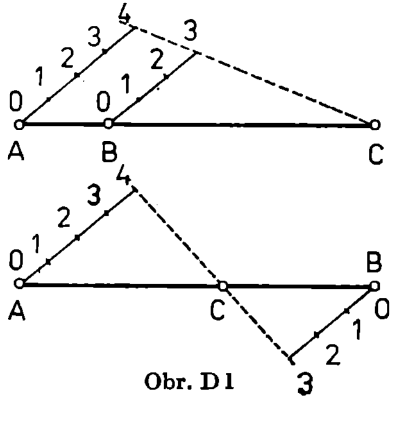
21. Do kružnice $k = (O;\ 18)$ je vepsán $\triangle ABC$ s vnitřními úhly $\alpha = 43°$; $\gamma = 67°$. Určete co nejjednodušeji velikosti obsahů všech tří trojúhelníků $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$ příslušných k relaci $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle O.

DODATEK

Výběr pojmů a vztahů z projektivní geometrie použitých v textu

Dělicí poměr. Jsou-li A, B, C tři různé body na téže přímce, potom *dělicím poměrem* nazýváme reálné číslo $\lambda = (ABC) = \frac{AC}{BC}$, které je kladné, když bod C je vnější bod úsečky AB, a záporné, když bod C je její vnitřní bod. Toto číslo je ovšem různé od nuly i od jedné.

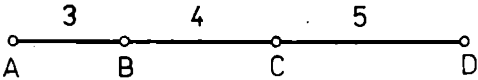
Na obr. D 1 jsou zobrazeny oba uvedené případy s náznakem konstrukce bodu C k dané úsečce AB pro dělicí poměry $\lambda_1 = \frac{4}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{4}{3}$.



Obr. D1

Dvojpoměr. Jsou-li A, B, C, D čtyři navzájem různé body na téže přímce, potom *dvojpoměrem* nazýváme reálné číslo

$$\delta = (A\,B\,C\,D) = \frac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,D)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC\,.\,BD}{BC\,.\,AD}\,.$$



Obr. D 2

Na obr. D 2 je například $AB = 3$; $BC = 4$; $CD = 5$; je tedy:

$$\delta = (A\,B\,C\,D) = \frac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,D)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} =$$

$$= \frac{AC\,.\,BD}{BC\,.\,AD} = \frac{7\,.\,9}{4\,.\,12} = \frac{21}{16}$$

nebo

$$(A\,C\,B\,D) = \frac{(A\,C\,B)}{(A\,C\,D)} = \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} =$$

$$= \frac{3}{-4} : \frac{12}{5} = -\frac{5}{16}$$

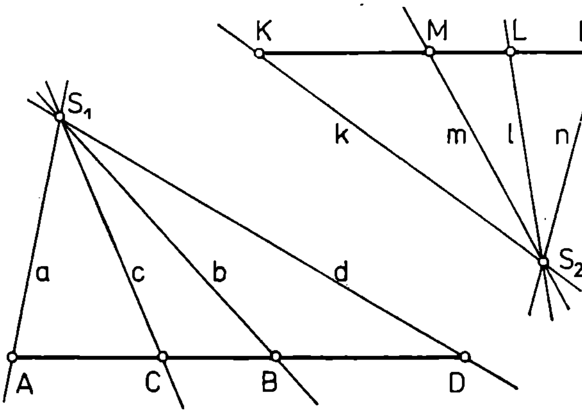
atd.

Z ukázek je zřejmé, že při číselném vyjádření dvojpoměru je nutno vzít v úvahu smysl jednotlivých úseček.

Projektivní čtveřice bodů a přímek. Jsou-li dvě čtveřice bodů na různých přímkách nebo i na téže přímce umístěny tak, že je $(A\,B\,C\,D) = (K\,L\,M\,N)$, nazýváme tyto čtveřice *projektivními*, což znamená, že jsou téhož dvojpoměru. *Projektivními* nazýváme i čtveřice přímek z daných svazků, které těmito čtveřicemi bodů procházejí.

Proto píšeme obdobně jako u projektivních čtveřic bodů rovnost:

$$(a\,b\,c\,d) = (k\,l\,m\,n).$$



Obr. D 3

Oba vztahy jsou zobrazeny na obr. D 3, kde je $AC = 40$; $CB = 30$; $BD = 50$; $KM = 45$; $ML = \frac{405}{19}$; $LN = \frac{450}{19}$.

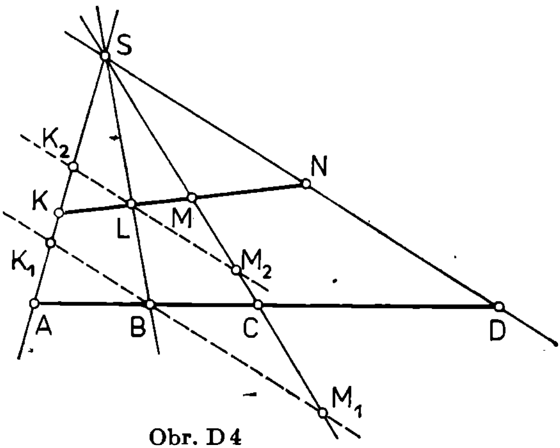
Dosadíme-li tyto velikosti, dostáváme:

$$(A\,B\,C\,D) = -\frac{5}{9}; \quad (K\,L\,M\,N) = -\frac{5}{9}.$$

Současně pak ve svazcích S_1 a S_2 platí:

$$(a\,b\,c\,d) = (k\,l\,m\,n).$$

Věta I. *Jsou-li a, b, c, d čtyři navzájem různé přímky téhož svazku, potom protínají každou příčku svazku ve čtveřici bodů téhož dvojpoměru, tj. projektivní.*



Obr. D 4

Důkaz. Na obr. D 4 vidíme čtyři přímky svazku S proťaté příčkami ve čtveřicích bodů A, B, C, D a K, L, M, N. Máme dokázat, že $(K\,L\,M\,N) = (A\,B\,C\,D)$.

Body L a Bveďme rovnoběžky s přímkou SD a označme jejich průsečíky s přímkami svazku K_2, K_1, M_2, M_1, jak je patrno z obrázku.

Nyní je především

$$\frac{BA}{DA} = \frac{BK_1}{DS}\,; \quad \frac{BC}{DC} = \frac{BM_1}{DS}\,;$$

a proto

$$\frac{BA}{DA} : \frac{BC}{DC} = \frac{BK_1}{DS} : \frac{BM_1}{DS} = \frac{BK_1}{BM_1}\,. \tag{1}$$

Dále pak

$$\frac{LK}{NK} = \frac{LK_2}{NS}; \quad \frac{LM}{NM} = \frac{LM_2}{NS};$$

a proto

$$\frac{LK}{NK} : \frac{LM}{NM} = \frac{LK_2}{NS} : \frac{LM_2}{NS} = \frac{LK_2}{LM_2}. \qquad (2)$$

Protože je $K_1M_1 \parallel K_2M_2$, platí $\frac{BK_1}{BM_1} = \frac{LK_2}{LM_2}$, a dosadíme-li sem podle (1) a (2), bude

$$\frac{BA}{DA} : \frac{BC}{DC} = \frac{LK}{NK} : \frac{LM}{NM},$$

neboli $(A\ B\ C\ D) = (K\ L\ M\ N)$.

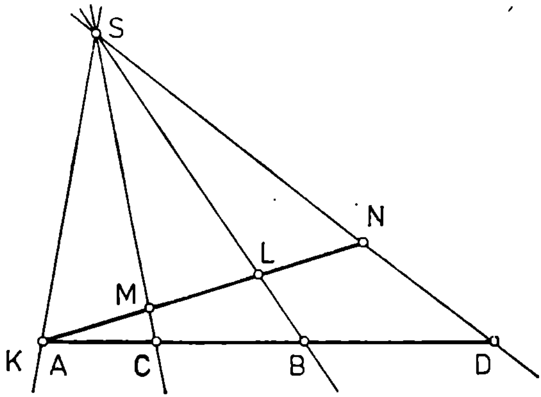
Perspektivní čtveřice bodů a přímek. Jsou-li dvě navzájem různé čtveřice bodů na dvou přímkách umístěny tak, že dvojice sobě odpovídajících bodů leží na přímkách téhož svazku, říkáme, že jsou *perspektivní*. Na obr. D 4 jsou to čtveřice $(A\ B\ C\ D)$ a $(K\ L\ M\ N)$. Z toho je zřejmé, že všechny perspektivní čtveřice bodů jsou také projektivní, jak o tom svědčí věta I, avšak ne každé dvě čtveřice projektivní jsou i perspektivní, jak ukazuje například obr. D 3.

Věta II. *Jsou-li dvě čtveřice bodů projektivní a současně mají jeden bod společný, jsou perspektivní.*

Důkaz provedeme sporem.

