ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

FAKTORIÁLY A KOMBINAČNÍ ČÍSLA

56

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JIŘÍ SEDLÁČEK

Faktoriály a kombinační čísla

DRUHÉ, UPRAVENÉ VYDÁNÍ

PRAHA 1985
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali:
RNDr. Karel Horák, CSc., a RNDr. Antonín Vrba, CSc.

PŘEDMLUVA KE DRUHÉMU VYDÁNÍ

Matematika je tak rozsáhlá, že si ji lidé rozdělili na řadu speciálních oborů. Tak vznikla algebra, číselná teorie, euklidovská geometrie, topologie, matematická analýza, teorie pravděpodobnosti a mnoho dalších. Také kombinatorika. Začneme-li se pídit po přesném vymezení těch speciálních názvů, musíme přiznat, že není tak snadné vést mezi nimi definitivní hraniční čáry, ba nedá se ani jednoznačně charakterizovat obsah jednotlivých disciplín.

Slovník spisovné češtiny pro školu a veřejnost, který vydalo nakladatelství Academia r. 1978, vysvětluje kombinatoriku jako matematický obor zabývající se uspořádáním daných prvků do skupin podle jistých pravidel.

Na školské úrovni se skutečně dá říci, že se kombinatorika zabývá studiem různých výběrů (posloupností, skupin či sestav), jejichž členy jsou prvky dané (zpravidla konečné) množiny. Budeme tedy kombinatoriku hledat v těsném sousedství s teorií množin, jejíž nedávné vítězné tažení do škol všech stupňů nemusíme jistě příliš popisovat. Vlivem modernizačních snah posledních let dostává však středoškolská kombinatorika jinou tvářnost, neboť je ovlivněna jednak praktickými důvody (počítače, programování), jednak potřebou odstranit zastaralé nepřesnosti v definicích základních pojmů.

Počátkem šedesátých let mě pověřil Ústřední výbor matematické olympiády, abych pro naše středoškolské studenty napsal knížku o kombinatorické matematice. Tak vznikl tento svazeček, který po letech předkládáme veřejnosti v nové, přepracované formě. První vydání se objevilo na trhu r. 1964 a předtím se v této edici žádný kombinatorický svazek nevyskytl. Když jsem kdysi knížku plánoval, zaměřil jsem ji šířeji, než bývá zvykem ve středoškolské matematice. Vycházel jsem z tehdejší tendence Školy mladých matematiků poskytovat čtenářům v první řadě sbírky řešených příkladů s vysvětlivkami a komentářem. Takovou studijní literaturu totiž studenti tehdy nejvíce potřebovali při řešení úloh matematické olympiády, v kroužcích i při samostatném studiu, první svazky naší edice měly takový charakter a myslím, že i v současnosti je tento typ brožury vítán. V pozdějších letech vyšla ovšem pro matematickou olympiádu řada užitečných knížek s kombinatorickou tematikou, jak se o tom ještě zmíníme.

Tato knížka vychází od jednoduchých příkladů a směřuje ke složitějším a méně obvyklým. Na některých příkladech předvádíme dvě různé metody řešení a důraz se klade též na numerické výpočty. Často pracujeme s logaritmickými tabulkami, ale student může někde podle svého uvážení použít i kapesní kalkulačky. Při výkladu a při řešení příkladů připojujeme na mnoha místech obrázek. Příklady spojuje text, v němž najdete všechny potřebné definice a bez důkazu rovněž některé důležité poučky, kterých se při řešení používá. Definice zde uvádím pro úplnost a pro čtenářovo pohodlí, i když vím, že je studenti většinou znají ze školy. Tuto část knížky jsme v novém vydání nejvíce měnili, neboť v průběhu let se poněkud změnila terminologie, a matematická olympiáda (i naše knižnice) musí tyto změny respektovat. Spojovací text obsahuje také poznámky k probíraným příkladům a upozorňuje na jejich vzájemné souvislosti.

Některé matematické pojmy vystupují na dalších stránkách s tím, že je bereme jako známé. Nedefinujeme např. uspořádanou a neuspořádanou n-tici sestavenou z prvků dané množiny, neboť bychom tím přerušovali výklad a odbočovali bychom od tématu. Ten, kdo cítí potřebu upřesnit si tyto slovní obraty, nalezne vysvětlení v dalších řádcích této předmluvy.

Pojem pořadí n prvků odpovídá staršímu termínu permutace, což je slovo rezervované nyní pro potřeby algebry. (V algebře se permutace definuje jako zobrazení množiny na sebe.) V první kapitole této knížky definujeme pořadí jako uspořádanou n-tici obsahující každý prvek dané n-prvkové množiny právě jednou. Slovní obrat *uspořádaná n-tice* už v knížce na zmíněném místě, jak řečeno, blíže nevysvětlujeme a předpokládáme, že ho čtenář zná ze školy (jde o synonymum s konečnou posloupností). V dalším výkladu narazíte i na termín n e u s p o ř á d a n á n-t i c e, a to v závěru kapitoly třetí, kde se definují kombinace s opakováním. Zdálo by se z názoru, že neuspořádaná n-tice je pojem jednodušší, a že se dá tedy snáze definovat než n-tice uspořádaná. Je tomu však naopak, jak si hned ukážeme. Definici neuspořádané n-tice opřeme o pojem n-tice uspořádané takto:

Nechť je dána množina M a přirozené číslo n. *Neuspořádaná n-tice* prvků množiny M je množina všech navzájem ekvivalentních uspořádaných n-tic prvků množiny M. Přitom uspořádané n-tice

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n), \quad (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$$

se nazývají *ekvivalentní*, existuje-li permutace φ množiny

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

tak, že platí

$$a_i = b_{\tau(i)}$$

pro $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Nezalekněte se, prosím, této strohé matematické definice. Když si ji promyslíte, zjistíte, že říká přesnými slovy to, co si každý pod neuspořádanou n-ticí představuje intuitivně. S intuicí ostatně vystačíte i ve třetí kapitole, až zmíněná látka přijde na program.

Jak název knížky napovídá, vycházíme z obvyklé definice faktoriálu a kombinačního čísla a všímáme si nejen toho, jak se tyto pojmy využívají v tradiční středoškolské kombinatorice, ale ukazujeme též souvislosti s číselnou teorií, elementární geometrií, matematickou statistikou, teorií pravděpodobnosti a matematickou analýzou. Pro malý rozsah knížky se všech těchto aspektů můžeme dotknout jen letmo. Tak např. z matematické statistiky probíráme v šesté kapitole jen příklady z teorie výběrových šetření z konečných množin. Závěrečná kapitola s názvem Různé trochu vybočuje ze směru, který naznačuje název našeho svazku, ale příklady a úlohy tam uvedené mají také kombinatorický charakter (latinské čtverce, Wythoffova úloha, Langfordův problém), a tak sem tematicky přece jen trochu patří.

Při výkladu se všude předpokládá pouze znalost středoškolské matematiky. Důkaz matematickou indukcí by měl být běžně znám každému řešiteli matematické olympiády, vždyť v soutěži je stále mnoho úloh, kde se tato metoda potřebuje. Naše edice může zájemcům nabídnout pěknou knížku A. Vrby, která vyšla r. 1977 pod názvem *Princip matematické indukce* jako 40. svazek.*)

Všude se snažíme zůstat s výkladem na elementární úrovni a z toho důvodu např. při zápise součtových vzorců neužíváme sumačního znaménka. Vypsání součtových vzorců i s oněmi pověstnými několika tečkami se mi zdá pro začátečníka přístupnější.

Aby si čtenář mohl látku procvičit, připojili jsme za každou kapitolu ještě několik nerozřešených úloh. Jejich výsledky nebo stručné návody jsme sice uvedli v závěrečné části brožury, používejte jich ale jen pro kontrolu svého vlastního řešení nebo nebudete-li si vědět s úlohou rady. Některé úlohy mají jen cvičný charakter a jen malá část je určena náročnějším.

Knížka končí seznamem další doporučené literatury, která souvisí s probíranou látkou. Zde zařazujeme nejprve svazky, jež vyšly na blízké téma v edici Škola mladých matematiků, pak další české a slovenské prameny, a konečně i několik knih z literatury cizojazyčné. Je vidět, že se literární odkazy neomezují jen na klasickou školskou kombinatoriku, ale tvoří širší spektrum.

První vydání Faktoriálů a kombinačních*) čísel recenzovali prof. RNDr. Karel Hruša (1905—1971) a RNDr. Zbyněk Šidák, DrSc. I po letech, kdy připravuji do tisku nové vydání, vzpomínám na spolupráci s nimi a jsem jim oběma zavázán za mnohé připomínky a zlepšení, kterých jsem využil i v nové verzi. Prvnímu recenzentu však bohužel dík osobně vyjádřit nemohu, neboť jeho životní dráhu už s definitivní platností vymezují dva letopočty.

Nejaktuálnější poděkování patří RNDr. Karlu Horákovi, CSc., a RNDr. Antonínu Vrbovi, CSc., kteří

---

*) Zmíněný svazek obsahuje také značný počet kombinatorických úloh, a proto jsme jej zařadili i do seznamu doporučené literatury na konci této publikace.

recenzovali toto nové vydání a věnovali připravovanému svazku velkou péči. Druhý ze jmenovaných recenzentů se mnou po technické stránce spolupracoval už na rukopise prvního vydání před dvaceti roky, tehdy ještě jako posluchač matematicko-fyzikální fakulty Karlovy univerzity, a tak je jeho zásluha o zdar díla dvojnásobná.

Jiří Sedláček

1. kapitola

FAKTORIÁL PŘIROZENÉHO ČÍSLA

Aby nevzniklo nedorozumění, připomínáme hned na začátku této knížky, že *přirozeným číslem* zde rozumíme číslo celé kladné. Přirozená čísla jsou tedy

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

Na střední škole se definuje faktoriál přirozeného čísla, což je pojem užitečný v mnoha kombinatorických úvahách i v jiných částech matematiky. Jeho potřebnost si uvědomíme při četbě dalších stránek. Je-li dáno přirozené číslo n větší než 1, pak součin

$$1.2.3.4 \ldots (n-1).n$$

zapisujeme stručně $n!$ a čteme *n faktoriál.* Definici symbolu $n!$ rozšiřujeme i na případy $n = 0$ a $n = 1$ a klademe

$$0! = 1, \qquad 1! = 1.$$

Pro malé hodnoty n je možno faktoriály celkem snadno vypočítat. Výsledek ukazuje tato tabulka:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800

Podrobnější přehled faktoriálů se najde ve většině matematických tabulek. Tak např. *Pětimístné tabulky logaritmické,* které před lety sestavili M. Valouch a M. A. Valouch pro potřeby někdejších středních škol, uvádějí faktoriály všech přirozených čísel od 1 do 30 a také jejich rozklady v součin prvočísel. Kromě toho jsou v této knize rovněž dekadické logaritmy faktoriálů až do log 200! s mantisou zaokrouhlenou na deset desetinných míst.

Pro účely vědecké však mnohdy ani taková tabulka nestačí. V r. 1944 vydal H. S. Uhler knížku s názvem *Exact values of the first* 200 *factorials*, kde shrnul hodnoty $n!$ pro přirozená čísla $n \leq 200$. Tentýž autor vypočetl pak ještě později $n!$ pro čísla n z intervalu od 201 do 300, a roku 1956 uveřejnil v časopise Scripta Mathematica dokonce hodnotu 1000!, což je číslo mající v desítkové soustavě 2568 cifer. To ovšem už můžeme označit za počtářskou kuriozitu a nemá praktickou cenu, aby se někdo snažil tento výkon překonat. Není totiž tak důležité, abychom znali přesné hodnoty velkých faktoriálů, daleko užitečnější je poznat základní vlastnosti tohoto matematického pojmu a umět s ním pracovat.

Abychom se s faktoriály blíže seznámili, začneme několika příklady.

Příklad 1. Rozhodněte, které ze dvou čísel

$$A = 500! + 503!, \qquad B = 501! + 502!$$

je větší.

Řešení. Zde se vyskytují příliš velká čísla, a nemůžeme se tedy o výsledku přesvědčit přímým výpočtem. Pomůžeme si proto jinak. První z čísel vyjádříme ve tvaru

$$500! + 503! = 500!\,(1 + 501.502.503)$$

a druhé ve tvaru

$$501! + 502! = 500!\,(501 + 501.502).$$

Stačí nyní porovnat číslo

$$x = 1 + 501 . 502 . 503$$

s číslem

$$y = 501 + 501 . 502 .$$

Ani zde však nemusíme ještě numericky počítat, ale pomůžeme si opět jednoduchým obratem. Ve výrazu pro y vytkneme 501, takže máme

$$y = 501(1 + 502) = 501 . 503 .$$

Dále je zřejmé, že

$$x > 501 . 502 . 503 ,$$

takže máme $x > y$.

Odpověď. Číslo A je větší než číslo B.

Podíváme se nyní na jiný příklad.

Příklad 2. Nechť n je přirozené číslo. Ověřte si, že platí

$$\frac{(n - 1)!}{(n + 1)!} + \frac{(2n + 1)!}{(2n + 3)!} = \frac{5n + 6}{2n\,(n + 1)\,(2n + 3)} .$$

Řešení. První zlomek na levé straně můžeme zkrátit číslem $(n - 1)!$, druhý číslem $(2n + 1)!$. Levá strana uvažovaného vzorce má pak tvar

$$\frac{1}{n(n + 1)} + \frac{1}{2(n + 1)\,(2n + 3)} .$$

Uvedeme zlomky ještě na společného jmenovatele, jímž je číslo

$$2n(n + 1)\,(2n + 3) .$$

Po úpravě dostáváme výsledek

$$\frac{5n + 6}{2n(n + 1)(2n + 3)},$$

který se rovná pravé straně dokazovaného vzorce. Proveďte si pomocné výpočty sami podrobně.

Další dva příklady, v nichž se pracuje s faktoriálem, patří tak trochu do číselné teorie. O tom, který hned následuje, bude ještě zmínka v dalších úvahách.

Příklad 3. Určete, kolika nulami končí (při zápise v desítkové soustavě) číslo 300!.

Řešení. Číslo 300! je součinem všech přirozených čísel od 1 do 300. Všimněme si zde těch činitelů, které jsou dělitelné pěti. Jsou to čísla 5, 10, 15, 20, ..., 295, 300. Těchto čísel je zřejmě 60. Musíme si však uvědomit, že mezi těmito uvažovanými čísly byla zahrnuta také čísla 25, 50, 75 ..., 275, 300, z nichž každé je dělitelné číslem 5^2. Tato skupina čísel obsahuje zřejmě 12 prvků. Konečně je nutno uvážit, že jsou zde čísla 125 a 250, jež jsou dělitelná číslem 5^3.

Celkem jsme tedy zjistili, že číslo 300! je dělitelné mocninou $5^{60+12+2}$, tj. 5^{74}. Z naší úvahy též vyplývá, že 300! není dělitelné mocninou 5^{75}. Polovina z čísel 1, 2, 3, ..., 300 je sudých, takže 300! je jistě dělitelné mocninou 2^{150}. Z toho vyplývá, že 300! je dělitelné mocninou 10^{74}, avšak není dělitelné mocninou 10^{75}.

Odpověď. Číslo 300! končí 74 nulami.

Příklad 4. Ukažte, že číslo $18! + 1$ je dělitelné číslem 23.

Řešení. Máme-li po ruce vhodné tabulky, můžeme v nich vyhledat, že platí

$$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000.$$

Pak budeme dělit

$$6\,402\,373\,705\,728\,001 : 23.$$

Čtenář vidí, že tato cesta pro důkaz našeho tvrzení je dosti pracná, i když jsme většinu námahy „přenechali" tabulkám. Nemáme-li po ruce příslušné tabulky, musíme hledat jiný způsob řešení. Ukážeme si, jak lze postupovat v tomto případě.

Zřejmě je $4! = 24 = 23 + 1$

a dále*)

$$6! = (4!).30 = (23 + 1).(23 + 7) = 23^2 + 8.23 + 7 = 23a + 7.$$

Podobně počítáme dále

$$\begin{aligned}
8! &= (6!).56 = (23a + 7).(23.2 + 10) = 23b + 1,\\
10! &= (8!).90 = (23b + 1).(23.3 + 21) = 23c + 21,\\
12! &= (10!).132 = (23c + 21).(23.5 + 17) = 23d + 12,\\
14! &= (12!).182 = (23d + 12).(23.7 + 21) = 23e + 22,\\
16! &= (14!).240 = (23e + 22).(23.10 + 10) = 23f + 13,\\
18! &= (16!).306 = (23f + 13).(23.13 + 7) = 23g + 22.
\end{aligned}$$

Závěrem tedy nacházíme

$$18! + 1 = 23g + 23 = 23(g + 1),$$

čímž je prokázáno, že číslo $18! + 1$ je dělitelné číslem 23.

Otázka, s níž jsme se setkali v předcházejícím příkladě, souvisí s tzv. Wilsonovou větou**), která zní takto:

*) Písmena $a, b, c, \ldots, g$ v další úvaze znamenají vhodná přirozená čísla.

**) Název věty připomíná Johna Wilsona (1741—1793).

Číslo $(p - 1)! + 1$ *je dělitelné číslem* p *právě tehdy, je-li* p *prvočíslo.*

Toto tvrzení zde nebudeme dokazovat, neboť bychom se tím dostali příliš daleko do oblasti číselné teorie a odbočili tak od cíle, který si klade tato knížka. Všimněme si jen, co plyne z Wilsonovy věty pro číslo $18! + 1$. Číslo 19 je prvočíslo, a je tedy $18! + 1$ dělitelné číslem 19. Připojíme-li to k výsledku minulého příkladu, dostáváme: Číslo $18! + 1$ je dělitelné součinem 19.23 čili číslem 437.

Připomeňme si nyní jeden důležitý kombinatorický pojem, který se bude v dalších úvahách častěji vyskytovat. Je to pojem pořadí. Nechť n je přirozené číslo a nechť je dána konečná množina N složená z n prvků. *Pořadí**) těchto n prvků je uspořádaná n-tice obsahující každý prvek množiny N právě jednou. Počet všech pořadí n prvků budeme označovat $P(n)$. Dá se dokázat, že pro $P(n)$ platí tento vzorec:

$$P(n) = n!.$$

Vyřešíme si dva ilustrační příklady.

Příklad 5. Je dána množina

$$\{1, 2, 3, \ldots, m - 1, m\}.$$

Kolik můžeme z těchto m prvků sestavit pořadí takových, že lichá čísla jsou na místech lichých a sudá na místech sudých? (Lichým místem v pořadí $(a_1, a_2, \ldots,$

*) Jak jsme řekli už v předmluvě, ve školských učebnicích se pro pořadí užívá též název *permutace*. Protože toto slovo slouží v algebře v trochu odlišném smyslu, nemluvíme na těchto stránkách o permutacích, ale o pořadích.

$\dots, a_m$) rozumíme to, jež přísluší prvku a_i s lichým indexem i. Obdobně definujeme místo sudé.)

Řešení. Počet všech uvažovaných pořadí označme $\overline{P}(m)$ a rozlišujme dva případy. Nejprve nechť m je sudé a pak nechť m je liché.

a) Je-li $m = 2k$, máme v dané množině k lichých čísel

$$1, 3, 5, 7, \dots, 2k - 1$$

a také k sudých čísel

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2k.$$

Nejdříve umístěme lichá čísla na lichá místa; to je možné $k!$ způsoby. Na sudých místech mají být čísla sudá a ta můžeme umístit také $k!$ způsoby. Pro celkový počet pořadí tedy máme

$$\overline{P}(m) = k!\,.\,k! = (k!)^2.$$

b) Je-li $m = 2k - 1$, pak v uvažované množině existuje k lichých čísel

$$1, 3, 5, 7, \dots, 2k - 1;$$

ta můžeme na lichá místa zařadit $k!$ způsoby. Sudých čísel

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2k - 2$$

je pouze $k - 1$, takže k jejich zařazení máme $(k - 1)!$ možností. Vychází tedy

$$\overline{P}(m) = k!\,.\,(k - 1)!\,.$$

Odpověď. Je-li m sudé, potom platí

$$\overline{P}(m) = \left(\left(\frac{m}{2}\right)!\right)^2;$$

je-li m liché, je

$$\overline{P}(m) = \left(\frac{m+1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{m-1}{2}\right)!.$$

Čtenář si může uvědomit, že ze vzorce $P(m) = m!$ a ze dvou vzorců právě odvozených plynou tyto nerovnosti:

$$m! > \left(\left(\frac{m}{2}\right)!\right)^2 \text{ pro } m \text{ sudé;}$$

$$m! \geqq \left(\frac{m+1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{m-1}{2}\right)! \quad \text{pro } m \text{ liché.}$$

Rozmyslete si sami, proč v první z těchto nerovností je znaménko $>$, kdežto ve druhé $\geqq$.

Nyní jeden příklad s geometrickým námětem.

Příklad 6. V rovině je dán konvexní n-úhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ (kde $n \geqq 4$) se všemi svými úhlopříčkami. Kolika způsoby můžeme projít všechny jeho vrcholy tak, že vyjdeme z vrcholu A_1, postupujeme po stranách nebo úhlopříčkách, každý z vrcholů

$$A_2, A_3, A_4, \ldots, A_{n-1}$$

projdeme právě jednou a skončíme ve vrcholu A_n?

Řešení. Tvoříme vlastně pořadí z n prvků (vrcholů mnohoúhelníka), přičemž A_1 se vždycky vyskytuje na prvním místě a A_n na místě posledním. Dva prvky jsou tedy pevné, kdežto zbývající $n - 2$ prvky nikoliv. Hledaný počet je tedy

$$P(n-2) = (n-2)!.$$

Vyšli jsme z konečné množiny N, která měla n prvků, a definovali jsme pořadí těchto n prvků jako uspořádanou n-tici obsahující každý prvek množiny N právě jednou. Často se vyskytuje jiný příklad: Zkoumáme uspořádané n-tice, v nichž se jeden prvek opakuje r-krát ($2 \leqq r \leqq n$) a každý další právě jednou. Množina, ze které tyto n-tice vybíráme, má tedy $n - r + 1$ prvků. Jak víme ze školy, pro počet těchto *pořadí s opakováním**) platí vzorec

$$P(n; r) = \frac{n!}{r!}.$$

Dejme tomu, že zkoumáme uspořádané n-tice, v nichž se jeden z prvků opakuje r-krát, druhý s-krát ($r \geqq 2$, $s \geqq 2$, $r + s \leqq n$) a každý další prvek právě jednou. Množina, z níž n-tice vybíráme, má tedy $n - r - s + 2$ prvků. Potom počet těchto pořadí s opakováním je

$$P(n; r, s) = \frac{n!}{r!.s!}.$$

Pořadí s opakováním si připomeňme na jednom příkladě.

