

04. ročník matematické olympiády

Rudolf Zelinka (editor): 04. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1954-1955. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1956.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404440>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ČTVRTÝ ROČNÍK

Ustřední výbor
MATematické OLYMPIÁDY
MATEMATICKÉ

115 32 Praha 1, Ládví 28
telefon 22 66 01 - 3

OLYMPIADY

Státní pedagogické nakladatelství Praha

ČTVRTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIADY

*Zpráva a řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1954-1955*

1956

Státní pedagogické nakladatelství

Praha

Děkuji všem, kteří svými náměty nebo radou přispěli při zpracování řešení úloh IV. ročníku matematické olympiady. Především děkuji dr. M. Fiedlerovi, doc. Jos. Holubářovi a Jiřímu Sedláčkovi z MÚČSAV a dále Vl. Macháčkovi z VÚP v Praze, kteří provedli obětavě recenzi rukopisu a nemálo přispěli k jeho zlepšení; Vl. Macháček vzorně narýsoval obrázky. Rovněž děkuji srdečně doc. dr. K. Hrušovi, doc. J. Vyšínovi z VŠP v Praze, Jos. Filipovi z JŠŠ v Martině a Fr. Veselému z VŠSE v Plzni, kteří přispěli svými náměty a podněty. Dr. Milanu Kolibiarovi z přírodovědecké fakulty university Komenského v Bratislavě děkuji za poslovenštění části textu.

Rudolf Zelinka.

Za přispění spolupracovníků zpracoval Rudolf Zelinka

Schváleno výnosem ministerstva školství ze dne 19. prosince 1955,
č. 85348/55—A I/1, v prvním vydání jako pomocná kniha pro školy
všeobecně vzdělávací

I. K PRŮBĚHU IV. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIADY

1. Ve školním roce 1954/55 se konala na našich všeobecně vzdělávacích i výběrových školách soutěž, nazvaná matematická olympiada, již po čtvrté.

Stejně jako loni byla organisována ve čtyřech kategoriích A, B, C, D. V kategorii A soutěžili žáci 11. ročníků všeobecně vzdělávacích škol a žáci 3. a 4. ročníků výběrových odborných škol. V kategorii B soutěžili žáci 10. ročníků všeobecně vzdělávacích škol a 2. ročníků odborných škol. V kategorii C soutěžili žáci 9. ročníků všeobecně vzdělávacích škol a prvních ročníků odborných škol. V kategorii D soutěžili žáci 8. ročníků všeobecně vzdělávacích škol.

2. Soutěž pořádalo ministerstvo školství ve spolupráci s Matematickým ústavem Československé akademie věd (MÚČSAV) a s Československým svazem mládeže (ČSM). Soutěž řídil Ústřední výbor matematické olympiady (ÚVMO) spolu s krajskými a okresními výbory matematické olympiady (KVMO, OVMO).

ÚVMO (adresa: Praha II, Žitná 25, tel. 24-11-93) byl sestaven takto:

Předseda: Akademik *Josef Novák*.

Místopředsedové: Dr *František Kahuda*, ministr školství, akademik *Juraj Hronec*, profesor přírodovědecké fakulty Komenského university v Bratislavě,

Dr *Karel Koutský*, profesor přírodovědecké fakulty v Brně.

Jednatel: *Rudolf Zelinka*, vědecký pracovník MÚČSAV v Praze.

Členové: *Josef Čejna*, tajemník Ústředního výboru ČSM, *Anton Dubec*, docent vysoké pedagogické školy v Bratislavě, *Ludmila Frantíková*, učitelka jedenáctiletky v Dačicích,

Ústřední výbor

MATEMATICKÉ OLYMPIADY

Dr *Karel Havlíček*, docent matematicko-fysikální fakulty
Karlovy university v Praze,
doc. *Josef Holubář*, vědecký pracovník MÚČSAV v Praze,
František Hradecký, odborný asistent vysoké pedagogické
školy v Praze,
Dr *Karel Hruša*, docent vysoké školy pedagogické v Praze,
Miloš Jelínek, ústřední inspektor ministerstva školství,
Dr *Milan Kolibiar*, odb. asistent přírodovědecké fakulty uni-
versity J. A. Komenského v Bratislavě,
Josef Krchňavý, učitel jedenáctileté střední školy v Košicích,
Vítězslav Repáš, referent poverenictva školství v Bratislavě,
Rudolf Růžička, učitel jedenáctiletky v Klatovech,
Josef Stehlík, učitel 2. osmiletky v Turnově.

Předsedy krajských výborů matematické olympiady byli:

Dr *Josef Korous*, docent vysoké železniční školy v Praze
(kraj Pražský),
František Vacka, krajský školní inspektor v Českých Budějo-
vicích (kraj Budějovický),
Stanislav Kopellent, učitel pedagogické školy v Plzni (kraj
Plzeňský),
František Jenšík, krajský školní inspektor v Karlových Varech
(kraj Karlovarský),
Josef Porcal, učitel pedagogické školy v Teplicích Lázních
(kraj Ústecký),
Zdeněk Kalousek, učitel pedagogické školy v Liberci (kraj
Liberecký),
Josef Mencl, učitel pedagogické školy v Hradci Králové
(kraj Hradecký),
Dr *Josef Honzák*, učitel jedenáctileté střední školy v Pardu-
bicích (kraj Pardubický),
Josef Svoboda, učitel jedenáctileté střední školy v Jihlavě
(kraj Jihlavský),
Vladimír Štefl, krajský školní inspektor v Brně (kraj Brněn-
ský),

Dr *Josef Široký*, odborný asistent vysoké školy pedagogické v Olomouci (kraj Olomoucký),
Leo Krakówka, učitel průmyslové školy strojnické v Gottwaldově (kraj Gottwaldovský),
Dr *Alfons Hyška*, profesor vysoké školy báňské v Ostravě (kraj Ostravský),
Dr *Milan Kolibiar*, odborný asistent přírodovědecké fakulty university J. A. Komenského v Bratislavě (kraj Bratislavský),
Josef Drábik, učitel jedenáctileté střední školy v Nitře (kraj Nitranský),
Dr *Cyril Palaj*, profesor vysoké lesní a dřevařské školy ve Zvolenu (kraj Banskobystrický),
Ladislav Berger, učitel jedenáctileté střední školy v Žilině (kraj Žilinský),
Dr *Ján Jakubík*, odborný asistent strojní fakulty vysoké školy technické v Košicích (kraj Košický),
Dr *Ernest Jucovič*, odborný asistent vyšší školy pedagogické v Prešově (kraj Prešovský).

3. Soutěž v kategoriích B, C, D probíhala ve dvou kolech, v kategorii A ve třech kolech.

Soutěž I. kola měla přípravný a studijní ráz, probíhala od listopadu 1954 do počátku března 1955. Úspěšný řešitel každé kategorie musil rozřešit alespoň dobře devět ze šestnácti zadaných úloh, aby mohl soutěžit dále v II. kole. Úlohy byly vytištěny na zvláštních letácích; pro slovenské kraje měly letáky slovenský text. O propagaci soutěže na školách a o pomoc žákům pečovali školní referenti matematické olympiady z řad učitelů matematiky.

Úspěšní řešitelé I. kola postoupili do II. kola soutěže, která byla pro kategorii B, C, D závěrečná. Úspěšným řešitelem II. kola stává se žák, který během čtyř hodin rozřeší ze čtyř zadaných úloh nejméně dvě s klasifikací alespoň dobrou. V kategoriích A, B, C se II. kolo konalo v krajích, kdežto

v kategorii D v okresech. Soutěž II. kola se konala v neděli 17. dubna 1955. Výbory matematické olympiady uspořádaly s účastníky soutěže besedy, v nichž je seznámily na př. s typickými chybami v řešeních úloh, dále je informovaly o studiu na vysokých školách, o vhodné literatuře pro studium matematiky a pod. Účastníci soutěže navštívili v mnohých místech hromadně divadelní představení nebo koncert, jinde výstavu a pod. Zástupci školských odborů rad KNV a ONV spolu s příslušnými výbory ČSM se starali o účastníky olympiady a vykonávali pedagogický dozor.

4. Soutěž III. kola (pro kategorii A) se konala v sobotu 14. května 1955 dopoledne v matematickém ústavu matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university v Praze II, Ke Karlovu 3. Účastnilo se jí 80 vybraných nejlepších řešitelů II. kola. Mezi nimi bylo výjimečně i několik žáků 10. ročníku jedenáctileté střední školy, kteří se zúčastnili soutěže v obou kategoriích A, B; z nich se tři umístili úspěšně a dokonce dva se umístili mezi dvaceti vítězi soutěže. Stejně jako v II. kole je i ve III. kole úspěšným řešitelem žák, který během čtyř hodin vypracoval dobře alespoň dvě ze čtyř zadaných úloh.

Po soutěži se téhož dne o 15. hodině ve velké posluchárně matematického ústavu Karlovy university konala beseda s účastníky soutěže. Beseda měla slavnostní ráz. Přítomni byli ministr školství s. Dr František Kahuda, zástupci vědeckých ústavů a vysokých škol a zástupci středních škol a úřadů.

Besedu řídil předseda ÚVMO akademik Josef Novák, který přivítal přítomné a zdůraznil, že přítomnost ministra školství na besedě svědčí o tom, jaké vážnosti se těší matematická olympiada. Poté podal stručný přehled o průběhu IV. ročníku soutěže a uvedl některá statistická data. Při té příležitosti konstatoval, že se soutěž rozrůstá do značné šířky, což platí zvláště o kategorii D, v níž se v I. kole účastnilo soutěže přes 9000 žáků, kdežto v předchozím ročníku 7500 žáků. Potom poděkoval přítomnému ministru školství za všechnu pomoc,

kteřou poskytoval zvláště svými zásahy při řešení některých problémů, jež se v průběhu soutěže vyskytly.

Slavnostní projev na besedě pronesl ministr školství s. Dr. František Kahuda. Uvedeme stručně obsah jeho rozsáhlého projevu.

S. ministr řekl, že velmi rád přijal pozvání na besedu s olympioniky, neboť soutěž Matematická olympiada je jednou z ukázek spolupráce školy a našich učitelů jak na všeobecně vzdělávacích a odborných školách, tak i učitelů na vysokých školách. Vzpomněl na svá vysokoškolská studia, která konal právě v budově, kde je beseda uspořádána, potom vřele a srdečně vzpomněl na tehdejší vysokoškolské učitele matematiky. Vyslovil přesvědčení, že i učitelé matematiky přítomných olympioniků s podobnou láskou jako jeho někdejší učitelé vstúpili účastníkům soutěže lásku k matematice. V přítomných olympionících pozdravuje s. ministr příští pracovníky naší pokrokové vědy a žádá je, aby po vstupu do života získali masy studentů a spolupracovníků, aby se naše matematická obec rozšiřovala a vzkvétala, i když již dnes zásluhou našich matematiků má naše matematická věda úroveň evropskou, ano i světovou. Přitom ocenil význam vyučování matematice na našich školách pro budovatelské cíle našeho lidu.

Dále vzpomněl s. ministr nedávných oslav desetiletého budování socialismu v naší zemi, kdy jsme hodnotili výsledky, jichž dosáhl náš lid, naši dělníci, rolníci a naše pokroková inteligence; této inteligenci právě svěřujeme výchovu i našich olympioniků, příštích to adeptů naší vědy a kultury i sociálního pokroku. U příležitosti oslav desetiletého trvání naší osvobozené republiky jsme si uvědomovali, že veliké díky patří naší Komunistické straně Československa, která šla správnou cestou k vytčenému cíli.

Dnes vědě přikládáme v naší vlasti velký význam; vždyť bez ní není budování socialismu možné. Příkladem vědeckého přístupu k budovatelským úkolům je otázka socialisace naší vesnice; bez vědecké agrobiologie a bez přispění techniky a

tím i matematiky by tato pronikavá přeměna naší vesnice nebyla možná. Proto se matematika stala věcí státního významu. Naše vláda si je velmi dobře vědoma, že bez matematiky se nemohou rozvíjet přírodní a technické vědy, ba ani vědy společenské. Při této příležitosti připomněl s. ministr olympionikům zvláštní zážitek objevného citu, který je mocnou vzpruhou pro vědeckého pracovníka.

„My se snažíme, aby to, co prožíváte vy, jako lidé předurčení pro pěstování matematických a vůbec přírodních a technických věd, prožívali i všichni vaši spolužáci tak, aby naše žactvo žilo opravdovou snahou něčeho dosáhnout, na něco přijít, něčím přispět k budování našeho lepšího života,“ pravil s. ministr. „Jde nám o to, odstranit lethargii, odstranit štuďácké ‚Do toho mi nic není‘; jde nám o to, aby se vyučování ve všech předmětech podstatně zlepšilo,“ pokračoval dále.

Jedním ze závažných nedostatků naší školy je podle mínění s. ministra její přílišná theoretičnost a frázovitost. To se nám dostalo i do vyučování matematiky. Potom s. ministr rozebral otázku pojetí vyučování matematice a nových učebnic. Na tomto poli jsme se poučovali ze zkušeností Sovětského svazu, ale neposkytli jsme našim učitelům té pomoci, které se dostává učitelům sovětskému. Na nové učebnice jsme naše učitele dobře nepřipravili, a tuto přípravnou etapu nelze přeskočit. Proto bude nutno tuto otázku dále sledovat a řešit.

Perspektiva, které tu chceme dosáhnout, musí být zajištěna organizačně. Těmto otázkám musíme věnovat zvýšenou pozornost. Je třeba zajistit dostatečný počet zájemců o vysokoškolské studium, abychom mohli naplnit naše vysoké školy těmi, kteří mají pro zvolený obor nejlepší schopnosti. To se nám v letošním roce po prvé do značné míry daří.

K zajištění těchto cílů musíme věnovat všechnu péči především našemu učiteli; zkušenost nás učí, že jinak bychom dospěli k cíli velmi pomalu, my však chceme k tomuto cíli dospět co nejrychleji. Již v roce 1945 jsme prohlásili marxistickou zásadu, že ústřední osobou ve vyučování a výchově je učitel.

Protože jsme pro učitele dosud udělali velmi málo, musíme nyní plně využít možnosti, kterou ministerstvu školství poskytuje vláda, a musíme budovat a organisovat ústavy pro další vzdělávání učitelů. Musíme tu využít charakteristického znaku našeho učitelstva, které se vždy chtělo vzdělávat a získat vyšší stupeň vzdělání.

„Chceme, aby učitel byl ve škole vedoucí osobností a aby tato zásada byla uplatněna v celé šíři,“ řekl s. ministr k tomuto bodu.

„Druhou závažnou otázkou jsou učební pomůcky, především učebnice,“ pokračoval s. ministr. Dále líčil situaci, do níž jsme se dostali. Dříve totiž žáci plně učebnic nevyužívali, ba většinou jich neužívali vůbec; to proto, že nebyli vedeni ke studiu z učebnic. Dnes je tomu zcela jinak, a proto bude třeba dát našemu učiteli dobrou učebnici, zpracovanou na základě marxisticko-leninského učení, učebnici obsahově i metodicky dobře promyšlenou a žákům plně přístupnou. Po této stránce mají naše učebnice značné nedostatky. Dokud nebudeme mít dobré učebnice a vyučovací pomůcky, nemůžeme být spokojeni.

Máme řadu důkazů pro to, že naše nové učebnice dosud plně nevyhovují. Svědčí o tom řada rodičů, kteří se obracejí na školské pracovníky a stranické funkcionáře, aby jim vysvětlili některé věci, které se vyskytují v učebnicích.

Potom s. ministr jako ukázkou zcela nevhodného příkladu uvedl příklad z Početnice pro 2. post. ročník (cvič. 109 na str. 91). Příklady podobného druhu jsou plně v rozporu s tím, čeho chceme ve vyučování matematice dosáhnout.

Zde musí matematická věda a věda pedagogická zasáhnout a zjednat jasno. Mimo jiné bude třeba Výzkumný ústav pedagogický J. A. Komenského více připoutat k ministerstvu školství, aby řešil problémy, na nichž má ministerstvo zvláštní zájem.

Pak s. ministr podotkl, že i jiná pracoviště se musí o tyto otázky zajímat. Mimo jiné musí matematicko-fyzikální, přírodovědecké a filosofické fakulty našich universit opět převzít

výchovu učitelů jedenáctiletých středních škol. Tím, že jsme tento úkol svěřili výhradně vysokým pedagogickým školám, nejen jsme se odchýlili od Sovětského svazu, ale způsobili jsme si i mnoho dnešních potíží. V této věci bude provedena náprava, která bude velmi prospěšná i pro zmíněné fakulty.

„Spolu s ČSM promýšlíme i otázku komplexního řešení výchovy na všech našich školách,“ pravil s. ministr a zdůraznil, že bude nutno vytvořit vědeckou pedagogickou společnost ze všech pracovníků, kteří mají co činit s otázkami výchovy.

Na závěr svého projevu pravil s. ministr, že naznačil jen hlavní problémy, které je třeba řešit, a dodal: „Domnívám se, že vzor a cesta, kterou jde matematická olympiada, by se měla stát vzorem i pro ostatní školské předměty. Bude třeba promýšlet všechny dobré zkušenosti, které jste získali a které by bylo možno zevšeobecnit a převést na jiné obory, zvláště na ty, které jsou národohospodářsky důležité.“

Poté s. ministr poděkoval jménem ministerstva školství všem, kteří se zasloužili o úspěch letošní soutěže. Požádal členy I. sekce ČSAV a matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university, aby vydatně pomáhali při výchově našich nových učitelů matematiky pro 6. až 11. postupný ročník všeobecně vzdělávacích škol.

Na konec s. ministr pravil: „Dovolte mi, abych blahopřál k dosaženým výsledkům a abych k dalšímu pěstování matematických věd přál stále větších úspěchů a plného zdaru.“

Předseda ÚVMO akademik Jos. Novák pak s. ministrovi poděkoval za jeho závažný projev a znovu ocenil podporu, kterou s. ministr prokazuje matematické olympiadě.

Za I. sekci Československé akademie věd pozdravil přítomné předseda sekce akademik Vojtěch Jarník. Ve svém proslovu požádal přítomné olympioniky, aby se stali buňkami, z nichž se bude šířit zájem o studium matematiky mezi ostatními studenty a aby jim dali své znalosti k dispozici. Dále ocenil význam matematiky pro zvýšení produktivity práce a konstatoval, že matematická olympiada má dnes již celostátní

význam. Pomocí této soutěže musíme ovlivnit pěstování matematiky i její vyučování u nás. Ke konci svého projevu se zmínil o radostné skutečnosti, že v tomto ročníku bylo nutno mezi úspěšnými řešiteli II. kola v kategorii A provádět výběr, a připomenul, že i v této soutěži musí být heslem „za masovost a za jakost“.

Za matematicko-fyzikální fakultu Karlovy university se ujal slova její děkan akademik Vladimír Kořínek. Zmínil se o otázkách vzájemného poměru theorie a praxe. Řekl, že jednota theorie a praxe je základem naší filosofie a vši praktické činnosti. Není možné učit se jen pravidlům bez náležitého theoretického objasnění a na druhé straně se nelze omezit jen na theorii tak, aby žákům nebylo známo žádné praktické užití této theorie. Theoretické učivo musí být přiměřené věku žáků a musí být budováno nejen na principech názornosti, soustavnosti, ale i srozumitelnosti a trvalosti osvojování učiva. Přitom se vyučování matematice nesmí redukovat na pouhý drill. S tohoto hlediska nutno konstatovat, že naše učebnice matematiky mají řadu nedostatků.

Poté informoval olympioniky o jednotlivých oborech, které mohou na vysoké škole studovat, aby v nich mohli plně uplatnit své matematické schopnosti. Na závěr přál přítomným olympionikům hodně zdaru při dalším studiu a nabídl jim všechnu pomoc k dosažení úspěšných výsledků.

Potom představil akademik Josef Novák přítomným dva nejúspěšnější řešitele III. kola, s. Jaromíra Jakše z Brna-Králova Pole a s. Ehrfrieda Loserta z Opavy. Oba jmenovaní zaujali za předsednickým stolem čestná místa vedle ministra školství.