Na obr. D 5 je podle předpokladu $(A\ B\ C\ D) = (K\ L\ M\ N)$ a současně $K \equiv A$. Nechť přímky BL

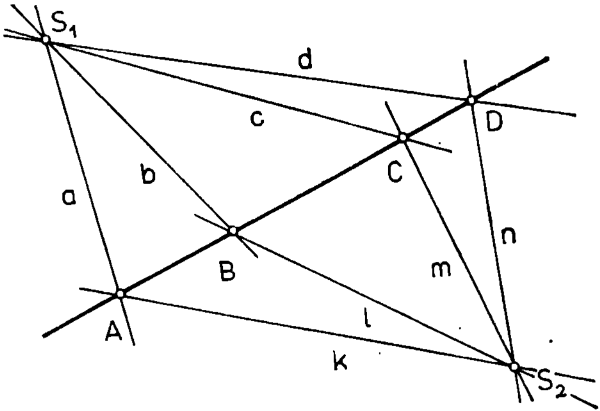
a CM nejsou rovnoběžné, takže se protnou v bodě S, a nechť přímka SD protne přímku KN v bodě N'. Předpokládejme, že body N a N' jsou různé. Potom ovšem platí podle věty I, že čtveřice $(A\ B\ C\ D) = (K\ L\ M\ N')$ jsou projektivní, takže i čtveřice $(K\ L\ M\ N)$ a $(K\ L\ M\ N')$ jsou projektivní a není možné, aby body N a N' byly různé.



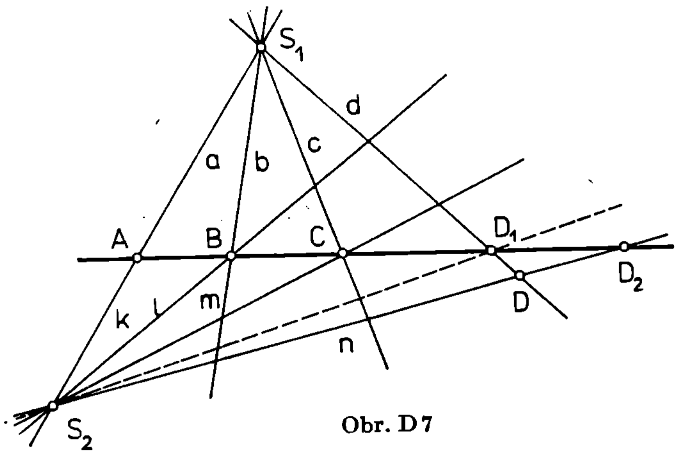
Obr. D 5

Je-li však $N \equiv N'$, potom čtveřice $(A\ B\ C\ D) = (K\ L\ M\ N)$ jsou perspektivní, neboť podle předpokladu je také $K \equiv A$.

Perspektivními pak nazýváme takové dvě čtveřice přímek ze dvou navzájem různých svazků, které promítají čtveřici bodů na téže přímce. Perspektivní jsou například čtveřice $(a\ b\ c\ d) = (k\ l\ m\ n)$ na obr. D 6, neboť obě promítají čtveřici bodů $(A\ B\ C\ D)$ a $S_1 \not\equiv S_2$.



Obr. D 6

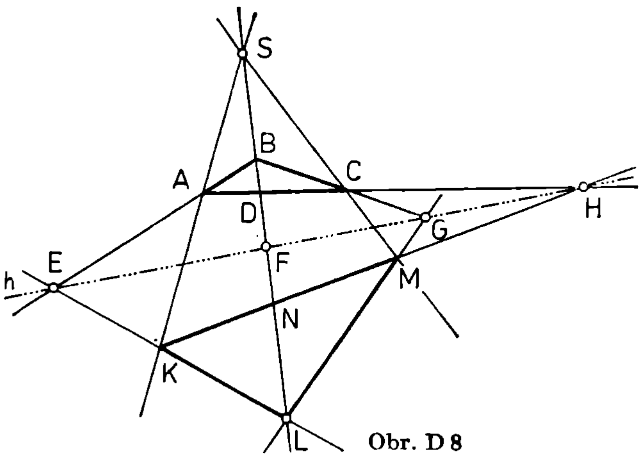


Obr. D 7

Věta III. *Jsou-li dvě projektivní čtveřice přímek umístěny tak, že jedna dvojice sobě odpovídajících přímek splývá, jsou tyto čtveřice perspektivní.*

Důkaz. Na obr. D 7 jsou zobrazeny čtveřice přímek $(a\ b\ c\ d)$ a $(k\ l\ m\ n)$, o nichž předpokládáme, že jsou projektivní, a současně je $a \equiv k$. Snadno určíme body $B = (b \cap l)$, $C = (c \cap m)$ a přímku BC, na níž pak leží bod A. Předpokládejme dále ještě, že přímky d a n se protnou v nějakém bodě D, který neleží na přímce BC. Buď dále $D_1 = (d \cap \overleftrightarrow{BC})$ a $m' \equiv S_2D_1$. Podle věty I je $(A\ B\ C\ D_1) = (A\ B\ C\ D_2)$, takže body D_1 a D_2 splývají, a protože je $D \in \overleftrightarrow{S_2D_2}$, splývají i body D a D_1. Bod D tedy nemůže ležet mimo přímku BC a uvažované čtveřice přímek jsou perspektivní, tj. odpovídající si přímky se protínají na přímce BC.

Věta IV. Věta Desarguesova o trojúhelnících. *Jsou-li*

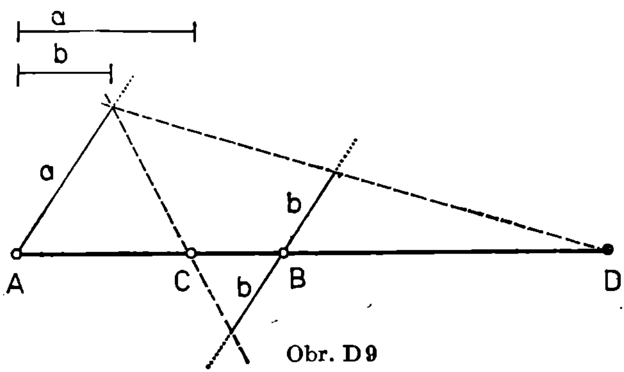


Obr. D 8

trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle KLM$ umístěny v téže rovině tak, že přímky AK, BL a CM procházejí týmž bodem S, potom se sobě odpovídající strany trojúhelníků, tj. $[AB, KL]$, $[BC, LM]$ a $[CA, MK]$ protínají v bodech téže přímky.

Důkaz. Na obr. D 8 je podle věty I $(A\,D\,C\,H) = (K\,N\,M\,H)$, a proto jsou čtveřice přímek $(\overleftrightarrow{BA}\ \overleftrightarrow{BD}\ \overleftrightarrow{BC}\ \overleftrightarrow{BH})$ a $(\overleftrightarrow{LK}\ \overleftrightarrow{LN}\ \overleftrightarrow{LM}\ \overleftrightarrow{LH})$ projektivní. Současně přímky BD a LN splývají, takže uvedené čtveřice přímek jsou perspektivní podle věty III. To znamená, že se sobě odpovídající přímky protínají v bodech E, F, G a H.

Harmonická čtveřice bodů a přímek. Leží-li body A, B, C a D na téže přímce tak, že platí $(A\,B\,C\,D) = -1$, nazýváme takovou čtveřici bodů *harmonickou*. Říkáme také, že body C a D dělí úsečku AB *harmonicky*. Konstrukci harmonické čtveřice k dané úsečce AB a dělicímu poměru $\frac{a}{b}$, kde a, b jsou velikosti daných úseček, ukazuje obr. D 9.

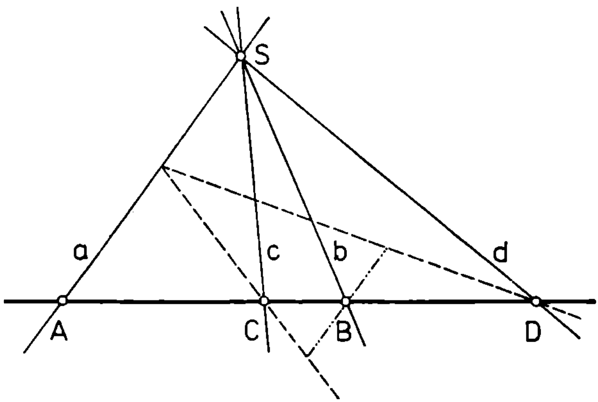


Obr. D 9

Zřejmě tu je $\frac{AC}{BC} = -\frac{a}{b} \wedge \frac{AD}{BD} = \frac{a}{b}$, takže

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{-a}{b} : \frac{a}{b} = -1.$$

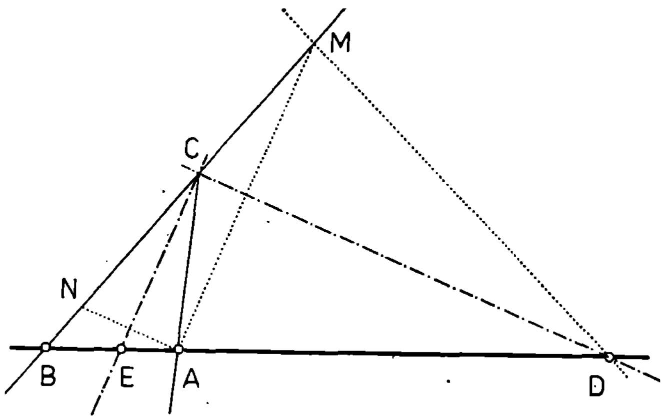
Obdobně nazýváme čtveřici přímek téhož svazku *harmonickou*, jestliže promítá harmonickou čtveřici bodů na přímce. Jinak také nazýváme takové přímky „harmonicky sdružené“. Čtveřici harmonicky sdružených přímek ukazuje obr. D 10.