Příklad 7. Určete počet všech čtyřciferných čísel dělitelných devíti, která můžeme napsat užitím číslic

$$0, 1, 2, 5, 7.$$

Přitom se mohou číslice v čísle i opakovat.

Řešení. Vzpomeneme si nejprve na znak dělitelnosti číslem 9. Číslo (v desítkové soustavě) je dělitelné devíti právě tehdy, je-li jeho ciferný součet dělitelný devíti.

---

*) Je-li to nutné, můžeme při pořadí, v nichž se každý prvek vyskytuje právě jednou, výslovně zdůraznit, že jde o pořadí bezopakování.

V našem případě přicházejí v úvahu pouze ciferné součty 9 nebo 18, neboť ciferný součet 27 nelze pomocí daných číslic vytvořit (a samozřejmě nemůžeme vytvořit ani součty 36, 45, ...).

Kolika způsoby lze v našem případě vytvořit součet 9? Nejprve nebudeme hledět na pořadí a v zápisech uspořádáme jednotlivé sčítance podle velikosti „sestupně“. Platí

$$9 = 7 + 2 + 0 + 0, \quad 9 = 7 + 1 + 1 + 0,$$
$$9 = 5 + 2 + 2 + 0, \quad 9 = 5 + 2 + 1 + 1.$$

Podobně pro součet 18 najdeme

$$18 = 7 + 7 + 2 + 2, \quad 18 = 7 + 5 + 5 + 1.$$

Vraťme se tedy k zápisu $9 = 7 + 2 + 0 + 0$. Kolik čtyřciferných čísel lze napsat, máme-li užít číslic 7, 2, 0, 0? Zde tvoříme pořadí s opakováním, v nichž se jeden prvek opakuje dvakrát. Počet těchto pořadí určuje číslo

$$\frac{4!}{2!} = 12.$$

Z tohoto počtu musíme ovšem vyloučit čtyřciferné zápisy, jež mají na prvním místě zleva nulu. Kolik je těchto případů? Ze zbývajících tří prvků 0, 2 a 7 tvoříme trojciferné zápisy a těch je $3! = 6$. Zápisu

$$9 = 7 + 2 + 0 + 0$$

odpovídá tedy $12 - 6 = 6$ případů.

Podobně zjistíme, že zápisu

$$9 = 7 + 1 + 1 + 0$$

odpovídá počet

$$\frac{4!}{2!} - \frac{3!}{2!} = 12 - 3 = 9.$$

Stejný výsledek dostaneme zřejmě i pro zápis

$$9 = 5 + 2 + 2 + 0 .$$

Kolik čtyřciferných čísel se odvodí ze zápisu

$$9 = 5 + 2 + 1 + 1 ?$$

Je jich zřejmě

$$\frac{4!}{2!} = 12 .$$

Zatím jsme tedy zjistili, že se pro ciferný součet 9 dá najít celkem 36 případů.

Nyní uvažujme o ciferném součtu 18. Vyjádření

$$18 = 7 + 7 + 2 + 2$$

odpovídají zápisy, v nichž se sedmička opakuje dvakrát a dvojka také dvakrát. Počet takových čtyřciferných čísel se tedy rovná číslu

$$\frac{4!}{2!\,.\,2!} = 6 .$$

Konečně vztahu

$$18 = 7 + 5 + 5 + 1$$

odpovídá

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

případů. Pro ciferný součet 18 jsme tedy celkem našli 18 případů.

Odpověď. Z daných číslic se dá sestavit celkem 54 čtyřciferných čísel dělitelných devíti.

Připomeňme si další kombinatorický pojem. Dejme tomu, že jsou dána přirozená čísla k, n, pro něž platí

$k \leq n$. Nechť je dána konečná množina N složená z n prvků; *k-prvková variace* z n prvků množiny N je uspořádaná k-tice obsahující každý prvek množiny N nejvýše jednou. Počet všech k-prvkových variací z n prvků označíme $V_k(n)$. Dá se dokázat, že pro $k > 1$ platí

$$V_k(n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

a pro $k = 1$ je

$$V_k(n) = n.$$

Použijeme-li faktoriálů, můžeme číslo $V_k(n)$ vyjádřit takto:

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Podle starší terminologie se k-prvkovým variacím z n prvků říká *variace k-té třídy z n prvků*. Toto slovní vyjádření budeme v této knížce též občas používat.

Srovnáme-li definici variací s definicí pořadí, kterou jsme zde uvedli o několik stránek dříve, vidíme, že pořadí (bez opakování) jsou zvláštním případem variací. Dostaneme je pro $k = n$.

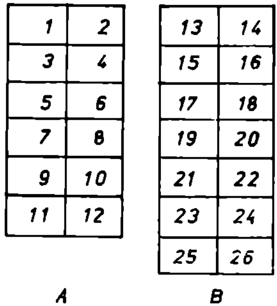
Následuje jeden příklad o variacích.

Příklad 8. Třída, v níž je 26 míst (obr. 1), má 24 žáků. Kolika způsoby je možno sestavit zasedací pořádek?

Řešení. Představme si nejdříve, že jsme jednotlivá místa ve třídě očíslovali tak, jak ukazuje obr. 1. Tato místa nechť tvoří množinu N. Dále si představme, že i žáci jsou po řadě očíslováni, takže dostanou např. označení

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{24}.$$

Vytvořit nějaký zasedací pořádek znamená přiřadit každému žáku z_i nějaký prvek množiny N čili sestrojit



Obr. 1

24-prvkovou variaci z 26 prvků. Počet všech těchto variací je

$$V_{24}(26) = 26.25.24 \ldots 5.4.3 = \frac{26!}{2!}.$$

Nyní k numerickému výpočtu. Podle tabulek je

$$26! = 403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000,$$

takže pro hledaný počet máme výsledek

$$201\,645\,730\,563\,302\,817\,792\,000\,000.$$

Příklad 8 můžeme ovšem řešit i tak, že použijeme pořadí s opakováním. Rozmyslete si postup sami.

Tuto kapitolu ukončí příklad trochu jiného druhu. Budeme se zabývat rovnicí, v níž za neznámé x, y, z, t připouštíme jen přirozená čísla. Jak snad víte, v číselné teorii se taková úloha nazývá diofantovská rovnice*). V té, kterou budeme rozebírat, se vyskytnou faktoriály.

*) Označení diofantovská rovnice nám připomíná Diofanta z Alexandrie, který žil okolo r. 275 n. l. Někdy se neznámé v diofantovské rovnici omezují též na čísla celá, jindy na celá nezáporná apod.

Příklad 9 je trochu myšlenkově náročnější, a proto doporučujeme, abyste si řešení dobře promysleli.

Příklad 9. Je dána rovnice

$$x!\,.\,y!\,.\,z! = t!\,. \tag{1}$$

Ukažte, že existuje nekonečně mnoho čtveřic přirozených čísel x, y, z, t větších než 1 takových, že vyhovují rovnici (1).

Řešení. Zvolme libovolné přirozené číslo $n > 2$*) a položme $x = n$, $y = n! - 1$, $z = (n!)! - 1$. Součin $x!\,.\,y!$ lze pak psát jako

$$n!\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(n! - 2)\,(n! - 1) = (n!)!\,.$$

Podobně pro $x!\,y!\,z!$ máme

$$[(n!)!]\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,[(n!)! - 2]\,.\,[(n!)! - 1] = [(n!)!]!\,.$$

Pro takto zvolenou trojici přirozených čísel x, y, z vychází tedy $t = (n!)!$. Protože takovou konstrukci lze provést pro libovolné přirozené číslo $n > 2$, je vidět, že rovnici (1) skutečně vyhovuje nekonečně mnoho čtveřic přirozených čísel větších než 1.

Zamysleme se ještě nad předcházejícím příkladem. V řešení jsme si ukázali, že existuje nekonečně mnoho požadovaných čtveřic, ale nezabývali jsme se otázkou, zda jsme postupem uvedeným v předcházejících řádcích vyčerpali všechna řešení rovnice (1). Je zřejmé, že jsme mohli začít třeba tak, že položíme např.

$$y = n, \quad x = n! - 1, \quad z = (n!)! - 1\,,$$

což znamená vlastně záměnu písmen x, y, z v předcháze-

---

*) Z další úvahy pochopíme, proč se zde omezujeme na případ $n > 2$. Je to proto, aby v úvaze vystupovala jen přirozená čísla větší než 1.

jící konstrukci. To je jedna možnost, ale snad existují i řešení jiného typu (podívejte se na úlohu 1, která následuje za touto kapitolou). Kdybychom hledali všechny čtveřice přirozených čísel x, y, z, t, jež vyhovují rovnici (1), byl by to určitě složitější a obtížnější úkol než to, čím se zabýval náš příklad.

Úlohy

1. Ověřte si, že platí tyto rovnosti:

a) $7!.3!.3!.2! = 9!$;
b) $7!.6! = 10!$;
c) $7!.5!.3! = 10!$;
d) $14!.5!.2! = 16!$.

2. Rozhodněte, které ze dvou čísel $500!.503!$ a $501!.502!$ je větší.

3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

a) $n!.(n+3)! > (n+1)!.(n+2)!$;
b) $n! + (n+3)! > (n+1)! + (n+2)!$.

4. Dokažte správnost těchto vzorců:*)

a) $(1!).1 + (2!).2 + (3!).3 + \ldots + (n!).n = (n+1)! - 1$;

b) $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$.

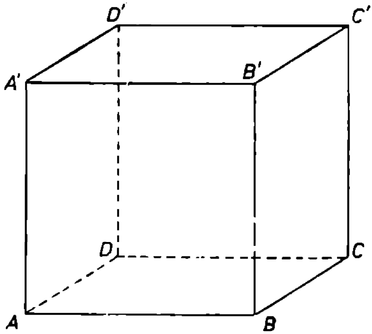
5. Mám sedm knih českých a pět slovenských. Kolika způsoby je mohu postavit do řady na poličku tak, že

*) Zde n značí přirozené číslo.

nejprve jsou zařazeny všechny knihy české a pak všechny slovenské?

6. Vrcholy konvexního n-úhelníka z příkladu 6 máme projít tak, že začneme v A_1, postupujeme po stranách nebo úhlopříčkách, každý z vrcholů $A_2, A_3, A_4, \ldots, A_n$ projdeme právě jednou a skončíme v A_1. Kolika způsoby je to možné?

7. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ (viz obr. 2). Rozhodněte, zda můžeme projít její vrcholy tak, že vyjdeme z A, jdeme po hranách krychle, každý z vrcholů B, D, A', B', C', D' projdeme právě jednou a skončíme ve vrcholu C.*)



Obr. 2

8. Je dána rovnice

$$x!.y!.z!.t! = u!.$$

---

*) V této úloze hledáme tedy pořadí osmi prvků A, B, C, D, A', B', C', D' taková, že A stojí na místě prvním, C na místě osmém a každé dva po sobě jdoucí prvky znamenají přesně to, že v obr. 2 existuje mezi příslušnými vrcholy hrana.

Ukažte, že existuje nekonečně mnoho pětic přirozených čísel x, y, z, t, u větších než 1 takových, že vyhovují dané rovnici.

9. Je dána rovnice

$$x! + y! = z!.$$

Určete všechny trojice přirozených čísel x, y, z, jež vyhovují dané rovnici.

10. Určete nejmenší přirozené číslo x, které má tuto vlastnost: Není možno najít žádné přirozené číslo n tak, že $n!$ má v desítkové soustavě právě x číslic.

2. kapitola

KOMBINAČNÍ ČÍSLO

Připomeňme si nejprve definici známou ze školy. Jsou dána přirozená čísla k, n, přičemž $k \leqq n$. Potom klademe

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,.\,(n-k)!},$$

což lze pro $k > 1$ vyjádřit též ve tvaru

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}$$

a pro $k = 1$ ve tvaru

$$\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n.$$

Číslo $\binom{n}{k}$ čteme „n nad k" a nazýváme *kombinační číslo* neboli *binomický koeficient*. Definice kombinačního čísla se rozšiřuje i pro $k = 0$ a klade se

$$\binom{n}{0} = 1$$

pro každé přirozené číslo n. Dalším rozšířením je

$$\binom{0}{0} = 1.$$

Kombinační číslo se někdy definuje i pro ta přirozená čísla k, n, pro něž platí $k > n$. Potom klademe

$$\binom{n}{k} = 0.$$

V několika příkladech si všimneme aritmetických vlastností kombinačních čísel.

Budeme zde pracovat se dvěma vzorci, které jsme si odvozovali ve škole. Jsou to vzorce

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

které platí pro libovolná celá čísla k, n, splňující vztah $0 \leqq k \leqq n$.

Příklad 10. Jsou dána kombinační čísla $\binom{500}{490}$ a $\binom{499}{9}$. Rozhodněte, které z nich je větší.

Řešení. Nejprve upravíme první kombinační číslo. Platí

$$\binom{500}{490} = \binom{500}{500-10} = \binom{500}{10} = \frac{500.499 \ldots 491}{1.2.3 \ldots 10}.$$

Pro druhé kombinační číslo máme

$$\binom{499}{9} = \frac{499.498 \ldots 491}{1.2.3 \ldots 9}.$$

Platí

$$\binom{500}{10} = \frac{500}{10} \cdot \binom{499}{9} = 50 \cdot \binom{499}{9},$$

takže číslo $\binom{500}{10}$ je padesátkrát větší než číslo $\binom{499}{9}$.

Odpověď. Číslo $\binom{500}{490}$ je větší než číslo $\binom{499}{9}$.

Příklad 11. Jsou dána přirozená čísla m, n. Dokažte, že platí

$$\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3} = \binom{m}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot m. \qquad (1)$$

Řešení. Vyjdeme z definice kombinačního čísla a budeme nejprve upravovat levou stranu vzorce (1). Abychom nemuseli pracovat se zápisy, ve kterých se vyskytují zlomky, vypočteme nejprve

$$6 \cdot \binom{m+n}{3} = (m+n)(m+n-1)(m+n-2) =$$
$$= m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 - 3m^2 - 6mn - 3n^2 +$$
$$+ 2m + 2n;$$

podobně je

$$6 \cdot \binom{m}{3} = m^3 - 3m^2 + 2m,$$

$$6 \cdot \binom{n}{3} = n^3 - 3n^2 + 2n.$$

Pro úpravu levé strany vzorce (1) vypočteme tedy

$$6 \cdot \binom{m+n}{3} - 6 \cdot \binom{m}{3} - 6 \cdot \binom{n}{3} = 3m^2n + 3mn^2 - 6mn,$$

takže levá strana rovnosti (1) je $\frac{1}{2} mn (m + n - 2)$. Na tento tvar však snadno převedeme i pravou stranu vzorce (1) a tím je jeho platnost prokázána.

Poznamenejme, že se ke vzorci (1) ještě vrátíme později. Uvidíme, že nám tento vzorec vyplyne jako snadný důsledek jedné geometrické úvahy. Nyní se však zabývejme ještě dalšími příklady o kombinačních číslech.

Příklad 12. Je dáno přirozené číslo r; položme $s = \binom{r}{2}$. Dokažte, že platí

$$\binom{s}{2} = 3 . \binom{r+1}{4}.$$

Řešení. Upravujeme kombinační číslo

$$\binom{s}{2} = \frac{1}{2} s(s-1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{r(r-1)}{2} \cdot \frac{r(r-1)-2}{2} .$$

V posledním čitateli lze psát*)

$$r(r-1) - 2 = r^2 - r - 2 = (r+1)(r-2).$$

Platí tedy

$$\binom{s}{2} = \frac{(r+1)\, r(r-1)\,(r-2)}{2.2.2} = 3 \cdot \binom{r+1}{4},$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 13. Určete přirozené číslo n tak, aby platilo

$$\binom{n}{3} + \binom{n+2}{3} + \binom{n+4}{3} = \frac{n^3}{2} + 88 .$$

Řešení. Podle definice kombinačního čísla upravíme nejprve levou stranu dané rovnice. Dostáváme

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + $$

$$+ \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6},$$

---

*) Při úpravě lze použít pomocné kvadratické rovnice $r^2 - r - 2 = 0$, která má kořeny $r = -1$, $r = 2$.

což po malé úpravě dává

$$\frac{1}{2}(n^3 + 3n^2 + 10n + 8).$$

Daná rovnice se tím převede na tvar

$$\frac{1}{2}(n^3 + 3n^2 + 10n + 8) = \frac{n^3}{2} + 88,$$

což po úpravě vede na kvadratickou rovnici

$$3n^2 + 10n - 168 = 0.$$

Snadný výpočet ukazuje, že kořeny této rovnice jsou

$$n = 6, n = -\frac{28}{3}.$$

Výsledek $n = 6$ vyhovuje zřejmě podmínkám naší úlohy, zatímco druhý kořen rovnice není číslo přirozené, a proto nemůže být ani řešením naší úlohy.

Odpověď. Hledané přirozené číslo je $n = 6$.

Další příklad souvisí s teorií čísel. Je zajímavý sám o sobě, ale zařadili jsme jej sem proto, že jej budeme ještě potřebovat v dalších úvahách jako pomocnou větu.

Příklad 14. Je dáno prvočíslo p. Dokažte, že každé z kombinačních čísel

$$\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \binom{p}{3}, \ldots, \binom{p}{p-1}$$

je dělitelné číslem p.

Řešení. Uvažujme kombinační číslo $\binom{p}{k}$, kde $1 \leqq k \leqq$ $\leqq p - 1$.

Napišme je jako zlomek

$$\frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-k+1)}{1.2.3\dots k}.$$

Ve jmenovateli se nevyskytuje činitel p, takže jmenovatel tohoto zlomku není dělitelný prvočíslem p. Čitatel je ovšem tímto prvočíslem dělitelný a z toho už plyne tvrzení, které jsme měli dokázat.

V dalším příkladě budeme potřebovat matematickou indukci.

Příklad 15. Jsou dána přirozená čísla k, n. Dokažte, že platí

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\binom{k+3}{k}+\dots+\binom{k+n}{k}=$$
$$=\binom{k+n+1}{k+1}.$$

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí podle n. V celé úvaze budeme předpokládat, že přirozené číslo k je libovolné pevně dané. Pro $n=1$ máme vztah

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}=\binom{k+2}{k+1},$$

o jehož platnosti se můžeme přesvědčit velmi snadno. Předpokládejme tedy, že pro některé přirozené číslo n náš vztah platí, a budeme dokazovat obdobný vztah pro číslo $n+1$. V tomto novém vztahu se levá strana liší od původního vzorce jen tím, že zde máme na konci ještě kombinační číslo $\binom{k+n+1}{k}$ jako poslední sčítanec.

Podle indukčního předpokladu lze tedy levou stranu vyjádřit ve tvaru

$$\binom{k+n+1}{k+1}+\binom{k+n+1}{k},$$

což podle známého vzorce dává $\binom{k+n+2}{k+1.}$. To však je stejný výsledek, jaký bychom dostali, kdybychom do pravé strany dokazovaného vzorce dosadili $n+1$ místo n. Tím je i druhý indukční krok proveden a platnost vzorce dokázána.

Ze školy si pamatujeme, že se kombinační čísla dají snadno vypočítat pomocí tzv. *Pascalova*) trojúhelníka.* Tímto názvem označujeme tabulku trojúhelníkového tvaru

$n = 0$							1							
$n = 1$						1		1						
$n = 2$					1		2		1					
$n = 3$				1		3		3		1				
$n = 4$			1		4		6		4		1			
$n = 5$		1		5		10		10		5		1		
$n = 6$	1		6		15		20		15		6		1	

. . . .

Každý řádek zde obsahuje všechna kombinační čísla pro totéž n. Podle známého vzorce dostaneme sečtením dvou sousedních kombinačních čísel některého řádku to kombinační číslo, jež stojí v dalším řádku pod mezerou mezi nimi. Pascalův trojúhelník tak může sloužit k dosti rychlému a celkem jednoduchému výpočtu kombinačních čísel.

---

*) Blaise Pascal (1623—1662) je znám nejen jako matematik, ale vynikl i ve fyzice a ve filozofii.

Příklad 16. Určete počet sudých čísel, která se vyskytují ve 13. řádku Pascalova trojúhelníka (tedy pro $n = 12$).

Řešení. Okamžitě nás napadne, že můžeme prostě vypočítat všech 13 řádek Pascalova trojúhelníka a dát pak odpověď na otázku, která byla položena v našem příkladě. To je ovšem postup dosti zdlouhavý, a mohli bychom se ostatně při počítání dopustit i numerické chyby. Zamyslíme-li se však na okamžik nad danou otázkou, vidíme, že se zde nezajímáme o velikost binomických koeficientů, nýbrž jen o to, zda jsou to čísla sudá nebo lichá. Označíme-li liché číslo l a sudé s, můžeme napsat tyto schematické rovnosti: *)

$$l + l = s; \quad l + s = s + l = l; \quad s + s = s. \qquad (2)$$

Z písmen l, s můžeme nyní sestavit „Pascalův trojúhelník“ podle stejných zásad, na jaké jsme zvyklí ze školy. Dostáváme tak schéma

$$\begin{array}{c}
l \\
l \quad l \\
l \quad s \quad l \\
l \quad l \quad l \quad l \\
l \quad s \quad s \quad s \quad l \\
l \quad l \quad s \quad s \quad l \quad l \\
l \quad s \quad l \quad s \quad l \quad s \quad l \\
l \quad l \quad l \quad l \quad l \quad l \quad l \quad l \\
l \quad s \quad s \quad s \quad s \quad s \quad s \quad s \quad l \\
l \quad l \quad s \quad s \quad s \quad s \quad s \quad s \quad l \quad l \\
l \quad s \quad l \quad s \quad s \quad s \quad s \quad s \quad l \quad s \quad l \\
l \quad l \quad l \quad l \quad s \quad s \quad s \quad s \quad l \quad l \quad l \quad l \\
l \quad s \quad s \quad s \quad l \quad s \quad s \quad s \quad l \quad s \quad s \quad s \quad l \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{array}$$

*) Zápisu $l + l = s$ rozumějte tak, že součet dvou lichých čísel je vždy sudý. Analogický význam mají i další zápisy.

Odpověď. Ve 13. řádku Pascalova trojúhelníka je právě 9 sudých čísel.