Další projev přednesl laureát státní ceny Klementa Gottwalda akademik SAV Štefan Schwarz. Ocenil zvláště význam matematické olympiady pro vysokoškolské studium. Konstatoval, že mohl sledovat každý rok asi 1000 studentů vysoké školy technické a všimát si těch, kteří se účastnili matematické olympiady. Je zajímavé, že i ti, kteří se účastnili jen prvních

dvou kol, patří mezi nejlepší posluchače. Tito posluchači dovedou logicky myslet, analysovat dané problémy a řešit samostatně úlohy. Na závěr požádal přítomné, aby tyto radostné skutečnosti tlumočili na svých školách.

Pak k přítomným promluvil akademik Eduard Čech. Zmínil se v úvodu o své spolupráci s ministrem školství s. Dr. Frant. Kahudou v dobách před II. světovou válkou v Brně, kdy musili probíjet myšlenku jednotné střední školy a kdy přesvědčovali vysokoškolské učitele a veřejnost o nutnosti dát širokým masám vyšší vzdělání. Tehdy akademik Čech poznal v s. Kahudovi energického bojovníka za pokrokové snahy našeho učitelstva, což potvrzuje i dnešní projev, který svědčí o tom, že s. ministr má neobyčejný zájem o vývoj matematických věd i o úspěchy ve vyučování matematice v naší republice.

Akademik Čech informoval dále přítomné o tom, jak se pečuje o výchovu matematiků v Sovětském svazu. Zmínil se zvláště o činnosti Moskevské matematické obce a Mechanicko-fysikální fakulty Lomonosovovy university v Moskvě. Připomněl, že akademik Kolmogorov, který patří k největším sovětským matematikům, sám opravuje na 1000 soutěžních řešení v moskevské matematické olympiádě.

Dále upozornil na řadu publikací, které v SSSR za účelem přípravy olympioniků napsali přední sovětské vědecké pracovníci. Zdůraznil zvláště, že právě vyšla v českém překladu kniha od Dynkina a Uspenského „Matematické besedy“, kterou přeložil z ruštiny. Vznikla z přednášek v matematickém kroužku, který pořádá Matematicko-fysikální fakulta Lomonosovovy university pro žáky moskevských středních škol. Kniha věnuje pozornost těmto třem matematickým disciplínám: 1. topologii, 2. teorii čísel, 3. počtu pravděpodobnosti.

Potom akademik Čech ukázal přítomným na jednoduchých a přístupných příkladech vtipným a poutavým způsobem, kterými otázkami se asi zabývá topologie, dále teorie čísel a počet pravděpodobnosti; zároveň ocenil význam těchto disciplín. Při

té příležitosti se kriticky zmínil o některých nevhodných úlohách v našich školských učebnicích.

Na závěr svého projevu podotkl, že matematikové nepodceňují cvik; počítání si vyžaduje náležitého cviku stejně jako hra na housle. Přitom však je třeba stále pamatovat na to, že matematiku musíme žákům učinit zajímavou, a to nedokážeme tím, že žáky budeme stále učit jen násobilce.

Přednáška, kterou přítomní vyslechli s mimořádným zájmem, byla přijata velmi srdečně a předseda ÚVMO akademik Josef Novák mohl proto za ni akademikovi E. Čechovi jménem všech přítomných vřele poděkovat.

Na závěr besedy byla provedena diskuse. Zvláště živě bylo požadováno, aby byla vydávána populárně vědecká literatura z oboru matematiky a aby byl vydáván časopis zaměřený k žákům našich středních škol, v němž by bylo možné publikovat i výsledky matematické olympiady.

Dále se diskutovalo o účasti žáků odborných škol na matematické olympiadě a o možnosti studia absolventů těchto škol na vysokých školách.

Z řad olympioniků byly vzneseny dotazy, proč se vypustila z osnov střední školy analytická geometrie, proč není zavedena deskriptivní geometrie a j. V diskusi, které se mimo jiné účastnili akademici Eduard Čech, Vl. Kořínek, Jos. Novák a prof. F. Vyčichlo, byly tyto otázky vysvětleny a načrtnuta i budoucí perspektiva, zvláště pokud jde o deskriptivní geometrii.

K otázce, jaké výhody budou mít vítězové matematické olympiady při přijímání na vysoké školy, je možno konstatovat, že oběma nejlepším vítězům tohoto ročníku byla prominuta zkouška z matematiky.

Po skončení diskuse poděkoval akademik Josef Novák všem, kteří se zasloužili o úspěšný průběh IV. ročníku soutěže. Především své díky adresoval ministerstvu školství za hmotné a organizační zajišťování soutěže a dále Matematickému ústavu ČSAV jako pořadateli soutěže. Vynikající podíl na celé práci mají členové okresních a krajských výborů matematické olym-

piady, jakož i referenti soutěže na školách. Jmenovitě poděkoval předseda ÚVMO s. Miloši Jelínkovi, ústřednímu inspektoru ministerstva školství, za obětavé zajišťování soutěže a dále s. Dr Ludmile Městkové, referentce ÚNV Praha, za organizační a hostitelské zásluhy.

Na závěr poděkoval akademik J. Novák všem hostům za účast na besedě a besedu ukončil. Poté obdrželi přítomní olympionici od Matematického ústavu ČSAV darem český překlad knihy Matematické besedy od sovětských autorů Dynkina a Uspenského.

II. ZPRÁVA O VÝSLEDKÁCH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

A. Soutěž I. kola.

Počet účastníků v soutěži I. kola v kategoriích A, B, C je patrný z tabulky č. 1; o účasti v kategorii D informuje tabulka č. 2.

Tabulka č. 1

Přehled účastníků I. kola podle krajů
v kategoriích A, B, C*)

K r a j	Kat. A		Kat. B		Kat. C		Celkem	
	P	U	P	U	P	U	P	U
Praha	114	25	261	45	174	36	549	106
České Budějovice	71	12	72	16	116	20	259	48
Plzeň	46	0	89	17	76	16	211	33
Karlovy Vary	15	6	20	7	41	14	76	27
Ústí n. L.	42	8	59	11	42	8	143	27
Liberec	27	2	32	6	29	4	88	12
Hradec Králové	56	14	142	31	132	39	330	84
Pardubice	20	4	53	12	66	13	139	29
Jihlava	72	19	167	36	149	30	388	85
Brno	53	18	111	38	164	35	328	91
Olomouc	38	17	58	26	85	31	181	74
Gottwaldov	46	8	94	30	154	7	294	45
Ostrava	105	44	133	37	148	24	386	105
Bratislava	53	5	296	11	70	4	419	20
Nitra	21	5	92	4	60	6	173	15
Banská Bystrica	22	2	61	14	45	10	128	26
Žilina	15	4	61	9	35	12	111	25
Košice	34	1	81	11	68	6	183	18
Prešov	26	2	49	0	33	6	108	8
Celkem	876	196	1931	361	1687	321	4494	878

*) P = celkový počet účastníků, U = počet úspěšných řešitelů.

Tabulka č. 2

Přehled účastníků I. kola podle krajů
v kategorii D

Kraj	Kategorie D	
	P	U
Praha	1044	309
České Budějovice	1068	406
Plzeň	472	231
Karlovy Vary	260	48
Ústí nad Labem	412	82
Liberec	353	107
Hradec Králové	441	108
Pardubice	407	110
Jihlava	510	241
Brno	797	282
Olomouc	479	136
Gottwaldov	681	244
Ostrava	1233	258
Bratislava	32	7
Nitra	241	41
Banská Bystrica	163	47
Žilina	106	61
Košice	174	26
Prešov	202	83
Celkem	9075	2827

Některé kraje měly značnou účast; to platí v kategoriích A, B, C o krajích Brněnském, Budějovickém, Ostravském, Pražském a Bratislavském, v kategorii D pak o krajích Budějovickém, Ostravském a Brněnském. Poměrně slabší účast v kategorii D mělo Slovensko. V jednotlivých kategoriích se v účasti na I. kole jeví proti loňskému ročníku tento přírůstek v počtu řešitelů: kategorie A o 88%, kategorie B o 255%, kategorie C o 72 % a kategorie D o 20 %. V některých pohra-

ničních krajích je dosud účast dosti malá; v příštím ročníku bude třeba zainteresovat o soutěž nejen žáky, ale i učitele matematiky. Jsou nám však dobře známé nesnáze, které v těchto krajích musí učitelé i žáci překonávat.

Účast žáků odborných výběrových škol se dosud stále omezovala jen na poměrně malý počet žáků z průmyslových škol. Přesto však do soutěže vyslaly tyto školy několik dobrých žáků, o čemž svědčí i to, že na 4. místě mezi vítězi soutěže (III. kola) je žák třetího ročníku průmyslové školy.

Poměrně dost význačně se účastnily soutěže dívky. Účast žákyň v kategoriích A, B, C je asi 30 %, v kategorii D dokonce 50 %.

Účastníci soutěže I. kola zaslali výborům matematické olympiady v kategoriích A, B, C přes 33 000 řešených úloh, z čehož bylo asi 20 000 klasifikováno alespoň dobře; v kategorii D došlo přes 66 000 řešení, z čehož bylo přes 41 000 oceněno alespoň dobře. Tato čísla zároveň svědčí o tom, jak velkou práci musili vykonat členové výborů matematické olympiady.

Řada krajských a okresních výborů MO prováděla diskuse a instruktáže účastníků soutěže; na nich byli žáci informováni o typických nedostacích, jichž se při řešení úloh dopouštěli.

B. Soutěž II. kola.

Přehled o účasti a úspěšných řešitelích II. kola podle jednotlivých kategorií podává tabulka č. 3; svědčí o tom, že soutěž je přísně výběrová. Přesto řada krajů vykazuje pěkné výsledky. Dále je z tabulky patrné, že klasifikace v I. kole byla provedena sice přísně, ale spravedlivě. Jednotnost klasifikace v rámci kraje zajišťovaly krajské výbory MO ve spolupráci s předsedy okresních výborů MO.

V kategoriích A, B, C se úspěšně umístilo průměrně asi 51 % účastníků, při čemž v kategorii A toto číslo činí asi 83 %. Velká řada účastníků soutěže v kategorii A prošla již soutěžemi v minulých ročnících, a proto měla značnou zkušenost i dobré

předpoklady; tomu tak zřejmě nemůže být v kategoriích B, C, kde jsou proto výsledky slabší. Mezi úspěšnými řešiteli II. kola je v kategoriích A, B, C asi 21 % dívek, v kategorii D přes 50 % dívek. Přehled o soutěži II. kola podávají tabulky č. 3 a č. 4.

Tabulka č. 3

Přehled účastníků II. kola podle krajů
v kategoriích A, B, C*)

K r a j	Kat. A		Kat. B		Kat. C		Celkem	
	P	U	P	U	P	U	P	U
Praha	24	20	41	25	34	18	99	63
České Budějovice	8	8	15	5	17	5	40	18
Plzeň	—	—	16	7	16	14	32	21
Karlovy Vary	6	4	6	3	12	3	24	10
Ústí n. L.	8	4	10	6	7	5	25	15
Liberec	2	2	6	4	4	3	12	9
Hradec Králové	13	9	31	23	39	35	83	67
Pardubice	4	3	12	3	8	6	24	12
Jihlava	19	17	34	14	27	16	80	47
Brno	17	14	37	34	34	13	88	61
Olomouc	17	15	24	21	28	28	69	64
Gottwaldov	8	7	28	6	7	5	43	18
Ostrava	41	37	36	18	24	12	101	67
Bratislava	4	1	11	6	4	3	19	10
Nitra	5	4	4	2	5	2	14	8
Banská Bystrica	2	1	14	5	10	2	26	8
Žilina	4	3	9	7	11	3	24	13
Košice	1	1	11	—	6	—	18	1
Prešov	2	1	—	—	6	1	8	2
Celkem	185	151	345	189	299	174	829	514

*) P = celkový počet účastníků, U = počet úspěšných řešitelů.

Tabulka č. 4

Přehled účastníků II. kola podle krajů
v kategorii D

K r a j	Kategorie D	
	P	U
Praha	233	209
České Budějovice	354	236
Plzeň	200	143
Karlovy Vary	44	42
Ústí nad Labem	85	50
Liberec	94	72
Hradec Králové	108	65
Pardubice	100	81
Jihlava	203	172
Brno	248	193
Olomouc	96	73
Gottwaldov	224	186
Ostrava	226	112
Bratislava	7	4
Nitra	32	23
Banská Bystrica	45	28
Žilina	106	61
Košice	7	—
Prešov	76	57
Celkem	2488	1807

Prvních deset úspěšných řešitelů II. kola kategorií A, B, C v každém kraji bylo odměněno věcnými nebo peněžitými cenami. Totéž platí i o prvních deseti úspěšných řešitelích kategorie D v každém okrese. Vedle toho tito žáci dostali od příslušného výboru MO zvláštní pochvalné uznání.

Dále uvádíme jmenný seznam prvních deseti úspěšných řešitelů II. kola v kategoriích B, C podle jednotlivých krajů a podle jejich umístění v rámci kraje.

Pořadí úspěšných řešitelů II. kola v kategoriích B, C (podle krajů).

(J = jedenáctiletá střední škola, P = průmyslová škola)

Praha — venkov.

B. Lumír Forejt, J, Radotín; Vladimír Zíta, J, Brandýs n. L.; J. Beran, J, Radotín; Zdeněk Brandl, J, Benešov; Josef Sak, J, Rakovník; Mir. Hroník, J, Čakovice; Karel Tomsa, J, Brandýs n. L.

C. Miloslav Hron, J, Kralupy n. Vlt.; Karel Pecka, J, Brandýs n. L.; Eva Kosová, J, Benešov.

Praha-město.

B. Pavel Doktor, 4.J, Praha; Miloš Dostál, 20.J, Praha; J. Kadlec, 4.J, Praha; Miroslav Švestka, 6.J, Praha; Miloslav Havlíček, 6.J, Praha; K. Škopek, 3.P, Praha; Jan Čermák, 5.J, Praha; Jan Vraný, 19.J, Praha; Petr Friš, 7.J, Praha; Josef Michl, 12.J, Praha.

C. František Kobliha, 1.J, Praha; Jaroslav Jeřábek, 7.J, Praha; Vlad. Bondybey, 14. J, Praha; J. Mánek, 19.J, Praha; Karel Vlk, 9.J, Praha; Miloš Helcl, 15.J, Praha; Karel Antropius, 21.J, Praha; Jaroslav Lukeš, 21.J, Praha; Karel Kosman, 7.J, Praha; Jiří Turek, 9.J, Praha.

České Budějovice.

B. Tomáš Růžicka, 1.J, Č. Budějovice; Valvoda, J, Písek; Iva Fidlerová, 1.J, Č. Budějovice; Mala Mládková, 1.J, Č. Budějovice; Jana Lochmanová, 1.J, Č. Budějovice.

C. Marie Švábová, J, Tábor; František Tydlitát, J, Písek; M. Vránová, J, Vodňany; Danuše Procházková, 2.J. Č. Budějovice; Vladimír Koláčný, filmová škola, Čimelice.

Plzeň.

B. Václav Votava, 3.J, Plzeň-Doubravce; Rudolf Kubát, 3.J, Plzeň-Doubravce; František Žížek, J, Rokycany; Zdeněk Maruna, J, Nepomuk; Karel Lehman, J, Domažlice; Jiří Cendelín, 3.J, Plzeň-Doubravce; Vladimír Štembera, 3.J, Plzeň-Doubravce.

C. Jiří Ruml, 2.J, Plzeň; Jiří Hrubý, 2.J, Plzeň; Pavel Liška, 2.J, Plzeň; Jiří Vavroch, P, Plzeň; Antonín Špalek, 2.J, Plzeň; Zdeňka Jůzová, 2.J, Plzeň; Karel Mazal, 2.J, Plzeň; Josef Vokroj, J, Klatovy, František Čechura, 3.J, Plzeň-Doubravce; Jaroslava Straková, 1.J, Plzeň.

Karlovy Vary.

B. Jitka Žáčková, J, Karlovy Vary; Jindřich Shejbal, J, Sokolovo; Eva Treulichová, J, Sokolovo.

C. Ivan Santar, J, Karlovy Vary; Petr Lischke, J, Podbořany; Jan Webr, J, Karlovy Vary.

Ústí n. L.

B. Bohuš Hejtman, P, Děčín VI; Stanislav Schorm, J, Lovosice; Miloš Korejs, J, Lovosice; Helmuth Hieke, J, Teplice; Otakar Leminger, 1. J, Ústí n. L.; Jindřich Martínek, J, Žatec.

Liberec.

B. K. Mačák, 2.J, Liberec; J. Anděl, J, Turnov; V. Kocour, J, Turnov; H. Novotná, J, Jablonec n. N.

C. B. Zelinka, 1.J, Liberec; B. Lněnička, J, Mimoň; K. Žižka, 1.J, Liberec.

Hradec Králové.

B. Zbyněk Hůlek, J, Náchod; Josef Hepnar, J, Náchod; Jaromír Hrdý, P, Jičín; Jaroslav Zajíc, P, Jičín; Miloslav Janák, P, Jičín; Jaroslav Brandejs, J, Rychnov n. Kn.; Milena Pšeničková, J, Jičín; Vladimír Svoboda, J, Trutnov; Eva Šíkolová, J, Jičín; Jiří Vidiečan, P, Jičín.

C. Josef Sršeň, J, Králíky pod Sněžníkem; Jan Řehák, J, Náchod; Josef Cerman, J, Dvůr Králové n. L.; Josef Malý, J, Králíky pod Sněžníkem; Jaromír Černý, J, Hradec Králové; Anna Zahradníková, J, Trutnov; P. Melgr, P, Jičín; Günther Stierand, P, Jičín; Zdeňka Pavelková, J, Rychnov n. Kn.; Jaroslava Kárníková, J, Rychnov n. Kn.

Pardubice.

B. Břetislav Novák, J, Chrudim; Jan Pochobradský, J, Pardubice; St. Kučera, J, Chrudim.

C. Jiří Pochobradský, J, Pardubice; Vlasta Erbesová, J, Polička; Drahomíra Chládková, J, Polička; Marie Zrzavá, J, Chotěboř; K. Kapoun, J, Polička; Milan Zvára, J, Pardubice.

Jihlava.

B. Jaroslav Nadrchal, J, Telč; Vlastimil Čevela, J, Třebíč; Jiří Šmíd, J, Telč; Eva Podušková, J, Pacov; Petr Dvořák, J, Třebíč; Karel Pospíšil, J, Třebíč; Zdeňka Dvořáčková, J, Telč; Pavel Pokorný, J, Třebíč; Antonín Chytka, J, Třebíč; Irma Nekolová, J, Jihlava.

C. Anna Škobrtalíková, J, Třebíč; Pavla Kunderová, J, Třebíč; Emil Svoboda, J, Pelhřimov; Marie Sobotková, J, Třebíč; František Radkovský, J, Telč; Karel Mikeš, J, Telč; M. Wagnerová, J, Dačice; Eva Mikulová, J, Třebíč; Jiří Dlabola, J, Havlíčkův Brod; Ludmila Lepičová, J, Pelhřimov.

Brno.

B. Stanislav Dvořák, 3.J, Brno; Jan Dvořáček, 2.J, Brno; Zdeněk Dvořáček, 2.J, Brno; Pavel Břeň, 3.J, Brno; Miloslava Jakešová, 4.J, Brno; Jan Vřešťál, 1.J, Brno; Zdeněk Kailer, 4.J, Brno; Jaromír Zelený, J, Bučovice; Ivan Švarc, J, Hustopeče; Pavel Doubrava, 4.J, Brno.

C. Jan Florián, J, Bučovice; Pavel Pěta, J, Boskovice; Josef Staněk, J, Boskovice; Milena Skálová, 4.J, Brno; Květoslava Šmídová, 4.J, Brno; Petr Hájíček, 8.J, Brno; Jiří Obdržálek, 4.J, Brno; Josef Šmetka, J, Boskovice; Karel Handlíř, J, Bučovice; Pavel Dus, 9.J, Brno.