Obr. D 10

Věta V. *Jsou-li polopřímky a, b ramena daného úhlu, polopřímka c jeho osou a polopřímka d osou úhlu k němu vedlejšího, potom přímky a, b, c, d tvoří harmonickou čtveřici.*

Důkaz. Na obr. D 11 jsou v trojúhelníku ABC úhly ACB a ACM úhly vedlejší. Současně je $AC = MC$ a $CE = MA$. Bod E leží na straně AB tak, že CE je osou ACB, bod D tak, že CD je osou ACM. Je-li dále



Obr. D 11

$CN = CM$, je $DC = AN$. Z těchto předpokladů pak plyne:

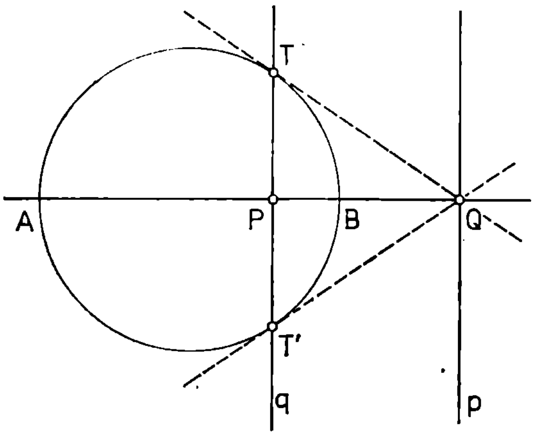
$$\frac{BE}{EA} = \frac{BC}{CM} = \frac{BC}{AC} \wedge \frac{BD}{AD} = \frac{BC}{NC} =$$

$$= -\frac{BC}{CM} = -\frac{BC}{AC}.$$

Zřejmě je tedy $\dfrac{BE}{AE} = -\dfrac{BD}{AD}$ a odtud $(B\,A\,E\,D) = -1$.

Sdružené póly. V kružnici $k = (O; r)$ na obr. D 12 je AB průměr a bod Q na prodloužení průměru AB za bod B.

Tečny vedené z bodu Q ke kružnici k se této kružnice dotýkají v bodech T a T'. Označme P průsečík přímek AB a TT'. Takto sestrojenou dvojici bodů P a Q nazýváme *sdruženými póly*, přímku TT' polárou bodu Q a přímku $p \perp AB$ jdoucí bodem Q polárou bodu P vzhledem ke kružnici k.



Obr. D 12

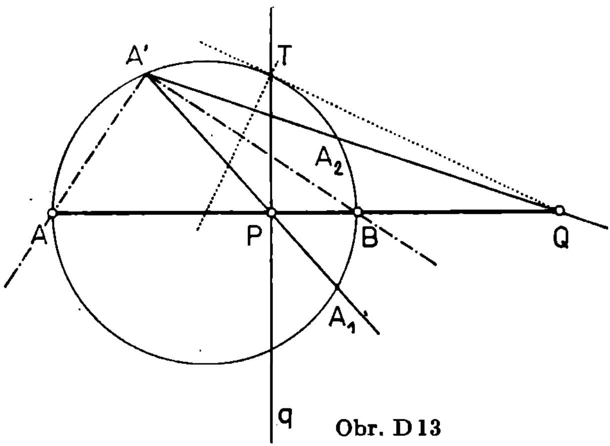
Věta VI. *Mějme kružnici $k = (O; r)$, její průměr AB a na přímce AB dvojici sdružených pólů P a Q vzhledem ke kružnici k.*

Potom je $(A\,B\,P\,Q) = -1$, tj. sdružené póly P a Q dělí průměr AB harmonicky.

Důkaz. Na obr. D 12 je $\sphericalangle QTB$ úsekový úhel příslušný k oblouku TB, takže je $\sphericalangle QTB = \sphericalangle TT'B = \sphericalangle BTT'$, čili polopřímka TB je osou $\sphericalangle QTT'$. Protože podle Thaletovy věty je $BT \perp TA$, je TA osou úhlu vedlejšího k $\sphericalangle QTT'$, takže podle věty V tvoří polopřímky TA, TP, TB a TQ harmonickou čtveřici. Odtud pak plyne přímo $(A\ B\ P\ Q) = -1$.

Věta VII. *Je-li bod Q bodem vnější oblasti kružnice $k = (O; r)$ a přímka p jeho polárou vzhledem ke kružnici k, potom tato polára je množinou bodů, které spolu s bodem Q dělí harmonicky každou přímku jdoucí bodem Q a protínající kružnici k ve dvou bodech.*

Důkaz. Na obr. D 13 je AB průměr kružnice k a P, Q sdružené póly ležící na přímce AB. Bodem Q je vedena přímka, která protíná kružnici k v bodech A', B' a poláru bodu Q v bodě P'. Podle věty VI je $(A\ B\ P\ Q) = -1$,

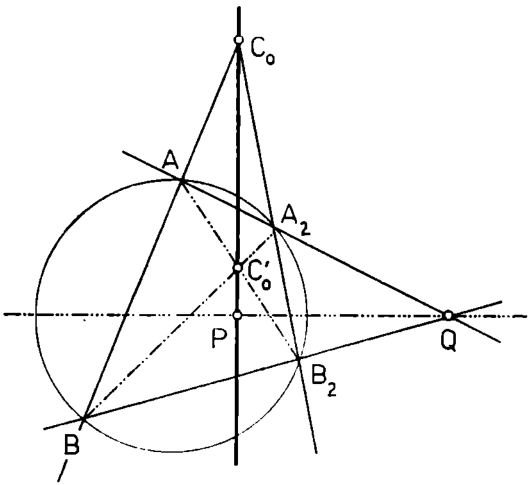


Obr. D 13

takže čtveřice polopřímek $A'A$, $A'B$, $A'P$ a $A'Q$ tvoří harmonickou čtveřici. Současně je $BA' \perp A'A$, a proto $A'B$ je osou $\sphericalangle B'A'A_1$, kde A_1 je průsečík polopřímky $A'P$ s kružnicí k. To však znamená, že oblouky $B'B$ a BA_1 jsou shodné a přímka QP je osou úhlu $B'PA_1$. Protože je $QP \perp PP'$, je PP' osou $\sphericalangle B'PA'$ vedlejšího k $\sphericalangle B'PA_1$. Proto také polopřímky PQ, PB', PP' a PA' tvoří harmonickou čtveřici a je $(A\ B\ P\ Q) = (A'\ B'\ P'\ Q) = -1$.

Z věty VII vyplývá konstrukce poláry, při níž není nutno rýsovat tečny z pólu Q ke kružnici k. Postup je zřejmý z obr. D 14.

Daným pólem Q vedeme sečny kružnice k, které tuto kružnici protnou například v bodech A, A_2, B a B_2. Prů-

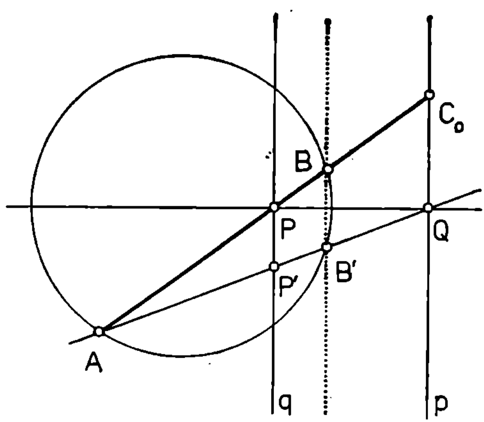


Obr. D 14

sečík přímek AB a A_2B_2 buď C_0, přímek AB_2 a BA_2 buď C_0'. Přímka C_0C_0' je již hledanou polárou. Stačí ovšem najít jenom jeden z bodů C_0 nebo C_0', protože, jak víme, je $C_0C_0' \perp PQ$.

Správnost této konstrukce snadno dokážeme. Je-li totiž podle věty VII $(A\ A_2\ A_1\ Q) = (B\ B_2 B_1\ Q) = -1$, kde A_1 a B_1 jsou průsečíky přímek AQ a BQ s polárou, jsou čtveřice bodů $(A\ A_1\ A_2\ Q)$ a $(B\ B_1\ B_2\ Q)$ projektivní se společným bodem Q, tedy perspektivní, tj. přímky AB, A_1B_1, A_2B_2 a QC_0 procházejí jedním bodem, tedy bodem C_0. Právě tak přímky AB_2, A_1B_1, BA_2 a QC_0' bodem C_0'.

Závěrem je třeba připomenout, že věta VII platí i tehdy, když zaměníme sdružené póly a poláry. Na obr. D 15 jsou P a Q sdružené póly, p, q příslušné poláry. Dále víme, že $(A\ B'\ P'\ Q) = -1$. Z předcházejícího důkazu



Obr. D 15

pak vyplývá, že přímky p, BB' a q jsou navzájem rovnoběžné, takže je

$$(A\ B\ P\ C_0) = (A\ B'\ P'\ Q),$$

čili: Každá přímka vedená bodem ležícím na poláře q a procházející sdruženým pólem P je průsečíky s kružnicí k, pólem P a bodem na poláře C_0 dělena harmonicky.