V probraném příkladě jsme tedy postupovali tak, aby vynaložená námaha byla přiměřená tomu, čeho chceme dosáhnout. To ostatně je v matematice (a zejména v matematice středoškolské) jev celkem všeobecný: Z postupů, které se nám nabízejí při řešení některé úlohy, si volíme vždycky tu cestu, která je nejschůdnější a nejjednodušší.

Pro úplnost poznamenejme k příkladu 16, že jednoduchou odpověď lze najít také tak, že použijeme vhodných matematických tabulek. Tak např. ve Valouchových „Pětimístných tabulkách logaritmických“ najdeme binomické koeficienty $\binom{n}{k}$ až do $n = 10$. Z tabulek tedy můžeme pro náš příklad vybrat přímo 11. řádek „Pascalova trojúhelníka“ ve tvaru $l, s, l, s, s, s, s, s, l, s, l$ a pokračovat pak jen v sestrojení dalších dvou řádků.

Čtenáře možná bude zajímat samo počítání s písmeny l, s, pro něž jsme definovali sčítání rovnicemi (2). Setkali jsme se tu totiž s velmi jednoduchým příkladem abstraktního pojmu, který se studuje v moderní algebře, s tzv. Abelovou grupou. Čtenáře, který by se chtěl s pojmem grupy seznámit, odkazujeme např. na knížku L. Riegera s názvem *O grupách*, která vyšla r. 1974 v edici Škola mladých matematiků jako 34. svazek. Je to vlastně upravené dílko zmíněného autora, vyšlé původně r. 1952 pod názvem *O grupách a svazech.*

Úlohy

11. Ověřte si, že platí

a) $\binom{4}{2}\binom{17}{2} = \binom{18}{3}$;

b) $\binom{4}{2}\binom{20}{2} = \binom{20}{3}$;

c) $\binom{5}{2}\binom{29}{2} = \binom{30}{3}$;

d) $2\binom{19}{6} = \binom{21}{6}$.

12. Pro každé přirozené číslo n platí

$$2\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}.$$

Dokažte.

13. Pro každé přirozené číslo n platí: kombinační číslo $\binom{2n}{n}$ je dělitelné číslem $n + 1$. Dokažte.

14. Pro každé přirozené číslo n větší než 4 platí

$$\frac{1}{2n}\,2^{2n} < \binom{2n}{n} < \frac{1}{4}\,2^{2n}.$$

Dokažte.

15. Pro která přirozená čísla n platí nerovnost

$$\binom{n}{2} + \binom{n+3}{2} + \binom{n+6}{2} < 100\,?$$

16. Jsou dána přirozená čísla m, n, jež jsou obě větší než 1. Dokažte, že platí

$$\binom{m+n}{2} \geqq \binom{m}{2} + \binom{n}{2} + 4.$$

Kdy nastane rovnost?

17. Je dáno přirozené číslo n. Uvažujte n čísel tvaru

$$1.\binom{n}{1},\quad 2.\binom{n}{2},\quad 3.\binom{n}{3},\ldots,(n-1).\binom{n}{n-1},\ n.\binom{n}{n};$$

rozhodněte, které z těchto čísel je největší.

18. Určete, kolik je v 15. řádku Pascalova trojúhelníka čísel dělitelných třemi.

19. Ověřte si, že pro každé přirozené číslo m platí

$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1},$$

a užijte této identity k tomu, abyste určili součet

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

20. Určete čísla a, b, c tak, aby pro každé přirozené číslo m platilo

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1}.$$

Potom užijte nalezené identity k tomu, abyste určili součet

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

21. Každé celé číslo c je možno nekonečně mnoha způsoby vyjádřit ve tvaru

$$c = \pm\binom{2}{2} \pm \binom{3}{2} \pm \binom{4}{2} \pm \binom{5}{2} \pm \cdots \pm \binom{m}{2} \qquad (3)$$

při vhodné volbě znamének $+$ a $-$. Přitom m je vhodné přirozené číslo větší než 1. Dokažte.

3. kapitola

KOMBINACE

Užíváme-li množinové terminologie, obešli bychom se při dobré vůli i bez názvu kombinace. Toto slovo je však v kombinatorice tradiční, a proto u něho zůstaneme, a kombinacím dokonce věnujeme celou tuto kapitolu.

Nechť jsou dána přirozená čísla k, n taková, že $k \leqq n$. Nechť N je množina mající n prvků; *k-prvková kombinace* z n prvků množiny N je podmnožina množiny N, která má právě k prvků. Definice je tedy obdobná jako u variací, ale při kombinacích ignorujeme uspořádání prvků. Čtenář se možná při studiu kombinatoriky setkal i se starším slovním obratem — *kombinace k-té třídy z n prvků.* I takové vyjádření zde proto budeme občas připouštět.

Ze školy víme, že se počet k-prvkových kombinací z n prvků rovná číslu $\binom{n}{k}$. Příklady nám zase ukáží, jak se kombinací užívá při řešení různých otázek.

Příklad 17. Kolika způsoby můžeme na čtvercové šachovnici s 64 poli vybrat tři pole tak, aby všechna neměla stejnou barvu?

Řešení. Vybíráme tři pole z celkového počtu 64 polí, čili tvoříme tříprvkové kombinace ze 64 prvků. Těch je

$\binom{64}{3}$. Šachovnice má 32 bílých a 32 černých polí. Podle našeho textu nejsou přípustné trojice složené vesměs z bílých polí — takových trojic je $\binom{32}{3}$ — ani trojice složené vesměs z černých polí — těch je rovněž $\binom{32}{3}$. Hledaný počet je tedy

$$\binom{64}{3} - 2 . \binom{32}{3} = 41\,664 - 9920 = 31\,744.$$

Můžeme však počítat též jiným způsobem. Pole vybíráme tak, že buď jedno je bílé a dvě černá, nebo jedno je černé a dvě bílá. Z toho odvodíme počet možností

$$32 . \binom{32}{2} + \binom{32}{2} . 32 = 32 . 32 . 31 = 31\,744.$$

Odpověď. Pole můžeme vybrat 31 744 způsoby.

Příklad 18. Který konvexní n-úhelník má alespoň dvakrát tolik úhlopříček co stran?

Řešení. Jak známo, dá se počet úhlopříček konvexního n-úhelníka vyjádřit číslem

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Má tedy platit nerovnost

$$\frac{n(n-3)}{2} \geqq 2n.$$

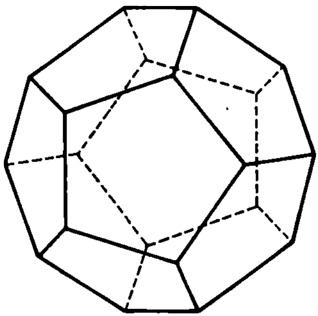
Úpravou dostáváme

$$n(n-3) \geqq 4n.$$

Protože číslo n je kladné, můžeme obě strany tímto číslem dělit a dostaneme $n - 3 \geqq 4$, čili $n \geqq 7$.

Odpověď. Hledaný n-úhelník má alespoň sedm stran.

Trochu prostorové představivosti budeme potřebovat v dalším příkladě. Setkáme se tam s jedním pravidelným tělesem, které se nazývá *pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr)*. Abychom si o tomto tělese učinili lepší představu, podívejme se na obr. 3, který zachycuje pohled na toto těleso. Stěny dodekaedru jsou pravidelné pětiúhelníky.



Obr. 3

Příklad 19. Kolik tělesových úhlopříček*) má pravidelný dvanáctistěn?

Řešení. Pravidelný dvanáctistěn má 20 vrcholů. Z nich budeme vybírat dvojice, čili tvořit dvouprvkové kombinace z 20 prvků. Těch je $\binom{20}{2} = 190$. To ovšem

*) *Tělesová úhlopříčka konvexního mnohostěnu* je úsečka spojující dva vrcholy mnohostěnu, které neleží v jedné stěně.

nejsou vesměs tělesové úhlopříčky, nýbrž jsou sem zahrnuty i hrany dvanáctistěnu a úhlopříčky ve stěnách. Dvanáctistěn má 30 hran, každá jeho stěna je pravidelný pětiúhelník, a existuje v ní tedy pět úhlopříček. Ve stěnách je tudíž celkem $12 . 5 = 60$ úhlopříček. Počet tělesových úhlopříček je tedy

$$190 - 30 - 60 = 100 .$$

Jiné řešení. Určeme, kolik tělesových úhlopříček vychází z pevně zvoleného vrcholu. Každý vrchol patří ke třem stěnám, takže z něho vycházejí tři hrany a šest stěnových úhlopříček. Zbývá tedy ještě deset vrcholů, k nimž ze zvoleného vrcholu vedou tělesové úhlopříčky. Tato úvaha platí ovšem pro každý vrchol. Vrcholů je 20. Součin $20 . 10$ znamená tedy dvojnásobně braný počet všech tělesových úhlopříček a to už vede k výsledku odvozenému v předcházejícím řešení.

Odpověď. Pravidelný dvanáctistěn má 100 tělesových úhlopříček.

Příklad 20. Vraťte se k příkladu 8 na str. 20. Ukažte, jak se změní výsledek, žádáme-li, aby ani v oddělení A, ani v oddělení B nezůstala dvě volná místa.

Řešení. Je zakázán každý případ, kdy v A jsou dvě volná místa, a také každý případ, kdy v B jsou dvě volná místa. V oddělení A, které má 12 míst, lze vybrat dvě volná místa zřejmě $\binom{12}{2}$ způsoby. Ostatní místa (je jich 24) jsou pak obsazena; žáky na ně můžeme umístit celkem $24!$ způsoby. Počet zasedacích pořádků, v nichž jsou dvě volná místa v oddělení A, je pak $\binom{12}{2} . 24!$. Podobně pro dvě volná místa v oddělení B máme $\binom{14}{2}$ možností a na zbylých místech ve třídě lze žáky zase rozesadit 24! způsoby. Číslo $\binom{14}{2}.24!$ tedy udává počet zasedacích pořádků, v nichž jsou vždy dvě volná místa v oddělení B.

Odpověď na původní otázku tedy dává číslo

$$x = \frac{26!}{2!} - \binom{12}{2}.24! - \binom{14}{2}.24!.$$

Snadno nahlédneme, že je $x = 24!.168$. Logaritmický výpočet dává*)

$$\log x \doteq 23{,}7927 + 2{,}2253 = 26{,}0180$$

a po odlogaritmování $x \doteq 1{,}043.10^{26}$.

Příklad 21. V rovině jsou dány dvě různé rovnoběžky a, b. Na přímce a je dáno m různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a na přímce b je dáno n různých bodů $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Určete počet všech trojúhelníků, jejichž všechny vrcholy leží na přímkách a, b, a to právě v bodech A_i, B_j.

Řešení. Celkem se v této úloze vyskytuje $m + n$ různých bodů, ze kterých máme tvořit trojice.

Utvoříme tedy nejprve všechny kombinace 3. třídy z $m + n$ prvků. Těchto kombinací je $\binom{m+n}{3}$. Toto číslo ovšem neznamená počet všech trojúhelníků, které nás zajímají v dané úloze. Zahrnuli jsme sem totiž také

---

*) Můžete opět použít Valouchových tabulek, kde lze najít přibližnou hodnotu čísla log 24!.

trojice bodů, které leží na přímce a, a rovněž trojice ležící na přímce b. Je tedy nutné odečíst jednak $\binom{m}{3}$, jednak $\binom{n}{3}$, takže konečný výsledek je

$$\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3}.$$

Jiné řešení. Příklad 21 lze řešit též touto úvahou. Z $m + n$ daných bodů budeme vybírat nejprve ty trojice, ve kterých dva body leží na přímce a a jeden na přímce b. Tvoříme tedy kombinace 2. třídy z m prvků — těch je $\binom{m}{2}$ — a ke každé z nich připojíme některý z bodů na přímce b. To je možno provést celkem $\binom{m}{2} \cdot n$ způsoby.

Podobně určíme počet těch trojic, kde jeden bod leží na přímce a a dva na přímce b. Tu máme $m \cdot \binom{n}{2}$ možností. Celkový počet trojúhelníků je tedy

$$\binom{m}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot m.$$

Dvě řešení, jež jsme podali u předcházejícího příkladu, nám poskytla dva výsledky, které se na první pohled od sebe liší. Z úvahy, kterou jsme provedli, vyplývá, že oba výsledky jsou si rovny, že tedy platí

$$\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3} = \binom{m}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot m.$$

Tento vzorec je nám ostatně už znám z příkladu 11, kde jsme jej dokazovali algebraickou úpravou. Nyní jsme vlastně tedy dokázali tento vzorec znova, přičemž jsme užili geometrického znázornění a vhodné kombinatorické úvahy. Čtenář nechť sám posoudí, která z obou cest pro důkaz našeho vzorce se mu jeví schůdnější.

Někdy se v matematice vyskytují též tzv. *kombinace s opakováním*; s tímto pojmem se seznámíme v dalších řádcích. I tato otázka však úzce souvisí s jedním problémem z teorie čísel. Abychom této souvislosti lépe porozuměli, vyřešíme nejprve dva příklady, které na první pohled nijak nesouvisejí s kombinacemi. Při řešení druhého z nich však hned poznáme, že se s výhodou dá použít kombinačních čísel.

Příklad 22. Je dána rovnice

$$x + y + z = 3\,.$$

Uveďte všechny uspořádané trojice celých nezáporných čísel (x, y, z), jež vyhovují naší rovnici.*)

Řešení. Úloha je celkem jednoduchá, jen si musíme dát pozor, abychom nezapomněli na žádný případ, který vyhovuje dané rovnici. Budeme proto postupovat systematicky.

Největší z hledaných čísel nemůže být větší než 3; tak nacházíme případy (3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3). Nyní vezmeme v úvahu ty trojice, ve kterých největší číslo je 2 — jedna z nich je (2, 1, 0) —, a konečně ty, v nichž největší číslo je 1 — taková je jen jediná, totiž (1, 1, 1). Výsledek můžeme zapsat do tohoto přehledu:

(3, 0, 0); (0, 3, 0); (0, 0, 3); (2, 1, 0); (2, 0, 1);
(1, 2, 0); (1, 0, 2); (0, 2, 1); (0, 1, 2); (1, 1, 1).

*) Setkáváme se tu tedy s dalším případem diofantovské rovnice.

Odpověď. Našli jsme celkem 10 trojic, jež vyhovují daným podmínkám.

V dalším příkladě se budeme zabývat ještě obecnějším případem diofantovské rovnice a budeme hledat počet řešení. Rozřešením příkladu 23 bude nalezena i odpověď na příklad 22, takže se může pokročilejšímu čtenáři zdát příklad 22 zbytečný. Zařadili jsem jej sem však přesto — nejen jako přípravu k další úvaze, ale aby si čtenář skutečně prošel všechny trojice vyhovující dané rovnici.

Příklad 23. Je dána rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n,$$

kde r, n jsou daná přirozená čísla. Určete, kolik existuje uspořádaných r-tic čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$, jež splňují danou rovnici a jsou celá nezáporná.

Řešení. Zavedeme pomocné neznámé $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_r$ tím, že položíme

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + x_1, \\ y_2 &= 2 + x_1 + x_2, \\ y_3 &= 3 + x_1 + x_2 + x_3, \\ y_4 &= 4 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r &= r + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r. \end{aligned}$$

Protože původní neznámé x_i jsou čísla nezáporná, platí o nových neznámých y_i zřejmě vztah

$$1 \leqq y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_r = n + r.$$

Triviální případ $r = 1$ můžeme nechat stranou a budeme předpokládat, že $r > 1$. Povšimněme si, že se číslo y_r rovná číslu $n + r$, takže máme odhad

$$y_{r-1} \leqq n + r - 1.$$

Pracujeme tedy s $r - 1$ přirozenými čísly y_i ($1 \leqq i \leqq r - 1$), o nichž platí

$$1 \leqq y_i \leqq n + r - 1 .$$

Ke každé r-tici celých nezáporných čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$ umíme tedy přiřadit jedinou $(r - 1)$-tici přirozených čísel $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{r-1}$, a obráceně lze ke každé takové $(r - 1)$-tici, jež splňuje podmínku

$$1 \leqq y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_{r-1} \leqq n + r - 1 ,$$

najít příslušná čísla x_i. Otázka se tedy převádí na tento úkol: Máme určit, kolika způsoby se dá vybrat $r - 1$ různých přirozených čísel z celkového počtu $n + r - 1$ daných přirozených čísel. Vidíme, že jde o $(r - 1)$-prvkové kombinace z $n + r - 1$ prvků, takže hledaný počet vyjadřuje kombinační číslo

$$\binom{n + r - 1}{r - 1} ,$$

což platí i pro triviální případ $r = 1$, který jsme nechali stranou.

Odpověď. Daná rovnice má $\binom{n + r - 1}{r - 1}$ řešení.*)

Přistupme nyní k definici kombinací s opakováním, jak jsme si to před chvílí slíbili.

n-prvkové kombinace s opakováním sestavené z daných r prvků jsou neuspořádané n-tice z r prvků. Neuspořádanou n-tici jsme definovali v předmluvě k této knížce, ale vystačíme zde i s intuitivní představou, že kombinace

*) Pro $r = 3$, $n = 3$ se toto kombinační číslo rovná číslu 10, což souhlasí s výsledkem předcházejícího příkladu.

s opakováním jsou skupiny (bez zřetele k uspořádání), které mají n členů a tvoří se z daných r prvků nějaké množiny. Každý prvek té množiny se tedy může opakovat i několikrát jako člen skupiny, a to až n-krát. Připouštíme zde též starší termín — *kombinace s opakováním n-té třídy z daných r prvků.*

O počtu kombinací s opakováním se dozvíme v dalším příkladě.

Příklad 24. Jsou dána přirozená čísla n, r. Určete počet všech n-prvkových kombinací s opakováním, které se dají sestavit z r různých prvků.

Řešení. Dané prvky označíme po řadě

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r.$$

Každou n-prvkovou kombinaci s opakováním můžeme úplně popsat tím, že uvedeme, kolikrát se v ní vyskytuje prvek a_i (pro $i = 1, 2, \ldots, r$). Označíme-li x_i násobnost prvku a_i v uvažované kombinaci, dostáváme r-tici

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r),$$

která je složena z celých nezáporných čísel; přitom platí

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n.$$

Tím jsme otázku převedli na řešení diofantovské rovnice, kterou jsme se zabývali v předcházejícím příkladě. Počet všech n-prvkových kombinací s opakováním, které můžeme sestavit z r různých prvků, je tedy

$$\binom{n + r - 1}{r - 1}.$$

Jiné řešení. Opět se budeme zabývat jen netriviálním případem $r > 1$ a ukážeme, že se k dosažení výsledku nemusí užívat diofantovské rovnice. Představme si, že každou kombinaci s opakováním zaznamenáváme v jednom řádku takto:

Nejprve uděláme tolik teček, kolik je násobnost prvku a_1, a oddělíme záznam čárkou. Pak nechť následují tečky odpovídající výskytu prvku a_2 a za nimi se opět objeví čárka atd. Kombinace s opakováním je pak v řádku zaznamenána posloupností znamének (n teček a $r - 1$ čárek). Posloupnost má tedy $n + r - 1$ členů. Ptáme-li se, kolik je kombinací s opakováním, máme rozhodnout, kolika způsoby je možno umístit $r - 1$ čárek, každou na jedno místo $(n + r - 1)$-členné posloupnosti. Počet způsobů udává kombinační číslo, které jsme našli v závěru předcházejícího řešení.

Úlohy

22. Kolika způsoby můžeme na čtvercové šachovnici s 64 poli vybrat tři pole tak, aby neležela v témže sloupci?

23. Je dán konvexní n-úhelník ($n \geqq 4$), jehož žádné tři úhlopříčky nemají společný vnitřní bod. Sestrojme všechny úhlopříčky tohoto n-úhelníka. Kolik průsečíků úhlopříček tím vznikne?

24. Je dán konvexní n-úhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, kde $n \geqq 8$. Určete počet všech konvexních čtyřúhelníků $A_iA_jA_kA_l$, jejichž všechny strany jsou úhlopříčky daného n-úhelníka.

25. Je dán pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr). Každé tři jeho různé vrcholy určují jednu rovinu. Kolik

rovin je celkem určeno, uvažujeme-li všech 20 vrcholů? Kolik z těchto rovin prochází vnitřkem dodekaedru?

26. V prostoru jsou dány dvě mimoběžky a, b. Na přímce a je dáno m různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a na přímce b je dáno n různých bodů $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Určete počet všech čtyřstěnů, jejichž všechny vrcholy leží na přímkách a, b, a to v bodech A_i, B_j.

27. Sestavte všechny kombinace s opakováním 4. třídy z prvků A, B, C.

4. kapitola

BINOMICKÁ VĚTA

Kombinační čísla se používají v tzv. *binomické větě*, jejíž znění si zde nejprve uvedeme (a která je čtenářům rovněž známa ze školy). *Binomická věta* zní:

Jsou-li a, b libovolná čísla (reálná nebo komplexní) a n přirozené číslo, platí

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \\ + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Její použití si opět procvičíme v příkladech.

Příklad 25. Pomocí binomické věty vypočtěte $(x^3 + 2y)^5$.

Řešení. Podle binomické věty platí

$$(x^3+2y)^5 = \binom{5}{0}x^{15} + \binom{5}{1}x^{12}.2y + \binom{5}{2}x^9.4y^2 + \\ + \binom{5}{3}x^6.8y^3 + \binom{5}{4}x^3.16y^4 + \binom{5}{5}.32y^5.$$

Binomické koeficienty $\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \ldots, \binom{5}{5}$ můžeme určit třeba z Pascalova trojúhelníka:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

Dostáváme tak

$$(x^3 + 2y)^5 = x^{15} + 10x^{12}y + 40x^9y^2 + 80x^6y^3 + 80x^3y^4 + \\ + 32y^5.$$

V dalším příkladě si dokážeme dva vztahy o kombinačních číslech, které jsou dosti užitečné v mnoha úvahách.

Příklad 26. Je dáno přirozené číslo n. Dokažte, že platí

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n;$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} +$

$$+ (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

Řešení. Dvakrát použijeme vzorce, který známe z binomické věty. Jestliže sem dosadíme

$$a = 1, \qquad b = 1,$$

dostaneme okamžitě vztah, který je v řádku a). Dosadíme-li

$$a = 1, \qquad b = -1,$$

jako výsledek vychází vzorec b).