Olomouc.

B. Zdeněk Skyva, J, Litovel; Jan Böhm, 1.J, Olomouc; Irena Frintová, 1.J, Olomouc; Olga Melkesová, 1.J, Olomouc; Miroslav Finger, J, Zábřeh; Jaroslav Král, J, Šumperk; Sta-

nislav Faltýnek, J, Přerov; Josef Jakubec, J, Prostějov; Jiří Koubek, P, Šumperk; Boris Vystavěl, J, Prostějov.

C. Vladimír Šabršula, J, Přerov; Bohumír Zdražil, P, Prostějov; Adolf Karger, J, Šumperk; Josef Vavrouch, 1.J, Olomouc; Julie Marchalová, J, Šumperk; Jana Procházková, 1.J, Olomouc; Lubomír Mikš, 1.J, Olomouc; Rudolf Mathan, J, Uničov; Jiří Kobza, J, Uničov; Svatava Slezáková, 1.J, Olomouc. Gottwaldov.

B. Jiří Tolar, J, Otrokovice; Karel Gerža, P, Rožnov pod Radh.; Josef Vrubel, J, Gottwaldov I; Ivan Suchánek, J, Kyjov; Pavel Veselý, J, Gottwaldov I; Karel Damborský, J, Uherský Brod.

C. Helena Trávníčková, J, Kroměříž; Petr Skočovský, J, Uherský Brod; Jaroslav Tomčík, P, Rožnov pod Radh.; Jan Kohout, J, Uh. Hradiště; Vladimír Výleta, J, Kyjov.

Ostrava.

B. Josef Havlíček, J, Ostrava I; Pavel Černík, J, Ostrava I; Pavel Širina, J, Ostrava I; Josef Popelář, J, Opava; Zdeněk Volný, J, Opava; Petr Pajas, J, Č. Těšín; Vendelín Kellner, J, Bílovec; Emilie Lukášová, J (polská), Orlová; Alena Kiedroňová, J, Č. Těšín; Jan Čermák, J, Ostrava I.

C. Zdeněk Pastrňák, J, Ostrava II; Jiří Grossmann, J, Č. Těšín; Jana Lobpreisová, J, Bohumín; Tomáš Skotnica, J, Ostrava VIII; Petr Vicherek, J, Ostrava VIII; Karel Najzar, J, Ostrava VII; Jan Kořenovský, J, N. Jičín; Petr Králíček, J, Ostrava I; Jiří Šmíd, J, Ostrava VII; Jan Hudeček, J, Ostrava I.

Bratislava.

B. Ján Pišút, 5.J, Bratislava; Miloslav Dubec, 6.J, Bratislava; Václav Kocián, 2.J, Bratislava; Juraj Švitel, J, Galanta; Viktor Martišovits, 2.J, Bratislava; Štefan Kečkéš, 2.J, Bratislava.

C. Vladimír Baštýř, 1.J, Bratislava; Fedor Šrobár, 5.J, Bratislava; Milan Bednár, 2.J, Bratislava.

Nitra.

B. Ján Straka, J, Partizánské; Ladislav Frömmel, P, Bánovce.

C. Jozef Čavojec, J, Prievidza, Eva Mäsiarová, J, Levice.
Banska Bystrica.

B. Ivan Bračok, J, Lučenec; Ludmila Chlebníčanová, J, Lučenec; Leo Bukovský, J, Lučenec; Ľubomír Jakuš, P, Banská Bystrica; Ladislav Petrus, J, Rim. Sobota.

C. Peter Podracký, P, Banská Bystrica; Jiří Macura, vojenská škola, Kremnica.

Žilina.

B. Buocik, J, Martin; Ďurčík, J, Ružomberok; Kempka, J, Ružomberok; Cheben, J, Ružomberok; Kapolka, J, Ružomberok; Pavlovič, J, Martin; Silbiger, J, Trstená.

C. Demáčák, J, Pov. Bystrica; Krivošová, J, Ružomberok; Čalkovská, I. J, Žilina.

C. Soutěž III. kola (kategorie A).

Do III. kola se přihlásilo 185 úspěšných řešitelů II. kola kategorie A. Z toho tři byli z 10. tříd jedenáctileté střední školy; ti soutěžili v obou kategoriích A, B. Podle organizačního řádu matematické olympiady lze připustit do III. kola jen 80 účastníků. Proto provedla organizační komise ÚVMO výběr žáků vzhledem k výsledkům, které podali v II. kole. Všech 80 pozvaných žáků se skutečně dostavilo; mezi nimi byly čtyři dívky.

V průběhu soutěže III. kola se hned prováděla předběžná klasifikace řešených úloh. Proto mohl předseda ÚVMO na odpolední besedě s účastníky soutěže představit ministru školství Dr. Fr. Kahudovi a všem přítomným dva nejlepší účastníky tohoto závěrečného kola soutěže. Jsou to s. Jaromír Jakeš, žák 11. třídy 4. jedenáctileté střední školy v Brně-Králově Poli, a s. Ehrfried Losert, žák 11.b třídy jedenáctileté střední školy v Opavě.

Podmínkám soutěže vyhovělo 34 účastníků. Prvních dvacet z nich se stalo podle organizačního řádu soutěže vítězi IV. ročníku matematické olympiady. Jejich jmenný seznam uvádíme.

*Pořadí vítězů IV. ročníku
matematické olympiady.*

(J = jedenáctiletá střední škola, P = průmyslová škola)

1. Jaromír Jakeš, 11. tř., 4.J, Brno-Královo Pole, Slovanské nám. 4.
2. Ehrfried Losert, 11.b, J, Opava, Komenského nám.
3. Petr Popov, 11. tř., J, Ostrava I, Maticní 5.
4. Tomáš Zemčík, 3.b, P chemická, Brno-Husovice, Vranovská 65.
5. Tadeáš Kornuta, 11.a, polská J, Český Těšín.
6. Břetislav Novák, 10.b, J, Chrudim, U Michalského nám.
7. Zdeněk Bažant, 11, 6.J, Praha 6, Bílá 1.
8. Vladimír Kohout, 11, J Dr Ant. Dvořáka, Kralupy n. Vlt.
9. Bedřich Hejda, 11.c, 15.J, Praha XII, Londýnská 34.
10. Leo Boček, 11, J, Litoměřice.
11. Bedřich Velický, 11, 4.J, Praha 4, Nad Kavalírkou 400.
12. Aleš Pultr, 10.d, 6.J, Praha 6, Bílá 1.
13. František Neuman, 11.a, 9.J, Brno-Husovice, Elgartova 3.
14. Jaromír Janko, 11, 2.J, Praha II, Štěpánská 22.
15. Karel Hruška, 11.b, 2.J, Liberec-Horní Růžodol.
16. Václav Vaněček, 11.c, 17.J, Praha 14, Křesomyslova 2.
17. Jiří Soukup, 11, 2.J, Praha II, Štěpánská 22.
18. Josef Křestán, 11.b, J Ant. Zápotockého, Karlovy Vary.
19. Jan Hrubeš, 11.a, 1.J, Olomouc.
20. Miloslav Smrž, 11.a, J, Třebíč, Václavské nám.

Dále uvádíme jména zbývajících čtrnácti úspěšných řešitelů III. kola MO podle pořadí:

Pavel Novotný, 11.b, 8.J, Brno, Mendlovo nám.; Miloslav Ludvík, 11.b, 7.J, Praha 7, Strossmayerovo nám.; Pavel Petrovič, 11.a, 2.J, Bratislava, Kulišкова 8; Zdeněk Ereimiáš, 11, 2.J, Praha II, Štěpánská 22; Bohuslav Sekerka, 11.b, J, Pardubice; Jindřich Brynda, 4, P vakuové elektrotechniky, Rožnov p. Radh. 823; Josef Mencl, 11.c, J J. K. Tyla, Hradec

Králové; Emil Navrátil, 11.a, J, Kolín; Jiří Švarc, 11, 4.J, Brno-Královo Pole, Slovanské nám.; Jiří Čížek, 10.b, 14.J, Praha XII, Korunní 2; Jindřich Adam, 4.d, P horní, Ostrava 7, Kratochvílova 7; Lumír Berdon, 11.a, J, Opava, Komenského 5; Josef Matouš, 11, J, Nový Bydžov; Michal Bordováč, 4.a, P elektrostrojní, Partizánske, kraj Nitrianský.

Vítězové III. kola byli odměněni čestnými cenami ministerstva školství. Peněžité ceny byly odstupňovány od 1000 Kčs do 100 Kčs. Dále byly uděleny ceny věcné (knihy, logaritmická pravítka a pod.).

Na závěr uvádíme seznam knih, které dostali vítězové III. kola matematické olympiady jako věcné ceny od ministerstva školství (výběr se řídil podle budoucího studijního zaměření na vysoké škole):

1. Berman, Zbierka úloh z matematickej analyzy.
2. Privalov, Analytické funkce.
3. V. V. Stěpanov, Kurs diferenciálních rovnic.
4. Mansurov-Popov, Teoretická elektrotechnika. (Rusky.)
5. Perelman, Spravočnik chimika. (Rusky.)
6. Fedulov—Kirejev, Učebnik fizičeskije chimii. (Rusky.)
7. Třetí ročník matematické olympiady.

III. ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE

1. Úlohy I. kola kategorie A.

1. Buďte dány zlomky

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d},$$

kde $a, b \neq 0, c, d \neq 0$ jsou daná čísla.

Určete číslo x tak, aby platilo

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{c+x}{d+x}. \quad (1)$$

Řešení. Předpokládejme, že úloha má řešení a že číslo x je tímto řešením. O číse x musí platit

$$b+x \neq 0, \quad d+x \neq 0, \quad (2)$$

jinak by zlomky v (1) neměly smysl. Ze vztahu (1) pak dostaneme ekvivalentní vztah

$$(a+x)(d+x) = (b+x)(c+x). \quad (3)$$

neboli

$$x(b+c-a-d) = ad-bc. \quad (4)$$

Jestliže tedy má úloha řešení, potom musí číslo x splňovat lineární rovnici (4). Rozeznávejme dále dva případy.

Případ [1]. Nechť je

$$b+c-a-d \neq 0. \quad (5)$$

Potom ze (4) plyne, že o číse x musí platit:

$$x = \frac{ad-bc}{b+c-a-d}. \quad (6)$$

Snadno zjistíme, že vzhledem ke vztahu (6) platí

$$\begin{aligned} b + x &= \frac{(b-a)(b-d)}{b+c-a-d}, \\ d + x &= \frac{(d-c)(b-d)}{b+c-a-d}; \end{aligned} \quad (7)$$

odtud plyne, že mají-li platit vztahy (2), musí současně platit vztahy

$$(b-a)(b-d) \neq 0, (d-c)(b-d) \neq 0$$

neboli

$$a \neq b \neq d \neq c. \quad (8)$$

Obráceně, když platí vztahy (5), (8), pak již platí vztahy (2) a číslo x dané vztahem (6) vyhovuje po řadě vztahům (4), (3) a (1), takže číslo x je jediným řešením úlohy. Platí-li (5) a neplatí-li (8), nemá úloha řešení, neboť zřejmě podle (7) neplatí alespoň jeden ze vztahů (2).

Případ [2]. Nechtě je

$$b + c - a - d = 0. \quad (9)$$

a) Nechtě je dále

$$ad - bc \neq 0 \quad (10)$$

neboli $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$. Pak úloha nemá řešení, neboť neexistuje číslo x , které splňuje rovnici (4).

b) Nechtě je dále

$$ad - bc = 0 \quad (11)$$

neboli

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Pak rovnice (4) má nekonečně mnoho řešení, a tedy rovnice (1) má za řešení každé číslo x , pro něž platí (2).

2. Rovnicí

$$y = 2^x + 2^{-x} \quad (1)$$

je dána funkce reálné proměnné x .

a) Vyšetřte množinu všech čísel, kterých tato funkce nabývá.

b) Výpočtem rozhodněte, ve kterých intervalech je daná funkce rostoucí a ve kterých je klesající; dále vyšetřte, pro která x nabývá daná funkce nejmenší hodnoty.

Řešení. a) Číslem budeme dále rozumět číslo reálné. Je známa věta: Budiž a kladné číslo; potom platí $a + \frac{1}{a} \geq 2$, při čemž rovnost nastane právě jen pro $a = 1$.

Je známo, že čísla $2^x, 2^{-x}$ jsou kladná pro každé x ; položíme $2^x = a$, potom je $2^{-x} = \frac{1}{a}$. Podle právě vyslovené věty je zřejmé $y \geq 2$; při tom rovnost nastane pro $2^x = 1$ neboli pro $x = 0$. Pro všechna x je tedy $y \geq 2$.

Obráceně dokážeme, že ke každému číslu $y_0 \geq 2$ lze určit číslo q tak, že platí

$$y_0 = 2^q + 2^{-q}. \quad (2)$$

Důkaz. Předpokládejme, že k danému číslu $y_0 \geq 2$ lze určit číslo q takové, že platí vztah (2). Potom je správná i rovnice, kterou dostaneme, když rovnici (2) znásobíme číslem $2^q \neq 0$. Po úpravě dostaneme

$$2^{2q} - y_0 \cdot 2^q + 1 = 0.$$

Pro stručnost položíme $2^q = z$, takže předchozí rovnice nabude tvaru

$$z^2 - y_0 \cdot z + 1 = 0. \quad (3)$$

Pro číslo q tady musí platit rovnice (3), ve které je $z = 2^q$. Nyní dokážeme, že obráceně k danému číslu

$$y_0 \geq 2 \quad (4)$$

lze určit číslo q takové, aby platil vztah (2). Diskriminant rovnice (3) je

$$D = y_0^2 - 4.$$

Vzhledem k předpokladu (4) je vždy $D \geq 0$; rovnost nastane pro $y_0 = 2$. Jsou tedy kořeny z_1, z_2 reálné. O nich platí

$$z_1 \cdot z_2 = 1, \quad z_1 + z_2 = y_0, \quad \text{kde } y_0 \geq 2.$$

Proto jsou z_1, z_2 kladná čísla. Rozeznávejme dvě možnosti:

Případ [1]. Jestliže je $D = 0$, je $z_1 = z_2 = 1$ a tedy $2^q = 1$, t. j. $q = 0$, což nastává pro $y_0 = 2$.

Případ [2]. Jestliže je $D > 0$, je $z_1 \neq z_2$. Pak je $2^{q_1} = z_1$, $2^{q_2} = z_2$. Odtud plyne

$$q_1 = \frac{\log z_1}{\log 2}, \quad q_2 = \frac{\log z_2}{\log 2}. \quad (5)$$

Obráceně se snadno přesvědčíme, že čísla q_1, q_2 daná vztahy (5) skutečně úloze vyhovují. Platí totiž

$$2^{q_1} + 2^{-q_1} = z_1 + \frac{1}{z_1} = y_0$$

a stejně i

$$2^{q_2} + 2^{-q_2} = z_2 + \frac{1}{z_2} = y_0.$$

Závěr úlohy a). Množinou všech čísel, kterých funkce (1) nabývá, jsou všechna čísla $y \geq 2$.

b) Z předchozího odstavce a) bezprostředně plyne, že nejmenší hodnoty funkce (1) nabývá pro $x = 0$.

V dalším uvažujeme dva případy podle toho, je-li $x \geq 0$ nebo $x \leq 0$.

Případ [1]. Dokážeme, že pro $x \geq 0$ je funkce (1) rostoucí.

Důkaz. Volme čísla

$$x_2 > x_1 \geq 0; \quad (6)$$

příslušné hodnoty funkce (1) označme y_2, y_1 . Máme dokázat, že platí $y_2 > y_1$.

Tu platí postupně

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= 2^{x_2} + 2^{-x_2} - (2^{x_1} + 2^{-x_1}) = \\ &= 2^{x_2} - 2^{x_1} - \left(\frac{1}{2^{x_1}} - \frac{1}{2^{x_2}} \right) = \\ &= 2^{x_2} - 2^{x_1} - \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{2^{x_1+x_2}} = (2^{x_2} - 2^{x_1}) \cdot \frac{2^{x_1+x_2} - 1}{2^{x_1+x_2}}, \end{aligned}$$

t. j.

$$y_2 - y_1 = (2^{x_2} - 2^{x_1}) \cdot \frac{2^{x_1+x_2} - 1}{2^{x_1+x_2}}. \quad (7)$$

Nyní víme, že funkce 2^x je funkcí rostoucí; přitom pro $x > 0$ je $2^x > 1$. Proto je $2^{x_2} - 2^{x_1} > 0$. Číslo $x_1 + x_2$ je kladné; proto jsou $2^{x_1+x_2} - 1, \frac{1}{2^{x_1+x_2}}$ kladná čísla. Odtud plyne, že součin těchto čísel na pravé straně vztahu (7) je rovněž číslo kladné, t. j. $y_2 - y_1 > 0$, neboli $y_2 > y_1$, což jsme měli dokázat.

Případ [2]. Konečně dokážeme, že pro $x \leq 0$ je funkce (1) klesající.

Důkaz. Rovnice (1) se nezmění, když místo x v ní položíme $-x$; odtud plyne, že graf funkce je souměrný podle osy y . Proto, je-li funkce pro $x \geq 0$ rostoucí, pak je pro $x \leq 0$ funkcí klesající, což jsme měli dokázat.

3. Jehlan má hlavní vrchol V a čtvercovou podstavu $MNPQ$; dále je dána velikost p hrany podstavu a odchylka β přímky VP od roviny $MNPQ$. Přitom každé dvě z rovin $MNPQ, VMN, VMQ$ jsou k sobě kolmé.

Do daného jehlanu je vepsán rovnoběžnostěn $ABCD A' B' C' D'$ o podstavě $ABCD$, při čemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Vrcholy $A \equiv M, B, C, D$ leží v rovině $MNPQ$; vrcholy

A', B', C' leží po řadě uvnitř hran VM, VN, VP . Dále je dána odchylka α přímky AC' od roviny $MNPQ$.

a) Narýsujte obraz obou těles v rovnoběžném promítání a proveďte diskusi řešitelnosti úlohy vzhledem k daným číslům p, α, β .

b) Vypočtěte objem O' rovnoběžnostěnu $ABCD A' B' C' D'$ pomocí daných prvků p, α, β .

Řešení (obr. 1, 2). a) Podle předpokladu úlohy platí o rovinách

$$VMN \perp MNPQ, VMQ \perp MNPQ;$$

proto o průsečnici VM rovin VMN, VMQ platí

$$VM \perp MNPQ. \quad (1)$$

Proto také platí $VMP \perp MNPQ$. Je tedy $\sphericalangle VMP = 90^\circ$, $\beta = \sphericalangle MPV$. Protože v trojúhelníku VMP je $\sphericalangle VMP = 90^\circ$, je nutně úhel $\sphericalangle MPV$ ostrý, t. j.

$$0 < \beta < 90^\circ. \quad (2)$$

Jestliže obráceně daná odchylka β přímky VP od roviny $MNPQ$ splňuje vztah (2), potom lze sestrojit jehlan, jehož podstavou je čtverec $MNPQ$ o straně p a jehož hlavním vrcholem je bod V , při čemž platí $\sphericalangle MPV = \beta$ a $\sphericalangle VMP = 90^\circ$.