VÝSLEDKY CVIČENÍ

Kapitola 1 A

1. Konstrukce podle definice 1.
2. Konstrukce podle definice 2.
3. Sestrojte nejdříve kružnici opsanou.
4. Pól Q leží na přímce RU a současně na tečně vedené ke kružnici opsané $\triangle RUT$ v jeho vrcholu T.
5. Je-li $p \parallel AB$ přímka obsahující střední příčku $\triangle ABC$, potom

   a) $P = (CC_1 \cap p)$, když CC_1 půlí menší oblouk $\widehat{AB}$,

   b) $Q = (CC_2 \cap p)$, když CC_2 půlí větší oblouk $\widehat{AB}$.
6. Je celkem šest možností, a to:

   p podle $P : ABCA_1B_1$, ABA_1CB_1, ABA_1B_1C,

   q podle $Q : ABCB_2A_2$, ABB_2CA_2, ABB_2A_2C.
7. Důkaz sporem: Nechť například $P \notin AB$, ale $P \in A_1B_1$. Potom je $A_1 \equiv B \wedge B_1 \equiv A$, takže je $P \in AB$, což je v rozporu s předpokladem a předpoklad je nesprávný.
8. Především je $E \equiv F_1 \wedge F \equiv E_1$ a dále $\sphericalangle GG_1E = \sphericalangle GFE$.
9. Především je $A \equiv B_2 \wedge B \equiv A_2$, dále $\sphericalangle AC_2B = \sphericalangle ACB$.
10. Jsou-li dva podobné trojúhelníky vepsány do společné kružnice opsané, jsou shodné.
11. Rozdíl je v tom, že v úloze 10 jsou udána pořadí vrcholů. Zde může být $\triangle ABC \sim \triangle A_1C_1B_1$ nebo $\triangle ABC \sim$ $\sim B_1C_1A_1$ a podobně, avšak i tyto trojúhelníky jsou shodné. Přesto je výrok pravdivý, protože je vynechána podmínka o velikosti poměru podobnosti.
12. Protože je i $\triangle KLM$ rovnoramenný se základnou KL, musí být $M \equiv M_2$ a bod Q je nevlastní bod roviny.
13. Společným bodem přímek AA_1, BB_1 a CC_1 je pól P sestrojený podle věty 4.
14. Obdoba úlohy 13, řeší se podle věty 5.
15. Postup podle vět 4 a 5, $\alpha' = \beta' = \gamma' = 60°$.
16. Postup podle věty 5. 3 řešení.
17. $\sphericalangle APC = \sphericalangle APB = 100°$. Platí $\triangle ABC \cong \triangle A_1C_1B_1$.

18. Sestrojte oblouky $o_1 \equiv \widehat{BPC}$ s obvodovým úhlem 100° a oblouk $o_2 \equiv \widehat{APC}$ s obvodovým úhlem 155°. Hledanou množinou bodů je oblouk mezi pólem $P = (o_1 \cap o_2)$ a bodem B. Body B a P však do této množiny nepatří.
19. Podobně jako v úloze 18. Zde pro $A_2B_2 \geqq 6{,}5$ je $\gamma' > \gamma$. Je-li $\gamma' = \gamma$, leží pól Q na přímce AB. Hledanou množinou bodů je část oblouku $\widehat{AQC}$ ležící v polorovině $\overrightarrow{ABC}$. Pól Q do této množiny patří, bod C nikoliv.
20. Řešení podle věty 4, avšak pozor, $\sphericalangle H + \sphericalangle H_1 = 220°$, což je více než 180°, a proto pól P leží vně $\triangle UHF$; $\sphericalangle FUH = 35°$.
21. Zde opět $\sphericalangle M + \sphericalangle M_1 > 180°$. Pól P leží na oblouku $\widehat{KZ}$ s obvodovým úhlem $\sphericalangle KPZ = 120°$ a na kružnici opsané kolem středu O poloměrem velikosti $\frac{r}{2}$. Dvě řešení, souměrná podle osy úsečky KZ.
22. Čtyři řešení:
    a) $A \equiv B_1 \wedge B \equiv A_1$, C_1 středem menšího oblouku $\widehat{AB}$, jedno řešení,
    b) $A \equiv B_2 \wedge B \equiv A_2$, C_2 středem většího oblouku AB, jedno řešení,
    nebo $B_2C_2 = A_2B_2$, $A_2C_2 = A_2B_2$, dvě řešení.
23. Pro pól Q je úloha totožná s úlohou 22, protože je-li $A_2B_2 = AB$, je také $\gamma = \gamma'$, takže $\gamma - \gamma' = 0$ a pól Q leží na přímce AB. Pro pól P bude $A_1B_1 = AB$, když A_1B_1 bude opět základnou, nebo $A_1B_1 = AB \wedge B_1C_1 = AB \vee A_1C_1 = AB$. Celkem tedy šest řešení.
24. Nejdříve doplňte postupný poměr $3 : 4 : \sqrt{9 + 16} = 3 : 4 : 5$, takže velikosti stran $\triangle KLM$ jsou 4,2; 5,6 a 7. Je-li úhel při vrcholu K pravý, jsou dvě řešení, pro další dva vrcholy opět po dvou řešeních, celkem šest řešení.
25. $\alpha = \gamma'$; úhel β sestrojte jako obvodový k tětivě $AC = 5$ cm a dále pak podle věty 5.
26. Je-li $K_1L_1 \parallel KL$ a současně $L_1M_1 \parallel LM$, leží pól P na osách stran KL a LM. Jde tedy o střed kružnice opsané.
27. Určete nejdříve velikost strany E_1G_1 pomocí obvodového úhlu $\sphericalangle E_1F_1G_1 = \sphericalangle EFG$, takže $E_1G_1 = EG$. Potom umístěte $E_1G_1 \perp EF$ do kružnice opsané. Jsou možná právě dvě umístění a každé dává dvě řešení.
28. Strana B_2C_2 je průměrem opsané kružnice, $B_2C_2 \parallel AB$.

29. Zjistěte velikosti úhlů, potom podle vět 4 a 5.
30. Postup podle věty 4.
31. Probíhá-li pól P oblouk kružnice nad tětivou AB tak, že $\sphericalangle APB = \gamma + \gamma'$, potom jsou velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku APB_1 po řadě γ; $180° - (\gamma + \gamma')$; γ', takže bod C_1 probíhá oblouk kružnice opsané mezi body A a B tak, že $\sphericalangle B_1C_1A_1 = \sphericalangle B_1AA_1 \equiv \sphericalangle B_1AP = \gamma'$.
Obdobně i důkaz věty obrácené k větě 5.
32. a) Pól P uvnitř $\triangle ABC$.
b) Pól P leží na straně BC.
c) Pól P leží v polorovině opačné k $\overrightarrow{BCA}$.
33. $Q \in \overrightarrow{BCA} \cap \overrightarrow{ACB} \cap \overrightarrow{ABC}^*$.
$Q \in \overrightarrow{BCA}^* \cap \overrightarrow{ACB}^* \cap \overrightarrow{ABC}$.
34. Přímku $p \perp KL$ je možno umístit dvěma způsoby, odtud dvě řešení. V obou případech jde o relaci p nebo q podle pólu dané přímky p vzhledem ke kružnici $\triangle KLM$ opsané.
35. Úlohu lze řešit užitím podobnosti. Jednodušší se však zdá toto řešení: Označme průměr zvolené kružnice AB. Na polokružnici nad průměrem AB určete body D, E, F takové, že $AD : DE = 3 : 5$ a $EF : FB = 1 : 1$. Přímky AF a BD se protnou v bodě P a přímka EP protne zvolenou kružnici v bodě C a to je třetí vrchol hledaného trojúhelníku.
36. $BC_1 : AC_1 = 7 : 3$.

Kapitola 1 B

1. a) Přímka $h \equiv OQ$ je osou souměrnosti úseček A_2B_2 a A_1B_1; $B = (k \cap \overleftrightarrow{QB_2})$; $P = (\overleftrightarrow{BB_1} \cap h)$.
b) $C_1 \equiv C_2$ je samodružný bod, proto $C = (k \cap \overleftrightarrow{QO})$.
2. $h \perp OQ$ je osa souměrnosti. $M_1M_2 \perp h$; $M = (\overleftrightarrow{QM_2} \cap k)$. Dvě řešení, protože KM_1 lze nanést na k dvěma způsoby.
3. Postup podle návodu.
4. Podle věty 11 je $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ souměrně sdružena s $\overleftrightarrow{A_2B_2}$ podle osy OQ a současně je $A_2B_2 \equiv BA$. Proto A_1B_1 i A_2B_2 procházejí bodem Q.
5. Obdoba úlohy 4.