Následuje příklad, v němž se také vyskytují kombinační čísla, a vzorec, který nás tu bude zajímat, trochu připomíná vztah b) z minulého příkladu. V příkladě 27 si předvedeme dvě různé metody řešení.

Příklad 27. Je dáno přirozené číslo $n > 1$. Dokažte, že platí

$$1.\binom{n}{1} - 2.\binom{n}{2} + 3.\binom{n}{3} - 4.\binom{n}{4} + \ldots + n(-1)^{n-1}\binom{n}{n} = 0.$$

Řešení. Vyjdeme ze vzorce

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \tag{1}$$

který platí pro všechny hodnoty

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Přesvědčíme se o tom snadno, když za kombinační čísla, která se ve vzorci (1) vyskytují, dosadíme podle definice. Upravíme-li nyní podle (1) levou stranu dokazovaného vztahu, můžeme z každého členu vytknout činitele n. V závorce pak zbývá výraz

$$\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1},$$

který se podle příkladu 26b) rovná nule. Tím řešení končí.

Jiné řešení. Můžeme se opřít i o jednoduché znalosti z diferenciálního počtu. Postupujeme takto:

Vyjdeme ze vzorce

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n,$$

kde n je přirozené číslo větší než 1 a x je proměnná. Derivujeme levou stranu a také stranu pravou, takže dostaneme

$$n(1+x)^{n-1} = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \ldots + n\binom{n}{n}x^{n-1}.$$

Dosadíme-li sem $x = -1$, máme hned žádaný vzorec.

Nyní si odvodíme jednu nerovnost, kterou budeme v dalším potřebovat.

Příklad 28. Pro každé přirozené číslo n a pro každé nezáporné číslo x platí $(1 + x)^n \geqq 1 + nx$. Dokažte!*)

Řešení. Nerovnost vyplývá z binomické věty

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \ldots$$

V místě, kde jsme napsali tři tečky, jsou členy**) tvaru $\binom{n}{k}x^k$, které jsou za našich předpokladů vesměs čísla nezáporná. Jestliže tedy na pravé straně tyto členy vynecháme, buď se tím tato strana zmenší, nebo se nezmění. Vždycky tedy platí

$$(1 + x)^n \geqq 1 + \binom{n}{1}x,$$

což po malé úpravě už dává žádanou nerovnost.

*) Nerovnost z tohoto příkladu se nazývá *Bernoulliho nerovnost.* Jméno nám připomíná známý švýcarský rod Bernoulliů, který velmi ovlivnil rozvoj matematiky a fyziky. V prvním díle Ilustrovaného encyklopedického slovníku (Praha 1980) se najdou tři zástupci této matematické rodiny: Daniel (1700—1782), Jakob (1654—1705) a Johann (1667—1748).
**) Pro $n = 1$ ovšem tyto členy už neexistují, ale v tom případě Bernoulliho nerovnost platí z triviálních důvodů.

Jiné řešení. Můžeme postupovat též matematickou indukcí. Než však přistoupíme k tomuto druhému řešení, připojíme ještě jednu poznámku. Obor čísel x z naší úlohy je možno totiž rozšířit a dokázat platnost Bernoulliho nerovnosti pro všechna reálná čísla $x > -1$.

Matematickou indukci začneme případem $n = 1$. Pak má nerovnost tvar

$$(1 + x)^1 \geqq 1 + x,$$

což je zřejmě správné. Předpokládejme tedy, že pro některé přirozené číslo n platí

$$(1 + x)^n \geqq 1 + nx.$$

Obě strany této nerovnosti znásobíme k l a d n ý m číslem $(1 + x)$; vychází

$$(1 + x)^{n+1} \geqq (1 + nx)(1 + x). \tag{2}$$

Na pravé straně vynásobením dostáváme

$$1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2.$$

Číslo nx^2 je nezáporné, takže po jeho vynechání se příslušný výraz buď zmenší, nebo nezmění. Z toho plyne

$$(1 + nx)(1 + x) \geqq 1 + (n + 1)x.$$

Připojíme-li toto k nerovnosti (2), dostáváme

$$(1 + x)^{n+1} \geqq 1 + (n + 1)x.$$

Tím jsme však Bernoulliho nerovnost dokázali též pro $n + 1$ a důkaz je tím podán.*)

Bernoulliho nerovnost nám umožní odvodit jeden zajímavý vztah. Tomuto odvození je věnován příklad 29.

---

*) Rozmyslete si sami, zda Bernoulliho nerovnost platí též pro $x = -1$.

Příklad 29. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqq 2.$$

Řešení. Stačí dosadit $x = \frac{1}{n}$ do Bernoulliho nerovnosti. Po zkrácení už okamžitě dostáváme žádaný vztah. Prosíme čtenáře, aby si uvědomil, že znaménko = v tomto vztahu platí právě tehdy, je-li $n = 1$.

S příkladem 29 úzce souvisí další nerovnost, která rovněž podává informaci o mocnině $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Příklad 30. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Řešení. Pro $n = 1$ dostáváme

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 < 3,$$

takže nerovnost skutečně platí. V dalším textu budeme předpokládat, že přirozené číslo n je větší než 1. Podle binomické věty máme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{n^3} +$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2.\ldots.n} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

Ve zlomcích

$$\frac{n(n-1)}{1.2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \ldots, \frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2\ldots n}$$

upravíme čitatele tím, že zde každého činitele nahradíme číslem n. Tím se každý z těchto zlomků zvětší a přejde na tvar

$$\frac{n^2}{2!}, \frac{n^3}{3!}, \ldots, \frac{n^n}{n!}.$$

Dosadíme-li tyto zvětšené hodnoty do našeho výpočtu, vidíme, že můžeme krátit, a dostáváme tak nerovnost

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}. \tag{3}$$

Zbývá odhadnout číslo

$$a = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Zde ve jmenovatelích budeme místo čísel $2!, 3!, \ldots, n!$ klást čísla $2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. Tím se zřejmě (počínaje od druhého členu) každý jmenovatel zmenší a pro číslo a tím nacházíme odhad

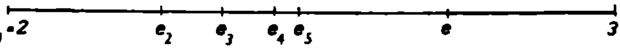
$$a < \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1.$$

Je tedy $a < 1$. Vrátíme-li se ke vzorci (3) a použijeme-li zde výsledku právě dosaženého, dostáváme tím už okamžitě nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

☛ **Zůstaňme ještě na chvíli u příkladů 29 a 30.** Zde se vyskytuje výraz

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

který má v matematické analýze dosti časté upotřebení. Dosazujeme-li totiž do e_n po řadě $n = 1, 2, 3, \ldots$, dostáváme tak posloupnost čísel, jež jsou — jak jsme právě viděli — vesměs větší než číslo 2 nebo tomuto číslu rovna a menší než číslo 3. Na obr. 4 vidíme část číselné osy



Obr. 4

a na ní jsme zobrazili část naší posloupnosti, to je čísla e_1, e_2, e_3, e_4, e_5. Dá se dokázat, že tato posloupnost je rostoucí, tj. že pro každé n platí $e_n < e_{n+1}$. Už z názoru je patrné, že se tato čísla e_n musí „hromadit" kolem určité hodnoty; toto „mezní" číslo označujeme písmenem e. Výpočet ukazuje, že je $e \doteq 2{,}71828$. Mnozí naši čtenáři jistě umějí počítat s limitami, a vědí proto, že se v takovém případě mluví o *konvergenci* posloupnosti $e_1, e_2, e_3, \ldots$ a že se píše

$$\lim_{n \to \infty} e_n = e.$$

Říkáme, že číslo e je *limitou* posloupnosti $e_1, e_2, e_3, \ldots$ *)

Nerovnosti, které jsme až dosud probrali, nám umožní odvodit některé věty o faktoriálech. Těmto odvozením jsou věnovány další příklady.

Příklad 31. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

---

*) Čtenáře ediční řady Škola mladých matematiků, kteří se zajímají o pojem limity, odkazujeme na sv. 43 s názvem *Posloupnosti a řady*. Knížku napsal J. Jarník a několik stránek je v ní věnováno také úvahám vedoucím k číslu e.

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí. Pro $n = 1$ máme

$$1! > \frac{1}{3},$$

což zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že pro některé přirozené číslo n uvažovaná nerovnost platí, a budeme dokazovat nerovnost

$$(n + 1)! > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}. \tag{4}$$

Levou stranu nerovnosti (4) lze upravovat podle indukčního předpokladu takto:

$$(n + 1)! = n!.(n + 1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n (n + 1). \tag{5}$$

Abychom dokázali vztah (4), musíme poslední výraz v řádku (5) porovnat s číslem $\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$. Ptejme se, zda může platit

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n (n + 1) \leqq \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}. \tag{6}$$

Kdyby tato nerovnost platila, pak bychom po vynásobení (kladným) číslem 3^{n+1} dostali

$$3n^n(n + 1) \leqq (n + 1)^{n+1}.$$

Dále lze krátit číslem $n + 1$, což dává

$$3n^n \leqq (n + 1)^n.$$

Dělíme-li obě strany číslem n^n, pak po snadné úpravě pravé strany vychází

$$3 \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

To však je spor s tím, co jsme dokázali v předcházejícím příkladě. Vztah (6) tedy neplatí a naopak je správná nerovnost

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n (n + 1) > \left(\frac{n + 1}{3}\right)^{n+1}.$$

Připojíme-li tuto nerovnost k řádku (5), dostáváme závěrem vztah (4), čímž je hotov druhý indukční krok. Důkaz uvedené nerovnosti je tím podán.

Příklad 32. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 6$ platí

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n. \tag{7}$$

Řešení. I zde použijeme matematické indukce, ale ta začne u čísla $n = 6$. Pro tento případ totiž dostáváme $6! < 3^6$, čili $720 < 729$, což je zřejmě správná nerovnost. Předpokládejme tedy, že nerovnost (7) platí pro některé přirozené číslo $n \geqq 6$, a budeme dokazovat obdobnou nerovnost pro číslo $n + 1$. Platí

$$(n + 1)! = n! . (n + 1) < \left(\frac{n}{2}\right)^n (n + 1). \tag{8}$$

Porovnáme nyní čísla

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n (n + 1) \quad \text{a} \quad \left(\frac{n + 1}{2}\right)^{n+1}.$$

Kdyby platilo

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n (n + 1) > \left(\frac{n + 1}{2}\right)^{n+1},$$

pak by odtud plynulo

$$2 . n^n(n + 1) > (n + 1)^{n+1},$$

čili po další malé úpravě

$$2 . n^n > (n + 1)^n.$$

Obě strany bychom dělili číslem n^n a dostali bychom

$$2 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

To však je spor s příkladem 29. Našli jsme tak vztah

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n (n + 1) \leqq \left(\frac{n + 1}{2}\right)^{n+1},$$

který připojíme k (8). Tak vychází

$$(n + 1)! < \left(\frac{n + 1}{2}\right)^{n+1}.$$

Tím jsme prokázali platnost nerovnosti také pro číslo $n + 1$ a důkaz je hotov.

Ještě několik slov k předcházejícím dvěma příkladům. Výsledky, s kterými jsme se tam seznámili, můžeme shrnout do stručného vyjádření

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n, \tag{9}$$

což platí pro všechna „dostatečně velká“ přirozená čísla n.

Z počítání s faktoriály víme, že číslo $n!$ vzrůstá, dosazujeme-li za n po řadě čísla 1, 2, 3, ... Vyjádření (9) ukazuje, že $n!$ vzrůstá „rychleji“ než $\left(\frac{n}{3}\right)^n$ a „pomaleji“

než $\left(\frac{n}{2}\right)^n$. Tak např. pro $n = 300$ máme odhad*)

$$100^{300} < 300! < 150^{300}.$$

Platí $100^{300} = 10^{600}$, což je číslo, které má (v desítkové soustavě) celkem 601 místo. Z toho je tedy patrné, že číslo 300! má také alespoň 601 místo. Z druhé strany jsme číslo 300! odhadli číslem 150^{300}. Abychom si uvědomili, kolik číslic má (v desítkové soustavě) číslo 150^{300}, budeme počítat logaritmicky. V logaritmických tabulkách najdeme, že $\log 150 \doteq 2{,}1761$. Musíme si ovšem uvědomit, že toto je neúplné číslo, které zastupuje vyjádření

$$2{,}17605 \leqq \log 150 \leqq 2{,}17615.$$

Odtud plyne

$$300 \,.\, 2{,}17605 \leqq 300 \,.\log 150 \leqq 300 \,.\, 2{,}17615,$$

čili

$$652{,}815 \leqq \log 150^{300} \leqq 652{,}845.$$

Toto vyjádření však znamená, že číslo 150^{300} má (v desítkové soustavě) právě 653 číslice. Celkem je tedy vidět z řádku (9), že číslo 300! má nejvýše 653 číslice.

Souhrnně lze tedy říci, že číslo 300! má alespoň 601 číslici a nejvýše 653 číslice. Tento odhad je ovšem jen velmi hrubý; kdybychom chtěli určit přesný počet číslic v čísle 300!, potřebovali bychom k tomu zřejmě velmi zdlouhavý numerický výpočet. V integrálním počtu se odvozuje tzv. *Stirlingův vzorec*, který dovoluje určit číslo $n!$ poměrně dosti přesně, jestliže číslo n je „dostatečně velké“. V tomto vzorci se vyskytuje číslo e, o kterém už byla řeč na stránkách této knížky. Stirlingův vzorec má tvar

---

*) Srovnej též výsledek, k němuž jsme došli v příkladě 3.

$$n! \doteq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Ukázali jsme si tedy, že binomická věta slouží k odvození některých vztahů, jež jsou dosti užitečné i při numerickém počítání. Kapitolu ukončíme jedním příkladem, který nám osvětlí užitečnost binomické věty i v teorii čísel.

Příklad 33. Nechť p je libovolné prvočíslo a n libovolné přirozené číslo. Potom rozdíl $n^p - n$ je dělitelný prvočíslem p. Dokažte.

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí podle n. Přitom ovšem budeme prvočíslo p pokládat za pevné. Pro $n = 1$ je uvedený rozdíl roven nule, takže tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení je dokázáno pro některé přirozené číslo n, a budeme je dokazovat pro číslo $n + 1$. Budeme tedy pracovat s výrazem

$$(n + 1)^p - (n + 1),$$

který upravíme podle binomické věty na tvar

$$(n^p - n) + \binom{p}{1} n^{p-1} + \binom{p}{2} n^{p-2} + \binom{p}{3} n^{p-3} + \ldots + \binom{p}{p-1} n.$$

Výraz $n^p - n$ je dělitelný prvočíslem p podle indukčního předpokladu, zatímco každý ze zbývajících členů je číslem p dělitelný podle toho, co jsme dokázali v příkladě 14. Je tedy také rozdíl

$$(n + 1)^p - (n + 1)$$

dělitelný prvočíslem p. Skončil druhý indukční krok a tím i celý důkaz.

Poučka, s níž jsme se setkali v předcházejícím příkladě, se nazývá *malá věta Fermatova*. Francouzský matematik P. de Fermat (1601—1665) byl původním povoláním vlastně právník a matematikou se začal zabývat až po své třicítce. Vynikl zvláště v číselné teorii, ale publikoval jen málo článků. Většina jeho objevů se najde v jeho korespondenci s tehdejšími významnými osobnostmi a také v poznámkách, které si psal při studiu Diofantovy učebnice algebry. Do této knihy si Fermat poznamenal i jedno tvrzení, které se dnes nazývá *velká věta Fermatova*. Tvrzení se týká rovnice

$$x^n + y^n = z^n,$$

kde n je dané přirozené číslo. Fermat se zabýval případem $n \geqq 3$ a pokoušel se dokázat, že uvedená rovnice tu není řešitelná přirozenými čísly x, y, z. Ze zápisu, který se zachoval, je vidět, že se Fermatovi nepodařilo najít žádné řešení. Domníval se dokonce, že našel důkaz pro nemožnost takového řešení. V úvaze měl však jistě nějakou chybu, neboť tento problém nebyl dodnes rozřešen, i když se velkou větou Fermatovou zabývalo mnoho vynikajících matematiků. Přitom současná matematika má k dispozici účinnější metody pro řešení číselně teoretických problémů, než měla doba Fermatova.*)

---

*) Velká věta Fermatova se dostala i do krásné literatury. Karel Matěj Čapek-Chod (1860—1927) má ve svém díle povídku Experiment zařazenou do sbírky *Ad hoc*! Děj se odehrává za první světové války a hrdinou povídky je odborný učitel, který právě v první válečný den rozřešil Fermatův problém. Těšil se na odměnu sto tisíc marek, která byla za vyřešení vypsána, ale peněz se nedočkal. Padl ve válce a řešení se ztratilo. Bylo vůbec správné? — Povídku před časem vysílal i Československý rozhlas.

Úlohy

28. Vypočtěte: a) $(1+\sqrt{3})^6$; b) $(1+i)^7$.

29. Je dáno přirozené číslo n a reálné číslo x, o němž platí $|x| \leqq 1$. Dokažte nerovnost

$$(1+x)^n + (1-x)^n \geqq 2.$$

30. S přesností na dvě desetinná místa vypočtěte

$$e_{100} = 1{,}01^{100}.$$

31. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí*)

$$n! \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

32. Podle Stirlingova vzorce vypočtěte přibližně 300!.

33. Nechť m, n jsou daná přirozená čísla. Potom existuje přirozené číslo p tak, že platí

$$(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}.$$

Dokažte.

---

*) Srovnej tuto úlohu s příkladem 32.

5. kapitola

FIBONACCIHO ČÍSLA

Na přelomu XII. a XIII. století žil v italské Pise významný matematik Leonardo Pisano, který napsal dvě učebnice matematiky. První měla název *Liber abaci* (kniha o abaku) a Leonardo v ní vykládá indický způsob počítání, zdokonalený podle al-Chvárizmího. Druhá se věnuje geometrii a obsahuje popis tehdejších geometrických vědomostí, jež autor poznal na svých cestách po severní Africe a u maurských vědců.

Leonardo byl známější pod svou přezdívkou Fibonacci (čti Fibonači), jež je zkratkou latinského *Filius Bonaccii* (tj. syn Bonacciho). Pro nás má zde z Fibonacciho díla důležitost zvláště kniha Liber abaci napsaná r. 1202, jež se dochovala ve druhém zpracování z r. 1228. Tento spis obsahuje velkou řadu úloh a jedna z nich se zvláště proslavila:

Kolik potomků má za jeden rok jeden pár králíků, jestliže každý pár přivede na svět měsíčně jeden další pár a králíci se počínají množit ve dvou měsících svého věku?

Nebudeme zde podrobně rozbírat tuto archaickou kratochvíli, ale přejdeme hned k jejímu matematickému jádru. Bude nás zajímat číselná posloupnost

$$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, \ldots, \tag{1}$$

jež je definována takto: její první dva členy se rovnají 1, čili

$$F_1 = 1, F_2 = 1, \tag{2}$$

a každý další člen F_n s indexem n větším než 2 se rovná součtu dvou předcházejících členů, čili pro každé $n > 2$ je

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \tag{3}$$

Posloupnost (1), jež je dána svými členy F_1 a F_2 a rekurentním vzorcem (3), se nazývá posloupnost *Fibonacciho*. Čísla, jež se vyskytují v řádku (1), se též nazývají *Fibonacciho čísla*.

Když použijeme prvních dvou členů, jak je udává řádek (2), a rekurentního vzorce (3), můžeme postupně počítat všechna čísla v řádku (1). Zde tedy je několik počátečních členů, jež si snadno můžeme vypočítat:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...

Promyslete si sami, jak tato čísla souvisejí s úlohou o králících, o níž byla výše řeč. Kdo na souvislost nepřijde, může se podívat do knížky [13], kterou citujeme v závěru tohoto svazku. V ní je vše vyloženo do podrobností. Také Š. Znám [14] podává vysvětlení.

Fibonacciho čísla mají řadu zajímavých vlastností a často se vyskytují i v kombinatorické matematice. Tak např. v teorii grafů zjišťujeme, že se Fibonacciho čísly dá vyjádřit počet koster některých speciálních grafů (viz o tom [11]). Š. Znám [14] říká, že Fibonacciho čísla jsou často „šedou eminencí“ v pozadí řešení praktických problémů a má pro toto tvrzení zajisté pádné argumenty. Napsalo se o nich už mnoho článků i knížek, a v zahraničí existuje dokonce speciální vědecký časopis s názvem *The Fibonacci Quartely*. Je to oficiální orgán Fibonacciho společnosti, vychází od r. 1963 a uveřejňuje články o Fibonacciho číslech i o příbuzné problematice. Založení tohoto speciálního časopisu je jistě vzácná pocta dávnému matematikovi, vždyť uznejte sami, kolik ze současných vědeckých pracovníků se dočká toho, že po nich v budoucnu pojmenují vědecké periodikum?

Jak závisí n-tý člen Fibonacciho posloupnosti na čísle n? Odpovíme si na to v příkladě, jenž následuje. Formule (4), která se tam vyskytuje, se nazývá *Binetův vzorec.*

Příklad 34. Přesvědčete se, že pro každé přirozené číslo n platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \tag{4}$$

Řešení. Postupujeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ vzorec (4) po snadné úpravě dává $F_1 = 1$ a pro $n = 2$ vychází $F_2 = 1$, což je ve shodě s řádkem (2). Předpokládejme dále, že přirozené číslo n je větší než 2 a že (4) platí pro čísla $n - 2$ a $n - 1$. Dokážeme, že vzorec platí též pro přirozené číslo n. Pro stručnost vyjadřování položme

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

a určeme součet $F_{n-1} + F_{n-2}$. Ten lze vyjádřit jako

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + \alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \beta^{n-2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right).$$

Povšimněme si, že

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}=\alpha^2,$$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}=\beta^2,$$

takže

$$F_{n-1}+F_{n-2}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)\,.$$

Výraz na pravé straně se však rovná hodnotě F_n vypočtené z dokazovaného Binetova vzorce (4). Tím jsme s důkazem hotovi.

Příklad jsme rozřešili, ale mnohý z čtenářů se nad ním možná zamyslí. Kde se vzal vzorec (4), který jsme před chvílí dokazovali? Zajisté se k němu nedá dojít pokusně, jak jsme na to zvyklí v mnoha úlohách na matematickou indukci. To opravdu ne, lze jej však odvodit, použijeme-li tzv. vytvořujících funkcí. Edice Škola mladých matematiků přinesla už jeden svazek, v němž se popisuje i toto odvození. Napsal jej F. Zítek a citujeme jej v seznamu literatury na konci této knížky. Jiný postup k odvození Binetova vzorce popisuje N. J. Vilenkin (v publikaci [12], str. 157—158). Tam se vytvořujících funkcí nepoužívá, a proto je tato cesta pro středoškolského studenta schůdnější. Zájemci se mohou v obou pramenech informovat, a my se zde tedy nebudeme naznačenou otázkou zabývat.