Předpokládejme, že hledaný rovnoběžnostěn existuje. Protože je $A \equiv M$, leží bod C' uvnitř úsečky VP v rovině $VMP \perp MNPQ$, při čemž je $\sphericalangle PMC' = \alpha$; je tedy bod C' bodem ležícím uvnitř přepony VP pravoúhlého trojúhelníka VMP (v němž je $\sphericalangle M = 90^\circ$), a proto musí platit

$$0 < \alpha < 90^\circ. \quad (3)$$

Obráceně, platí-li tento vztah, lze rovnoběžnostěn sestrojit: V rovině VMP sestrojíme uvnitř úsečky VP bod C' tak, aby $\sphericalangle PMC' = \alpha$; bodem C' sestrojíme rovinu rovnoběžnou s rovinou $MNPQ$ a označíme po řadě A', B', C', D' její průsečíky s hranami VM, VN, VP, VQ . Zřejmě je

$A'B' \parallel MN, C'D' \parallel PQ, B'C' \parallel NP, D'A' \parallel QM, \sphericalangle B'A'D' = 90^\circ$,

takže $A'B'C'D'$ je obdélník. Ale z podobnosti trojúhelníků v pobočných stěnách jehlanu $V(MNPQ)$ plyne

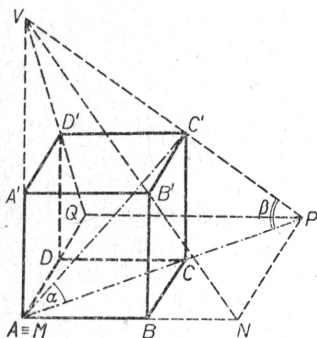
$$\frac{A'B'}{MN} = \frac{B'C'}{NP} = \frac{C'D'}{PQ} = \frac{D'A'}{QM} = k, \quad (4)$$

kde $0 < k < 1$. Ale $MNPQ$ je čtverec, o jehož stranách platí

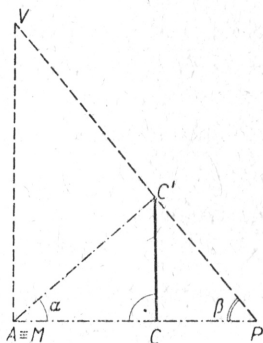
$$MN = NP = PQ = QM = p;$$

proto podle (4) je také

$$A'B' = B'C' = C'D' = D'A' = kp.$$



Obr. 1.



Obr. 2.

Je tedy $A'B'C'D'$ čtverec; paty kolmic vedených jeho vrcholy k rovině $MNPQ$ označme $A \equiv M, B, C, D$. Bod B zřejmě padne dovnitř hrany MN , bod D dovnitř hrany MQ a bod C dovnitř úsečky MP ; protože je $AA' \perp MNPQ$ a protože $ABCD$ je zřejmě čtverec shodný se čtvercem $A'B'C'D'$, je hledaný rovnoběžnostěn kvádr se čtvercovou podstavou. Za předpokladu (3) tento kvádr jistě existuje. Tím je úloha a) řešena.

b) Pro objem O' kváдру z úlohy a) platí

$$O' = AB^2 \cdot CC'. \quad (5)$$

Musíme určit velikosti úseček AB , CC' pomocí daných čísel p , α , β , o nichž platí vztahy (2), (3).

Především platí

$$\triangle PCC' \sim \triangle PMV,$$

neboť se oba trojúhelníky shodují v úhlech. Proto platí vztah

$$\frac{CC'}{VM} = \frac{CP}{MP}. \quad (6)$$

Označme

$$CC' = x, VM = v, MP = u. \quad (7)$$

Protože VM je odvěsna v pravoúhlém trojúhelníku VPM (kde $\sphericalangle M = 90^\circ$), je

$$v = u \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (8)$$

Z trojúhelníka MCC' (kde $\sphericalangle C = 90^\circ$) plyne

$$MC = x \cdot \operatorname{cotg} \alpha. \quad (9)$$

Dále zřejmě platí $CP = MP - MC$ neboli podle (7) a (9)

$$CP = u - x \cdot \operatorname{cotg} \alpha. \quad (10)$$

Po dosazení ze vztahů (7), (10) do (6) obdržíme

$$\frac{x}{v} = \frac{u - x \cdot \operatorname{cotg} \alpha}{u}.$$

Odtud snadno vypočítáme, že

$$x = \frac{uv}{u + v \cdot \operatorname{cotg} \alpha}, \quad (11)$$

kde jmenovatel je jistě kladné číslo. Dosadíme-li sem z výrazu (8), obdržíme pro x výraz

$$x = \frac{u \cdot \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Ale $u = MP$ je úhlopříčka čtverce $MNPQ$ o straně p ; proto je

$$u = p\sqrt{2}$$

a pro x tedy platí

$$x = \frac{p\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}. \quad (12)$$

Protože úsečka AB je stranou čtverce $ABCD$, jehož úhlopříčka je MC , platí

$$AB = \frac{MC}{\sqrt{2}}$$

neboli podle (9)

$$AB = \frac{x \cdot \operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{2}}. \quad (13)$$

Po dosazení z prvního vztahu (7) a ze vztahu (13) do (5) dostáváme

$$O' = \frac{1}{2}x^3 \cdot \operatorname{cotg}^2\alpha.$$

Dosadíme-li sem za x ze vztahu (12), obdržíme konečně

$$O' = \frac{p^3 \cdot \sqrt{2} \operatorname{cotg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^3\beta}{(1 + \operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)^3}.$$

Poznámka. Předchozí výsledek lze snadno převést na tvar

$$O' = \frac{p^3 \cdot \sqrt{2} \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin^3\beta}{\sin^3(\alpha + \beta)};$$

k tomuto výsledku dospějeme přímo, když k řešení trojúhelníka MPC' užijeme sinové věty.

4. Kosý kruhový kužel má podstavu s poloměrem r ; výška kužela má velikost v , přičemž její päta na rovine podstavy má od středu podstavy vzdálenost d . Určte konstruktivně tie rezy daného kužela vrcholovými rovinami, ktoré sú pravouhlými trojuholníkmi a ktoré obsahujú stred podstavy kužela.

Preskúmajte podmienky riešiteľnosti.

Riešenie. Označme S stred podstavy daného kosého kužela, V jeho vrchol a P päť kolmice vedenej bodom V na rovinu ϱ podstavy kužela; jeho kruhová hrana je kružnica $k \equiv (S, r)$. Pretože kužel je kosý, je nevyhnutne $S \neq P$ a teda $d > 0$.

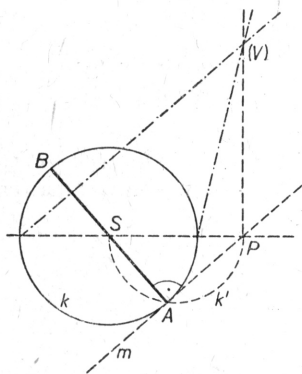
Predpokladajme, že úloha má riešenie a označme VAB jeden hľadaný trojuholník, kde AB je priemer kružnice k .

Rozoznávajme dve možnosti:

[1]. Pravý uhol v trojuholníku VAB je pri vrchole A (prípád, že pravý uhol je pri vrchole B , možno previesť na tento prípad výmenou označenia bodov A, B).

[2]. Pravý uhol v trojuholníku VAB je pri vrchole V .

Prípád [1]. Nech je $\sphericalangle BAV = 90^\circ$. Potom je $AS \perp VA$, $AS \perp VP$ (lebo AS leží v rovine ϱ podstavy a je $VP \perp \varrho$). Priamka AS je teda kolmá k priamkam VA, VP . Tu sú možné dva prípady:



Obr. 3.

a) Nech priamky VA, VP splývajú, t. j. platí $A \equiv P$, takže bod P padne na kružnicu k . Potom je rovina $VSP \perp \varrho$ rovinou súmernosti daného kužela a pretne ho v trojuholníku VAB (kde $A \equiv P$) s pravým uhlom pri vrchole A , pričom AB je priemer kružnice k .

b) Nech priamky VA, VP sú rôznobežky, t. j. platí $A \neq P$ (obr. 3). Potom priamka AS je kolmá k rovine VAP , takže je $AS \perp AP$. Pretože platí $A \neq S$, $A \neq P$, $P \neq S$, existuje trojuholník SPA s pravým uhlom

pri vrchole A . Stade vyplýva konštrukcia bodu A :

Zostrojme kružnicu k' nad priemerom SP a označme A jej spoločný bod s kružnicou k .

Pretože musí byť $A \neq P$, musí bod A ležať mimo priamky SP , t. j. kružnice k, k' sa musia pretať v dvoch rôznych bodoch. Podmienka riešiteľnosti úlohy teda je, aby pre polomery a strednú kružnic k, k' platilo

$$|r - \frac{1}{2}d| < \frac{1}{2}d < r + \frac{1}{2}d$$

alebo

$$|r - \frac{1}{2}d| < \frac{1}{2}d.$$

Táto podmienka je ekvivalentná s nerovnosťami

$$r - \frac{1}{2}d < \frac{1}{2}d, \quad \frac{1}{2}d - r < \frac{1}{2}d.$$

Druhá z týchto nerovností je vždy splnená; z prvej vyplýva

$$r < d,$$

t. j. bod P musí ležať zvonku kružnice k .

Ak obrátene je $r < d$, ľahko sa zistí, že kružnice k, k' majú dva rôzne priesečníky a úloha má dve riešenia.

Záver prípadu [1]. Úloha má jedno riešenie, keď bod P padne na kružnicu k a má dve riešenia, keď bod P padne zvonku kružnice k . Inak nemá riešenie (t. j. keď bod $P \neq S$ padne dovnútra kružnice k).

Prípad [2]. Nech je $\sphericalangle AVB = 90^\circ$; pritom je AB priemer kružnice k . Označme κ guľovú plochu so stredom S a polomerom r . Z Thaletovej vety vyplýva, že bod V musí ležať na ploche κ mimo kružnice k (mimo roviny ϱ); okrem toho bod V nepadne na plochu κ a na kolmicu p vedenú bodom S k rovine ϱ (daný kužeľ podľa predpokladu nie je rotačný).

Ak obrátene zvolíme na ploche κ bod W taký, že neleží ani na kružnici k , ani na priamke p , potom ho možno považovať za vrchol kosého kužeľa s podstavnou hranou k . Potom každá rovina ω , ktorá prechádza bodmi S, W , pretne kružnicu k v bodoch $A \neq B$ priemeru AB ; táto rovina $\omega \equiv ABW$ pretne plochu κ v kružnici $l \equiv (S, r)$, pričom podľa Thaletovej vety je $\sphericalangle AWB = 90^\circ$.

Záver prípadu [2]. Úloha má nekonečne mnoho riešení, keď bod V leží na guľovej ploche κ , ktorá má stred S a polomer r ; podľa predpokladu úlohy neleží V ani v rovine ϱ ani na kolmici $p \perp \varrho$ vedenej bodom S .

Keď bod V neleží na tejto ploche κ , nemá úloha v prípade [2] riešenie.

5. Určte všetky trojice x, y, z prirodzených čísel, ktoré splňujú rovnicu

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \quad (1)$$

Riešenie. Ak trojica prirodzených čísel $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ je jedno riešenie rovnice (1), je zrejme aj trojica čísel $\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0$, kde $\lambda > 1$ je prirodzené číslo, riešením tejto rovnice. Preto budeme skúmať len také riešenia rovnice (1), kde čísla v trojici x, y, z sú nesúdeliteľné prirodzené čísla.

Predpokladajme, že taká trojica existuje. Pretože zlomky $\frac{1}{x}$,

$\frac{1}{y}$ sú kladné čísla, platí $\frac{1}{x} < \frac{1}{z}, \frac{1}{y} < \frac{1}{z}$ alebo $x > z, y > z$.

Existujú teda prirodzené čísla p, q také, že platí

$$x = z + p, y = z + q, \quad (2)$$

pričom vzhľadom na vzťah (1) platí

$$\frac{1}{z+p} + \frac{1}{z+q} = \frac{1}{z}.$$

Stade po ľahkej úprave dostaneme

$$z^2 = pq. \quad (3)$$

Zo vzťahu (3) dokážeme, že p, q musia byť nesúdeliteľné čísla.

Predpokladajme opak, totiž, že čísla p, q majú spoločného deliteľa $d > 1$; potom je podľa (3) číslo d^2 deliteľom čísla z^2 .

Z toho vyplýva, že číslo d je deliteľom čísla z . Potom zo vzťahov (2) vyplýva, že číslo d je deliteľom aj čísel x, y alebo, že čísla x, y, z majú spoločného deliteľa $d > 1$; avšak to je proti predpokladu, že čísla x, y, z sú nesúdeliteľné. Čísla p, q musia byť teda nesúdeliteľné.

Podľa (3) musí byť pq druhou mocninou prirodzeného čísla. Pretože však p, q sú nesúdeliteľné čísla, musí byť každé z nich druhou mocninou prirodzeného čísla, t. j. platí $p = m^2, q = n^2$, kde m, n sú nesúdeliteľné čísla. Podľa (3) musí potom o číse z platiť $z = m \cdot n$ a podľa (2) o číslach x, y musí platiť $x = m(m + n), y = n(m + n)$.

Obrátene, trojica čísel $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, kde

$$x_0 = m(m + n), y_0 = n(m + n), z_0 = mn \quad (4)$$

a kde m, n sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, skutočne vyhovuje rovnici (1), ako sa ľahko presvedčíme dosadením.

Tým sme preskúmali všetky trojice čísel x, y, z , ktoré sú nesúdeliteľné a ktoré vyhovujú rovnici (1). Ďalšie riešenia dostaneme, keď položíme $x = \lambda x_0, y = \lambda y_0, z = \lambda z_0$, kde $\lambda > 1$ je ľubovoľné prirodzené číslo a čísla x_0, y_0, z_0 sú dané vzťahmi (4). Tým sme určili všetky riešenia rovnice (1).

Jiné riešenie. Vzťah (1) je pro každou trojicu prirodzených čísel, jež mu vyhovujú, ekvivalentní se vzťahem

$$xy = xz + yz$$

neboli se vzťahem

$$xy - xz - yz = 0.$$

Tento vzťah lze upraviť na tvar

$$xy - xz - yz + z^2 = z^2$$

neboli

$$(x - z) \cdot (y - z) = z^2. \quad (5)$$

Položíme

$$x - z = u, y - z = v. \quad (6)$$

Podle (5) o číselech u, v platí

$$u \cdot v = z^2. \quad (7)$$

Jestliže tedy x, y, z je trojice čísel, která vyhovuje vztahu (1), lze podle (6) určit přirozená čísla u, v tak, že platí vztah (7).

Určíme obráceně čísla x, y, z takto: Zvolme libovolně přirozené číslo z . Vypočteme číslo z^2 a rozložme je v součin dvou přirozených čísel u, v . Podle vztahu (7) vypočteme čísla x, y , t. j. čísla

$$x = z + u, y = z + v. \quad (8)$$

Snadno zjistíme, že tato čísla x, y, z vyhovují vztahu (1).

Je zřejmé, že všechna řešení vztahu (1) dostaneme, když ke každému přirozenému číslu z určíme všechny dvojice přirozených čísel u, v , která vyhovují vztahu (7), a pak určíme příslušná čísla x, y podle (8). Tím je úloha řešena.

Řešil s. B. Sekerka,

11. tř. jedenáctiletky, Pardubice.

6. Určte počet trojuholníkov, ktoré majú tieto dve vlastnosti:

(1) Veľkosti strán trojuholníkov sú prirodzené čísla.

(2) Veľkosť ktorejkoľvek strany týchto trojuholníkov nie je väčšia než dané prirodzené číslo n .

Riešenie. I. Nech uvažovaný trojuholník má najväčšiu stranu $x = p$, kde $p \leq n$ je zvolené prirodzené číslo. Uvažujme najprv tieto prípady.

Nech druhá strana je $y = p$, potom tretia strana z sa rovná niektorému z čísel

$$p, p - 1, p - 2, \dots, 1;$$

to je celkom p trojuholníkov.

Nech druhá strana je $y = p - 1$, potom tretia strana $z \leq y$ sa rovná niektorému z čísel

$$p - 1, p - 2, \dots, 2$$

(tretia strana nemôže totiž byť 1, lebo najväčšia strana $x = p$ trojuholníka je menšia než súčet $p - 1 + z$ ostatných dvoch; tento fakt nebudeme už pri ďalších možnostiach pripomínať); to je celkom $p - 2$ trojuholníkov.

Nech druhá strana je $y = p - 2$; potom tretia strana sa rovná niektorému z čísel

$$p - 2, p - 3, \dots, 3;$$

to je celkom $p - 4$ trojuholníkov.

Urobme teda túto všeobecnú úvahu:

Nech druhá strana je $y = p - k$, kde prirodzené číslo $k < p$; potom tretia strana z sa rovná niektorému z čísel

$$p - k, p - k - 1, \dots, k + 1 = p - (p - k - 1);$$

to je celkom $p - 2k$ trojuholníkov.

Označme s_p počet všetkých trojuholníkov, ktorých jedna strana je p a každá zo zvyšujúcich strán nie je väčšia než p .

a) Nech p je párne číslo (prirodzené); potom je

$$\begin{aligned} s_p &= p + (p - 2) + (p - 4) + \dots + 2 = \frac{1}{2}(p + 2) \cdot \frac{p}{2} = \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

b) Nech p je nepárne (prirodzené) číslo; potom je

$$s_p = p + (p - 2) + (p - 4) + \dots + 1 = \left(\frac{p + 1}{2}\right)^2.$$

II. Označme S_n počet trojuholníkov, ktoré vyhovujú textu úlohy; podľa záveru odstavca I je

$$S_n = s_1 + s_2 + \dots + s_n.$$

a) Pre párne n dostaneme*)

$$\begin{aligned} S_n &= 1^2 + (1^2 + 1) + 2^2 + (2^2 + 2) + \dots + \\ &\quad + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{2}\right] = \\ &= 2 \left[1^2 + 2^2 + \dots + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \right] + \left[1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) (n + 1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right); \end{aligned}$$

po ľahkej úprave dostaneme

$$S_n = \frac{1}{24} \cdot n(n+2)(2n+5). \quad (1)$$

b) Pre nepárne n je $S_n = S_{n-1} + s_n$, t. j.

$$S_n = \frac{1}{24} (n-1)(n+1)(2n+3) + \frac{1}{4} (n+1)^2;$$

stade po ľahkej úprave dostaneme

$$S_n = \frac{1}{24} (n+1)(n+3)(2n+1). \quad (2)$$

Vzorcami (1), (2) sme úlohu rozriešili.

7. V danej rovine ϱ nech je daný pravidelný mnohouholník $A_1A_2A_3 \dots A_n$ so stredom S ; dané je $SA_1 = r$ a prirodzené číslo $n > 2$. Vnútri jedného z oboch opačných polpriestorov vyfatých rovinou ϱ zvolme bod U tak, aby platilo $SU \perp \varrho$.

*) Súčet $1^2 + 2^2 + \dots + \left(\frac{n}{2}\right)^2$ je utvorený podľa záveru odst.

Ib) a súčet $(1^2 + 1) + (2^2 + 2) \dots + \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n}{2}\right]$ podľa odst. Ia).

Vnútri polpriamky SU zvolíme bod V a uvažujme o pravidelnom ihlane s hlavným vrcholom V a s podstavou $A_1A_2A_3\dots A_n$.

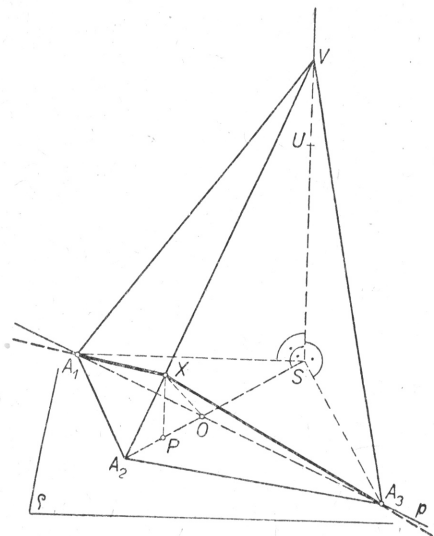
Bodom A_1 položíme rovinu $\omega \perp VA_2$ a označme X jej priesečník s priamkou VA_2 .

a) Veľkosť jedného z oboch uhlov $\sphericalangle A_1XA_3, 2R - \sphericalangle A_1XA_3$ udáva odchýlku rovín VA_1A_2, VA_2A_3 pobočných stien daného ihlana. Dokážte to.

b) Čo vyplní bod X , keď bod V prebieha vnútro polpriamky SU ?

c) Pre ktorú polohu bodu V má bod X od roviny ϱ najväčšiu vzdialenosť a aká je v tomto prípade vzdialenosť príslušného bodu V od roviny ϱ ?