6. Užijte souměrnosti $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ podle h.
7. Osa souměrnosti úsečky K_1K_2 obsahuje póly P, Q. Čtyři řešení.
8. Kolem středu O opište kružnici k poloměrem OA. $A_2 = (\overleftrightarrow{AQ} \cap k)$, A_1 souměrně sdruženo s A_2 podle OQ a potom $P = (AA_1 \cap OQ)$. Nutnou podmínkou je $OQ \not\equiv OA$, protože kdyby body O, A, Q ležely v přímce, byla by úloha neurčitá s nekonečným počtem řešení.
9. Opište kružnici k kolem středu O poloměrem OR. Potom $R_1 = (\overleftrightarrow{RP} \cap k)$, R_2 souměrně sdružen podle osy OP s R_1 a $Q = (\overleftrightarrow{AA_2} \cap \overleftrightarrow{OP})$. Nutná podmínka: $OP \not\equiv OR$.
10. Bod souměrně sdružený s bodem A podle osy PQ označte A'. Potom přímky $\overleftrightarrow{A'Q}$ a $\overleftrightarrow{AP}$ se protnou v bodě A_1 a kružnice opsaná $\triangle AA'A_1$ je kružnicí opsanou $\triangle ABC$. Přímky $\overleftrightarrow{A'Q}$ a $\overleftrightarrow{AP}$ se musí protnout v polorovině $\overrightarrow{PQA'}$ a odtud plyne nutná podmínka:
$2. \sphericalangle PQA + \sphericalangle PAQ < 180°$. Potom má úloha právě jedno řešení.
11. Obdoba úlohy 10. Pokládejte body L, M za sdružené póly!
12. Osa úsečky E_1E_2 je $h \equiv PQ$. Potom $P = (EE_1 \cap h)$; $Q = (EE_2 \cap h)$. Nutnou podmínkou je, aby $\triangle E_1E_2E$ nebyl pravoúhlý s pravým úhlem ve vrcholu E_1 nebo E_2.
13. Přepona $\triangle EFG$ obsahuje střed kružnice opsané. Je-li přeponou EF, jsou dvě řešení, je-li jí EG, opět dvě řešení, je-li jí FG, jedno řešení.
Konstrukce. Trojúhelníku EF_1G_2 opište kružnici. Přímka GG_2 obsahuje pól Q, který leží na oblouku podle věty 5.
14. Hledanou množinou je kružnice opsaná nad průměrem OP, kde P je pól sdružený k pólu Q.
15. Početně podle mocnosti bodu P ke kružnici k je velikost příslušné tětivy 8. *Konstrukce.* Narýsujte tětivu velikosti 8. Kolem středu O opište kružnici, která se dotýká této tětivy, a její průsečík s tětivou AA_1 je hledaný bod P. Dvě řešení.
16. Obdoba úlohy 15, opět dvě řešení.
17. Početně: $OP \cdot OQ = 32^2$. Konstrukce užitím Eukleidovy věty o odvěsně.
18. Narýsujte bod Q podle zadání a veďte z něho tečny k dané kružnici. Spojnice dotykových bodů určují sdružený pól P.

19. Polopřímka QP a osa úsečky KL určují střed kružnice opsané $\triangle KLM$.

20. Sestrojte vrchol A_2 podle osy PQ, potom $A = (A_1P \cap \cap A_2Q)$ a $\triangle AA_1A_2$ opište kružnici. V ní lze $\triangle ABC$ umístit jediným způsobem, označení zbývajících vrcholů B a C pak lze provést dvěma způsoby.

21. Je-li $K \equiv K_2$, je $\overleftrightarrow{QK}$ tečnou kružnice opsané $\triangle KLM$ a $KP \perp PQ$.

22. Hledané dvojice mohou tvořit trojúhelníky rovnostranné, rovnoramenné a pravoúhlé. To jsou tři možnosti. Označení vrcholů je možno provést šesti způsoby a vnitřní úhly v dvojicích trojúhelníků lze označit rovněž šesti způsoby. Celkem tedy $3 \times 6 \times 6 = 108$ řešení pro každou ze dvou možných poloh osy souměrnosti.
Jinak konstrukce jsou jednoduché podle definic 1 a 2.

23. Užijte věty 4 a 5!

24. Postup podle věty 4 a 5.

25. Do kružnice k vepište $\triangle A_1B_1C_1$ tak, aby bylo $A\overline{A} \parallel \parallel B_1C_1$, $B\overline{B} \parallel C_1A_1$, $C\overline{C} \parallel A_1B_1$.

26. Obdoba úlohy 25, pól leží vně kružnice k.

27. $\alpha = 87°40'37''$, $\beta' = 78°12'57''$, $\gamma' = 63°58'51''$, $\bar{\alpha} = 54°31'11''$, $\bar{\beta} = 22°14'07''$.

28. Vzhledem k velikosti úhlu β' je $\alpha' < 71°28'$, takže je $\bar{\gamma} > 52°08'$ a odtud $\bar{\beta} < 78°09'$, což vyhovuje.

29. Uvažte věty 4 a 5 i obr. 17. Jde o případy I nebo IV.

30. Obdoba úlohy 29.

Kapitola 2 A

1. Kolmice vedené středem opsané kružnice na strany zvoleného trojúhelníku protnou opsanou kružnici v hledaných bodech.

2. Osy stran a osy vnitřních úhlů $\triangle EFG$ se protínají ve vrcholech $\triangle E_1F_1G_1$.

3. Velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ jsou 50°, 60°, 70°, v $\triangle A_1B_1C_1$ 65°, 60°, 55°, t. j. 13 : 12 : 11.
Obecně: Je-li $\alpha : \beta : \gamma = a : b : c$, potom je $\alpha' : \beta' : \gamma' = (b + c) : (c + a) : (a + b)$.

4. Zapište do postupného poměru velikosti vnitřních úhlů druhé složky podle věty 17 a rozšiřte dvěma.
5. $\alpha = 64°24'$, $\beta = 32°48'$, $\gamma = 82°48'$.
6. $90 + \frac{\alpha}{2}$, $90 + \frac{\beta}{2}$, $90 + \frac{\gamma}{2}$.
7. Střed kružnice vepsané leží na oblouku kružnice opsané kolem středu G_1 oblouku $\widehat{EF}$ a příslušný úsekový úhel je 110°.
8. Poloměr r a úhel α určují velikost strany BC. Dále pak jako v úloze 7. 2 řešení shodná.
9. Užijte věty 15 a sestrojte nejdříve $\triangle ABC$.
10. Vrchol M_1 je středem oblouku $\widehat{KL}$, $KL_1 = L_1M$.
11. $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ je osou úsečky AS, kde S je střed kružnice $\triangle ABC$ uvnitř vepsané, kružnice opsaná $\triangle AB_1C_1$ je současně kružnicí opsanou $\triangle ABC$.
12. Trojúhelník KLM je identický a $\triangle E_1F_1G_1$ z relace p podle S.
13. Užijte věty 25.
14. Užijte věty 24.
15. Úhly $\triangle A_2B_2C_1$ mají velikosti 20°, 30°, 130°, úhly v $\triangle ABC$ velikosti 40°, 60°, 80° s poměrem 2 : 3 : 4.
16. Například pro $\alpha = \beta \wedge \alpha \neq \gamma$ je:

    podle S_a: $90° + \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$; podle S_b: $\frac{\alpha}{2}, 90° + \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$;

    podle S_c: $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, 90° + \frac{\gamma}{2}$.

    Má-li tedy být $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$, připadá v úvahu právě pól S_c.
17. Postačující podmínkou je $AA_1 > A_1B$, neboť bod S vždy odděluje body A a A_1. Opište nejdříve kružnici $\triangle AA_1B$. Potom bod C_1 půlí menší oblouk $\widehat{AB}$ a $A_1S = S_aA_1$.
18. Je to přímka EE_1, kde střed oblouku FG je E_1 a kružnice opsaná kolem bodu E_1 poloměrem $\overline{E_1F}$.
19. Průsečíky jsou vrcholy $\triangle H_1J_1K_1$ z dvojice $[\triangle H_1J_1K_1, \triangle HJK] \in p$ podle S.
20. Jde o důsledek věty 25. Opište kružnici $\triangle AMC$. Potom E je průsečík této kružnice s přímkou BD, $M \equiv E_1$ a $D \equiv S_e$.
21. Jde o Feuerbachovu kružnici, protože na ní leží paty výšek $\triangle EFG$.

22. Obdoba úlohy 21.
23. $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle ACB = 40°$, protože je to vnější úhel v rovnoramenném trojúhelníku BA_1S_a. Potom $\gamma' = 70°$, $\beta = 60°$, $\beta' = 60°$, $\alpha' = 50°$.
Množinou všech středů S_a je oblouk kružnice nad tětivou AB s obvodovým úhlem velikosti 20°.
24. $\sphericalangle ASB = 160°$ a odtud $\gamma = 140°$; případy b) a c) nemají řešení.
25. Daný trojúhelník: 24°, 108°, 48°; $\triangle ABC$: 48°, 36°, 96°; $\triangle A_1B_1C_1$: 66°, 72°, 42°.
26. Podmínky: $\sphericalangle AOB_1 < 90° \wedge \sphericalangle AOC_1 > 90°$, přičemž všechny tři body leží na téže polokružnici. Sestrojte nejdříve bod C_1 (B_1 půlí menší oblouk $\widehat{AC}$), potom bod B (C_1 půlí větší oblouk $\widehat{AB}$).
27. $C_1C \perp S_aS_b$, $C_2S_a = C_2S_b$, $C_1O \equiv C_2O$, $B_1A_1 \parallel S_aS_b \wedge$ $\wedge\ B_1A_1 = \frac{1}{2} S_aS_b$.
28. Sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ souměrný podle středu O s $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a potom $\triangle ABC \in p$ podle průsečíku výšek $\triangle A_1B_1C_1$.
29. Na přímce B_1O leží bod $\bar{B}$, na přímce $\bar{C}O$ bod C_1, dále je $\bar{A}A \parallel B_1C_1$ atd.
30. Sestrojte nejdříve střed S_a [$C_2S_a \perp B_2A_1$; $B_2S_a \perp C_2A_1$], potom střed S atd.
31. Jde o kružnicový oblouk $\widehat{BC}$ s obvodovým úhlem velikosti $\frac{3\alpha}{2} - 90°$. Střed S_a do této množiny nepatří, protože $\sphericalangle CS_aB = 90° - \frac{\alpha}{2}$ s výjimkou: trojúhelník pravoúhlý rovnoramenný s pravým úhlem při vrcholu A.