Po tomto malém výletu do historie a po matematických úvahách, jež jsou kombinatorice trochu vzdálené, se vrátíme opět ke kombinatorické problematice — ke kombinačním číslům a k Pascalovu trojúhelníku.

Podívejme se na Pascalův trojúhelník a zkoumejme, kolikrát se v tomto schématu vyskytuje některé pevně zvolené přirozené číslo m. Označme q_m počet míst, na nichž se v Pascalově trojúhelníku vyskytuje číslo m. Číslo 1 je možno ve schématu najít nekonečněkrát, což lze formálně vyjádřit zápisem $q_1 = \infty$. Číslo 2 je tu jednou ($q_2 = 1$), číslo 3 dvakrát ($q_3 = 2$) atd. Po vynaložení nepatrné námahy si sestavíme tuto tabulku:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
q_m	∞	1	2	2	2	3	2	2	2	4	2

Zde jsme sice zachytili jen několik hodnot q_m, avšak při sestavování tabulky si pravděpodobně každý uvědomí i jeden obecný závěr: Je vidět, že pro každé m větší než 1 je q_m vždycky konečné. Promyslete si sami, proč je tomu tak!

V Pascalově trojúhelníku můžeme při podrobnějším studiu najít opakované hodnoty binomických koeficientů i na místech, jež bychom mohli nazvat netriviální. Další řádky nám ukáží jeden případ.

Příklad 35. Přesvědčete se, že platí

$$\binom{16}{2} = \binom{10}{3}.$$

Řešení. Vypočteme

$$\binom{16}{2} = \frac{16\,.\,15}{1\,.\,2} = 120,$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10\,.\,9\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3} = 120$$

a odtud už plyne tvrzení.

D. Singmaster před časem vyšetřoval opakované hodnoty binomických koeficientů*) a objevil přitom

*) Fibonacci Quart. *13* (1975), No. 4, 295—298.

zajímavou souvislost s Fibonacciho čísly F_j. Studoval totiž rovnici

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+2}, \tag{5}$$

v níž n, k mají být přirozená čísla ($n > k$), a ukázal, že (5) má nekonečně mnoho řešení. Další příklad nás o tom bude informovat.

Příklad 36. Rovnice (5) je splněna, položíme-li

$$n = F_{2i+2}F_{2i+3} - 1\,, \quad k = F_{2i}F_{2i+3} - 1\,,$$

kde i je libovolné přirozené číslo. Dokažte.

Řešení. Rovnici (5) lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{(n+1)\,n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots(k+1)} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k)\,(n-k-1)}{1.2.3\ldots(k+1)\,(k+2)}\,,$$

čili po úpravě

$$(n+1)\,(k+2) = (n-k)\,(n-k-1)\,. \tag{6}$$

Do rovnice (6) máme dosadit za n, k Fibonacciho čísla uvedená v textu příkladu a máme se přesvědčit, že platí rovnost. Vypočteme tedy po řadě

$$\begin{aligned} n+1 &= F_{2i+2}F_{2i+3}\,, \\ k+2 &= F_{2i}F_{2i+3} + 1\,, \\ n-k &= (F_{2i+2} - F_{2i})\,F_{2i+3} = F_{2i+1}F_{2i+3}\,, \\ n-k-1 &= F_{2i+1}F_{2i+3} - 1\,. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do levé strany rovnice (6), dostáváme výraz

$$L = F_{2i+2}F_{2i+3}(F_{2i}F_{2i+3} + 1)\,.$$

Použijeme-li vztahu, jehož důkaz jsme odsunuli za tuto kapitolu do úlohy 34, máme postupně

$$\begin{aligned} L &= F_{2i+3}((F^2_{2i+1} - 1)\, F_{2i+3} + F_{2i+2}) = \\ &= F_{2i+3}(F^2_{2i+2}F_{2i+3} - F_{2i+1}) = \\ &= F_{2i+1}F_{2i+3}(F_{2i+1}F_{2i+3} - 1)\,. \end{aligned}$$

Tento poslední výraz však též dostaneme, dosadíme-li do pravé strany rovnice (6) příslušné hodnoty. Tím jsme tvrzení dokázali.

Končí pátá kapitola a následují tři úlohy o Fibonacciho číslech. Nezařadili jsme jich na tomto místě víc, i když zajímavých cvičení by se nabízela celá řada. Předpokládáme, že si všichni zájemci najdou další studijní materiál např. v knížkách [5], [12] a [13].

Úlohy

34. Pro každé přirozené číslo n platí

$$F_nF_{n+2} = F^2_{n+1} - (-1)^n\,.$$

Dokažte.

35. Ověřte si, že platí

$$F_7^2 = F_6^2 + 3F_5^2 + 2(F_4^2 + F_3^2 + F_2^2 + F_1^2)\,.$$

36. Pro každé celé nezáporné číslo k platí tyto vzorce:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k-1} + \binom{k+2}{k-2} + \ldots + \binom{2k}{0} = F_{2k+1}\,,$$

$$\binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k-1} + \binom{k+3}{k-2} + \ldots + \binom{2k+1}{0} = F_{2k+2}.$$

Dokažte.

(V prvním vzorci se sčítají všechna kombinační čísla, v jejichž zápisu součet horního a dolního čísla je $2k$, ve druhém vzorci sčítáme všechna kombinační čísla, kde zmíněný součet je $2k + 1$.)

6. kapitola

NĚKOLIK OTÁZEK Z MATEMATICKÉ STATISTIKY

Představme si, že máme vyšetřit výšku a váhu patnáctiletých chlapců v naší republice. Předmětem zkoumání je tedy soubor jedinců, který obsahuje dosti značný počet prvků. Nebylo by proto hospodárné, kdybychom k získání výsledku chtěli skutečně změřit a zvážit všechny chlapce tohoto věku. Nebylo by to možné třeba ani z toho důvodu, že by tento experiment trval příliš dlouho, a my máme předepsáno, abychom výsledný údaj získali v době co nejkratší. Jak budeme postupovat? Místo celého velmi početného základního souboru si vezmeme jen určitý výběr, tj. skupinu patnáctiletých chlapců, která není příliš početná a jež je vybrána podle určitých zásad z celého souboru zkoumaných jedinců. Výšku, resp. váhu, pak měříme jen u tohoto výběru. Zmíněné zásady spočívají zejména v tom, že žádáme, aby výběr byl náhodný a co možná nejreprezentativnější), tj. aby v určitém smyslu vzhledem ke zkoumanému znaku reprezentoval celý základní soubor.

Měli jsme tedy základní soubor, ve kterém se měl měřit některý kvantitativní znak (výška, váha), a přešli jsme k menšímu výběru. Jak se liší třeba aritmetický průměr v základním souboru od aritmetického průměru ve výběru a jaký je vztah mezi těmito čísly? Tomuto zkoumání věnujeme další úvahu. Přitom odhlédneme od konkrétního významu kvantitativního znaku a budeme pracovat prostě s čísly.

Nechť je tedy dán základní soubor, který má N prvků. Na každém z nich je naměřen kvantitativní znak x_i, takže dostáváme skupinu N čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$. Kromě toho uvažujme výběr, který má r prvků ($1 \leqq r \leqq N$). Takových výběrů existuje celkem $\binom{N}{r}$. Číslům N, resp. r, říkáme někdy též *rozsah* základního souboru, resp. výběru. Označme $\bar{x}$ aritmetický průměr v základním souboru; je tedy

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}. \tag{1}$$

Dále označme $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(s)}$ po řadě všechny aritmetické průměry ve výběrech rozsahu r; je tedy $s = \binom{N}{r}$. Jak velký je aritmetický průměr z čísel $\bar{x}^{(i)}$? Odpověď najdeme v dalším příkladě.

Příklad 37. Určete aritmetický průměr z výběrových aritmetických průměrů $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(s)}$.

Řešení. Předmětem naší úvahy je výraz

$$\frac{\bar{x}^{(1)} + \bar{x}^{(2)} + \ldots + \bar{x}^{(s)}}{s}.$$

Rozšíříme-li tento zlomek číslem r, vychází

$$\frac{r\bar{x}^{(1)} + r\bar{x}^{(2)} + \ldots + r\bar{x}^{(s)}}{rs}. \tag{2}$$

Každé z čísel $r\bar{x}^{(i)}$ si můžeme představit jako součet některých čísel x_j, přičemž sčítanců je vždy r. V čitateli zlomku (2) se tedy vyskytují všechna čísla x_j — případně vícekrát. Kolikrát je tu číslo x_1? Musíme určit, kolikrát se číslo x_1 vyskytuje ve výběrech rozsahu r ze základního souboru rozsahu N. Každý výběr obsahující prvek x_1 dostaneme tak, že k prvku x_1 přidáme libovolnou skupinu o $r - 1$ prvcích; je tedy výběrů obsahujících prvek x_1 právě tolik, kolik kombinací $(r - 1)$-ní třídy lze utvořit z $N - 1$ prvků, tj. $\binom{N-1}{r-1}$. Číslo x_1 je tedy v čitateli zlomku (2) právě $\binom{N-1}{r-1}$-krát a totéž platí ovšem i o každém z dalších čísel $x_2, x_3, \ldots, x_N$.

Čitatele zlomku (2) tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\binom{N-1}{r-1} \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_N).$$

Podle (1) má proto čitatel tvar

$$\binom{N-1}{r-1} . N . \bar{x} = \frac{(N-1)!}{(r-1)!(N-r)!} . N . \bar{x} =$$
$$= \frac{N!}{(r-1)!(N-r)!} . \bar{x}.$$

Jmenovatel zlomku (2) je

$$r . s = r . \binom{N}{r} = r . \frac{N!}{r!(N-r)!} = \frac{N!}{(r-1)!(N-r)!} .$$

Dělením tedy dostáváme podíl $\bar{x}$.

Odpověď. Aritmetický průměr ze všech výběrových aritmetických průměrů se rovná aritmetickému průměru v základním souboru.

Další důležitou charakteristikou, která se vyskytuje v matematické statistice, je tzv. *směrodatná odchylka* σ. Jsou-li dána čísla $x_1, x_2, \ldots, x_N$, pak σ je definováno vztahem

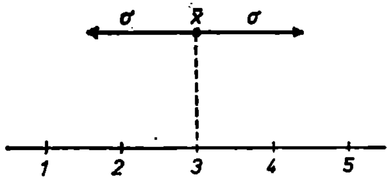
$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_N - \bar{x})^2}{N}}\,.$$

Směrodatná odchylka σ je mírou, jak se hodnoty x_i „rozptylují“ nebo „kupí“ kolem aritmetického průměru $\bar{x}$; to je vidět z toho, že σ závisí na odchylkách $x_i - \bar{x}$. Jsou-li odchylky malé, je σ malé, jsou-li odchylky velké, je σ velké.

Uvedeme si numerický příklad. Čísla 1, 2, 3, 4, 5 mají aritmetický průměr 3, takže

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}} = \sqrt{2}.$$

Bývá zvykem znázorňovat daná čísla na ose číselné a připojit tam též směrodatnou odchylku. Pro náš případ je toto znázornění vidět na obr. 5.



Obr. 5

Vraťme se ještě k výběrovým aritmetickým průměrům a studujme otázku, jak se tato čísla $\bar{x}^{(i)}$ „kupí“ kolem aritmetického průměru $\bar{x}$. Srovnáme tedy směrodatnou odchylku všech těchto výběrových aritmetických průměrů se směrodatnou odchylkou čísel x_j v základním souboru. Tomuto srovnání je věnován další příklad.

Příklad 38. Znáte-li rozsah základního souboru a rozsah výběrů (čísla N a r) a směrodatnou odchylku σ v základním souboru, vypočtěte směrodatnou odchylku všech výběrových aritmetických průměrů $\bar{x}^{(i)}$.

Řešení. Případ $r = 1$ je triviální, neboť pak je hledaná směrodatná odchylka rovna přímo číslu σ. V dalším textu tedy uvažujme jen případ $r \geqq 2$. Použijme výsledku z předcházejícího příkladu, podle něhož čísla $\bar{x}^{(i)}$ mají aritmetický průměr $\bar{x}$. Jejich směrodatnou odchylku σ vypočteme tedy podle vzorce

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{(\bar{x}^{(1)} - \bar{x})^2 + (\bar{x}^{(2)} - \bar{x})^2 + \ldots + (\bar{x}^{(s)} - \bar{x})^2}{s}}\,.$$

Budeme zatím pracovat jen se zlomkem pod odmocninou, který rozšíříme číslem r^2. Dostáváme tak zlomek

$$\frac{(r\bar{x}^{(1)} - r\bar{x})^2 + (r\bar{x}^{(2)} - r\bar{x})^2 + \ldots + (r\bar{x}^{(s)} - r\bar{x})^2}{r^2 s}\,. \qquad (3)$$

Součin $r\bar{x}^{(i)}$ si zase můžeme představit jako součet některých čísel x_j, takže rozdíl $r\bar{x}^{(i)} - r\bar{x}$ lze převést na tvar

$$(x_a - \bar{x}) + (x_b - \bar{x}) + \ldots + (x_l - \bar{x}),$$

který se týká jednoho výběru. Čitatele zlomku (3) lze tedy vyjádřit jako součet, v němž jsou jednak sčítanci tvaru $(x_a - \bar{x})^2$, jednak sčítanci tvaru $2(x_a - \bar{x})(x_b - \bar{x})$ (při $a \neq b$). Kolikrát je zde sčítanec $(x_1 - \bar{x})^2$? Stejná úvaha jako v předcházejícím příkladě nás vede k výsledku $\binom{N-1}{r-1}$. Také každý ze sčítanců

$$(x_2 - \bar{x})^2, (x_3 - \bar{x})^2, \ldots, (x_N - \bar{x})^2$$

má v čitateli zlomku (3) stejnou násobnost.

Kolikrát se v čitateli zlomku (3) vyskytuje sčítanec tvaru $2(x_1 - \bar{x})(x_2 - \bar{x})$? Jsme tu vedeni ke kombinačnímu číslu $\binom{N-2}{r-2}$, které se ovšem týká i dalších sčítanců uvedeného tvaru.

Čitatel zlomku (3) je tedy součtem dvou výrazů; první má tvar

$$A = \binom{N-1}{r-1} \cdot [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_N - \bar{x})^2]\,,$$

druhý má tvar

$$B = \binom{N-2}{r-2} \cdot [2(x_1 - \bar{x})(x_2 - \bar{x}) + \ldots + 2(x_{N-1} - \bar{x})(x_N - \bar{x})]\,.$$

Víme, že platí

$$\binom{N-1}{r-1} = \binom{N-2}{r-2} + \binom{N-2}{r-1}\,,$$

takže v součtu $A + B$ si můžeme nejprve všímat jen těch sčítanců, jež mají u sebe jako koeficient kombinační číslo $\binom{N-2}{r-2}$. Je vidět, že součet těchto sčítanců lze vyjádřit jako

$$[(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \ldots + (x_N - \bar{x})]^2,$$

což podle vzorce (1) je zřejmě rovno nule. Součet $A + B$ v čitateli zlomku (3) se tedy převádí na tvar

$$\binom{N-2}{r-1} \cdot [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_N - \bar{x})^2]\,.$$

Podle definice směrodatné odchylky lze tento výsledek vyjádřit jako

$$\binom{N-2}{r-1} \cdot N\sigma^2 = \frac{(N-2)!}{(r-1)!(N-r-1)!} \cdot N\sigma^2.$$

Upravujme ještě jmenovatele zlomku (3). Máme

$$r^2 s = r^2 \binom{N}{r} = r^2 \frac{N!}{r!(N-r)!} = r \frac{N!}{(r-1)!(N-r)!}.$$

Zlomek (3) se tedy rovná

$$\frac{N-r}{r(N-1)}\sigma^2.$$

Odpověď. Směrodatnou odchylku všech výběrových aritmetických průměrů určuje vzorec

$$\bar{\sigma} = \sigma\sqrt{\frac{N-r}{r(N-1)}}.$$

Výsledek, ke kterému jsme právě dospěli, se zdá na první pohled trochu složitý, avšak pro praktické případy jej můžeme ještě zjednodušit. Obvykle bývá totiž číslo N velmi veliké a číslo r poměrně malé. V takovém případě můžeme ještě upravovat zlomek, který se vyskytuje ve výsledném vzorci pro $\bar{\sigma}$. Platí

$$\frac{N-r}{r(N-1)} = \frac{1-\frac{r}{N}}{r-\frac{r}{N}},$$

přičemž zlomek $\frac{r}{N}$ je „poměrně malý". V praktických příkladech můžeme dokonce předpokládat, že se rovná nule; tím dostáváme přibližnou rovnost

$$\frac{N-r}{r(N-1)} \doteq \frac{1}{r}$$

a pro směrodatnou odchylku přibližný vzorec

$$\bar{\sigma} \doteq \frac{\sigma}{\sqrt{r}}.$$

Zamysleme se ještě nad tím, jaký význam má výsledek dosažený v příkladě 38. Zjistili jsme, že se výběrové aritmetické průměry „hromadí" kolem průměru $\bar{x}$ mnohem více než původně uvažovaná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Směrodatná odchylka nás poučuje o tom, jak jsou čísla na číselné ose roztroušena. Bereme-li z velkého základního souboru např. výběry rozsahu 25, pak směrodatná odchylka $\bar{\sigma}$ je zhruba pětinou směrodatné odchylky σ. Abychom si mohli lépe představit, jak se výběrové průměry hromadí kolem $\bar{x}$, vypočteme si ještě jeden numerický příklad. V něm jsme zvolili jen malá čísla, protože při větších rozsazích a větších číslech x_i velmi rychle vzrůstají technické potíže s numerickým výpočtem.

Příklad 39. V základním souboru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sestrojte všechny výběry rozsahu 3. Vypočtěte výběrové aritmetické průměry a jejich směrodatnou odchylku. Znázorněte výsledek graficky.

Řešení. Víme už (viz str. 75), že $\bar{x} = 3$, $\sigma = \sqrt{2} \doteq 1{,}41$. Další výpočet můžeme upravit do tabulky (viz str. 80).

Sečteme čísla v posledním sloupci a dostáváme výsledek $3\frac{1}{3}$. Protože je celkem 10 výběrů, dělíme

$$3\frac{1}{3} : 10 = \frac{1}{3}$$

a pak odmocníme. Je tedy

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \doteq 0{,}58.$$

výběr	$\bar{x}^{(i)}$	$\bar{x}^{(i)} - \bar{x}$	$(\bar{x}^{(i)} - \bar{x})^2$
1, 2, 3	2	-1	1
1, 2, 4	$2\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
1, 2, 5	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1, 3, 4	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1, 3, 5	3	0	0
1, 4, 5	$3\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
2, 3, 4,	3	0	0
2, 3, 5	$3\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
2, 4, 5	$3\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
3, 4, 5	4	1	1

To je ve shodě se vzorcem pro $\bar{\sigma}$, který jsme odvodili výše. Podle něho je totiž

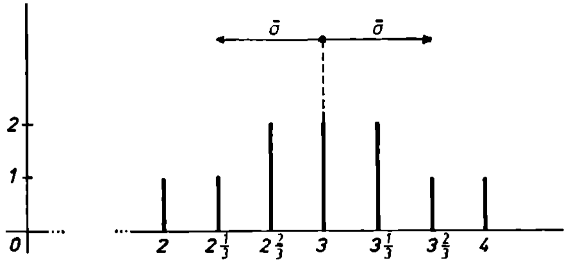
$$\bar{\sigma} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{5-3}{3.(5-1)}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \,.$$

Přibližný vzorec pro $\bar{\sigma}$ zde ovšem nemůžeme uplatnit, neboť je

$$\frac{r}{N} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \,,$$

což nelze považovat za číslo „skoro rovné“ nule.

Ještě ke grafickému znázornění. Protože se zde některé výběrové průměry $\bar{x}^{(i)}$ opakují, použijeme ke znázornění tzv. *sloupkového diagramu*. Na ose číselné u čísla $\bar{x}^{(i)}$ je připojen sloupek, jehož délka uvádí, kolikrát se toto číslo v úvaze vyskytuje. Výsledek je vidět na obr. 6, kde



Obr. 6

jsme také znázornili směrodatnou odchylku $\bar{\sigma}$. Srovnejte tento sloupkový diagram s obr. 5, který se týká základního souboru.*)

Úlohy

37. Graficky znázorněte přibližný vzorec

$$\bar{\sigma} \doteq \frac{\sigma}{\sqrt{r}};$$

přitom volte $\sigma = 10$, na vodorovnou osu nanášejte r a na svislou $\bar{\sigma}$.

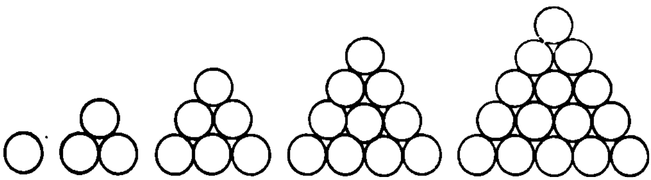
---

*) Příklady, které jsme zde řešili, patří do oddílu matematické statistiky, nazývaného *teorie výběrových šetření* (z konečných souborů).

7. kapitola

TROJÚHELNÍKOVÁ ČÍSLA

Mezi kombinačními čísly byla studována zejména čísla tvaru $\binom{n}{2}$, která se při $n \geqq 2$ nazývají *čísly trojúhelníkovými.* Název je odvozen z toho, že číslo $\binom{n}{2}$ udává (zhruba řečeno) počet shodných kružnic, jež lze umístit v trojúhelníkovém schématu tak, jak to pro $n = 2, 3, 4, 5, 6$ ukazuje obr. 7. Pojem trojúhelníkového čísla se



Obr. 7

vyskytuje už r. 1762 u E. de Joncourta, ale teprve v posledních desetiletích studovali vlastnosti trojúhelníkových čísel zevrubněji někteří matematikové, a to zvláště autoři polští (A. Mąkowski, A. Schinzel, W. Sierpiński*), K. Zarankiewicz aj.). Ukážeme si zde též něco z této problematiky.