Riešenie. a) Pretože je (obr. 4)



Obr. 4.

$$VA_2 \perp \omega,$$

platí o rovinách ω , VA_2S

$$\omega \perp VA_2S. \quad (1)$$

Ďalej je

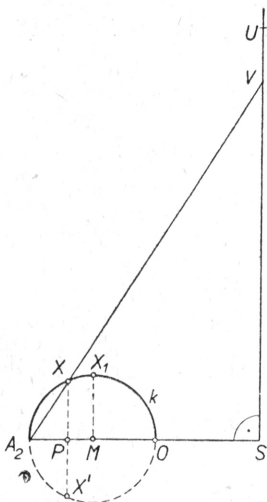
$$\varrho \perp VA_2S,$$

pretože $SV \perp \varrho$.

Pretože neplatí $\varrho \perp VA_2$, roviny ϱ, ω nie sú rovnobežné; pretože majú spoločný bod A_1 , pretnú sa v priamke $p \perp VA_2S$.

Ale body A_1, A_3 sú súmerne združené podľa priamky A_2S (známa vlastnosť pravidelného mnohoúhelníka); preto je zrejmé $p \equiv A_1A_3$. Prechádza teda rovina ω tiež bodom A_3 .

Označme O spoločný bod úsečiek A_1A_3, A_2S . Platí $OA_1 = OA_3$ a bod O padne dovnútra úsečky A_2S . Preto pāta X (obr. 5) kolmice zostrojenej bodom O k priamke A_2V leží vnútri úsečky A_2V (trojuholník A_2VS má pri vrchole S pravý uhol, takže pri vrcholech A_2, V sú ostré uhly). Pretože rôznobežky OA_1, OX stoja kolmo k priamke A_2V , leží bod X v rovine ω .



Obr. 5.

Pretože platí (1), platí aj

$$VA_1A_2 \perp \omega, VA_2A_3 \perp \omega;$$

pretože trojuholník XA_1A_3 existuje, existuje aj $\sphericalangle A_1XA_3$, ktorý leží v rovine ω . Preto ak je $\sphericalangle A_1XA_3 \leq 90^\circ$, je veľkosť uhla A_1XA_3 odchýlkou rovín VA_1A_2, VA_2A_3 ; avšak ak je $\sphericalangle A_1XA_3 > 90^\circ$, podľa definície odchýlky rovín je odchýlka

spomínaných rovín $180^\circ - \sphericalangle A_1XA_3$. Tým sme tvrdenie úlohy a) dokázali.

b) Z konštrukcie bodu X v predošlej úlohe a) vyplýva, že bod X leží vnútri polroviny SA_2U , a to tak, že $\sphericalangle A_2XO = 90^\circ$; pritom body A_2, O sú dva určité body, nezávislé od polohy bodu V vnútri polpriamky SU . Avšak také body X ležia podľa Thaletovej vety na kružnici opísanej nad úsečkou OA_2 ako priemerom. Nazveme k polkružnicu s priemerom OA_2 , ktorá leží v polrovine SA_2U ; potom z vlastností bodu X vyplýva, že bod X je bodom tejto polkružnice k , pričom je $X \neq O$, $X \neq A_2$.

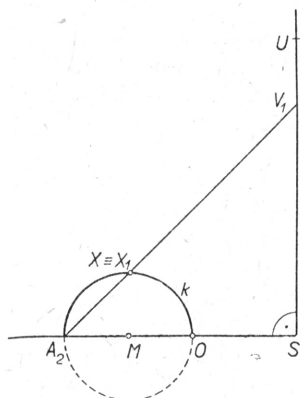
Obrátene, každý bod X_0 , ktorý leží vnútri tejto polkružnice k , určuje práve jeden ihlan, ako vyplýva z tejto konštrukcie: Polpriamky A_2X_0 , SU ležia v polrovine SA_2U (pretože X_0 leží vnútri k , sú A_2X_0 , A_2O rôzne polpriamky). Pritom je $\sphericalangle OA_2X_0 < 90^\circ$ (je to uhol trojuholníka A_2OX_0 , kde $\sphericalangle X = 90^\circ$), $\sphericalangle A_2SU = 90^\circ$. Preto podľa Eukleidovho postulátu majú polpriamky A_2X_0 , SU spoločný bod V_0 , ktorý leží vnútri polroviny SA_2U a tým aj vnútri polpriamky SU . Zvoľme bod V_0 za hlavný vrchol ihlanu J_0 , ktorého podstavou je daný mnohouholník. Potom sa ľahko zistí, že rovina $\omega \perp V_0A_2$ a prechádzajúci bodom A_1 pretína priamku VA_2 práve v bode X_0 .

Záver. Keď bod V prebieha vnútro polpriamky SU , vyplní bod X vnútro polkružnice k , ktorú sme vyššie zostrojili.

c) Označme P päť kolmice vedenej bodom X z úloh a), b) k rovine ϱ . Bod P zrejme padne dovnútra úsečky OA_2 . Veľkosť úsečky XP je vzdialenosť bodu X od roviny ϱ . Pretože bod P je stredom istej tetivy $XX' \perp OA_2$ kružnice, opísanej nad úsečkou OA_2 ako priemerom, a pretože rovina $A_2SV \perp \varrho$, je $XP = \frac{1}{2}XX'$ maximálne vtedy, keď je tetiva XX' priemerom. Označme M stred úsečky OA_2 a X_1 bod polkružnice k , pre ktorý je $X_1M \perp OA_2$. Takto zostrojený bod X_1 má sku-

točne zo všetkých bodov polkružnice k maximálnu vzdialenosť od roviny ϱ .

Označme V_1 priesečník polpriamok A_2X_1 , SU (obr. 6). Pretože je $A_2M = MX_1$ a $\sphericalangle A_2MX_1 = 90^\circ$, preto je uhol $\sphericalangle MA_2X_1 = 45^\circ$. Z toho vyplýva, že v trojuholníku V_1A_2S (kde $\sphericalangle S = 90^\circ$) je tiež $\sphericalangle V_1A_2S = \sphericalangle A_2V_1S = 45^\circ$.



Obr. 6.

Záver. Bod X z úlohy b) má od roviny ϱ maximálnu vzdialenosť vtedy, keď hlavný vrchol V_1 ihlana zvolíme na polpriamke SU tak, aby platilo $SV_1 = SA_2$.

8. Nech čísla

$$a \geq b \geq c \quad (1)$$

udávajú veľkosti strán daného trojuholníka ABC . Určte také číslo x , aby čísla

$$a + x, b + x, c + x$$

udávali veľkosti strán pravouhlého trojuholníka $A_1B_1C_1$.

Stanovte podmienky riešiteľnosti úlohy.

Riešenie. I. Pri riešení úlohy použijeme tieto pomocné vety:

Označme a, b, c veľkosti strán trojuholníka ABC ; ďalej označme

$$z = b^2 + c^2 - a^2, \sphericalangle CAB = \alpha.$$

Veta V1. Ak je $z = 0$, potom v trojuholníku ABC je $\alpha = 90^\circ$.

Veta V2. Ak je $z > 0$, potom v trojuholníku ABC je $\alpha < 90^\circ$.

Veta **V3**. Ak je $z < 0$, potom v trojuholníku ABC je $\alpha > 90^\circ$.

Tieto vety možno obrátiť (porovnaj úlohu 8 v I. kole kategórie B).

II. O veľkostiach strán a, b, c daného trojuholníka ABC platí predovšetkým trojuholníková nerovnosť

$$b - c < a < b + c.$$

Vzhľadom na to, že je $c > 0$, vyplýva vzťah $b - c < a$ z predpokladu (1). Vzťah $a < b + c$, ktorý možno písať aj v tvare

$$b + c - a > 0, \quad (2)$$

je jednou z nutných podmienok riešiteľnosti úlohy; jeho platnosť vyplýva z existencie daného trojuholníka ABC .

Predpokladajme, že úloha má riešenie, t. j. že existuje reálne číslo x , ktoré vyhovuje úlohe.

Keď platí vzťah (1), potom vždy platí aj vzťah

$$a + x \geq b + x \geq c + x \quad (3)$$

pre každé reálne číslo x . Pretože najväčšou stranou pravouhlého trojuholníka je prepona, ak má mať úloha riešenie, musí sa jej veľkosť rovnať číslu $a + x$. Avšak potom musí vo vzťahu (3) platiť $a + x > b + x$, lebo prepona pravouhlého trojuholníka je jeho najväčšou stranou. Musí teda byť $a > b$. Preto vzťah (1) musí mať tvar

$$a > b \geq c, \quad (4)$$

takže o veľkostiach strán trojuholníka $A_1B_1C_1$ platí

$$a + x > b + x \geq c + x. \quad (5)$$

Pretože veľkosti strán trojuholníka $A_1B_1C_1$ sú kladné čísla, musí platiť $c + x > 0$; o číslach x musí preto platiť

$$x > -c. \quad (6)$$

Pre trojuholník $A_1B_1C_1$ platí Pythagorova veta, t. j.

$$(a + x)^2 = (b + x)^2 + (c + x)^2 \quad (7')$$

alebo

$$x^2 + 2(b + c - a)x + (b^2 + c^2 - a^2) = 0. \quad (7)$$

Pretože riešenie x podľa predpokladu, ktorý sme urobili, existuje, diskriminant D' rovnice (7) je nezáporné číslo. Ľahko vypočítame, že

$$D = \frac{1}{4}D' = (b + c - a)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)$$

alebo

$$\frac{1}{4}D' = 2(a - b)(a - c), \quad (8)$$

čo je vzhľadom na nutnú podmienku (4) vždy kladné číslo. Preto má rovnica (7) dva reálne rôzne korene, ktoré označíme tak, aby platilo

$$x_1 > x_2,$$

kde

$$x_1 = a - b - c + \sqrt{D}, \quad x_2 = a - b - c - \sqrt{D}. \quad (9)$$

Vzhľadom na nutnú podmienku (2) je vždy $x_2 < 0$.

Teraz dokážeme: Za predpokladu, že platia vzťahy (2), (4), číslo $x = x_2$ nie je riešením úlohy. Naproti tomu číslo $x = x_1$ je za uvedených predpokladov vždy riešením úlohy.

III. Číslo $x = x_2$ nie je riešením úlohy.

Dôkaz. O čísle x_2 zo vzťahu (9) platí

$$c + x_2 = a - b - \sqrt{D}.$$

Dokážeme, že je $c + x_2 < 0$, t. j. že pre $x = x_2$ nie je splnený nutný vzťah (6).

Porovnajme čísla $(a - b)^2$, D . Vzhľadom na vzťahy (4) a (8) platí

$$\begin{aligned} (a - b)^2 - 2(a - b)(a - c) &= (a - b)[a - b - 2(a - c)] = \\ &= (a - b)(2c - a - b) = - (a - b)[(a - c) + (b - c)] < 0 \end{aligned}$$

(obe zátvorky sú podľa (4) kladné). Z toho vyplýva správnosť vzťahu

$$D > (a - b)^2.$$

Pretože podľa (8) a vzhľadom na (4) je $D > 0$, $a - b > 0$, vyplýva z predošlého vzťahu

$$\sqrt{D} > a - b$$

alebo $c + x_2 < 0$, čo sme mali dokázať.

IV. Číslo $x = x_1$ zo vzťahu (9) je za predpokladu platnosti vzťahov (2), (4) riešením úlohy.

Dôkaz. Predovšetkým je

$$c + x_1 = a - b + \sqrt{D};$$

pretože podľa (4) a (8) je $a - b > 0$, $\sqrt{D} > 0$, je aj $c + x_1 > 0$, takže pre $x = x_1$ platí vzťah (6).

Za predpokladu, že platí (2), (4), sú pre $x = x_1$ čísla (5) veľkosťami strán pravouhlého trojuholníka $A_1B_1C_1$; to dokážeme takto: Z platnosti vzťahu (7) vyplýva platnosť vzťahu (7'); stade podľa obrátenia Pythagorovej vety (pozri vetu **V1**) vyplýva, že trojuholník $A_1B_1C_1$ má pri vrchole A_1 pravý uhol.

Záver. Úloha má jediné riešenie, ak je $a \neq b$. Ak $a = b$, nemá úloha riešenie.

9. První tři členy geometrické posloupnosti (reálných čísel) mají součet s ; součet druhých mocnin těchto tří členů je $s^2 - 2hs$, kde $hs \neq 0$.

Určete první člen a kvocient této posloupnosti pomocí daných reálných čísel h, s .

Provedte diskusi řešitelnosti úlohy (v oboru reálných čísel) vzhledem k daným číslům h, s .

Řešení. Z textu úlohy vyplývá, že je $h \neq 0$, $s \neq 0$.

Hledáme reálná čísla x, y (x první člen, y kvocient) tak, aby platilo

$$\begin{aligned} x + xy + xy^2 &= s, \\ x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 &= s^2 - 2hs. \end{aligned} \tag{1}$$

Předpokládejme, že soustava (1) má řešení. Pak pro toto řešení platí

$$(x + xy + xy^2)^2 - (x^2 + x^2y^2 + x^2y^4) = 2x^2y + 2x^2y^2 + 2x^2y^3 = 2xy(x + xy + xy^2) = 2sxy;$$

odtud vzhledem k (1) plyne

$$s^2 - (s^2 - 2hs) = 2sxy$$

čili

$$2hs = 2sxy$$

čili

$$xy = h; \quad (2)$$

protože je $h \neq 0$, je též $x \neq 0$, $y \neq 0$.

První rovnici soustavy (1) můžeme psát také

$$xy + (xy)y + (xy)y^2 = sy;$$

odtud pomocí (2) dostáváme

$$h + hy + hy^2 = sy$$

čili

$$hy^2 + y(h - s) + h = 0. \quad (3)$$

Tato rovnice je kvadratickou rovnicí pro neznámou y (neboť je $h \neq 0$) a má reálné řešení tehdy a jen tehdy, když její diskriminant je nezáporný. Diskriminant je $\Delta = (h - s)^2 - 4h^2 = (s - 3h)(s + h)$.

Rozeznávejme nyní dva případy:

Případ [1]. Případ $\Delta = 0$ nastává pro $s = 3h$ a dále pro $s = -h$. Je-li $s = 3h$, rovnice (3) zní

$$hy^2 - 2hy + h = 0$$

čili

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

a má dvojnásobný kořen $y = 1$. Z rovnice (2) vyplývá $x = h$ a zkouškou se přesvědčíme, že čísla $x = h$, $y = 1$ jsou řešením soustavy (1), která pro $s = 3h$ má ovšem tvar

$$\begin{aligned}x + xy + xy^2 &= 3h, \\x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 &= h^2.\end{aligned}$$

Je-li $s = -h$, rovnice (3) zní $hy^2 + 2hy + h = 0$ čili

$$y^2 + 2y + 1 = 0$$

a má dvojnásobný kořen $y = -1$. Z rovnice (2) plyne $x = -h$ a zkouškou se přesvědčíme, že tyto hodnoty vyhovují soustavě (1), která pro $s = -h$ má ovšem tvar

$$\begin{aligned}x + xy + xy^2 &= s, \\x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 &= 3s^2.\end{aligned}$$

Případ [2]. Případ $\Delta > 0$ nastává, je-li buď současně $s - 3h > 0, s + h > 0$ nebo současně $s - 3h < 0, s + h < 0$.

Pak rovnice (3) má dva reálné různé kořeny (oba různé od nuly, neboť absolutní člen je $h \neq 0$), totiž

$$y_1 = \frac{-(h-s) + \sqrt{\Delta}}{2h}, \quad y_2 = \frac{-(h-s) - \sqrt{\Delta}}{2h}.$$

Soustava (1) má tedy buď řešení

$$y = y_1, \quad x = \frac{h}{y_1},$$

anebo má řešení

$$y = y_2, \quad x = \frac{h}{y_2},$$

jak se snadno přesvědčíme zkouškou.

10. Dokažte, že mnohočlen

$$a^6 - a^5 - a^4 + a^2 + a - 1 \quad (1)$$

je dělitelem mnohočlenu

$$a^{3n} - a^{2n+1} - a^{2n} - a^{2n-1} + a^{n+1} + a^n + a^{n-1} - 1, \quad (2)$$

kde n je přirozené číslo.

Řešení. I. Pomocná věta (**P**). Je známa tato věta: Dvojjčlen

$$x^r - 1,$$

kde r je dané přirozené číslo, je dělitelný dvojjčlenem

$$x - 1.$$

II. Pro $n = 1$ je daný mnohočlen (2) roven nule a věta platí.

III. Necht' je nadále $n > 1$. Mnohočlen (1) označme stručně **D** a mnohočlen (2) označme **M**. Provedme postupně tuto úpravu:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (a^{3n} - a^{2n}) - (a^{2n+1} - a^{n+1}) - (a^{2n-1} - a^{n-1}) + \\ &\quad + (a^n - 1) = \\ &= a^{2n}(a^n - 1) - a^{n+1}(a^n - 1) - a^{n-1}(a^n - 1) + \\ &\quad + (a^n - 1) = \\ &= (a^n - 1)(a^{2n} - a^{n+1} - a^{n-1} + 1) = \\ &= (a^n - 1)[a^{n+1}(a^{n-1} - 1) - (a^{n-1} - 1)] = \\ &= (a^n - 1)(a^{n-1} - 1)(a^{n+1} - 1), \end{aligned}$$

t. j.

$$\mathbf{M} = (a^{n-1} - 1)(a^n - 1)(a^{n+1} - 1). \quad (3)$$

Protože mnohočlen **D** dostaneme z mnohočlenu **M** pro $n = 2$, platí

$$\mathbf{D} = (a - 1)(a^2 - 1)(a^3 - 1). \quad (3')$$

Exponenty

$$n - 1, n, n + 1 \quad (4)$$

ve výrazu (3) jsou tři bezprostředně po sobě následující přirozená čísla (podle učiněného předpokladu je $n - 1 > 0$).

Proto je jedno z nich dělitelné třemi; dále jedno nebo dvě z nich jsou čísla sudá. Rozeznávejme tři případy.

Případ [1]. Nechť je $n - 1$, nebo $n + 1$ dělitelné třemi; označme to číslo l .

Čísla $n - 1$, $n + 1$ jsou buď obě sudá, nebo je sudé číslo n a pak jsou obě čísla $n - 1$, $n + 1$ lichá. V obou těchto případech existuje mezi čísly (4) číslo $s \neq l$, které je sudé. Třetí, zbývající číslo mezi čísly (4) označme t .

Pak dvojčlen $a^l - 1$ ve výrazu (3) má tvar $a^{3k} - 1$ neboli

$$(a^3)^k - 1, \quad (5)$$

kde k je přirozené číslo. Ale dvojčlen (5) je podle věty (P) dělitelným dvojčlenem

$$a^3 - 1. \quad (6)$$

Další činitel výrazu (3) má tvar $a^s - 1$ neboli

$$(a^2)^p - 1, \quad (7)$$

kde p je přirozené číslo. Podle věty (P) je dvojčlen (7) dělitelný dvojčlenem

$$a^2 - 1. \quad (8)$$

Konečně další (třetí) činitel výrazu (3) má tvar $a^t - 1$ a podle věty (P) je dělitelný dvojčlenem

$$a - 1. \quad (9)$$

Jeden ze tří činitelů (3) je tedy dělitelný dvojčlenem (6), další (od předchozího různý) je dělitelný dvojčlenem (8) a poslední činitel výrazu (3) (různý od předchozích) je dělitelný dvojčlenem (9); ale součin dvojčlenů (6), (8), (9) je právě mnohočlen **D** (viz (3')). Tím je pro tento případ věta dokázána.

Případ [2]. Nechť je číslo n ve (4) dělitelné třemi; označme je l . Nechť jsou dále čísla $n - 1$, $n + 1$ sudá; první označme s , druhé t .

Potom stejně jako v případě [1] snadno dokážeme platnost věty vyslovené v textu úlohy.