Kapitola 2 B

1. $V \equiv P$ podle definice 1, $V \equiv Q$ podle definice 2.
2. Rýsujte dvojici [$\triangle K_1L_1M_1$, $\triangle KLM$] $\in p$ podle S!
3. Jako v úloze 2.
4. Obdoba úloh 2 a 3 s tím rozdílem, že pól V leží ve vnější oblasti kružnice opsané $\triangle ABC$. Tři řešení.
5. Užijte pólu S_z. Jedno řešení.

6. Užijte vět 31 a 32!
7. První složka: 40°, 60°, 80°; druhá složka 100°, 60°, 20°, poměr velikostí 5 : 3 : 1.
8. a) Čísla u, v, t splňují trojúhelníkovou nerovnost,
   b) jedno z čísel je větší než součet zbývajících dvou,
   c) jedno z čísel se rovná právě součtu zbývajících dvou.
9. Je-li $\alpha : \beta : \gamma = u : v : t \wedge 2s = u + v + t$, potom
   a) u ostroúhlého trojúhelníku je

$$\alpha' = \frac{\pi}{s}(s - u);\ \beta' = \frac{\pi}{s}(s - v);\ \gamma' = \frac{\pi}{s}(s - t),$$

   takže $\alpha' : \beta' : \gamma' = (s - u) : (s - v) : (s - t)$,

   b) u tupoúhlého trojúhelníku:

$$\alpha' = \frac{\pi}{s}(u - s);\ \beta' = \frac{\pi v}{s};\ \gamma' = \frac{\pi t}{s},$$

   takže $\alpha' : \beta' : \gamma' = (u - s) : v : t$.

   O tom, zda je uvažovaný trojúhelník ostroúhlý či tupoúhlý, je vždy nutno předem rozhodnout podle výsledku úlohy 8.
10. Tento trojúhelník je tupoúhlý, a proto je hledaný poměr 4 : 6 : 5, čemuž odpovídají velikosti 48°, 72°, 60°.
11. Úloha není jednoznačná. Nevíme, který vnitřní úhel první složky je tupý. Je-li například tupý ten, který je na prvním místě v postupném poměru $u : v : t$, potom poměr velikostí úhlů ve druhé složce je podle výsledku úlohy 9 $(u - s) : : v : t = 7 : 8 : 25$ a odtud potom jsou hledané velikosti úhlů 105°45′, 18°, 56°15′.
12. Podle věty 35 je hledaný společný bod kružnic průsečík výšek $\triangle YXZ$.
13. Hledaný bod M je průsečík výšek daného $\triangle EFG$.
14. Sestrojte bod C_1 souměrně sdružený s V podle AM. Kružnice opsaná hledanému trojúhelníku ABC prochází body A a C_1.
15. Polopřímka B_1V je osou úhlu β'. Strana AC leží na ose úsečky B_1V. Protože je $\beta' = 180° - 2\beta$, můžeme sestrojit velikost úhlu β a také strany AC. Sestrojte $\triangle ACB_1$, ve kterém známe velikost strany AC, poloměru kružnice opsané a výšky, jejíž velikost je polovina velikosti úsečky B_1V. Dvě řešení.

16. Opište kružnici poloměrem OV kolem středu O. Potom sestrojte kružnici souměrně sdruženou podle přímky AB s danou kružnicí. Průsečíky těchto dvou kružnic jsou hledané průsečíky výšek.
17. Obdoba úlohy 16, $\triangle KLM$ je tupoúhlý.
18. Sestrojte kružnice o poloměru r, které procházejí body A a V. Ty určují na dané kružnici zbývající dva vrcholy $\triangle ABC$.
19. Obdoba úlohy 18.
20. Danou úsečku c umístěte na kružnici k v libovolné poloze $A'B'$. Sestrojte kružnici souměrně sdruženou s kružnicí k podle přímky $A'B'$. Kolem středu O opište kružnici poloměrem OV. Tyto dvě kružnice se protínají v bodech V' a V'', které otočte kolem středu O do polohy V a o stejný úhel otočte i úsečku $A'B'$.
21. Obdoba úlohy 20.
22. Kolmice sestrojená bodem V na přímku h určí na dané kružnici body K a K_1. Osy úseček VK a VK_1 obsahují hledanou stranu LM. Dvě řešení.
23. $\sphericalangle KML = 60°$, $\sphericalangle KLM = 40°$.
24. $\sphericalangle E_2F_2G_2 = 110°$. Sestrojte nejdříve druhou složku relace a potom teprve první.
25. Trojúhelníku ABC opište kružnici a sestrojte $A_1B_1C_1$ z relace p podle S. Potom $KL \parallel B_1C_1$ prochází bodem A, $LM \parallel A_1C_1$ prochází bodem B a $KM \parallel A_1B_1$ prochází bodem C.
26. Strana BC je kolmá na přímku AA_1. Bod A_1 musíme zvolit na větším oblouku $\widehat{AB}$.
27. Střed oblouku $\widehat{A_1B_1}$ je vrchol C; potom $B_1B \perp AC$ atd.
28. $\sphericalangle AOC = 2 . 48° = 96°$; bod A je střed oblouku B_1C_1, $AB \perp CC_1$. 2 řešení.
29. $C_1C \perp h$; velikost CB je známa, neboť $\sphericalangle BOC = 120°$.
30. Jde o kružnicový oblouk nad úsečkou AB při obvodovém úhlu $\sphericalangle AQB = |3\gamma - 180°|$.

Kapitola 2 C

1. Postup podle věty 37 a 13.
2. Sestrojte nejdříve dvojici $\triangle \overline{KLM}\ p\ \triangle K_1L_1M_1$ podle S a potom $\triangle K_1L_1M_1\ p\ \triangle KLM$ podle O. 4 řešení.

3. V $\triangle ABC$: 24°, 36°, 120°, v $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$: 48°, 72°, 60°; 4 : 6 : 5.

4. Obecně je například $\alpha = 90° - \frac{\bar{\alpha}}{2}$.

$\bar{\gamma} = 61°54'$; $\alpha = 71°33'$, $\beta = 49°24'$, $\gamma = 59°03'$.

5. Je-li $\alpha : \beta : \gamma = u : v : t \wedge u + v + t = 2s$, potom $\bar{\alpha} : \bar{\beta} : \bar{\gamma} = (s - u) : (s - v) : (s - t)$.

6. Viz úlohu 4.

7. Postup konstrukce: $\overleftrightarrow{AO} \equiv \overleftrightarrow{AA_1} \wedge \overleftrightarrow{C_1O} \equiv \overleftrightarrow{C_1C}$; $A_1B_1 \parallel \parallel \bar{C}C \wedge B_1O \equiv BO$ atd. Žádná dvojice na průměru!

8. Obdobně jako 7.

9. Obdobně jako 7.

10. Užijte poznámky 1 za větou 38:
$C_1C \perp \bar{A}\bar{B}$; $A_1O \equiv \bar{A}O$; $B_1O \equiv \bar{B}O$; atd.

11. Relace $p \circ \bar{p}$ podle T.

12. Relace $p \circ \bar{p}$ podle T.

13. $t_a \doteq 5{,}14$; $t_b \doteq 4{,}44$; $t_c \doteq 3{,}39$;
$\alpha = 41°24'35''$; $\beta = 55°46'16''$; $\gamma = 82°49'09''$; $B_1C_1 \doteq \doteq 5{,}11$; $AC \doteq 5{,}51$; $AB \doteq 5{,}05$; $r \doteq 6{,}05$;
$\alpha' = 57°39'30''$; $\beta' = 65°44'40''$; $\gamma' = 56°35'50''$;
$\bar{\alpha} = 80°55'55''$; $\bar{\beta} = 58°29'04''$; $\bar{\gamma} = 40°35'01''$;
$\bar{a} \doteq 5{,}97$; $\bar{b} \doteq 5{,}16$; $\bar{c} \doteq 3{,}93$;
$\bar{t}_a \doteq 3{,}48$; $\bar{t}_b \doteq 4{,}35$; $\bar{t}_c \doteq 5{,}17$.

14. Užijte věty 39. Nejdříve sestrojte dvojici trojúhelníků podobnou dvojici $\triangle ABC\ p\ \triangle A_1B_1C_1$ podle T (první složka této relace má strany velikosti daných úseček a, b, c). Tuto dvojici pak vložte do kružnice k pomocí odpovídajícího poměru podobnosti.

15. Sestrojte z daných těžnic trojúhelník. Je podobný $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ze složené relace $p \circ \bar{p}$ podle T.

16. Narýsujte dané tětivy do dané kružnice v libovolných polohách. Určete střed strany AB a otočte tětivu CC_1 kolem středu O tak, aby procházela středem strany AB. Tím je úloha vyřešena. Není-li tětiva CC_1 rovna průměru dané kružnice, existují dvě možné polohy přímky CC_1 a v každé z nich dvě různé polohy vrcholu C nebo C_1. Úloha má proto celkem čtyři řešení, je-li $CC_1 = 2r$, dvě řešení.
Kdyby bylo $CC_1 < AB$, padl by střed strany AB do vnitřní oblasti kružnice utvořené otáčením středu tětivy CC_1 a nebylo by možno z něho vést tečnu k této kružnici.