*) W. Sierpiński (1882—1969) byl profesorem varšavské univerzity a viceprezidentem Polské akademie věd. Pracoval

Nejprve uvedeme tabulku trojúhelníkových čísel pro několik hodnot n.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\binom{n}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78

Také obrázek nám přehledně ukáže, jak vzrůstají trojúhelníková čísla, vzrůstá-li číslo n. Je to vidět na obr. 8, kde prvním sedmi hodnotám z naší tabulky odpovídá 7 bodů označených malými kroužky. Vzpomeneme-li na to, co jsme se učili v nauce o funkcích, můžeme v obr. 8 sestrojit i graf funkce

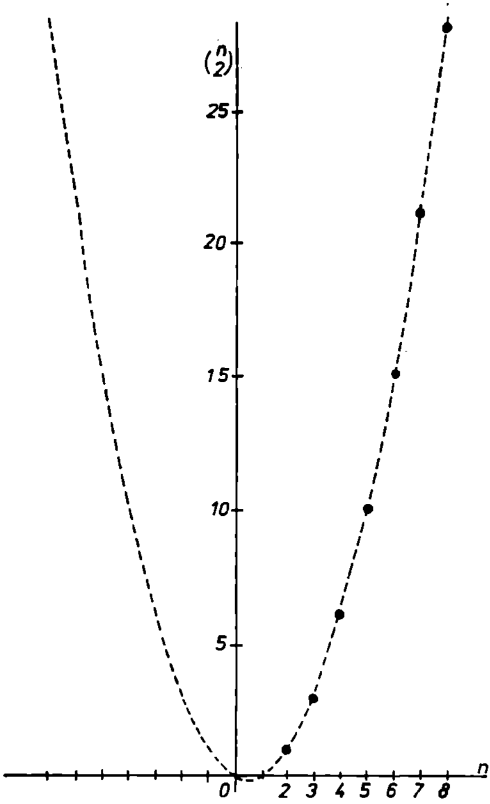
$$y = \frac{1}{2}x(x-1);$$

grafem této funkce je parabola, jejíž část tu naznačuje čárkovaná čára. Nyní však už přistoupíme k příkladům.

Příklad 40. Čísla 6, 66 a 666 jsou trojúhelníková, avšak číslo 6666 není trojúhelníkové. Dokažte.

---

v teorii čísel, v teorii množin, v topologii, v teorii reálných funkcí a v matematické analýze. Napsal 724 vědeckých prací, 50 knih a brožur a nepřeberné množství dalších článků odborných a příležitostných. Byl také spoluzakladatelem polského časopisu *Fundamenta mathematicae* věnovaného hlavně teorii množin. Za života se mu dostalo mnoho vědeckých a veřejných poct, mj. i od československých institucí. Od roku 1923 byl čestným členem Jednoty čs. matematiků a fyziků, v roce 1930 se stal zahraničním členem Královské české společnosti nauk, roku 1948 mu udělila Karlova univerzita čestný doktorát a od roku 1960 byl zahraničním členem Československé akademie věd. Pocty udělované W. Sierpińskému neustávají ani po jeho smrti. Posmrtně byl po něm nazván jeden z měsíčních kráterů.



Obr. 8

Řešení. Že čísla 6 a 66 jsou trojúhelníková, je nám už známo, neboť je $\binom{4}{2} = 6$ a $\binom{12}{2} = 66$. Zabývejme se tedy číslem 666 a ptejme se, zda pro některé přirozené číslo

n platí $\binom{n}{2} = 666$. Tento vztah vede k rovnici

$$n(n - 1) = 1332,$$

což po malé úpravě dává $n^2 - n - 1332 = 0$. Tato kvadratická rovnice má kořeny $n = 37$ a $n = -36$, z nichž druhý nevyhovuje požadavkům úlohy.

Kořen $n = 37$ vyhovuje naší úloze.

Konečně zbývá úvaha o čísle 6666. Zde docházíme ke kvadratické rovnici

$$n^2 - n - 13\,332 = 0,$$

která má diskriminant

$$D = 53\,329.$$

Z tabulek nebo na kalkulačce se můžeme přesvědčit, že pro žádné celé kladné číslo r neplatí

$$r^2 = 53\,329.$$

Znamená to, že uvažovaná kvadratická rovnice má oba kořeny iracionální. Číslo 6666 není proto trojúhelníkové.

Ve dvou poznámkách se ještě vrátíme k probranému příkladu. Předně si uvědomíme, jak důležitý je matematický důkaz nějakého tvrzení. Když se ukázalo, že čísla 6, 66 a 666 jsou trojúhelníková, mohli bychom se ukvapit domněnkou, že v desítkové soustavě každé číslo psané výhradně šestkami je trojúhelníkové. To je ovšem nesprávné, jak ukázalo hned číslo 6666.

Druhá poznámka je skoro historická. Roku 1905 vyšetřoval E. B. Escott trojúhelníková čísla, která se v desítkové soustavě skládají vždycky z jedné několikrát opakované číslice. Prošel všechna trojúhelníková čísla s méně než třiceti číslicemi a zjistil, že tu vyhovuje jen pět čísel, totiž

$$1, 3, 6, 66, 666.$$

V nedávné době D. W. Ballew a R. C. Weger*) dokončili důkaz věty, kterou si už asi sami domyšlíte. Ukázali, že kromě zmíněných pěti trojúhelníkových čísel neexistuje už vůbec žádné, jež by vyhovovalo vyslovené podmínce.

Příští příklad, v němž sledujeme trojúhelníková čísla psaná číslicemi 2 a 1, se rozuzlí jinak než příklad o číslech psaných šestkami.

Příklad 41. V posloupnosti

$$21, 2211, 222\,111, 22\,221\,111, \ldots$$

je každý člen číslo trojúhelníkové. Dokažte.

Řešení. Čísla v naší posloupnosti jsou psána číslicemi 2 a 1, přičemž v každém členu se nejprve napíše několikrát číslice 2 a pak se doplní ve stejném počtu číslice 1. Člen n-tý můžeme tedy schematicky vyjádřit ve tvaru

$$a_n = \underbrace{222\ldots2}_{n\text{-krát}}\ \underbrace{111\ldots1}_{n\text{-krát}},$$

což v jiném tvaru dává

$$a_n = (2.10^{2n-1} + 2.10^{2n-2} + \ldots + 2.10^{n+1} + \\ + 2.10^n) + (10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1).$$

Z mnohočlenu v první závorce vytkneme 2.10^n a v takto získaném výrazu provedeme další úpravu, jež vede k výsledku

---

*) *Journal of Recreational Mathematics 8* (1975—76), str. 96 až 98.

$$a_n = (2 \cdot 10^n + 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1).$$

Podle známého vzorce pro částečný součet geometrické posloupnosti dostáváme další úpravu

$$a_n = \frac{1}{9}(2 \cdot 10^n + 1)(10^n - 1).$$

Nyní jsme člen a_n vyjádřili ve tvaru, který nám umožní vyšetřovat, zda je toto číslo trojúhelníkové. Ptejme se, zda se a_n dá vyjádřit ve tvaru $\binom{x}{2}$. To vede k rovnici

$$\frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{9}(2 \cdot 10^n + 1)(10^n - 1),$$

která po odstranění zlomků a malé úpravě dává

$$9x^2 - 9x - 2 \cdot (2 \cdot 10^n + 1)(10^n - 1) = 0.$$

Její diskriminant je

$$D = 9^2 + 8 \cdot 9 \cdot (2 \cdot 10^n + 1)(10^n - 1),$$

což po úpravě dává

$$D = 9(16 \cdot 10^{2n} - 8 \cdot 10^n + 1) = 3^2 \cdot (4 \cdot 10^n - 1)^2.$$

Pro kořeny kvadratické rovnice tedy nacházíme

$$x = \frac{1}{3}(2 \cdot 10^n + 1), \quad \text{resp.} \quad x = \frac{2}{3}(1 - 10^n).$$

Druhý kořen můžeme hned zamítnout, neboť pro každé přirozené číslo n je to číslo záporné. Pohlédneme-li na kořen první, mohlo by se zdát, že ani ten nebude vyhovovat naší úloze, neboť je tu jmenovatel 3. Číslo $2 \cdot 10^n + 1$ je však podle známého znaku dělitelnosti dělitelné třemi (pro každé přirozené číslo n), a proto první kořen je číslo přirozené. Je to výsledek, který vyhovuje naší úloze, a je tím dokázáno, že v uvedené posloupnosti jsou všechny členy čísla trojúhelníková.

V dalším příkladu bude dáno přirozené číslo, které budeme vyjadřovat jako součet několika čísel trojúhelníkových. Tato otázka má vždycky smysl, neboť číslo 1 je trojúhelníkové, a lze tedy libovolné přirozené číslo n triviálním způsobem vyjádřit jako součet n trojúhelníkových čísel. Nás ovšem budou zajímat vyjádření, jež nejsou zcela triviální.

Příklad 42. Vyjádřete číslo 80 jako součet co nejmenšího počtu trojúhelníkových čísel.

Řešení. S trochou početní námahy (a s využitím tabulky na str. 83) najdeme, že platí $80 = 10 + 15 + 55$, přičemž všechny tři sčítance jsou čísla trojúhelníková. Dané číslo lze tedy vyjádřit jako součet tří trojúhelníkových čísel. Je možno najít vyjádření s menším počtem sčítanců? Několik pokusů nám ukáže, že 80 nelze vyjádřit jako součet dvou trojúhelníkových čísel. Nemůžeme se ovšem spokojit jen s nezdarem nahodilých pokusů, a proto toto tvrzení dokážeme. Důkaz spočívá jen v systematickém probrání všech možností.

Dejme tomu, že platí $80 = a + b$, kde a, b jsou vhodná trojúhelníková čísla. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $a \leqq b$. Pak máme odhad

$$a + a \leqq a + b = 80,$$

čili $2a \leqq 80$. Pro a tedy vychází $a \leqq 40$. Nyní vyhledáme tabulku na str. 83 a zjistíme, že pro a přicházejí v úvahu hodnoty*) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 a 36. Pro druhé trojúhelníkové číslo b máme vztah $b = 80 - a$, což pro nalezených osm hodnot dává po řadě výsledky 79, 77, 74, 70, 65, 59, 52 a 44. Žádné z těchto čísel však není trojúhelníkové, jak nám ukáže opět naše tabulka. Nebyl tedy správný náš předpoklad, že číslo 80 lze vyjádřit jako součet dvou trojúhelníkových čísel.

Tím jsme však s řešením už hotovi; číslo 80 není trojúhelníkové, nelze je vyjádřit jako součet dvou trojúhelníkových čísel a vztah $80 = 10 + 15 + 55$ ukazuje, že je lze vyjádřit jako součet tří trojúhelníkových čísel. To je tedy skutečně vyjádření s nejmenším počtem sčítanců.

V předcházejícím příkladě jsme nezkoumali otázku, zda vyjádření čísla 80 součtem tří trojúhelníkových čísel je jednoznačné (nehledíme-li na pořadí sčítanců), nebo zda existuje více takových vyjádření. Tomu se věnujeme v další úvaze.

Příklad 43. Vyšetřete, kolika způsoby je možno vyjádřit číslo 80 jako součet tří trojúhelníkových čísel.

Řešení. Pišme $80 = a + b + c$, kde a, b, c značí vhodná trojúhelníková čísla. Jejich označení je v naší moci, takže můžeme mezi nimi předpokládat vztah $a \leqq b \leqq c$. Odtud plyne $3a \leqq 80$, čili

$$a \leqq 26\frac{2}{3}.$$

Podle tabulky uvedené na str. 83 přicházejí pro trojúhel-

*) Zde se trochu opíráme o názor. Není snad předem jasné, zda pro některá velká čísla n, jež v naší tabulce nejsou uvedena, neplatí znovu $\binom{n}{2} \leqq 40$. Tato možnost je však vyloučena a můžeme to i dokázat. Tvrzení je jistě známé čtenářům, kteří znají průběh paraboly z obr. 8, nebo je můžeme odvodit snadnou úvahou o nerovnostech.

níkové číslo a tyto možnosti: 1, 3, 6, 10, 15 a 21. Probereme každou z nich zvlášť.

Pro $a = 1$ se naše původní rovnice převede na tvar $79 = b + c$. Protože je $b \leqq c$, plyne odtud $2b \leqq 79$, čili $b \leqq 39{,}5$. Pro b tedy přicházejí v úvahu možnosti 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 a 36, jimž odpovídají tato čísla c: 78, 76, 73, 69, 64, 58, 51 a 43. Jedině číslo 78 je trojúhelníkové, a našli jsme tedy jedno z možných vyjádření, totiž $80 = 1 + 1 + 78$.

Pro $a = 3$ dostáváme rovnici $77 = b + c$, což vede k nerovnosti $2b \leqq 77$ a dále k odhadu $3 \leqq b \leqq 38{,}5$. Pro b máme tedy možnosti 3, 6, 10, 15, 21, 28 a 36, jimž odpovídají čísla $c = 74$, 71, 67, 62, 56, 49 a 41. Žádné z těchto čísel c není trojúhelníkové, takže jsme v tomto případě nenašli žádné vyjádření čísla 80.

Pro $a = 6$ dostáváme rovnici $74 = b + c$, což dává $2b \leqq 74$, čili $6 \leqq b \leqq 37$. Trojúhelníkovým číslům $b = 6$, 10, 15, 21, 28 a 36 odpovídají čísla $c = 68$, 64, 59, 53, 46 a 38. Ani zde nevyšlo žádné číslo trojúhelníkové.

Pro $a = 10$ máme $70 = b + c$, čili $2b \leqq 70$, a dále $10 \leqq b \leqq 35$. Číslům $b = 10$, 15, 21 a 28 odpovídají $c = 60$, 55, 49 a 42, z nichž jen číslo 55 je trojúhelníkové. Tím jsme našli vyjádření $80 = 10 + 15 + 55$, které je nám známo už z předcházejícího příkladu.

Pro $a = 15$ vychází rovnice $65 = b + c$, což vede k nerovnosti $2b \leqq 65$ a dále $15 \leqq b \leqq 32{,}5$. Číslům $b = 15$, 21 a 28 odpovídají $c = 50$, 44 a 37, z nichž žádné není trojúhelníkové.

Konečně pro $a = 21$ máme $59 = b + c$, čili $2b \leqq 59$, což dává odhad $21 \leqq b \leqq 29{,}5$. Číslům $b = 21$ a 28 odpovídají $c = 38$ a 31, takže ani zde nevychází žádné vyjádření čísla 80.

Odpověď. Nehledíme-li na pořadí sčítanců, lze číslo 80 vyjádřit dvěma způsoby, totiž $80 = 1 + 1 + 78$ a $80 = 10 + 15 + 55$. Kdybychom přihlíželi k pořadí sčítanců, měli bychom celkem devět možností.

V dalším příkladě se budeme zabývat vzorcem

$$a_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}}\,.$$

Snadný výpočet ukazuje, že $a_1 = 1$. Také pro $n = 2$ a $n = 3$ máme jednoduché výsledky:

$$a_2 = \frac{9 + 12\sqrt{2} + 8 - (9 - 12\sqrt{2} + 8)}{4\sqrt{2}} = 6,$$

$$a_3 = \frac{(27 + 54\sqrt{2} + 72 + 16\sqrt{2}) - (27 - 54\sqrt{2} + 72 - 16\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} = $$

$$= 35.$$

Už tyto tři případy ukazují, že čísla a_n jsou přirozená (ačkoliv jejich vyjádření zlomkem a odmocninou je dosti složité). Toto podezření je celkem správné a plyne z binomické věty; v příkladě 44 si o číslech a_n dokážeme ještě více.

Příklad 44. Pro každé přirozené číslo n je číslo a_n^2 trojúhelníkové. Dokažte.

Řešení. Budeme se zabývat rovnicí

$$\binom{x}{2} = a_n^2,$$

která přejde na tvar

$$x^2 - x - 2a_n^2 = 0.$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je číslo $D = 1 + 8a_n^2$. Budeme se nyní zabývat úpravou čísla D; zřejmě chceme ukázat, že číslo D je druhou mocninou některého přirozeného čísla. Platí

$$D = 1 + 8 \cdot \frac{(3+2\sqrt{2})^{2n} - 2(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^{2n}}{32}.$$

Zkrátíme osmi, uvedeme na společného jmenovatele a dostáváme

$$D = \frac{4 + (3+2\sqrt{2})^{2n} - 2(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^{2n}}{4}.$$

Místo čísla 4 můžeme do čitatele psát součin

$$4(3 + 2\sqrt{2})^n (3 - 2\sqrt{2})^n,$$

jak nás přesvědčí výpočet.

V čitateli zlomku máme už výraz

$$-2(3 + 2\sqrt{2})^n (3 - 2\sqrt{2})^n,$$

takže po sloučení dostáváme

$$D = \frac{(3+2\sqrt{2})^{2n} + 2(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^{2n}}{4}.$$

Čitatele můžeme upravovat podle vzorce $u^2 + 2uv + v^2 = (u + v)^2$, přičemž $u = (3 + 2\sqrt{2})^n$, $v = (3 - 2\sqrt{2})^n$. Vychází

$$D = \left(\frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2} \right)^2.$$

Vraťme se k výchozí kvadratické rovnici. Její kořeny jsou

$$x = \frac{1 + \sqrt{D}}{2}, \quad \text{resp.} \quad x = \frac{1 - \sqrt{D}}{2}.$$

Druhou možnost hned zamítneme, neboť vede k zápornému číslu. Úpravou prvního vzorce dostáváme

$$x = \frac{2 + (3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{4}.$$

Tento výsledek se dá ještě zjednodušit, použijeme-li vyjádření

$$3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2,\ 3 - 2\sqrt{2} = (-1 + \sqrt{2})^2.$$

Číslo 2 lze napsat jako $2(1 + \sqrt{2})(-1 + \sqrt{2})$ nebo též $2(1 + \sqrt{2})^n(-1 + \sqrt{2})^n$. Pro číslo x tedy vychází vyjádření

$$x = \frac{(1+\sqrt{2})^{2n} + 2(1+\sqrt{2})^n(-1+\sqrt{2})^n + (-1+\sqrt{2})^{2n}}{4}$$

čili

$$x = \left(\frac{(1+\sqrt{2})^n + (-1+\sqrt{2})^n}{2}\right)^2.$$

Musíme se ještě přesvědčit o tom, že toto číslo x je přirozené. K tomuto vyšetřování nám poslouží binomická věta, podle níž platí

$$(1 + \sqrt{2})^n = \binom{n}{0}.1^n + \binom{n}{1}.1^{n-1}.\sqrt{2} + \binom{n}{2}.1^{n-2}.2 + \ldots + \binom{n}{n}.(\sqrt{2})^n,$$

$$(-1 + \sqrt{2})^n = \binom{n}{0}.(-1)^n + \binom{n}{1}(-1)^{n-1}.\sqrt{2} + \binom{n}{2}(-1)^{n-2}.2 + \ldots + \binom{n}{n}.(\sqrt{2})^n.$$

Je-li n číslo sudé, pak sečtením obou výrazů na pravých stranách se zruší všechny členy tvaru $m\sqrt{2}$ (m celé), a součet je tedy celé číslo. Dokonce vidíme, že je to číslo sudé, takže po dělení dvěma vyjde rovněž číslo celé.

Umocníme-li ještě na druhou, vychází číslo x, jež je tedy přirozené.

Je-li n číslo liché, pak naopak zůstávají všechny sčítance tvaru $m\sqrt{2}$ a ostatní členy se zruší. Můžeme vytknout číslo $\sqrt{2}$ a koeficient, který tak dostáváme, je sudý. Dělíme dvěma a dostáváme zase číslo tvaru $m\sqrt{2}$. Zbývá umocnit na druhou a výsledek $2m^2$ je opět číslo přirozené. Rozbor ukázal, že x je vždycky přirozené číslo. Ponecháváme čtenáři, aby si rozmyslel, že je $x > 1$ pro každé přirozené číslo n. Příklad je tím rozřešen.

Co plyne z probraného příkladu? Protože čísel a_n je nekonečně mnoho*), můžeme vyslovit toto tvrzení: *Existuje nekonečně mnoho trojúhelníkových čísel, z nichž každé je rovno druhé mocnině některého přirozeného čísla.*

Úlohy

38. Rozhodněte, zda v posloupnosti 55, 5050, 500 500, 50 005 000, ... jsou všechny členy čísla trojúhelníková.

39. Vyjádřete číslo 60 jako součin dvou trojúhelníkových čísel.

40. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených

---

*) Otázce, že různým číslům n odpovídají různá čísla a_n, je věnována též úloha 42 na následující stránce.

čísel, která nemůžeme vyjádřit jako součin několika čísel trojúhelníkových.

41. Najděte příklad přirozeného čísla, které můžeme alespoň dvěma různými způsoby vyjádřit jako součin několika čísel trojúhelníkových větších než 1.

42. Jsou dána dvě přirozená čísla $m < n$. Potom platí $a_m < a_n$ (viz vzorec na str. 91). Dokažte.

43. Rozhodněte, zda rovnice

$$\binom{x}{2} + \binom{y}{2} = \binom{z}{2}$$

má konečně nebo nekonečně mnoho řešení v přirozených číslech x, y, z.

8. kapitola

RŮZNÉ

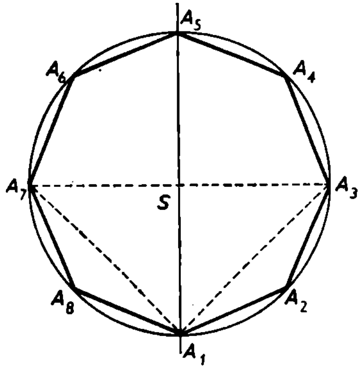
V závěru této knížky uvedeme několik příkladů s kombinatorickým námětem. Budou to otázky, kde zase nevystačíme jen s mechanickým použitím hotového vzorce, nýbrž bude třeba provést určitou matematickou úvahu. Náš první příklad je z planimetrie.

Příklad 45. V rovině je dán pravidelný n-úhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ (kde n je sudé). Z n vrcholů A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_n vyberte tři tak, aby tvořily vrcholy rovnoramenného trojúhelníka. Kolika způsoby je to možné?