Případ [3]. Nechť je číslo n ve [4] dělitelné třemi a sudé, takže platí $n = 6k$, kde k je přirozené číslo.

Pak jsou obě čísla $n - 1$, $n + 1$ lichá, takže každý z činitelů $a^{n-1} - 1$, $a^{n+1} - 1$ ve výrazu (3) je dělitelný číslem

$$a - 1. \quad (10)$$

O dvojčlenu

$$a^{6k} - 1 \quad (11)$$

ve výrazu (3) platí

$$a^{6k} - 1 = (a^6)^k - 1;$$

podle věty (P) plyne, že je dělitelný výrazem $a^6 - 1$. Ale dále je

$$a^6 - 1 = (a^3 - 1)(a^3 + 1) = (a^3 - 1)(a + 1)(a^2 - a + 1),$$

takže výraz (11) je dělitelný výrazem

$$(a^3 - 1)(a + 1). \quad (12)$$

Jsou tedy jednotliví činitelé výrazu (3) po řadě dělitelní výrazy

$$a - 1, (a^3 - 1)(a + 1), a - 1.$$

Avšak součin těchto výrazů je právě mnohočlen **D** (viz (3')). Proto platí věta vyslovená v textu úlohy i pro tento případ [3].

Protože žádný jiný případ, než jsou diskutované případy [1] až [3], nemůže nastat, je věta dokázána.

11. Buď dán obdélník $ABCD$ svými rozměry $AB = a$, $BC = b$, kde $a \geq b$; dále buď dáno číslo $m > 0$. Zvolte bod X uvnitř úsečky CD a bod Y uvnitř úsečky BC a sestrojte obdélník XYZ .

a) Vyšetřete množinu všech takto sestrojených bodů Z , pro něž platí

$$\sphericalangle XAD = \sphericalangle YAB. \quad (1)$$

vzhledem ke vztahům (3) a označení $AB = a$, $AD = b$ odtud dostaneme

$$\frac{AY_0}{ZY_0} = \frac{a}{b}.$$

Odtud plyne, že pravoúhlé trojúhelníky AZY_0 , ABC (s pravými úhly při vrcholech Y_0 , B) jsou podobné, t. j. platí

$$\triangle AZY_0 \sim \triangle ACB;$$

proto je

$$\sphericalangle ZAY_0 = \sphericalangle CAB$$

pro všechny obdélníky $XCYZ$, které vyhovují podmínkám úlohy. Padne tedy každý bod Z dovnitř úsečky AE , kde E je bod polopřímky DC takový, že platí

$$\sphericalangle DAE = \sphericalangle CAB.$$

Protože zřejmě platí

$$\triangle AED \sim \triangle ACB \text{ (shodnost ve dvou úhlech),}$$

je

$$\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB}$$

neboli

$$DE = \frac{b^2}{a}. \quad (4)$$

Padne tedy bod E pro $a = b$ do bodu C ; pro $a > b$ padne bod E dovnitř úsečky DC . Proto každý vnitřní bod úsečky AE padne dovnitř obdélníka $ABCD$.

II. Nyní výsledek odstavce I obrátíme. Uvnitř úsečky AE , sestrojené v odst. I, zvolme libovolný bod a označme jej Z . Dále označme X , Y paty kolmic vedených po řadě bodem Z k přímkám DC , BC ; body X , Y padnou zřejmě po řadě dovnitř

úseček DC , BC . Průsečík přímek ZY , AD označme Y_0 ; zřejmě je $AY_0 = BY$. Z podobnosti trojúhelníků AZY_0 , AED dostaneme

$$\frac{ZY_0}{DE} = \frac{AY_0}{AD};$$

protože však je $ZY_0 = DX$, dostaneme odtud vzhledem k tomu, že je $AD = b$ a vzhledem ke vztahu (4), že

$$DX = \frac{AY_0}{b} \cdot \frac{b^2}{a} \text{ neboli } \frac{DX}{b} = \frac{AY_0}{a}.$$

Protože však je $AY_0 = BY$, $b = AD$, $a = AB$, plyne z předchozí rovnosti vztah

$$\frac{DX}{AD} = \frac{BY}{AB};$$

proto jsou oba pravoúhlé trojúhelníky AXD , AYB (s pravými úhly při vrcholech D , B) podobné, t. j.,

$$\triangle AXD \sim \triangle AYB.$$

Proto je

$$\sphericalangle XAD = \sphericalangle YAB.$$

Tím je dokázáno: Množina všech bodů Z , které vyhovují úloze, jsou všechny vnitřní body úsečky AE , sestrojené na konci odstavce I.

Úloha b). I. Abychom sestrojili úsečku XY , která vyhovuje podmínkám (2) úlohy, stačí podle výsledku úlohy a) sestrojit obdélník $XCYZ$ takový, že v něm je úhlopříčka $CZ = m$; to proto, že v obdélníku $XCYZ$ o úhlopříčkách platí $XY = CZ$.

Podle toho sestrojíme nejdříve bod Z takový, aby ležel uvnitř úsečky AE a aby o něm platilo $CZ = m$. Konstrukci bodu Z provedeme vzhledem k výsledku úlohy a) takto: Na úsečce DC určíme bod E tak, aby $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CAB$.

Dále sestrojíme kružnici $k \equiv (C, m)$ a určíme společný bod Z kružnice k a úsečky AE . Když bod Z padne dovnitř úsečky AE , sestrojíme obdélník $XCYZ$ podle textu úlohy; úsečka XY je pak řešením úlohy. Tato konstrukce je vzhledem k předchozím úvahám správná.

II. Na základě předchozích úvah provedeme diskusi řešitelnosti dané úlohy. Řešitelnost zřejmě závisí na tom, zda uvnitř úsečky AE lze najít bod Z tak, aby o něm platilo

$$CZ = m,$$

kde $m > 0$ je dané číslo. Rozeznávejme dva případy.

Případ [1]. Nechť je $a = b$ neboli $E \equiv C$. Potom zřejmě o hledaném bodu Z musí platit $0 < CZ < CA$ neboli

$$0 < m < a \sqrt{2} \quad (5)$$

(neboť velikost úhlopříčky AC čtverce $ABCD$ je $a\sqrt{2}$). Pro každé m , které splňuje tento vztah, má úloha v tomto případě zřejmě jediné řešení.

Případ [2]. Nechť je $a > b$, takže bod E leží uvnitř úsečky DC . Protože je $CE = DC - DE$, pak vzhledem ke vztahu (4)

dostaneme $CE = a - \frac{b^2}{a}$ neboli

$$CE = \frac{a^2 - b^2}{a}. \quad (6)$$

Úloha bude mít zřejmě řešení, jestliže bude platit

$$CE < CZ < CA; \quad (7)$$

tuto podmínku lze psát vzhledem ke vztahu (6) a vzhledem k tomu, že $CA = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pythagorova věta užitá na trojúhelník ABC , kde $\sphericalangle B = 90^\circ$), takto:

$$\frac{a^2 - b^2}{a} < m < \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (8)$$

Platí-li tento vztah, potom bod E leží zřejmě uvnitř úsečky CD a pata P kolmice vedené bodem C k přímce AE padne na prodloužení úsečky AE za bod E . To snadno dokážeme: Pak je totiž úhel $\sphericalangle AED$ zřejmě ostrý a s ním je ostrý i úhel $\sphericalangle QEC$ k němu vrcholový; podle známé poučky padne pata P kolmice $CP \perp AE$ dovnitř polopřímky EQ , opačné k polopřímce EA . Jestliže nyní bod H probíhá polopřímku EA tak, že jeho vzdálenost od bodu E vzrůstá, pak vzrůstá neustále i vzdálenost bodů C, H , jak plyne ze známé poučky. Pak vzhledem k platnosti vztahu (8) uvnitř úsečky EA existuje právě jeden bod Z takový, že o něm platí vztah $CZ = m$. Úloha má tedy za předpokladu platnosti vztahu (8) jediné řešení.

Závěr. Je zřejmé, že vztah (5) ze vztahu (8) dostaneme, položíme-li $a = b$. Lze tedy říci: Úloha má jediné řešení, když o číslech $a \geq b, m > 0$ platí vztahy

$$\frac{a^2 - b^2}{a} < m < \sqrt{a^2 + b^2};$$

jinak nemá řešení.

12. Buďte dány tři přímky p, q, x , z nichž každé dvě jsou mimoběžné. Dále buď dána rovina $\varrho \parallel x$, při čemž přímka x neleží v rovině ϱ .

Na přímce x určete všechny body X , z nichž se přímky p, q promítají na rovinu ϱ jako rovnoběžky.*)

Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy vzhledem k různým vzájemným polohám daných přímek a roviny ϱ .

Řešení (viz obr. 8). I. Označme $\varrho_1 \parallel \varrho$ rovinu, která obsahuje přímku x ; protože je $x \parallel \varrho$, existuje taková rovina ϱ_1 právě jedna, a protože přímka x neleží v rovině ϱ , je $\varrho_1 \neq \varrho$.

*) Je-li X střed promítání a ϱ průmětna, která bodem X neprochází, pak průmětem přímky m , která neprochází bodem X , je průsečnice rovin ϱ a (X, m) .

Předpokládejme, že daná úloha má řešení a že tedy existuje na přímce x bod X , který vyhovuje úloze. Protože každé dvě z přímek x, p, q jsou mimoběžné, neleží bod X na žádné z přímek p, q ; proto jsou jednoznačně určeny roviny $(Xp), (Xq)$.

Tyto roviny jsou navzájem různé; kdyby totiž splynuly, nebyly by přímky p, q mimoběžné. Ale roviny $(Xp), (Xq)$ mají společný bod X ; proto jsou nutně různoběžné a protínají se v určité přímce y . Podle předpokladu, že existuje bod X , který je řešením úlohy, protínají roviny $(Xp), (Xq)$ rovinu ϱ po řadě v přímkách p_0, q_0 , které jsou podle požadavku úlohy navzájem rovnoběžné, t. j. platí $p_0 \parallel q_0$. Přitom je $p_0 \neq q_0$, jinak by roviny $(Xp), (Xq)$ splývaly (bod X leží totiž mimo přímky p_0, q_0), což není možné vzhledem k tomu, že p, q jsou mimoběžky. Protože p_0, q_0 jsou přímky, ležící po řadě v různoběžných rovinách $(Xp), (Xq)$, musí být rovnoběžné s jejich průsečnicí y , t. j. platí $p_0 \parallel y, q_0 \parallel y$. Je tedy též $y \parallel \varrho$; protože je $\varrho \parallel \varrho_1$, je též $y \parallel \varrho_1$. Ale přímka y prochází bodem X roviny ϱ_1 ; z toho plyne, že přímka y leží v rovině ϱ_1 .

Přímka y má tedy tyto vlastnosti:

- Leží v rovině ϱ_1 ,
- má společný bod X s přímkou x ,
- leží ve společné rovině s přímkou p ,
- leží ve společné rovině s přímkou q .

Přitom je však $y \neq x$ (jinak by na př. mimoběžky x, p ležely ve společné rovině, což není možné). Dále je $y \neq p, y \neq q$ (jinak by na př. mimoběžky x, p ležely v jedné rovině). Jsou tedy přímky x, y různoběžné. Pro vzájemnou polohu přímek y, p, q jsou vzhledem k vlastnostem c), d) myslitelné tyto možnosti:

Případ [1] (obr. 8). Dvojice y, p i dvojice y, q jsou různoběžky; to znamená, že přímka y protíná přímky p, q po řadě v bodech $P \neq Q$ (a je tedy y příčkou obou mimoběžek p, q).

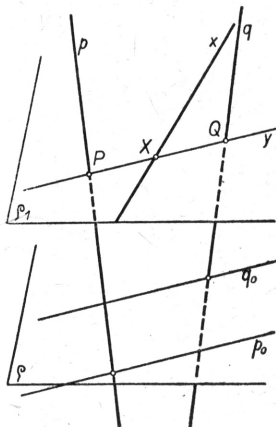
Případ [2]. Jedna z dvojic y, p a y, q jsou různoběžky a druhá dvojice jsou různé rovnoběžky. Platí tedy na př.: přímky y, p mají společný bod P a dále je $y \parallel q$, ale tak, že $y \neq q$.

Případ [3]. Dvojice y, p i dvojice y, q jsou rovnoběžky. Tento případ nemůže nastat, a proto jej hned vyloučíme; ze vztahů $p \parallel y, y \parallel q$ plyne totiž $p \parallel q$, což je proti předpokladu textu úlohy, neboť p, q jsou mimoběžky.

II. Podle předchozího rozboru provedeme nyní konstrukci bodu X . Rozeznávejme vzhledem k předchozím nutným podmínkám tyto případy:

Případ [1]. Necht přímky p, q protínají rovinu ϱ_1 z odstavce I v bodech P, Q ; tyto body jsou nutně navzájem různé, jinak by p, q nebyly mimoběžky. Potom podle odst. I, případ [1], může být hledaným bodem X jedině společný bod přímek $x, y \equiv PQ$. Jistě je $x \neq y$, jinak by přímky x, p (a také x, q) nebyly mimoběžky. Nyní jsou právě dvě možnosti:

a) Necht přímky $x, y \equiv PQ$ jsou různoběžky a mají tedy jediný společný bod X . Tento bod X je jistě různý od bodů P, Q (jinak by x, p anebo x, q nebyly mimoběžky). Proto existují roviny $(Xp), (Xq)$, které jsou jednoznačně určeny; jejich průsečnice je $y \equiv PQ$, neboť rovina (Xp) obsahuje body $P, X \neq P$ a rovina (Xq) obsahuje body $Q, X \neq Q$, při čemž tyto tři různé body P, Q, X podle konstrukce bodu X leží v jedné přímce y .



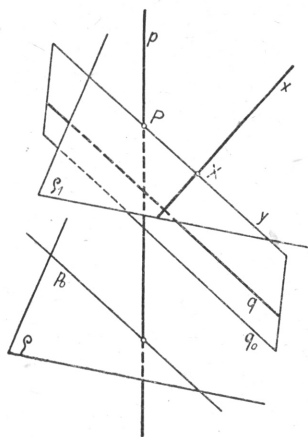
Obr. 8.

Protože průsečnice $y \equiv PQ$ obou rovin (Xp) , (Xq) leží v rovině ϱ_1 , protnou roviny (Xp) , (Xq) rovinu ϱ po řadě v přímkách p_0 , q_0 , o nichž platí $p_0 \parallel y$, $q_0 \parallel y$ neboli $p_0 \parallel q_0$. Přitom jsou přímky p_0 , q_0 požadované průměty přímek p , q z bodu X přímkou x na rovinu ϱ , takže splňují požadavky dané úlohy.

V tomto případě [1] a) má tedy úloha jediné řešení.

b) Necht přímky x , $y \equiv PQ$ jsou různé rovnoběžky. Potom nemají společného bodu. Protože neexistuje bod X , který by ležel současně na obou přímkách x , y , nemá úloha řešení.

Poznámka. V tomto případě je přímka x zřejmě rovnoběžná s průsečnicí rovin (Q, p) , ϱ i s průsečnicí rovin (P, q) , ϱ .



Obr. 9.

Případ [2] (obr. 9). Necht přímka p protíná rovinu ϱ_1 v bodě P a necht je $q \parallel \varrho_1$, při čemž přímka q v rovině ϱ_1 neleží (jinak by totiž nebyly přímky x , q mimoběžky). (Druhý případ, kdy přímka q rovinu ϱ_1 protíná a přímka p je s rovinou ϱ_1 rovnoběžná, převedeme na předchozí případ výměnou označení přímek p , q .)

Bodem P vedme přímku $y \parallel q$; tato přímka $y \neq q$ vzhledem k tomu, že je $q \parallel \varrho_1$, leží v rovině ϱ_1 . Přímky x , y jsou nutně různoběžné; je-li totiž $q \parallel y$, $y \parallel x$, potom je $q \parallel x$, což je proti předpokladu, že přímky x , q jsou mimoběžné.

Označme X společný bod různoběžek x , y . Potom obě různé roviny (Xp) , (Xq) neboli roviny (y, p) , (y, q) mají průsečnici $y \parallel \varrho$; proto protnou po řadě rovinu ϱ v různých přímkách

$p_0 \parallel y$, $q_0 \parallel y$; odtud plyne, že je $p_0 \parallel q_0$, takže přímky p_0 , q_0 splňují požadavky úlohy. V případě [2] má tedy úloha jediné řešení.

Jiné možnosti není.

III. Závěr. Úloha má řešení jediné v těchto případech (viz odst. II, případ [1] a), případ [2]): a) Přímky p , q protínají rovinu ϱ_1 (sestrojenou v I. odstavci) ve dvou různých bodech P , Q , při čemž jsou přímky x , PQ různoběžné.

b) Jedna z přímek p , q rovinu ϱ_1 (z-I. odstavce) protíná, kdežto druhá z přímek p , q je s rovinou ϱ_1 rovnoběžná.

Jinak úloha nemá řešení; tak na př. nemá řešení v případě, když mimoběžky x , p , q jsou rovnoběžné s rovinou ϱ .

13. Určete všechna přirozená čísla k taková, aby číslo k^2 (zapsané v dekadické soustavě) mělo na posledních dvou místech stejné cifry různé od nuly.

Řešení. Každé přirozené číslo k lze napsat ve tvaru

$$k = 10a + b, \quad (1)$$

kde a , b jsou nezáporná celá čísla, která nejsou současně rovna nule; číslo b je přitom menší než 10. Hledané číslo k nemůže být jednociferné, neboť čísla 1^2 , 2^2 , $\dots$, 9^2 , zapíšeme-li je dekadickým zápisem, nemají stejné cifry; proto musí být $a \neq 0$. Rovněž případ $b = 0$ snadno vyloučíme.

Vzhledem k (1) pak platí

$$k^2 = 100a^2 + 10 \cdot 2ab + b^2, \quad (2)$$

kde a , b jsou přirozená čísla.

Člen $100a^2$ ve vztahu (2) není pro naši úlohu třeba uvažovat, neboť je větší nebo roven číslu 100.

Číslo b^2 nemá na místě jednotek žádné z čísel 2, 3, 7, 8, neboť čísla 1^2 , 2^2 , 3^2 , $\dots$, 9^2 nemají na místě jednotek v deka-

dickém zápisu žádné z těchto čísel. Musíme tedy zkoumat, zda číslo b^2 může mít na místě jednotek čísla 1, 4, 5, 6, 9. Dále si všimněme ještě tohoto faktu: Číslo $2ab$ (viz vztah (2)), zvětšené o desítky čísla b^2 , má na místě jednotek číslo, které udává desítky čísla k^2 .

Případ [1]. Nechť b^2 má na místě jednotek číslo 1; pak je nutně buď $b = 1$ nebo $b = 9$.

Ale $2ab + 0$ nebo $2ab + 8$ (číslo 9^2 má 8 desítek) jsou sudá čísla; číslo k^2 má tedy v tomto případě na místě jednotek číslo liché a na místě desítek číslo sudé. Proto případy $b = 1$, $b = 9$ nevedou k řešení úlohy.

Případ [2]. Nechť číslo b^2 má na místě jednotek číslo 4; pak je nutně buď $b = 2$ nebo $b = 8$.

a) Pro $b = 2$ je $2ab = 4a$. Řešení dostaneme pro přirozená čísla a , která mají na místě jednotek číslo 1 nebo 6; ostatní čísla a nevyhovují úloze.

b) Pro $b = 8$ dostaneme $2ab + 6 = 16a + 6$ (číslo 6 je počet desítek čísla $b^2 = 64$); jednotkami tohoto čísla má být číslo 4. Řešení dostaneme pro přirozená čísla a , která mají na místě jednotek číslo 3 nebo 8.

Případ [3]. Nechť b^2 má na místě jednotek číslo 5; pak je nutně $b = 5$, $b^2 = 25$. Číslo $2ab + 2$ (číslo 2 jsou desítky čísla $b^2 = 25$) je sudé, kdežto na místě jednotek je číslo 5. Tento případ nevede k řešení.