17. Jako věta 16. $AA_1 > \overline{BC}$.
18. Obdobná úloha je řešena v příkladu 7 v textu.
19. Uvažte například dvojici $\triangle ATC'$ a $\triangle BTC'$. Otočíme-li $\triangle BTC'$ kolem bodu C' o 180°, splynou body A a B, bod T se otočí do polohy T' tak, že $\overleftrightarrow{TT'} \equiv \overleftrightarrow{CT}$. Vzniklý trojúhelník ATT' má strany těchto velikostí:
$AT = \frac{2}{3} t_a$; $TT' = \frac{2}{3} t_c$; $TB' = \frac{2}{3} t_b$. Potom podle věty 42 je $\triangle ATT' \sim \triangle \overline{C}\overline{B}\overline{A}$, což platí o všech třech trojúhelnících utvořených podle návodu v úloze.
20. Úplná obdoba úlohy 19.
21. Postup podle příkladu 4 v textu: $\beta_1 \doteq 24°$, $\beta_2 \doteq 21°$.
22. Podle sinové věty je $\sin \bar{\alpha} : \sin \bar{\beta} : \sin \bar{\gamma} = \bar{a} : \bar{b} : \bar{c} = t_a : : t_b : t_c$.
23. Obdobně jako v úloze 22.
24. $\sin \bar{\alpha} = \sin [180° - (\alpha + \alpha')] = \sin (\alpha + \alpha')$ atd.

Kapitola 3 A

1. Užijte definice 3 a následujících vět.
2. Jako úloha 1.
3. Jako úloha 1.
4. Jako úloha 1.
5. Určete vždy nejdříve velikosti třetího úhlu a potom použijte tabulky 3 za větou 44.
a) 73°, 79°, 28°; pól P uvnitř,
b) 33°, 70°, 77°; pól $P \in \overrightarrow{ACB}*$,
c) 56°, 31°, 93°; pól Q uvnitř $\sphericalangle BCA$,
d) 26°, 2°, 152°; pól Q uvnitř $\sphericalangle BCA$.
6. Každý ze tří hledaných trojúhelníků lze umístit, popřípadě označit šesti různými způsoby, odtud celkem 18 řešení. Umístíme-li například MNZ_0 tak, že $MN : Z_0M : NZ_0 = 3 : 4 : 6$ a obdobně pak podle věty 45 i zbývající dva trojúhelníky, potom přímky MM_0, NN_0 a ZZ_0 se protnou v pólu P.
7. Obdoba úlohy 6.
8. Postupujte podle důkazu věty 4.
9. Doplňte oba chybějící trojúhelníky z trojice příslušné k dané relaci a opište všem třem trojúhelníkům kružnice.

Ty se protnou ve vrcholech $\triangle ABC$. Potom například C_1 je průsečík přímek AA_c a BB_c.

10. Protože druhá složka z relace q podle Q je rovnoramenný trojúhelník s úhlem 120° při hlavním vrcholu, jsou všechny tři trojúhelníky z příslušné trojice rovněž rovnoramenné a lze je tudíž sestrojit. Kružnice jim opsané se zase protínají ve vrcholech hledaného trojúhelníku.

11. Osa úsečky $A\overline{A}$ se protíná s přímkou BB_1 v bodě P, který je hledaným pólem.

12. Umístěte body K a $\overline{K}$ na oblouku $\widehat{L_1M_1}$ a body L a $\overline{L}$ na oblouku $\widehat{K_1M_1}$ podle věty 13. Přímky KK_1 a LL_1 určují pól P. Strany hledané trojice trojúhelníků procházejí po dvou pólem P a jsou rovnoběžné se stranami $\triangle K_1L_1M_1$.

13. Obdoba úlohy 12, avšak rýsujeme pouze trojici $\triangle U_0VZ$, $\triangle UV_0Z$, $\triangle UVZ_0$.

14. Uvědomte si, že je $\triangle E_0FG \sim \triangle EF_0G \sim \triangle EFG_0$. Tyto trojúhelníky sestrojte. Přímky EE_0, FF_0 a FF_0 se protínají v bodě P a na opsané kružnici určují vrcholy $\triangle E_1F_1G_1$. Strany hledané trojice jsou rovnoběžné se stranami $\triangle E_1F_1G_1$ a jejich vrcholy leží na přímkách EG_1, FG_1, FE_1, GE_1, GF_1 a EF_1.

15. Nahlédněte do tabulky za větou 44. Konstrukce obdobná jako v úloze 14.

16. V kružnici opsané $\triangle A_c'B_c'P$ platí:

$$\sphericalangle B_c'A_c'P = \sphericalangle B_c'B_1P \equiv \sphericalangle CB_1B = \sphericalangle CAB = \alpha,$$
$$\sphericalangle A_c'B_c'P = \sphericalangle A_c'A_1P \equiv \sphericalangle CA_1A = \sphericalangle CBA = \beta.$$

Dva úhly jsou shodné s úhly $\triangle ABC$.

17. až **19.** Obdoba úlohy 16.

20. Je-li například $\triangle A_0BC$ rovnostranný, potom podle tabulky 3 platí:

$180° - (\alpha + \alpha') = 60°$ a odtud $\alpha = 120° - \alpha'$, $\beta = 120° - \beta'$, $\gamma = 120° - \gamma'$.

Dovedeme proto sestrojit $\triangle ABC$ a umístit jej v kružnici opsané $\triangle A_1B_1C_1$ podle věty 4.

21. Podle tabulky 3 je pro pól Q uvnitř úhlu CAB:

$\alpha = \alpha' - 120° \wedge \beta = 60° + \beta' \wedge \gamma = 60° + \gamma'$.

Podmínkou tedy je $\alpha' > 120°$.

Pro Q uvnitř úhlu vrcholového k CAB dostáváme rovnice, které nelze splnit.

22. Dokažte nejdříve platnost věty obrácené k větě 45, nejlépe sporem. Hledaný bod je pól P.

23. $\alpha = 56°12'$, $\beta = 85°29'$, $\gamma = 38°19'$, $a = 4{,}8$; $c = 3{,}6$. Při konstrukci sestrojte nejdříve oba dané trojúhelníky a spojte je do relace $\mathbf{p}$ podle B_1 užitím věty 4. Potom body A, C, B_1 už leží na kružnici opsané $\triangle ABC$ a bod B leží na přímce B_0B_1.
24. Sestrojte trojúhelníky $\triangle ABC_0 \sim \triangle AB_0C \sim \triangle A_0BC \sim \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$
25. Uvědomte si, že například $A_0B_0 \parallel A_1B_1$; A_0 je průsečík přímek A_0B_0 a A_1C atd.
26. Obdoba úlohy 25.
27. a 28. Jde pouze o zvláštní polohu pólů. Jinak konstrukce podle definic.

Kapitola 3 B

1. Základní konstrukce. Využijte věty 19.
2. Využijte věty 25.
3. Využijte věty 52.
4. Využijte věty 52.
5. Danému $\triangle ABC_0$ opište kružnici. Její střed je vrchol C_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ z relace $\mathbf{p}$ podle S. Potom hledaný trojúhelník je z dvojice $\triangle ABC_0\ \mathbf{p}\ \triangle A_0B_0S$ podle C_1.
6. Sestrojte nejdříve $\triangle ABC$; $\sphericalangle BCA = 2 . \sphericalangle BCS$, $\sphericalangle CBA = = 2 . \sphericalangle CBS$ atd.
7. Trojúhelník ABC je souměrně sdružený s $\triangle ACB_0$ podle přímky AC.
8. Sestrojte $\triangle EFG$. Střed kružnice vepsané $\triangle EFG_0$ je vrchol příslušného $\triangle E_1F_1G_1$.
9. Těžiště daného trojúhelníku KLM_0 je vrchol M_1 příslušného $\triangle K_1L_1M_1$ z relace $\mathbf{p}$ podle T. Pól T pak leží na kružnici opsané $\triangle KLM_0$ a na přímce M_0M_1.
10. Vrcholy $\triangle ABC$ jsou paty výšek daného trojúhelníku.
11. Danému trojúhelníku opište kružnici. Její střed je vrchol A_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ z relace $\mathbf{p}$ podle S. Strana BC hledaného trojúhelníku je souměrně sdružena podle středu A_1 se stranou B_0C_0 daného trojúhelníku.
12. Vrchol B_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ je středem kružnice vepsané danému trojúhelníku.
13. Střed kružnice opsané danému trojúhelníku je vrchol $G_1(G_2)$ a strana EF je souměrně sdružena se stranou E_0F_0 podle středu $G_1(G_2)$.