Řešení. Odpovězme nejprve na otázku, kolik zde existuje rovnoramenných trojúhelníků s hlavním vrcholem v bodě A_1. Označme S střed kružnice opsané danému n-úhelníku a sestrojme přímku A_1S*). Z geometrie víme, že tato přímka prochází ještě jedním vrcholem našeho n-úhelníka (vrcholem, jehož index je $\frac{n}{2} + 1$). Přímka A_1S rozděluje rovinu na dvě poloroviny; zvolme si z nich tu, která obsahuje uvnitř bod A_2. Uvnitř této

---

*) Na obr. 9 jsme znázornili speciální případ $n = 8$. Čárkovaně je tam též narýsován jeden z rovnoramenných trojúhelníků, o nichž jedná příklad 45; je to trojúhelník $A_1A_3A_7$. Ještě připomeňme, že u rovnostranného trojúhelníka pokládáme každý jeho vrchol za hlavní.



Obr. 9

poloroviny leží $\frac{1}{2}(n - 2)$ vrcholů našeho n-úhelníka a číslo $\frac{1}{2}(n - 2)$ znamená zřejmě i počet rovnoramenných trojúhelníků s hlavním vrcholem A_1. Mezi těmito trojúhelníky může ovšem existovat i trojúhelník rovnostranný, neboť i tento trojúhelník zahrnujeme pod pojem trojúhelníka rovnoramenného. Kdy může vzniknout rovnostranný trojúhelník? Zřejmě je to možné právě tehdy, je-li číslo n dělitelné třemi. Budeme tedy rozlišovat dva případy.

Je-li n dělitelné třemi, pak počet rovnoramenných trojúhelníků, jež nejsou rovnostranné a mají hlavní vrchol A_1, je

$$\frac{1}{2}(n - 2) - 1 = \frac{1}{2}(n - 4).$$

Stejný počet ovšem dostáváme, volíme-li za hlavní vrchol kterýkoli z dalších bodů $A_2, A_3, \ldots, A_n$. Součin

$$n \cdot \frac{1}{2}(n-4)$$

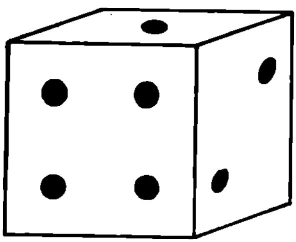
udává tedy počet všech rovnoramenných trojúhelníků, jež nejsou rovnostranné. Počet rovnostranných trojúhelníků však určíme snadno — je totiž roven číslu $\frac{n}{3}$. Je-li n dělitelné třemi, máme tedy celkový výsledek

$$\frac{n}{2}(n-4) + \frac{n}{3} = \frac{n}{6}(3n-10).$$

Zbývá ještě případ, kdy n není dělitelné třemi. Pak nelze sestrojit žádný rovnostranný trojúhelník, a číslo $\frac{n}{2}(n-2)$ znamená tedy hledaný počet rovnoramenných trojúhelníků.

Odpověď. Je-li n dělitelné třemi, pak hledaný počet rovnoramenných trojúhelníků je $\frac{n}{6}(3n-10)$; není-li n dělitelné třemi, je hledaný počet $\frac{n}{2}(n-2)$.

Jistě znáte kostku, kterou se hrají různé společenské hry (viz obr. 10). Každá stěna kostky je označena



Obr. 10

některým z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tím, že je na ní uveden příslušný počet bodů (ok). V některých kombinatorických úlohách, jež vedou k počtu pravděpodobnosti, se vyskytují též otázky spojené s jednou nebo několika takovými hracími kostkami.

Uvedeme nejprve jednu velmi jednoduchou variantu takového příkladu.

Příklad 46. Máme dvě hrací kostky — červenou a modrou. Kolika způsoby můžeme při hodu těmito kostkami dosáhnout součtu 6?

Řešení. Součet 6 se může vyskytnout např. tak, že na červené kostce padne 1 a na modré 5. Uvědomte si, že tento případ musíme odlišovat od případu, kdy na červené máme 5 a na modré 1.

Celkem nám dá odpověď tato tabulka:

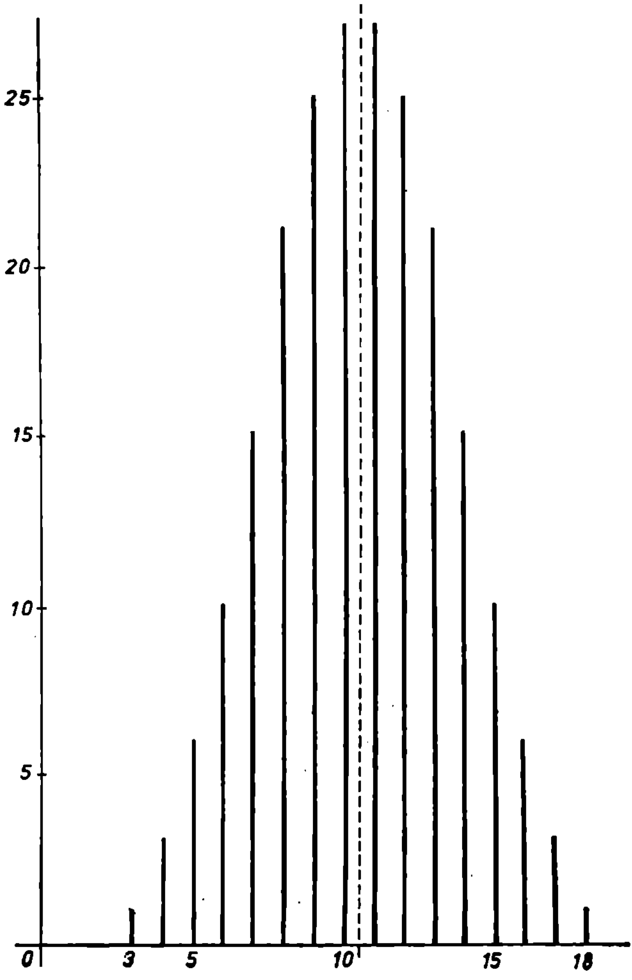
červená	1	2	3	4	5
modrá	5	4	3	2	1

Součet 6 může padnout pěti způsoby.

Po přípravné úvaze z předcházejícího příkladu se nyní obrátíme k otázce složitější.

Příklad 47. Máme tři hrací kostky — červenou, modrou a bílou. Při hodu těmito kostkami mohou padnout součty 3, 4, 5, . . ., 17, 18. Vyšetřete, kolika způsoby lze každý z těchto součtů uskutečnit.

Řešení. Barva kostek nás zase upozorňuje na to, že je třeba dbát na pořadí, ve kterém uvažovaný součet padl.



Obr. 11

Součet 3 můžeme uskutečnit jediným způsobem — na každé kostce padne 1. Součet 4 lze uskutečnit třemi způsoby — číslo 2 padne na jedné kostce a na ostatních dvou jsou jedničky. Postupujeme-li tímto způsobem dále, dostáváme počet možností pro každý z uvažovaných součtů.

Přehledně je výsledek takového vyšetřování patrný z této tabulky:

součet	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
počet způsobů	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Bývá zvykem, že se taková tabulka znázorní i graficky. Na obr. 11 vidíme sloupkový diagram, který odpovídá naší úloze o třech hracích kostkách. Všimněte si, že je tento diagram „souměrný" podle svislé přímky, kterou jsme v obr. 11 narýsovali čárkovaně.

Našli jsme tedy odpověď na otázku o třech hracích kostkách. Zůstaňme však ještě u této problematiky a ukažme si jiný způsob, kterým můžeme celý výpočet zformalizovat a tím si jej podstatně usnadnit. Uvažujme pomocný šestičlen

$$A = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

a vytvořme mocninu A^3. To je mnohočlen v proměnné x a má tvar

$$A^3 = s_3x^3 + s_4x^4 + s_5x^5 + \ldots + s_{17}x^{17} + s_{18}x^{18}.$$

Jakou úlohu zde mají koeficienty $s_3, s_4, s_5, \ldots, s_{17}, s_{18}$? Odpovězme příkladem. Napíšeme-li A^3 jako součin $A \,.\, A \,.\, A$, pak např. koeficient s_6 dostaneme takto: Mocninu x^6 lze vytvořit tak, že v prvním činiteli A vybereme vhodný člen x^a, v druhém A člen x^b a ve třetím A člen x^c

tak, že $a + b + c = 6$. Číslo s_6 tedy určuje počet všech způsobů, jimiž tento výběr můžeme provést. Představíme-li si nyní, že první činitel A odpovídá kostce červené, druhý modré a třetí bílé, plyne odtud okamžitě, že s_6 značí počet způsobů, jimiž na našich třech kostkách lze vytvořit součet 6.

Nyní k technickému použití právě popsané skutečnosti. Abychom určili všechna čísla s_i, zabývejme se čistě aritmetickou úlohou — totiž umocňováním našeho šestičlenu na třetí. Platí

$$
\begin{aligned}
A^3 &= [(x + x^2 + x^3) + x^3(x + x^2 + x^3)]^3 = \\
&= (x + x^2 + x^3)^3 (1 + x^3)^3 = \\
&= [x^3 + 3x^2(x^2 + x^3) + 3x(x^2 + x^3)^2 + (x^2 + \\
&+ x^3)^3] (1 + x^3)^3 = \\
&= (x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 3x^5 + \\
&+ 6x^6 + 3x^7 + x^6 + 3x^7 + 3x^8 + x^9) (1 + x^3)^3 = \\
&= (x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 6x^7 + 3x^8 + x^9) (1 + \\
&+ 3x^3 + 3x^6 + x^9) = \\
&= x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 15x^7 + 21x^8 + \\
&+ 25x^9 + 27x^{10} + 27x^{11} + 25x^{12} + 21x^{13} + \\
&+ 15x^{14} + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + x^{18}.
\end{aligned}
$$

Je vidět, že koeficienty získaného mnohočlenu jsou skutečně čísla, která jsou nám už známa z předcházejícího řešení úlohy o třech hracích kostkách.

Do kombinatorické analýzy bývají často zahrnovány i poučky o tzv. latinských čtvercích. Je to problematika, která svým původem vlastně patří do matematiky rekreační a vyšlo o ní už mnoho článků a knih. Škola mladých matematiků zařadila před časem do svého edičního programu také jeden svazek o latinských čtvercích, který napsal J. Bosák (viz citaci v závěru). Bosákova publikace informuje i o tzv. řecko-latinských a o roomských čtvercích. Zde se tedy omezíme jen na několik letmých poznámek.

Latinský čtverec je čtvercové schéma tvaru šachovnice s n^2 poli, přičemž v každém poli je napsáno jedno z přirozených čísel 1, 2, 3, ..., n. Přitom se požaduje, aby se v žádném řádku ani v žádném sloupci nevyskytovalo číslo více než jedenkrát. Vzpomeneme-li na pojem pořadí, kterým jsme se zabývali na počátku této knížky, můžeme říci, že se v jednotlivých řádcích latinského čtverce vyskytují některá z pořadí čísel 1, 2, 3, ..., n.

Pro $n = 5$ zde uvádíme tento příklad latinského čtverce:

1	2	3	4	5
2	1	4	5	3
3	4	5	1	2
4	5	2	3	1
5	3	1	2	4

Latinské čtverce v dnešní době hrají velmi důležitou roli v matematické statistice, v tzv. plánování čili uspořádávání pokusů. Představme si např., že na pokusném poli, jež má 5 × 5 dílců podobně jako v našem schématu latinského čtverce, chceme pěstovat 5 odrůd určité plodiny (nebo při určité plodině vyzkoušet 5 druhů hnojení apod.), abychom zjistili jejich výnosnost. Odrůdy prostě označme čísly 1, 2, 3, 4, 5. Každou odrůdu máme vyzkoušet na stejném počtu dílců, tj. v našem případě na

5 dílcích. Kdybychom nyní třeba všechny dílce s odrůdou 1 umístili v levém horním rohu schématu a dostali třeba podstatně vyšší nebo nižší výnos, nevěděli bychom potom, zdali tento výsledek byl skutečně způsoben kvalitou odrůdy nebo pouze tím, že v této oblasti pokusného pole půda má odlišnou kvalitu nebo odlišnou vlhkost apod. Abychom tedy pokud možno vyloučili vliv nestejnorodosti půdy, musíme dílce s každou odrůdou „rozptýlit" po celém poli. To právě lze učinit schématem latinského čtverce tak, že odrůdu 1 umístíme na dílcích označených číslem 1 v latinském čtverci atd.

Jedním latinským čtvercem se budeme ještě zabývat v dalším příkladě.

Příklad 48. Je dáno čtvercové schéma se 16 poli:

		3	
4			
	1		
			2

Zde jsou čtyři pole obsazena čísly, ostatní jsou volná. Napište do volných okének čísla 1, 2, 3, 4 tak, aby vznikl latinský čtverec.

Řešení. Všimněme si levého horního pole v daném schématu. Zde nemůže stát číslo 3 (neboť tím už je první řádek obsazen) ani číslo 4 (tím je obsazen první sloupec). Přicházejí tedy v úvahu čísla 1 a 2.

Napišme sem tedy číslo 1. Na konci prvního řádku přichází tedy v úvahu jen číslo 4 a tím dostává první řádek tvar 1, 2, 3, 4. Podobně první sloupec končí nutně číslem 3, a má tedy (ve směru shora dolů) tvar 1, 4, 2, 3. Dále si všimneme třeba sloupce posledního, kde nám zatím chybí dva údaje; zřejmě tento sloupec musí mít tvar 4, 1, 3, 2. Podobně lze postupovat ještě v dalších případech; dostáváme tak posléze tento latinský čtverec:

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Zbývá ještě probrat případ, kdy v levém horním rohu našeho schématu je číslo 2. Pak snadno najdeme třeba pro první řádek jedinou možnost 2, 4, 3, 1 a pro první sloupec rovněž 2, 4, 3, 1. I další konstrukce jsou zde jednoznačné a vedou k tomuto latinskému čtverci:

2	4	3	1
4	2	1	3
3	1	2	4
1	3	4	2

Je vidět, že daným podmínkám odpovídají dva latinské čtverce.

Úlohy

44. V rovině je dán pravidelný n-úhelník $A_1A_2A_3 \dots A_n$ (kde n je liché). Z n vrcholů $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ vyberte tři tak, aby tvořily vrcholy rovnoramenného trojúhelníka. Kolika způsoby je to možné?

45. Kolika způsoby lze hodit čtyřmi kostkami součet 12?

46. Dva hráči spolu hrají tuto hru: Daný počet zápalek je rozdělen do dvou hromádek. Hráč smí při jednom tahu vzít buď z jedné hromádky libovolný (kladný) počet zápalek, nebo z obou hromádek tentýž (kladný) počet zápalek. V tazích se hráči pravidelně střídají. Vyhrává ten, který svým tahem dobírá poslední zápalky, jež jsou ještě ve hře. Popište, jak si má hráč počínat, aby si vynutil vítězství.

47. Je dána množina

$$\mathsf{M} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Ukažte, že její prvky je možno seřadit do konečné posloupnosti tak, že současně platí:

I. Každý prvek množiny M se vyskytuje v posloupnosti právě dvakrát.

II. Mezi prvním a druhým výskytem prvku x je právě x dalších členů posloupnosti (pro každé $x \in \mathsf{M}$).

48. Nahraďte podmínku II. z předcházející úlohy podmínkou II.' a řešte úlohu, která tak vznikne.

II.' Mezi prvním a druhým výskytem prvku x je právě $x - 1$ dalších členů posloupnosti (pro každé $x \in \mathsf{M}$).

49. Nechť N je množina všech přirozených čísel. Ukažte, že její prvky je možno seřadit do nekonečné posloupnosti tak, že současně platí:

I. Každý prvek množiny N se vyskytuje v posloupnosti právě dvakrát.

II. Mezi prvním a druhým výskytem prvku x je právě x dalších členů posloupnosti (pro každé $x \in$ N).

VÝSLEDKY ÚLOH

1. a) Levou stranu postupně upravíme takto:

$$7!.1.2.3.1.2.3.1.2 = 7!.8.9 = 9!.$$

Podobně ověříme i další rovnosti.

2. První z čísel je větší.

3. a) Kdyby pro některé n platilo

$$n!.(n + 3)! \leqq (n + 1)!.(n + 2)!,$$

pak by po zkrácení vyšlo

$$n + 3 \leqq n + 1,$$

což je spor.

b) Kdyby pro některé n bylo

$$n! + (n + 3)! \leqq (n + 1)! + (n + 2)!,$$

pak bychom po zkrácení a malé úpravě měli tento spor:

$$n^3 + 5n^2 + 7n + 4 \leqq 0.$$

4. Oba vzorce se dokazují matematickou indukcí.

5. Počet možností je $7!.5!$.

6. Je to možné $(n - 1)!$ způsoby.

7. Nemůžeme, jak vyplývá z této úvahy:

Každému vrcholu krychle se dá přiřadit jedno z čísel 1 a 2 tak, že koncové body každé hrany jsou vždycky označeny různými čísly. Dá se to zařídit např. tak, že body

$$A, B, C, D, A', B', C', D'$$

dostanou po řadě čísla

$$1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1.$$

Kdyby bylo možné projít po krychli podle požadovaných podmínek, čísla 1 a 2 by se přitom pravidelně střídala. Protože krychle má sudý počet vrcholů, vrcholy A a C by musely mít různá čísla (spor).

8. Pro přirozené číslo n větší než 2 položíme

$$x = n, y = n! - 1, z = (n!)! - 1,$$
$$t = [(n!)!]! - 1.$$

Potom vychází

$$u = [(n!)!]!.$$

9. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je $x \leqq y$. Pak zřejmě $z > y$. Kdyby bylo $x < y$, dělíme obě strany dané rovnice číslem $x!$ a po malé úpravě máme

$$1 = \frac{z!}{x!} - \frac{y!}{x!}.$$

Číslo $x + 1$ dělí pravou stranu (proč?), ale nedělí stranu levou (spor).

V případě $x = y$ docházíme k rovnici

$$2 = \frac{z!}{x!}$$

čili

$$2 = z(z - 1) \dots (x + 1).$$

Odtud plyne, že

$$z = x + 1 = 2,$$

a nacházíme tak jediné řešení

$$x = 1, y = 1, z = 2.$$

10. Nejmenší je $x = 12$, jak se můžeme přesvědčit z tabulek faktoriálů.

11. Výpočet přenecháváme čtenáři.

12. Levou stranu vyjádříme ve tvaru

$$2\,\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}$$

a zlomek rozšíříme číslem n. Tím dostáváme kombinační číslo na pravé straně dokazovaného vztahu (vyjádřené pomocí faktoriálů).

13. Tvrzení dokážeme, přesvědčíme-li se, že číslo

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

je celé. To však je pravda, neboť c_n se dá vyjádřit jako rozdíl dvou kombinačních čísel, totiž

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1},$$

jak se přesvědčíme po malé úpravě.

Poznámka. Čísla c_n se jmenují *Catalanova* (podle matematika žijícího v 19. století). Dá se dokázat, že c_n (pro $n = 1, 2, 3, \ldots$) vyjadřuje počet rozkladů konvexního $(n + 2)$-úhelníku na trojúhelníky. Přitom jeden rozklad mnohoúhelníka dostaneme, sestrojíme-li v něm $n - 1$ úhlopříček, z nichž žádné dvě se neprotínají.

14. Dolní odhad kombinačního čísla dokážeme takto: Součin kombinačního čísla a čísla $2n$ se dá psát jako

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{n-1}\cdot\frac{2n-1}{n-1}\cdot\frac{2n}{n}\cdot\frac{2n}{n},$$

což je zřejmě větší než 2^{2n}.

Horní odhad se dokáže matematickou indukcí. Pro $n = 5$ máme

$$\binom{2n}{n} = 252 < 256 = \frac{1}{4}\cdot 2^{10}.$$

Ve druhém indukčním kroku použijeme vztahu

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n)!\,.(2n+1)(2n+2)}{(n!)^2(n+1)(n+1)} < 4\cdot\binom{2n}{n}.$$

15. Nerovnost můžeme upravit na tvar

$$3n^2 + 15n - 164 < 0,$$

čemuž vyhovují přirozená čísla $n \leqq 5$.

16. Ekvivalentními úpravami se nerovnost převede na tvar $mn \geqq 4$. Z toho je rovněž patrné, že rovnost nastane právě pro $m = n = 2$.

17. Vyjdeme ze vztahu

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k},$$

z něhož plyne

$$k\,.\binom{n}{k} = (k-1)\,.\binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k-1}.$$

Nyní vyšetříme, kdy je zlomek $\dfrac{n-k+1}{k-1}$ větší než 1, kdy se rovná číslu 1 a kdy je menší než toto číslo. Je-li n liché, pak z uvažovaných čísel dostaneme největší pro $k = \frac{n+1}{2}$. Je-li n sudé, pak největší dostaneme pro $k = \frac{n}{2}$ a $k = \frac{n+2}{2}$.

18. Tři.

19. Identitu si ověříme tím, že za kombinační čísla dosadíme podle definice. Abychom určili součet druhých mocnin, dosadíme za jednotlivé sčítance podle dokázané identity a pak dvakrát užijeme upraveného vzorce z příkladu 15 (pro $k = 1$ a pro $k = 2$). Součet druhých mocnin vychází

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

20. Za m dosadíme do daného vztahu po řadě čísla 1, 2 a 3, čímž dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 1 &= c, \\ 8 &= b + 2c, \\ 27 &= a + 3b + 3c, \end{aligned}$$

která má řešení

$$a = 6, b = 6, c = 1.$$

Za kombinační čísla dosadíme podle jejich definice a ověříme si, že vztah

$$m^3 = 6\binom{m}{3} + 6\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

skutečně platí pro všechna přirozená čísla m, a pak postupujeme jako v předcházející úloze (užíváme vzorce z příkladu 15). Pro součet třetích mocnin vychází po úpravě

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

21. Je zřejmé, že se můžeme omezit jen na celá nezáporná čísla c. Nejprve dokážeme matematickou indukcí toto pomocné tvrzení:

Každé celé nezáporné číslo c lze vyjádřit aspoň jedním způsobem ve tvaru (3) uvedeném v textu úlohy.

Pro $c = 0$ a $c = 1$ je to zřejmé, neboť

$$0 = -\binom{2}{2} - \binom{3}{2} - \binom{4}{2} + \binom{5}{2},$$

$$1 = \binom{2}{2}.$$

Předpokládejme, že pomocné tvrzení platí pro všechna celá nezáporná čísla až do čísla $c_0 \geqq 1$. Číslo $c_0 + 1$ vyjádříme v žádaném tvaru, vyjádříme-li nejprve číslo $c_0 - 1$ podle dokazovaného vzorce (3) a pak si všimneme, že platí

$$\binom{m+1}{2} - \binom{m+2}{2} - \binom{m+3}{2} + \binom{m+4}{2} = 2$$

pro každé přirozené číslo m. Stačí tedy k vyjádření čísla $c_0 - 1$ připojit další čtyři členy, čímž se součet zvětší o 2. Dostáváme tak vyjádření čísla $c_0 + 1$. Pomocné tvrzení jsme tím dokázali.