Případ [4]. Nechť b^2 má na místě jednotek číslo 6; pak je nutně $b = 4$ nebo $b = 6$.

a) Pro $b = 4$ je $b^2 = 16$; číslo $2ab + 1$ je liché, kdežto na místě jednotek je číslo 6. Tento případ nevede k řešení.

b) Pro $b = 6$ je $b^2 = 36$; číslo $2ab + 3$ je liché. Stejně jako v předchozím případě nedostaneme řešení.

Případ [5]. Nechť b^2 má na místě jednotek číslo 9; pak je nutně $b = 3$ nebo $b = 7$.

a) Pro $b = 3$ je $b^2 = 9$. Číslo $2ab$ je sudé, kdežto na místě jednotek je číslo 9. Tento případ nevede k řešení.

b) Pro $b = 7$ je $b^2 = 49$. Číslo $2ab + 4$ je sudé a stejně jako v předchozím případě nedostaneme řešení.

Závěr. Řešení dostáváme v případech:

Případ [2] a), kdy $b = 2$ a přirozené číslo a končí číslicí 1 nebo 6; to znamená, že poslední dvojčíslí čísla k je buď 12 nebo 62, takže $k = 100m + 12$ nebo $k = 100m + 62$, kde m je libovolné celé nezáporné číslo. Řešením jsou členy těchto aritmetických posloupností s diferencí 100:

$$\begin{aligned} &12; 112; 212; 312; \dots, \\ &62; 162; 262; 362; \dots \end{aligned}$$

Případ [2] b), kdy $b = 8$ a přirozené číslo a končí číslicí 3 nebo 8. Tu je $k = 100m + 38$ nebo $k = 100m + 88$, kde m je libovolné celé nezáporné číslo. Řešením jsou členy aritmetických posloupností s diferencí 100:

$$\begin{aligned} &38; 138; 238; 338; \dots, \\ &88; 188; 288; 388; \dots \end{aligned}$$

Zkoušku provedeme takto: Snadno nahlédneme, že pro čísla k platí

$$k = 50p \pm 12,$$

kde p je celé nezáporné číslo. Proto je $k^2 = 50p(50p \pm 24) + 144$. První člen na pravé straně je pro $p = 0$ roven nule, pro $p > 0$ je to číslo dělitelné stem; proto číslo k^2 má poslední dvojčíslí 44, tedy na obou posledních místech táž čísla, jak požadovala úloha.

14. Najděte všechna komplexní čísla z , která vyhovují rovnici

$$z = \frac{z + ai}{\bar{z}}, \quad (1)$$

kde a je dané reálné číslo, $\bar{z}$ je číslo komplexní sdružené s číslem z a číslo i je imaginární jednotka. Řešení vyložíte geometricky.

Řešení. Z rovnice (1) odvodíme rovnici

$$z\bar{z} - z - ai = 0. \quad (2)$$

Je-li $a \neq 0$, nemá rovnice (2) kořen 0, t. j. rovnice (1) a (2) mají též řešení (jsou ekvivalentní). Položíme-li $z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$, můžeme napsat (2) ve tvaru

$$x^2 + y^2 - x - yi - ai = 0.$$

Tato rovnice je ekvivalentní se soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - x &= 0, \\ y + a &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

při čemž ovšem pro soustavu (3) přicházejí v úvahu jen reálná řešení. Obvyklým postupem dostaneme ze soustavy (3) soustavu s ní ekvivalentní

$$\begin{aligned} x^2 - x + a^2 &= 0, \\ y &= -a. \end{aligned} \quad (4)$$

Soustava (4) je řešitelná tehdy a jen tehdy, je-li diskriminant první rovnice (4) číslo nezáporné, t. j. je-li

$$1 - 4a^2 \geq 0,$$

t. j. je-li $|a| \leq \frac{1}{2}$. Pro $a = \frac{1}{2}$ nebo $a = -\frac{1}{2}$ má jediné řešení; pro a , pro něž platí $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, má dvě různá řešení.

V případě $a = 0$, který jsme předem vyloučili, má rovnice (1) jediné řešení $z = 1$. Upravíme totiž rovnici (2) na tvar

$$z(\bar{z} - 1) = 0.$$

Případ $z = 0$ musíme vyloučit, neboť pak je též $\bar{z} = 0$ a zlomek na pravé straně daného vztahu (1) nemá smysl. Zbývá druhý kořen $\bar{z} = 1$ a tím též $z = 1$, který pro $a = 0$ zřejmě splňuje vztah (1).

Geometrický význam. Rovnice

$$x^2 + y^2 - x = 0$$

je rovnicí kružnice k se středem $[\frac{1}{2}, 0]$ a poloměrem $\frac{1}{2}$; $y = -a$ je rovnice přímky rovnoběžné s osou reálných čísel. Jde o společné body obou čar. Je-li $|a| > \frac{1}{2}$, je přímka nesečnou; je-li $a = \frac{1}{2}$ nebo $a = -\frac{1}{2}$, je tečnou; je-li $|a| < \frac{1}{2}$, je přímka $y = -a$ sečnou kružnice k . V případě $a = 0$ je však jeden z průsečíků obraz čísla 0, které nevyhovuje rovnici (1), proto zbývá jediný kořen $z = 1$.

15. Řešte soustavu rovnic

$$x + y = \alpha, \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos \alpha, \quad (1)$$

kde α je dané číslo.

Řešení. Platí vzorec

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

Pomocí tohoto vzorce upravíme druhou rovnici (1); dostaneme postupně

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2x + 1 - \cos 2y) = 1 - \cos \alpha$$

neboli

$$\cos 2x + \cos 2y = 2\cos \alpha.$$

Nyní k úpravě levé strany této rovnice použijeme vzorce $\cos \varphi + \cos \psi = 2 \cos \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \cdot \cos \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$; dostaneme

$$2 \cos(x + y) \cdot \cos(x - y) = 2 \cdot \cos \alpha$$

a po dosazení za $x + y$ z první rovnice (1)

$$2 \cos \alpha \cdot \cos(x - y) = 2 \cos \alpha$$

neboli po úpravě

$$\cos \alpha [\cos(x - y) - 1] = 0. \quad (2)$$

Rozeznávejme dva případy:

Případ [1]. Nechť platí $\alpha = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, kde k je celé číslo; potom je $\cos \alpha = 0$ a rovnice (2) je splněna pro každou dvojici čísel, o nichž platí $x + y = \alpha$. Obráceně, dvojice čísel x, y , kde x je libovolné číslo a $y = \alpha - x$ (při čemž je $\alpha = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, kde k je celé číslo), vyhovuje skutečně soustavě (1), jak se snadno zjistí dosazením.

Případ [2]. Nechť platí $\alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$, kde k je celé číslo. Potom je $\cos \alpha \neq 0$ a z rovnice (2) plyne

$$\cos(x - y) = 1$$

neboli

$$x - y = 2m\pi,$$

kde m je libovolné celé číslo.

Připojme k této rovnici první rovnici (1) a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}x + y &= \alpha, \\x - y &= 2m\pi.\end{aligned}$$

Odtud pro neznámé x, y plyne

$$x = \frac{1}{2}\alpha + m\pi, \quad y = \frac{1}{2}\alpha - m\pi, \quad (3)$$

kde m je libovolné celé číslo a $\alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$, kde k je celé číslo.

Obráceně, dvojice (3) čísel x, y , při čemž platí právě uvedené podmínky pro čísla m a α , je řešením soustavy (1); o tom se snadno přesvědčíme dosazením do (1).

16. Buď dána kulová plocha o středu S a o poloměru $r = 1$; na této ploše buďte dány čtyři body A, B, C, D , které jsou vrcholy čtyřstěnu $ABCD$.

Jestliže bod S leží uvnitř čtyřstěnu $ABCD$, potom platí: Ze tří hran AB, AC, AD alespoň jedna má velikost větší než $\sqrt{2}$. Dokažte.

Poznámka. Při důkazu použijte těchto vět:

V1. Leží-li všechny čtyři vrcholy čtyřstěnu v nějakém poloprostoru, potom leží všechny vnitřní body daného čtyřstěnu uvnitř tohoto poloprostoru.

V2. Budiž dána kulová plocha o středu S a o poloměru $r = 1$. Označme A její bod a $\varrho \perp SA$ rovinu, která prochází bodem S . Potom každý bod X této plochy kulové, pro který platí $AX \leq \sqrt{2}$, leží v poloprostoru ϱA .

Řešení. Důkaz tvrzení dané úlohy provedeme nepřímou. Předpokládejme, že každá z hran AB , AC , AD má velikost, která není větší než $\sqrt{2}$; dokážeme, že tento předpoklad vede ke sporu.

Označme ϱ rovinu, která prochází bodem S a stojí kolmo k přímce SA . Podle věty **V2** leží body B , C , D v poloprostoru ϱA . Všechny vrcholy čtyřstěnu $ABCD$ leží tedy v poloprostoru ϱA ; proto podle věty **V1** leží všechny vnitřní body čtyřstěnu $ABCD$ uvnitř poloprostoru ϱA . Bod S leží v hraniční rovině ϱ poloprostoru ϱA a tudíž není vnitřním bodem poloprostoru ϱA ; protože však všechny vnitřní body čtyřstěnu $ABCD$ leží uvnitř poloprostoru ϱA , neleží bod S uvnitř čtyřstěnu $ABCD$, jak požaduje předpoklad úlohy. Tím jsme dospěli ke sporu.

Neplatí tedy, že každá z hran AB , AC , AD má velikost, která není menší než $\sqrt{2}$, t. j. alespoň jedna z těchto hran má velikost větší než $\sqrt{2}$. To jsme měli dokázat.

2. Úlohy II. kola kategorie A.

1. Nech m je dané reálné číslo. Řešte rovnici

$$\frac{1+x}{m+x} = \frac{m^3+x}{m^2+x} \quad (1)$$

s neznámou x .

Riešenie. Predpokladajme, že rovnica (1) má riešenie. Potom to isté riešenie má aj rovnica

$$(1+x)(m^2+x) = (m+x)(m^3+x)$$

čiže rovnica

$$m^2 + x(m^2 + 1) = m^4 + x(m + m^3),$$

t. j. rovnica

$$x(m^3 + m - m^2 - 1) = m^2 - m^4,$$

teda rovnica

$$x(m^2 + 1)(m - 1) = m^2(1 - m^2). \quad (2)$$

Rozoznávajme dva prípady:

Prípád [1]. Nech je $m \neq 1$. Potom je $m - 1 \neq 0$, $m^2 + 1 \neq 0$ a rovnica (2) má jediné riešenie

$$x_1 = \frac{m^2(1 - m^2)}{(m^2 + 1)(m - 1)},$$

t. j.

$$x_1 = - \frac{m^2(1 + m)}{1 + m^2}.$$

Ak je $m = 0$, je aj $x_1 = 0$ a číslo $x = x_1$ nie je riešením rovnice (1), lebo je $m + x_1 = 0$, $m^2 + x_1 = 0$ a zlomky v rovnici (1) nemajú zmysel.

Ak je $m \neq 0$ (a pravda, podľa predpokladu aj $m \neq 1$), je

$$m + x_1 = m - \frac{m^2(1 + m)}{1 + m^2} = \frac{m(1 - m)}{1 + m^2} \neq 0,$$

$$m^2 + x_1 = m^2 - \frac{m^2(1 + m)}{1 + m^2} = \frac{m^3(m - 1)}{1 + m^2} \neq 0;$$

preto zlomky v rovnici (1) majú zmysel. Skúškou sa ľahko presvedčíme, že x_1 je riešením rovnice (1).

Prípád [2]. Nech je $m = 1$. Potom rovnica (1) znie

$$\frac{1+x}{1+x} = \frac{1+x}{1+x}$$

a jej riešením je zrejme každé číslo $x \neq -1$.

2. Ak obrazy komplexných čísel $0, z_1, z_2$ tvoria v rovine vrcholy rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky 1, platí vzťah

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 1. \quad (1)$$

Dokážte to. (Poznámka. Číslo $\bar{z}$ je komplexné združené číslo s číslom z .)

Riešenie. Podľa textu úloh sú z_1, z_2 komplexné jednotky. Obraz čísla z_2 vznikne z obrazu čísla z_1 otočením okolo začiatku O súradníc o uhol 60° v kladnom alebo zápornom zmysle. Je teda

$$z_2 = \varepsilon \cdot z_1, \text{ alebo } z_2 = \bar{\varepsilon} \cdot z_1, \quad (2)$$

kde $\varepsilon = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ a $\bar{\varepsilon}$ je komplexné združené číslo k číslu ε .

Použitím prvého vzťahu (2) dostaneme

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = z_1 \bar{\varepsilon} \bar{z}_1 + \bar{z}_1 \varepsilon z_1 = z_1 \bar{z}_1 (\bar{\varepsilon} + \varepsilon) = 1,$$

lebo je $\bar{\varepsilon} = \cos 60^\circ - i \sin 60^\circ$, a preto je $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 2 \cos 60^\circ = 1$.

Použitím druhého vzťahu (2) dostaneme

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = z_1 \varepsilon \bar{z}_1 + \bar{z}_1 \bar{\varepsilon} z_1 = z_1 \bar{z}_1 (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) = 1.$$

Tým sme v oboch prípadoch dokázali platnosť vzťahu (1).

Poznámka. Použili sme vzťah $(\overline{ab}) = \bar{a} \cdot \bar{b}$, kde a, b sú dané komplexné čísla; ďalej je $(\bar{\bar{a}}) = a$.

Jiné řešení. Označme O, Z_1, Z_2 obrazy čísel $0, z_1, z_2$. Podle předpokladu platí $OZ_1 = OZ_2 = Z_1Z_2 = 1$. Místo těchto vztahů můžeme psát $|z_1| = 1, |z_2| = 1, |z_1 - z_2| = 1$ neboli $\sqrt{z_1 \cdot \bar{z}_1} = 1, \sqrt{z_2 \cdot \bar{z}_2} = 1, \sqrt{(z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)} = 1$. Z těchto tří vztahů snadno plyne

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = 1, \quad (1)$$

$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = 1, \quad (2)$$

$$(z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 1. \quad (3)$$

Vztah (3) postupně upravíme takto

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 - z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 &= 1, \\ z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 &= -1 + z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do pravé strany posledního vztahu ze vztahů (1), (2), obdržíme vztah

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 1, \quad (4)$$

jehož platnost jsme měli dokázat.

Obrácená věta neplatí. To plyne z tohoto příkladu: zvolme $z_1 = 1, z_2 = \frac{1}{2}$, takže je $\bar{z}_1 = 1, \bar{z}_2 = \frac{1}{2}$. Dosadíme-li tato čísla do vztahu (4), vidíme, že je splněn, ale obrazy příslušných čísel $0, z_1, z_2$ leží v přímce, a tudíž nejsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka.

Řešil s. Z. Eremiáš, 11. tř.

2. jedenáctiletky v Praze II, Štěpánská 22.

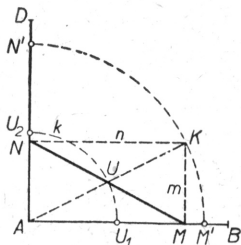
3. Buď dána krychle $ABCD A'B'C'D'$ (kde $ABCD$ je stěna a dále je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) o hraně dané velikosti h ; dále je dáno číslo $m > h$.

Sestrojte obdélník $MNPQ$, jehož vrcholy M, N, P, Q leží po řadě na polopřímkách $AB, AD, A'D', A'B'$ a jehož úhlopříčky mají velikost m . Označte UV střední příčku tohoto obdélníka, která je rovnoběžná s přímkou MQ .

Jaký útvar vyplní body středních příček UV všech takto sestrojených obdélníků? Udejte podmínku řešitelnosti.

Řešení. I. Pomocná věta V. Buď dán pravý úhel $\sphericalangle BAD$. Množinou všech středů U úseček MN dané velikosti $v > 0$, kde M je bod polopřímky AB a N bod polopřímky AD , je čtvrtkružnice k , která je společnou částí úhlu $\sphericalangle BAD$ a kružnice o středu A a o poloměru $\frac{1}{2}v$.

Důkaz (obr. 10). K množině všech bodů U zřejmě patří bod U_1 polopřímky AB , kde $AU_1 = \frac{1}{2}v$, a dále bod U_2 polopřímky AD , kde $AU_2 = \frac{1}{2}v$ (neboť úsečky $AM' = v$, $AN' = v$, ležící po řadě v polopřímkách AB , AD , také vyhovují úloze); body U_1, U_2 jsou krajními body čtvrtkružnice k .



Obr. 10.

Nechť je nyní $M \neq A$ bod polopřímky AB takový, že $AM < v$. Potom kružnice o středu M a poloměru v protne polopřímku AD v jediném bodě $N \neq A$ (neboť vzdálenost středu M této kružnice od přímky AD je menší než její poloměr v). Potom existuje obdélník $AMKN$ (ležící v úhlu $\sphericalangle BAD$), jehož střed U patří vyšetřované množině; bod U skutečně leží na zmíněné čtvrtkružnici k , neboť je $AK = MN = v$ a tedy $AU = \frac{1}{2}v$.

Obráceně, každý bod U čtvrtkružnice k je středem jedné úsečky MN , která vyhovuje úloze. O bodech U_1, U_2 je to zřejmé. Buď dále U libovolný bod čtvrtkružnice k , různý od bodů U_1, U_2 (obr. 10). Na prodloužení úsečky AU určíme bod K tak, aby bylo $UK = AU = \frac{1}{2}v$. Bodem K vedme rovnoběžky $m \parallel AD$, $n \parallel AB$; označme $M \equiv (AB \cdot m)$, $N \equiv (AD \cdot n)$. Potom rovnoběžník $AMKN$ je obdélník, neboť $\sphericalangle BAD = 90^\circ$.

Bod U je podle konstrukce středem tohoto obdélníka, a proto je $MU = NU = \frac{1}{2}v$.

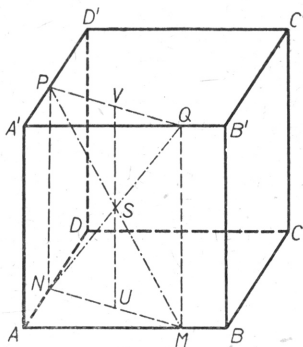
Tím jsme sestrojili úsečku MN , jejímž středem je daný bod U a obrácená věta je dokázána.

II. Řešení dané úlohy. (Viz obr. 11.) Necht' $MNPQ$ je jeden obdélník, který vyhovuje podmínkám úlohy, a $UV \parallel MQ$ jeho střední příčka (bod U je středem úsečky MN). Rovina $MNPQ$ protíná různoběžné roviny $ABB'A'$, $ADD'A'$ v přímkách $MQ \parallel NP$. Podle známé věty ze stereometrie nutně platí

$$MQ \parallel AA' \parallel NP$$

a rovina $MNPQ$ je rovnoběžná s přímkou AA' ; proto je rovina $MNPQ$ kolmá k rovinám $ABCD$, $A'B'C'D'$.

Z pravoúhlého trojúhelníka MPN (kde $\sphericalangle N = 90^\circ$, $MP = m$, $NP = h$) podle Pythagorovy věty dostaneme



Obr. 11.

$$MN = \sqrt{MP^2 - NP^2}$$

neboli

$$MN = \sqrt{m^2 - h^2}.$$

Označme.

$$\sqrt{m^2 - h^2} = v. \quad (1)$$

Číslo v vzhledem k předpokladu $m > h$ existuje a je kladné a konstantní; všechny obdélníky $MNPQ$ mají zřejmě stejné rozměry.

Podle pomocné věty V množinou středů U úseček $MN = v$ je čtvrtkružnice k , ležící v pravém úhlu $\sphericalangle BAD$, jejíž střed je bod A a poloměr $\frac{1}{2}v$.

Odtud plyne, že střední příčka UV leží na útvaru Ω , který je čtvrtinou pláště rotačního válce; podstavami válce jsou kruhy, ležící po řadě v rovinách $ABCD$, $A'B'C'D'$, o středech A , A' a poloměrech velikosti $\frac{1}{2}v$.