14. Vrchol C_1 je průsečíkem výšek daného trojúhelníku.
15. Hledaný bod M je průsečíkem výšek daného trojúhelníku.
16. Hledaný společný bod kružnic l_1, l_2, l_3 je střed kružnice vepsané zvolenému trojúhelníku.
17. Obecně může každá z daných úloh mít 18 řešení, protože můžeme za pól zvolit kterýkoliv z vrcholů daného trojúhelníku, a potom další vrcholy lze označit šesti různými způsoby. Dále pak pokračujeme takto:
a) Podle úlohy 11.
b) Podle úlohy 12.
c) Podle úlohy 13 postupovat nelze, protože příslušný trojúhelník je tupoúhlý. Úloha tedy nemá řešení.
d) Podle úlohy 14.
18. Příslušné středové úhly mají velikosti 100°, 120°, 140°. Dále podle definic.
19. Příslušná dvojice je $\triangle A_1B_1C_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle ABC$ podle V_1, kde V_1 je průsečík výšek první složky. Proto je také přímka $C_1S \equiv C_1C$ kolmá na A_1B_1. Současně je $A_1B_1 \parallel C_aC_b$, takže C_1C je kolmá na C_aC_b. Je tedy C_aC_b tečnou kružnice l_0 v bodě S.
20. Celá konstrukce potvrzuje symetričnost složené relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle T. Je tedy možno zaměnit označení vrcholů trojúhelníků z uvažované dvojice.
21. $\alpha = 40°54'55''$; $\beta = 65°55'51''$; $\alpha' = 76°51'19''$;
$\gamma' = 53°15'23''$; $\bar{\beta} = 64°30'51''$; $\bar{\gamma} = 53°15'23''$.
22. $\alpha = 107°24'22''$; $\beta = 30°52'38''$; $\gamma = 41°43'$.
23. Vrchol C_1 je těžištěm $\triangle ABC_0$, kružnice opsaná $\triangle ABC_1$ obsahuje vrchol C na přímce C_0C_1.
24. Vrchol C_1 je středem kružnice vepsané $\triangle ABC_0$; dále jako v předešlé úloze.
25. Vrchol C_1 je středem kružnice opsané $\triangle ABC_0$.
26. $\triangle ABC$ je souměrně sdružený s $\triangle ABC_0$ podle osy AB.
27. Platí $C_0 \equiv S$. Odtud konstrukce.
28. Obdobně jako v úloze 26.

Kapitola 4

1. a) 40°06′,
b) 6,32 cm,
c) 102°30′,
d) 3,43 cm,
e) 4,17 cm.

2. Užijte vzorců: $P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$; $a = 2r \sin \alpha$;

v $\triangle ABC$: $P = 2r^2 \sin \alpha \sin \alpha \sin \gamma$,
v $\triangle A_2B_2C_2$ nebo $\triangle A_1B_1C_1$: $P = 2r^2 \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma'$,
v $\triangle PB_aC_a$: $P = 2r_c^2 \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma'$ a cyklické záměny;

v $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$: $P = 2r^2 \sin (\alpha + \alpha') \sin (\beta + \beta') \sin (\gamma + \gamma')$.

3. $A_1B_1 = 10$; $B_1C_1 = 9{,}35$; $C_1A_1 = 10{,}7$.
4. $\triangle ABC$: $P = 24{,}4 \text{ cm}^2$, $\triangle A_1B_1C_1$: $P = 46{,}9 \text{ cm}^2$, $P_1 = 2r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$.
5. $E_1F_2 = 6{,}99$; $E_1G_2 = 9{,}45$; $P = 31{,}0$
6. Rozměry $\triangle ABC$ není nutno počítat. $r = 5{,}88$.
7. Užijte sinové věty. Přibližně 743 : 958 : 852.
8. $P' = 8P \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 144$.
9. $E_2F_2 = 88{,}6$ mm; $E_2G_2 = 74{,}3$ mm : $F_2G_2 = 114$ mm.
10. a) $\overline{\alpha} = 82°30'$; $\overline{\beta} = 60°$; $\overline{\gamma} = 37°30'$,
b) $\overline{\alpha} : \overline{\beta} : \overline{\gamma} = 11 : 8 : 5$.
11. $P = 39{,}1$.
12. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_cB_cP$; $A_1B_1 = 7{,}36$ cm, $B_1C_1 = 8{,}71$ cm, $C_1A_1 = 6{,}5$ cm.
13. $r_a = 13{,}7$; $r_b = 4{,}28$; $r_c = 6{,}81$.
14. a) $AC = 31{,}7$ cm; $A_1C_1 = 15{,}7$ cm;
b) $r_b = 6{,}15$ cm;
c) $A_bC_b = 11{,}6$ cm.
15. Výpočet v pořadí: $r_c = 3{,}76$; $AB = 2r_c \sin (\gamma + \gamma')$; $\sphericalangle BCA = 97°48'$.
16. $\alpha' = 42° \pm 30°07'$; $\beta' = 26° \pm 15°15'$; $\gamma = 112°$.
Polohy pólu Q podle tabulky 1, čtyři možnosti:

$\alpha' > \alpha$; $\beta' > \beta$; $\gamma' < \gamma$ — úhel vrcholový k ACB,
$\alpha' > \alpha$; $\beta' < \beta$; $\gamma' < \gamma$ — vnitřek $\triangle CAB$;
$\alpha' < \alpha$; $\beta' < \beta$; $\gamma' > \gamma$ — vnitřek $\triangle ACB$;
$\alpha' < \alpha$; $\beta' > \beta$; $\gamma' > \gamma$ — úhel vrcholový k CAB.

17. Užijte věty 63!
18. Podle věty 63 je postupný poměr velikostí například:
$r : r_a : r_b : r_c = 1 : 1 : \sqrt{3} : 2$, takže je $r = r_a$.
19. Užijte věty 5 a kosinové věty:

$\alpha' = 74°11'$; $\beta' = 42°13'$; $\gamma' = 63°36'$.

20. $\gamma = \gamma'$, odtud $Q \in \overleftrightarrow{AB}$, $\sphericalangle BQC = \alpha' - \alpha = \beta - \beta' = 20°$. Potom $BQ = 12{,}8$ m; $CQ = 25{,}9$ m; $AQ = 34{,}9$ m.

21. Je-li $\overline{P}$ velikost obsahu $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ze složené relace $\mathbf{p} \circ \overline{\mathbf{p}}$ podle O, potom je

$\overline{P} : P_1 : P_2 : P_3 = r^2 : r_a^2 : r_b^2 : r_c^2$,

$\overline{P} = 299$; $P_1 = 140$; $P_2 = 638$; $P_3 = 489$.

OBSAH

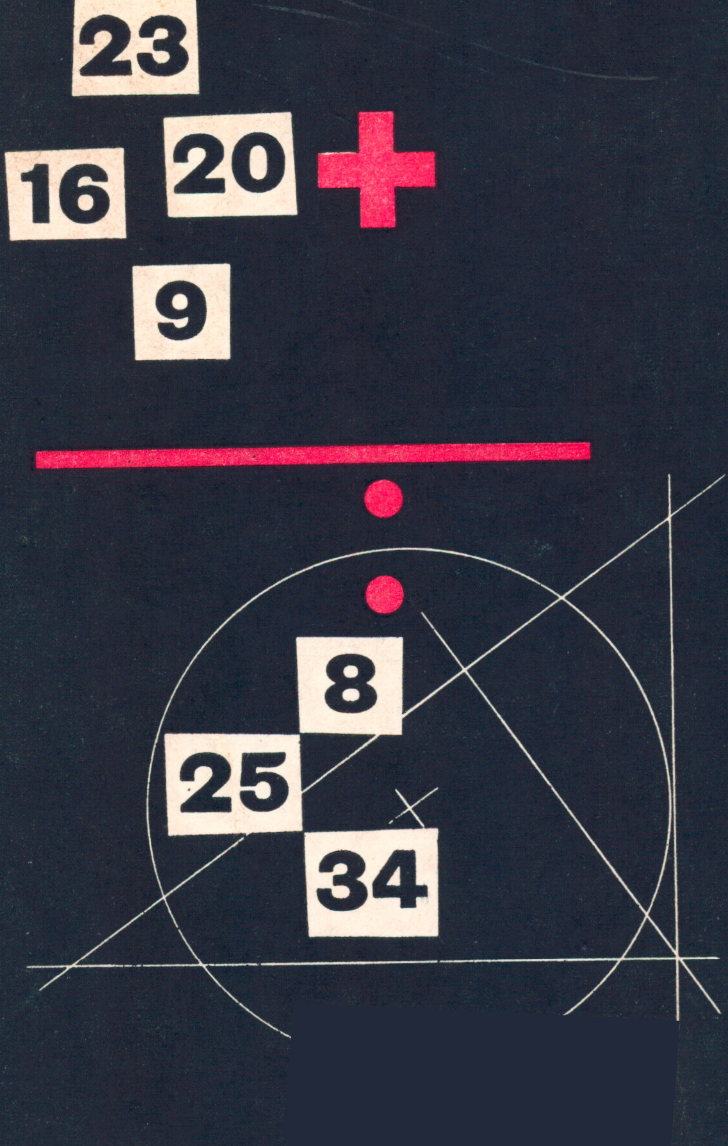
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ARNOŠT NIEDERLE

Zajímavé dvojice trojúhelníků

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
K tisku připravil Vladimír Doležal
Obálku navrhl Jiří Příbramský
Odpovědná redaktorka Libuše Rousková
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 4260
Edice Škola mladých matematiků, svazek 47
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
9,71 AA. 12,47 VA. 272 stran
Náklad 6000 výtisků. První vydání
Praha 1980. 508/21/82,5

23-117-80 03/2 Cena brož. výt. 16 Kčs



23-117-80
03/2
Cena brož.