Máme-li už jedno vyjádření čísla c ve tvaru (3), pak stačí součet na pravé straně „prodloužit“ tím, že připojíme osm dalších členů

$$\binom{m+1}{2} - \binom{m+2}{2} - \binom{m+3}{2} + \binom{m+4}{2} - \binom{m+5}{2} + \\ + \binom{m+6}{2} + \binom{m+7}{2} - \binom{m+8}{2},$$

jejichž součet je 0. Tím dostaneme další přípustné vyjádření, a je tedy vidět, že každé celé číslo c lze ve tvaru (3) napsat nekonečně mnoha způsoby.

22. Počet všech možných způsobů je

$$\binom{64}{3} - 8\binom{8}{3}.$$

23. Vznikne $\binom{n}{4}$ průsečíků.

24. Počet všech zkoumaných čtyřúhelníků s pevně zvoleným vrcholem A_i (a zbývajícími vrcholy proměnnými) je

$$s(A_i) = \binom{n-5}{3}.$$

Tři proměnné vrcholy vybíráme totiž z množiny o $n - 3$ prvcích. To je celkem

$$\binom{n-3}{3}$$

možností. Z těchto případů musíme ovšem vyloučit ty, v nichž dva proměnné vrcholy jsou koncové pro tutéž hranu mnohoúhelníka a zbývající proměnný vrchol je vybrán z $n - 5$ vrcholů, jež ještě přicházejí v úvahu. Odečteme-li číslo

$$\binom{n-4}{1}\binom{n-5}{1},$$

nedostaneme ještě $s(A_i)$, neboť některé případy jsme při odčítání započetli dvakrát. Musíme proto ještě přičíst počet způsobů, jimiž se trojice proměnných vrcholů dá vybrat tak, že jeden vrchol sousedí v mnohoúhelníku s oběma zbývajícími. Přičítáme tudíž číslo

$$\binom{n-5}{1}.$$

Celkem tedy máme

$$s(A_i) = \binom{n-3}{3} - \binom{n-4}{1} \cdot \binom{n-5}{1} + \binom{n-5}{1},$$

což po malé úpravě vede ke kombinačnímu číslu výše uvedenému.

Dále je to už snadné. Sečteme-li

$$s(A_1) + s(A_2) + \ldots + s(A_n),$$

započítáváme každý čtyřúhelník čtyřikrát. Hledaný počet čtyřúhelníků je proto

$$\frac{n}{4}\binom{n-5}{3} = \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{24}.$$

25. Rovin je celkem $\binom{20}{3}$, z toho

$$\binom{20}{3} - 12$$

prochází vnitřkem.

26. Čtyřstěnů je celkem

$$\binom{m}{2}\binom{n}{2}.$$

27. Podle příkladu 24, v němž klademe $n = 4$, $r = 3$, jich má být

$$\binom{4+3-1}{3-1} = 15;$$

zde jsou:

$(A, A, A, A), (A, A, A, B), (A, A, A, C),$
$(A, A, B, B), (A, A, B, C), (A, A, C, C),$
$(A, B, B, B), (A, B, B, C), (A, B, C, C),$
$(A, C, C, C), (B, B, B, B), (B, B, B, C),$
$(B, B, C, C), (B, C, C, C), (C, C, C, C).$

Každou kombinaci s opakováním jsme tu reprezentovali jednou uspořádanou čtveřicí a písmena ve čtveřici jsme uspořádali podle abecedy.

28. a) $208 + 120\sqrt{3}$; b) $8 - 8i$.

29. Dvakrát použijte Bernoulliho nerovnost.

30. Lze počítat např. logaritmicky. Se čtyřmístnými tabulkami nemůžeme dosáhnout žádané přesnosti, proto použijeme tabulek pětimístných. Podle nich najdeme $0{,}43150 < \log e_{100} < 0{,}43250$, a proto $2{,}700 < e_{100} < 2{,}708$. Máme tedy zaručena dvě desetinná místa — totiž 2,70. Poznamenejme, že úlohu lze řešit též pomocí binomické věty.

31. Důkaz matematickou indukcí.

32. Čtyřmístné logaritmické tabulky a Stirlingův vzorec dávají $\log 300! \doteq 614{,}48$. Z toho lze soudit, že číslo $300!$ má v desítkové soustavě 615 míst.

33. Představme si, že výraz na levé straně vyjádříme podle binomické věty. Je-li n číslo sudé, platí

$$(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = A + B\sqrt{m(m-1)},$$

kde A, B jsou vhodná přirozená čísla. Podle binomické věty za uvedených předpokladů také platí

$$(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n = A - B\sqrt{m(m-1)}.$$

Vynásobíme-li spolu oba výrazy na levých stranách těchto dvou rovnic a naložíme-li podobně i s pravými stranami, máme

$$1 = A^2 - m(m - 1)\,B^2.$$

Nyní stačí položit $p = A^2$, takže

$$B\sqrt{m(m-1)} = \sqrt{p-1}.$$

Dosadíme-li do prvního vztahu, v němž se čísla A, B vyskytují, dostaneme už žádané vyjádření.

Je-li n liché, pak podle binomické věty máme

$$(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\,)^n = C\sqrt{m} + D\sqrt{m-1},$$

kde C, D jsou opět vhodná přirozená čísla. Podobným obratem jako při sudém n odvodíme

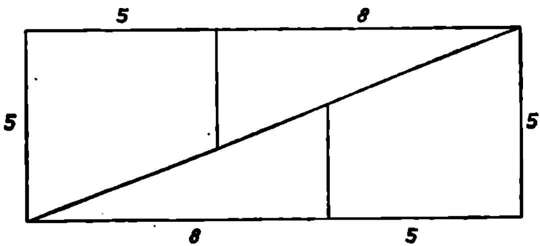
$$1 = mC^2 - (m - 1)\,D^2.$$

Požadovaný výsledek dostaneme, položíme-li $p = mC^2$.

34. Vztah dokážeme matematickou indukcí.

Poznámka. Zmíněné rovnosti se dá využít i v jedné hříčce, jak ukážeme na případu $n = 5$. Pro tuto hodnotu zní dokazovaný vztah

$$F_5F_7 = F_6^2 + 1,$$

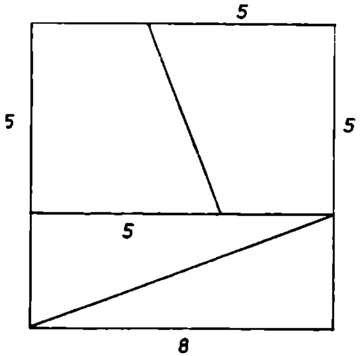


Obr. 12a

čili

$$5 . 13 = 8^2 + 1 .$$

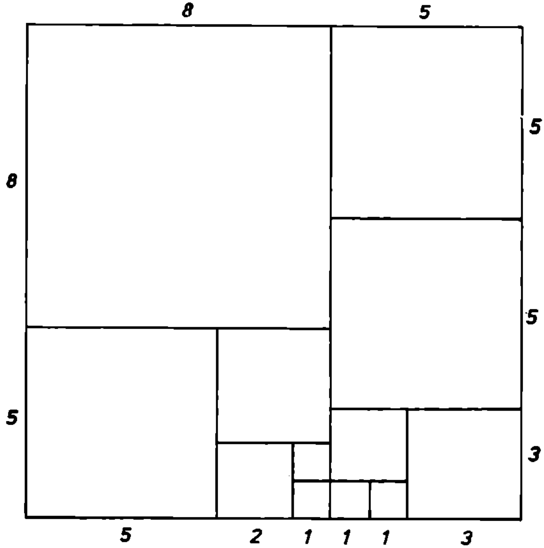
Na obr. 12a vidíme obdélník o stranách velikosti 5 a 13, který rozstřihneme podle jedné úhlopříčky a dvou dalších úseček, jak je v obrázku znázorněno. Přemístíme-li čtyři takto vzniklé části obdélníka, dají se zdánlivě složit ve čtverec o straně velikosti 8, jak to ukazuje obr. 12b. Sami si jistě vysvětlíte, v čem nás názor klame a kam se ztratila jedna jednotka obsahu.



Obr. 12b

Tuto hříčku, jež v rozličných obměnách koluje různými časopisy, vymyslil prý kdysi anglický matematik Charles Lutwidge Dodgson (1832—1898), který psal i beletrii a proslul zvláště svou nematematickou knížkou *Alenka v říši divů* (uveřejnil ji pod pseudonymem Lewis Carroll). Snad tomuto údaji o původu hříčky můžeme věřit, zaznamenal jej před lety matematikův synovec Stuart Dodgson Collingwood.

35. Správnost ověříme numerickým výpočtem a můžeme ji sledovat i v tomto grafickém znázornění. Na obr. 13 vidíme rozklad čtverce o straně velikosti 13 na menší čtverce. Velikost strany každého z nich je také vyjádřena některým Fibonacciho číslem. Obsah velkého čtverce se rovná součtu obsahů jednotlivých menších čtverců.



Obr. 13

Poznámka. Dá se dokázat i toto obecnější tvrzení:

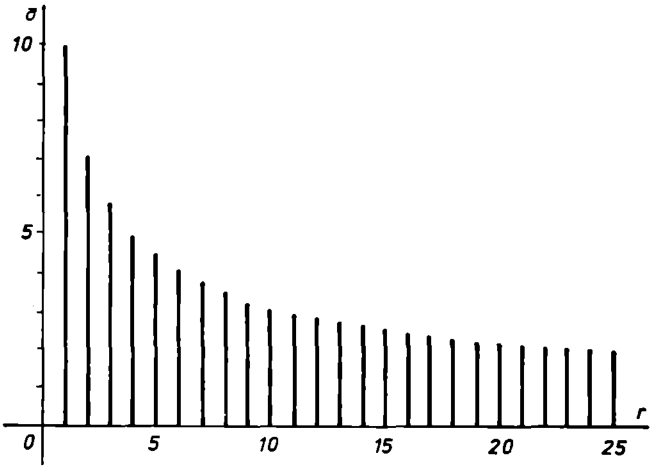
Je-li n libovolné přirozené číslo větší než 2, potom platí

$$F_{n+1}^2 = F_n^2 + 3F_{n-1}^2 + 2(F_{n-2}^2 + F_{n-3}^2 + \\ + \dots + F_1^2).$$

Dokažte sami.

36. Matematickou indukcí podle k, přičemž oba vzorce dokazujeme současně.

37. Odpověď je na obr. 14.



Obr. 14

38. Všechny členy jsou čísla trojúhelníková.

39. Nacházíme vyjádření $60 = 6 . 10$.

40. Vyhovují např. všechna prvočísla větší než 3.

41. Číslo 630 má dvě taková vyjádření, neboť

$$630 = 3 . 10 . 21 = 6 . 105 .$$

42. Z nerovnosti

$$3 + 2\sqrt{2} > 1$$

plyne

$$(3 + 2\sqrt{2})^m < (3 + 2\sqrt{2})^n$$

a z odhadu

$$0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1$$

máme

$$(3 - 2\sqrt{2})^m > (3 - 2\sqrt{2})^n.$$

Odtud už snadno vychází $a_m < a_n$.

43. Rovnice má nekonečně mnoho řešení, jak plyne např. ze vztahu

$$\binom{3k+1}{2} + \binom{4k+2}{2} = \binom{5k+2}{2},$$

který platí pro libovolné přirozené číslo k.

44. Je-li n dělitelné třemi, je hledaný počet $\frac{n}{6}(3n - 7)$,

v každém jiném případě máme $\frac{n}{2}(n - 1)$ možností.

45. Celkem 125 způsoby.

46. Vítězství si může vynutit ten, kdo upraví počet zápalek na obou hromádkách na tvar uvedený v některé z těchto dvojic:

(1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), (8, 13), (9, 15), (11, 18), (12, 20), (14, 23), ...

Přitom první člen v i-té dvojici ($i \geqq 2$) je nejmenší přirozené číslo a_i, které se nevyskytuje v žádné předcházející dvojici. Druhý člen b_i je dán vztahem

$$b_i = a_i + i.$$

Poznámka. Tuto hru popsal r. 1907 W. A. Wythoff.*)

47. Vyhovují posloupnosti

(2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4), (4, 1, 3, 1, 2, 4, 3, 2).

(Všimněte si, že druhou posloupnost získáme z první, čteme-li ji „pozpátku".)

48. Vyhovují posloupnosti

(1, 1, 3, 4, 2, 3, 2, 4), (1, 1, 4, 2, 3, 2, 4, 3),
(2, 3, 2, 4, 3, 1, 1, 4)

a ovšem také další tři posloupnosti, které získáme, čteme-li každou z těch právě uvedených „pozpátku".

49. Nechť (a_j, b_j) je j-tá dvojice, kterou jsme uvedli v řešení Wythoffovy hry (úloha 46). Požadovanou posloupnost sestrojíme, jestliže číslo j umístíme právě na dvě místa, totiž na místo a_j-té a na místo b_j-té (pro $j = 1, 2, 3, \ldots$).

Poznámka. Úlohy 47, 48 a 49 jsou jednoduchými variantami tzv. Langfordova problému [C. D. Langford: *The Mathematical Gazette* 42 (1958), str. 228].

*) Wythoffovu hru, která patří mezi hry zvané Nim, zařazujeme do této závěrečné kapitoly, protože má kombinatorický charakter a souvisí s problematikou dalších tří úloh. Kdo se zajímá o hry Nim, jistě najde mnoho zajímavého materiálu v knížce *Hry takmer matematické*, kterou napsali J. Gatial, T. Hecht a M. Hejný. Publikace vyšla r. 1982 v edici Škola mladých matematiků jako sv. 53.

DOPORUČENÁ LITERATURA

I. Z edice Škola mladých matematiků

[1] *J. Bosák:* Latinské štvorce. Svazek 38, Praha 1976
[2] *L. Bukovský - I. Kluvánek:* Dirichletov princíp. Svazek 25, Praha 1970
[3] *B. Riečan - Z. Riečanová:* O pravdepodobnosti. Svazek 37, Praha 1976
[4] *A. Vrba:* Kombinatorika. Svazek 45, Praha 1980
[5] *A. Vrba:* Princip matematické indukce. Svazek 40, Praha 1977
[6] *B. Zelinka:* Rovinné grafy. Svazek 41. Praha 1977
[7] *F. Zítek:* Vytvořující funkce. Svazek 29, Praha 1972

II. Další prameny v češtině a ve slovenštině

[8] *K. Čulík - V. Doležal - M. Fiedler:* Kombinatorická analýza v praxi. Praha 1967
[9] *V. Dupač - J. Hájek:* Pravděpodobnost ve vědě a technice-Cesta k vědění, Praha 1962
[10] *J. Kaucký:* Kombinatorické identity. Bratislava 1975
[11] *J. Sedláček:* Úvod do teorie grafů (3. vydání). Cesta k vědění, Praha 1981
[12] *N. J. Vilenkin:* Kombinatorika. Polytechnická knižnice, Praha - Moskva 1977
[13] *N. N. Vorobjev:* Fibonacciova čísla. Populární přednášky o matematice, Praha 1953
[14] *Š. Znám:* Teória čísel. Epsilon, Bratislava 1977

III. Cizojazyčné prameny

[15] *R. A. Brualdi:* Introductory combinatorics. New York - Oxford - Amsterdam 1977
[16] *W. Sierpiński:* Liczby trójkątne. Warszawa 1962
[17] *W. Sierpiński:* Teoria liczb. Warszawa 1959

Seznam dosud vydaných svazků

EDICE ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

v nakladatelství Mladá fronta

1. *František Hradecký - Milan Koman - Jan Vyšín:* Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, 1961, 1963 a 1977
2. *Jiří Sedláček:* Co víme o přirozených číslech, 1961, 1965 a 1976
3. *Jaroslav Šedivý:* Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, 1962
4. *Miroslav Šisler - Jiří Jarník:* O funkcích, 1962 a 1963
5. *František Veselý:* O nerovnostech, 1963
6. *Rudolf Výborný:* Matematická indukce, 1963 a 1966
7. *Jaroslav Šedivý:* O podobnosti v geometrii, 1963 a 1967
8. *Jiří Váňa:* O rovnicích s parametry, 1964 a 1970
9. *Jan Vyšín:* Konvexní útvary, 1964
10. *Jiří Sedláček:* Faktoriály a kombinační čísla, 1964
11. *Josef Holubář:* Geometrická místa bodů v prostoru, 1965
12. *Karel Havlíček:* Prostory o čtyřech a více rozměrech, 1965
13. *Miroslav Šisler - Josef Andrys:* O řešení algebraických rovnic, 1966
14. *František Veselý:* O dělitelnosti čísel celých, 1966
15. *Milan Koman:* Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, 1966
16. *Stanislav Horák:* Kružnice, 1966
17. *Jaromír Hroník:* Úlohy o maximech a minimech funkcí, 1967
18. *Karel Havlíček:* Analytická geometrie a nerovnosti, 1967
19. *Jiří Jarník:* Komplexní čísla a funkce, 1967

20. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Goniometrické funkce, 1968
21. *Alois Apfelbeck:* Kongruence, 1968
22. *Tibor Šalát:* Dokonalé a spriatelené čísla, 1969
23. *Jaroslav Morávek - Milan Vlach:* Oddělitelnost množin, 1969
24. *Ján Gatial - Milan Hejný:* Stavba Lobačevského planimetrie, 1969
25. *Leo Bukovský - Igor Kluvánek:* Dirichletov princíp, 1970
26. *Karel Hruša:* Polynomy v moderní algebře, 1970
27. *Stanislav Horák:* Mnohostěny, 1970
28. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal;* Vektory v geometrii, 1971
29. *František Zítek:* Vytvořující funkce, 1972
30. *Milan Koman - Jan Vyšín:* Malý výlet do moderní matematiky, 1972 a 1974
31. *Oldřich Odvárko:* Booleova algebra, 1973
32. *Jan Vyšín - Jitka Kučerová:* Druhý výlet do moderní matematiky, 1973
33. *Jaroslav Morávek:* O dynamickém programování, 1973
34. *Ladislav Rieger:* O grupách, 1974
35. *Alois Kufner:* Co asi nevíte o vzdálenosti, 1974
36. *Ján Černý:* O aplikáciach matematiky, 1976
37. *Beloslav Riečan - Zdena Riečanová:* O pravdepodobnosti, 1976
38. *Juraj Bosák:* Latinské štvorce, 1976
39. *Alois Kufner:* Nerovnosti a odhady, 1975
40. *Antonín Vrba:* Princip matematické indukce, 1977
41. *Bohdan Zelinka:* Rovinné grafy, 1977
42. *Ladislav Beran:* Uspořádané množiny, 1978
43. *Jiří Jarník:* Posloupnosti a řady, 1979
44. *Bohdan Zelinka:* Matematika hrou i vážně, 1979
45. *Antonín Vrba:* Kombinatorika, 1980
46. *Jaroslav Šedivý:* Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, 1980

47. *Arnošt Niederle:* Zajímavé dvojice trojúhelníků, 1980
48. *František Veselý:* O nerovnostech a nerovnicích, 1982
49. *Pavel Vít:* Řetězové zlomky, 1982
50. *Adam Plocki:* O náhodě a pravděpodobnosti, 1982
51. *V. B. Vasiljev - V. L. Gutenmacher:* Přímky a křivky, 1982
52. *Alois Kufner:* Symetrické funkce, 1982
53. *Ján Gatial - Tomáš Hecht - Milan Hejný:* Hry takmer matematické, 1982
54. *Josef Holubář:* Množiny bodů v prostoru, 1983
55. *Ljubomir Davidov:* Funkcionální rovnice, 1984

OBSAH

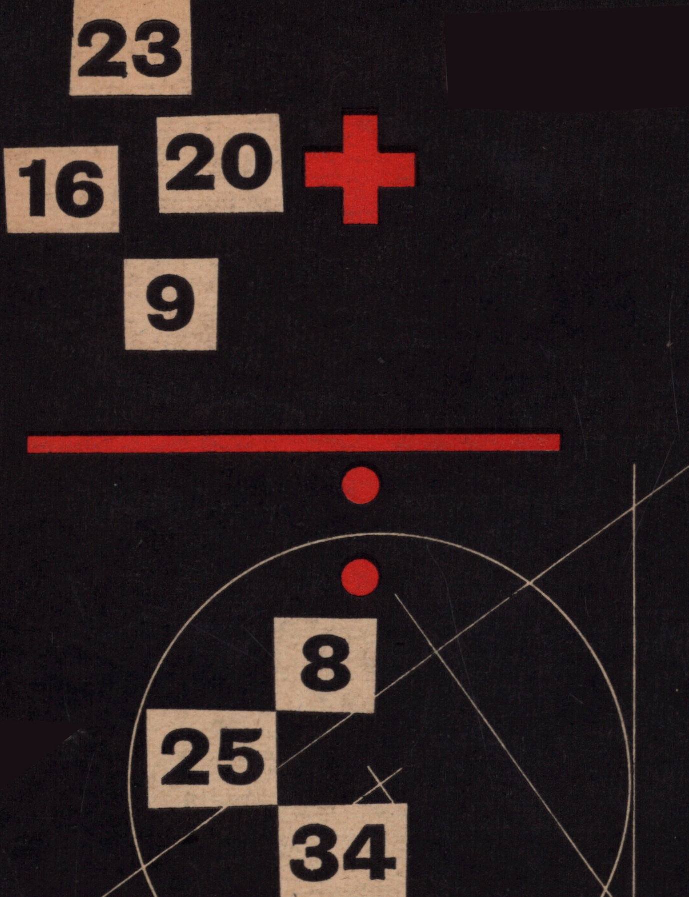
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JIŘÍ SEDLÁČEK

Faktoriály a kombinační čísla

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
K tisku připravil Vladimír Doležal
Obálku navrhl Jiří Příbramský
Odpovědná redaktorka Zdena Šmídová
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 4706
Edice Škola mladých matematiků, svazek 56
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
4,78 AA. 5,48 VA. 128 stran
Náklad 6000 výtisků. Druhé, upravené vydání
Praha 1985. 508/21/82,5

23-043-85 03/2 Cena brož. výt. 7 Kčs



23-043-85
03/2
Cena brož.
7 Kčs