Obráceně, každá úsečka, jejíž body patří útvaru Ω , je zřejmě střední příčkou jednoho obdélníka $MNPQ$; to plyne z obrácené pomocné věty V.

Protože je $m > h$, má úloha vždycky řešení.

4. Buď dán rovnoramenný trojúhelník ABC o základně AB . Uvnitř strany AC buď dán bod X a na prodloužení strany BC za bod B buď dán bod Y . Označte P společný bod úseček AB a XY . Dokažte:

a) Jestliže platí $PX = PY$, potom platí $AX = BY$.

b) Jestliže platí $AX = BY$, potom platí $PX = PY$.

Řešení (obr. 12a). Označme $p \perp AB$ přímkou jdoucí bodem G ; přímka p je osou souměrnosti trojúhelníka ABC .

a) Bod P leží zřejmě uvnitř úseček AB , XY . Označme X' bod souměrně sdružený s bodem X podle osy p . Bod X' leží uvnitř strany BC a platí

$$BX' = AX. \quad (1)$$

Protože je $XX' \perp p$, $AB \perp p$, je $XX' \parallel AB$. Bod P je podle předpokladu středem strany XY trojúhelníka YXX' a úsečka PB je tedy střední příčkou tohoto trojúhelníka. Proto platí

$$BY = BX'$$

a odtud a ze vztahu (1) máme

$$BY = AX,$$

což jsme měli dokázat.

b) Sestrojme jako v úloze a) bod X' souměrně sdružený s bodem X podle přímky p ; je tedy

$$BX' = AX. \quad (2)$$

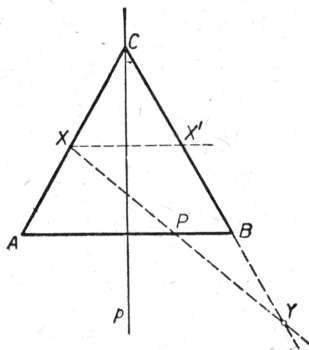
Podle předpokladu je

$$AX = BY. \quad (3)$$

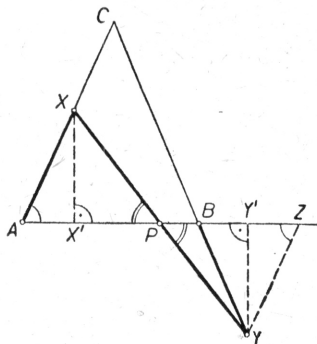
Spojením vztahů (2), (3) máme

$$BX' = BY,$$

takže bod B je středem strany YX' trojúhelníka YXX' . Protože je $XX' \perp p$, $AB \perp p$, je $XX' \parallel PB$ a úsečka PB je střední příčkou trojúhelníka YXX' , t. j. bod P je středem strany XY , což jsme měli dokázat.



Obr. 12a.



Obr. 12b.

Jiné řešení (obr. 12b). a) Zvolme bod P za střed souměrnosti a označme PYZ trojúhelník souměrně sdružený s trojúhelníkem PXA . Tu je

$$AX = YZ, \quad (1)$$

$$\sphericalangle XAP = \sphericalangle YZP. \quad (2)$$

Dále je $\sphericalangle XAP = \sphericalangle CBA$ (úhly při základně AB v rovnoarmenném trojúhelníku ABC) a $\sphericalangle CBA = \sphericalangle YBZ$ (úhly vrcholové), takže je

$$\sphericalangle XAP = \sphericalangle YBZ. \quad (3)$$

Ze (2), (3) plyne

$$\sphericalangle YZP = \sphericalangle YBZ. \quad (4)$$

Snadno usoudíme, že je skutečně $B \neq Z$, takže existuje trojúhelník YBZ ; podle (4) však je rovnoramenný, t. j. platí $YZ = BY$. Z tohoto vztahu a ze vztahu (1) plyne

$$AX = BY,$$

což jsme měli dokázat.

b) Sestrojme na přímce AB bod $Z \neq B$ tak, aby platilo $YZ = BY$ neboli

$$YZ = AX; \quad (5)$$

to lze zřejmě provést jediným způsobem. Přitom bod Z musí ležet na prodloužení úsečky AB za bod B , jak se snadno dokáže.

Trojúhelník YBZ je tedy rovnoramenný, a proto platí

$$\sphericalangle YZB = \sphericalangle YBZ. \quad (6)$$

Ale $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = \sphericalangle YBZ$ (první dvojice jsou úhly v rovnoramenném trojúhelníku ABC , druhá dvojice jsou úhly vrcholové). Odtud a ze vztahu (6) plyne, že

$$\sphericalangle YZB = \sphericalangle CAB. \quad (7)$$

Protože platí (5), (7) a dále je $\sphericalangle APX = \sphericalangle ZPY$, je

$$\triangle APX \cong \triangle ZPY \text{ (suu).}$$

Odtud plyne, že platí

$$PX = PY,$$

což jsme měli dokázat.

Řešil s. Frant. Neuman,
11. tř. jedenáctiletky v Brně,
Elgartova 3.

Jiné řešení (obr. 12b). b) Označme X' , Y' paty kolmic vedených po řadě body X , Y k přímce AB . Snadno se zjistí,

že bod X' leží uvnitř úsečky AP a bod Y' na prodloužení úsečky AB za bod B . Nejprve dokážeme, že platí

$$\triangle XAX' \cong \triangle YBY' \text{ (suu).} \quad (1)$$

Důkaz. Podle předpokladu je $AX = BY$. Dále je $\sphericalangle AX'X = \sphericalangle BY'Y = 90^\circ$. Konečně je $\sphericalangle XAX' = \sphericalangle YBY'$, neboť je $\sphericalangle CAX' = \sphericalangle CBA$ (úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka ABC) a úhly $\sphericalangle CBA$, $\sphericalangle YBY'$ jsou vrcholové. Tím je důkaz proveden.

Ze vztahu (1) plyne

$$XX' = YY'. \quad (2)$$

Dále dokážeme, že platí

$$\triangle XPX' \cong \triangle YPY' \text{ (suu).} \quad (3)$$

Důkaz. Především platí (2). Dále je $\sphericalangle XX'P = \sphericalangle YY'P = 90^\circ$ a konečně je $\sphericalangle XPX' = \sphericalangle YPY'$ (úhly vrcholové). Tím je důkaz proveden.

Ze vztahu (3) plyne

$$PX = PY,$$

což jsme měli dokázat.

a) Užijeme označení jako v úloze b). Nejprve dokážeme, že platí

$$\triangle XPX' \cong \triangle YPY' \text{ (suu).} \quad (4)$$

Důkaz. Podle předpokladu je $PX = PY$. Dále je $\sphericalangle XX'P = \sphericalangle YY'P = 90^\circ$. Konečně je $\sphericalangle XPX' = \sphericalangle YPY'$ (úhly vrcholové). Tím je důkaz proveden.

Ze vztahu (4) plyne

$$XX' = YY'. \quad (5)$$

Dále dokážeme, že platí

$$\triangle XX'A \cong \triangle YY'B \text{ (suu).} \quad (6)$$

Důkaz. Platí (5). Dále je $\sphericalangle XX'A = \sphericalangle YY'B = 90^\circ$. Konečně je $\sphericalangle XAX' = \sphericalangle YBY'$, což se dokáže stejně jako v úloze b). Tím je důkaz proveden.

Ze vztahu (6) plyne

$$AX = BY,$$

což jsme měli dokázat.

Řešil s. Tomáš Zemčík,
roč. 3.b průmyslové školy chemické v Brně.

3. Úlohy III. kola kategorie A.

1. Buď dán lichoběžník $ABCD$, o jehož základnách platí: $AB > CD$. Označme E průsečík přímek AC , BD a F průsečík přímek AD , BC . Dále označme GH přímkou jdoucí bodem E a rovnoběžnou se základnami, při čemž G leží na přímce AD a H na přímce BC . Označme po řadě K , L středy základů AB , CD .

Dokažte, že

- přímka EF prochází body K , L ;
- existuje průsečík M přímek AC , KH a průsečík N přímek BD , KG ;
- body F , M , N leží v jedné přímce.

Řešení (viz obr. 13). a) Protože podle předpokladu úlohy je

$$AB > CD, AB \parallel CD,$$

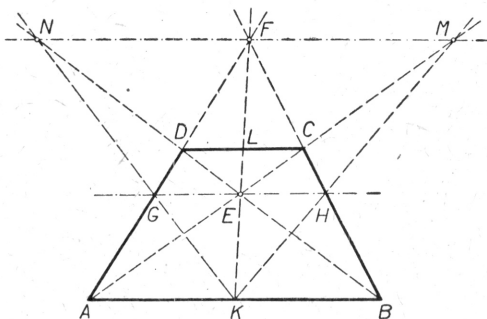
jsou úsečky AB , CD stejnohlé podle dvou různých středů stejnohllosti. Těmito středy jsou body F , E . Označme

$$\frac{CD}{AB} = k;$$

přitom tedy je $0 < k < 1$. Stejnohlelost o středu F má kon-

stantu stejnolehlosti k ; tuto stejnolehlost označíme (F, k) . Stejnolehlost o středu E má konstantu $-k$; tuto stejnolehlost označíme $(E, -k)$.

Přitom bod F leží na prodloužení úsečky AD za bod D , neboť ze stejnolehlosti (F, k) plyne, že $\frac{FD}{FA} = k$ neboli $\frac{FD}{FA} < 1$, t. j. $FD < FA$.



Obr. 13.

Označme po řadě K', L' průsečíky přímky FE s přímkami AB, CD . Bod E zřejmě leží uvnitř trojúhelníka ABF , a proto bod K' padne dovnitř úsečky AB ; ze stejnolehlosti (F, k) bodů K', L' plyne, že i bod L' leží uvnitř úsečky CD .

Ve stejnolehlosti $(E, -k)$ úsečce AK' přísluší úsečka CL' , a proto platí

$$CL' = k \cdot AK'. \quad (1)$$

Ve stejnolehlosti (F, k) přísluší úsečce AK' úsečka DL' a platí

$$DL' = k \cdot AK'. \quad (2)$$

Porovnáním vztahů (1), (2) dostaneme

$$CL' = DL',$$

a proto L' je středem úsečky CD . Odtud plyne, že též K' je středem úsečky AB . Proto je $L' \equiv L$ a $K' \equiv K$. Odtud plyne, že body K, L (po řadě středy úseček AB, CD) leží na přímce EF , což jsme měli v úloze a) dokázat.

b) Přímky AC, KH jsou dvě různé přímky, neboť je $A \neq K$. Nemohou však být navzájem rovnoběžné. Pripusťme, že platí $AC \parallel KH$; dokážeme, že to není možné. Protože je $AK \parallel EH$, plyne z předpokladu $AC \parallel KH$, že $AKHE$ je rovnoběžník, a proto platí $AK = EH$. Protože však je $AK = BK$, platí též $BK = EH$; zároveň platí $BK \parallel EH$, a proto je $KBHE$ rovnoběžník, t. j. platí $KE \parallel BH$, což odporuje tomu, že přímky KE, BH neboli přímky EF, BC mají společný bod F . Proto jsou přímky AC, KH různoběžné a existuje tedy jejich průsečík M , což jsme měli dokázat.

Stejně se dokáže, že přímky BD, KQ mají společný jediný bod, který označíme N .

Tím jsme dokázali tvrzení úlohy b).

c) Protože je $KB \parallel EH$, jsou tyto neshodné úsečky stejno-
lehlé podle středu F ; označme (F, h) tuto stejnolehlost, kde

$$h = \frac{KB}{EH} > 0 \quad (4)$$

je konstanta stejnolehlosti.

Protože je $AK \parallel EH$, jsou tyto neshodné úsečky stejno-
lehlé podle středu M ; označme (M, h') tuto stejnolehlost, kde

$$h' = \frac{AK}{EH} > 0. \quad (5)$$

Ze vztahů (4), (5) plyne

$$KB = h \cdot EH, \quad AK = h' \cdot EH. \quad (6)$$

Protože však je $KB = AK$ (bod K je středem úsečky AB), plyne ze vztahů (6), že

$$h = h'.$$

Ze stejnolehlosti (F, h) plyne vztah

$$\frac{FK}{FE} = h \quad (7)$$

a ze stejnolehlosti ($M, h' = h$) plyne vztah

$$\frac{MA}{ME} = h. \quad (8)$$

Vztahy (7), (8) upravíme na tvar

$$\frac{FK}{FE} - 1 = h - 1, \quad \frac{MA}{ME} - 1 = h - 1$$

neboli

$$\frac{FK - FE}{FE} = h - 1, \quad \frac{MA - ME}{ME} = h - 1,$$

což lze psát takto:

$$\frac{EK}{EF} = h - 1, \quad \frac{EA}{EM} = h - 1.$$

Odtud plyne, že

$$\frac{EK}{EF} = \frac{EA}{EM}.$$

Tento výsledek říká, že ve stejnolehlosti o středu E , ve které bodu K přiřadíme bod F , přísluší bodu A bod M . Proto v této stejnolehlosti přísluší úsečce KA úsečka FM . Ale stejnohlé úsečky jsou rovnoběžné; proto je

$$KA \parallel FM$$

neboli

$$FM \parallel AB,$$

což jsme měli dokázat.

Stejně se dokáže, že je

$$FN \parallel AB.$$

Odtud snadno plyne tvrzení úlohy c).

Řešil s. Bedřich Hejda,
žák 11. tř. jedenáctiletky v Praze XII.

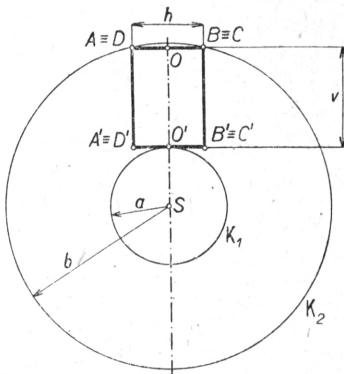
2. Budte dány dvě soustředné kulové plochy K_1 s poloměrem a a K_2 s poloměrem b ; přitom je $a < b$.

Označme $ABCD A'B'C'D'$ kolmý hranol se čtvercovou podstavou $ABCD$ (při čemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$), jehož vrcholy A, B, C, D leží na ploše K_2 , a přitom rovina $A'B'C'D'$ se dotýká plochy K_1 . Necht' dále platí, že

$$\frac{AB}{AA'} = \frac{a}{b}.$$

Vypočítejte rozměry tohoto hranolu. Kolik takových hranolů (až na shodnost) existuje?

Řešení (viz obr. 14).
Předpokládejme, že takový hranol existuje, a označme $AB = h$, $AA' = v$ a S střed ploch K_1 , K_2 . Protože je $AS = BS = CS = DS$, je průsečík O úhlopříček AC, BD čtverce $ABCD$ patou kolmice vedené bodem S na rovinu $ABCD$, neboť je $SO \perp AC$, $SO \perp BD$, při čemž je $AC \neq BD$. Proto přímka SO leží v rovinách $AA'C'C, BB'D'D$



Obr. 14.

a obsahuje i střed O' čtverce $A'B'C'D'$ (průsečík úhlopříček $A'C'$, $B'D'$). Protože jsou roviny $ABCD$, $A'B'C'D'$ rovnoběžné, je $SO \perp A'B'C'D'$. Bod O' , který je průsečíkem přímky SO s rovinou $A'B'C'D'$, je proto dotykovým bodem roviny $A'B'C'D'$ s plochou K_1 .

Nyní platí

$$SO' = a, \quad AS = b, \quad OO' = v, \quad OA = \frac{1}{2}h \sqrt{2}, \quad (1)$$

$$OS^2 + OA^2 = AS^2 \quad (2)$$

(podle Pythagorovy věty).

Pro polohu bodu O' na přímce SO jsou dvě možnosti; buď je bod O' bodem úsečky OS , nebo leží na jejím prodloužení za bod S . Platí tedy jeden ze vztahů

$$OS = OO' + O'S \quad \text{nebo} \quad OS = OO' - O'S,$$

což lze zapsat stručně

$$OS = v \pm a.$$

Dosaďme odtud a ze vztahů (1) do (2); dostaneme

$$(v \pm a)^2 + \frac{1}{2}h^2 = b^2 \quad (3)$$

neboli

$$a^2 \pm 2av + v^2 = b^2 - \frac{1}{2}h^2, \quad (3')$$

což je jeden vztah mezi neznámými h , v .

Protože je $\frac{AB}{AA'} = \frac{a}{b}$ neboli $\frac{h}{v} = \frac{a}{b}$, platí

$$av = bh; \quad (4)$$

protože a , b jsou různá kladná čísla, jsou i čísla h , v nutně různá od nuly. Znásobme rovnici (3') číslem a^2 ; dostaneme

$$a^4 \pm 2a^3v + a^2v^2 = a^2b^2 - \frac{1}{2}a^2h^2.$$

Dosaďme sem ze vztahu (4) za av a obdržíme

$$a^4 \pm 2a^2bh + b^2h^2 = a^2b^2 - \frac{1}{2}a^2h^2$$

neboli

$$h^2(b^2 + \tfrac{1}{2}a^2) \pm 2a^2bh + a^2(a^2 - b^2) = 0. \quad (5)$$

To je při znaménku plus i minus vždy kvadratická rovnice pro neznámou h . Její koeficient při h^2 je kladný, kdežto absolutní člen je záporný; to znamená, že rovnice má dva reálné kořeny $h = h_1$, $h = h_2$ různých znamének. Protože velikost úsečky je číslo kladné, může naší úloze vyhovovat v obou případech jen kladný kořen.

Rozeznávejme nyní oba různé případy: Buď je koeficient při h rovnic (5) číslo kladné, nebo je záporný. Z rovnic (5) po snadné úpravě vypočteme kladné kořeny.

Případ [1]. Je

$$h_1 = a \cdot \frac{-ab + \sqrt{b^4 + \tfrac{1}{2}a^2(b^2 - a^2)}}{b^2 + \tfrac{1}{2}a^2},$$

neboť druhý kořen je zřejmě záporný.

Odtud a ze vztahu (4) obdržíme $v = v_1$:

$$v_1 = b \cdot \frac{-ab + \sqrt{b^4 + \tfrac{1}{2}a^2(b^2 - a^2)}}{b^2 + \tfrac{1}{2}a^2}.$$

Případ [2]. Je

$$h_2 = a \cdot \frac{ab + \sqrt{b^4 + \tfrac{1}{2}a^2(b^2 - a^2)}}{b^2 + \tfrac{1}{2}a^2},$$

což je zřejmě číslo kladné; stejně jako v předchozím případě dostaneme

$$v_2 = b \cdot \frac{ab + \sqrt{b^4 + \tfrac{1}{2}a^2(b^2 - a^2)}}{b^2 + \tfrac{1}{2}a^2}.$$

To znamená, že existují nejvýše dvě třídy požadovaných hranolů (hranolů téže třídy jsou shodné).

Protože však lze sestrojit čtverec $ABCD$ o středu O a o straně $h = h_1$, po příp. $h = h_2$ s vrcholy na ploše K_2 (ze vztahu (3) totiž plyne, že je $h \leq b \sqrt{2}$), a protože ze vztahu (3) plyne, že $v = v_1$, po příp. $v = v_2$, je vzdálenost jednoho z průsečíků O' kolmice SO (vedené bodem S k rovině $ABCD$) s kulovou plochou K_1 od roviny $ABCD$. To znamená, že doplněním na hranol dostáváme skutečně ke každému z čísel $h = h_1$, $h = h_2$ jeden takový hranol. Protože čísla h , v je hranol až na shodnost jednoznačně určen a protože je $h_1 \neq h_2$, nejsou tyto hranoly shodné; tím je dokázána existence právě dvou tříd takových hranolů.

Podle řešení s. Jaromíra Jakeše,
11. tř. 4. jedenáctiletky v Brně-Králově Poli.

3. V rovině komplexních čísel je vepsán jednotkové kružnici se středem v bodě $[0; 0]$ pravidelný sedmnáctiúhelník s jedním vrcholem v bodě $[1; 0]$.

Určete počet jeho vrcholů, které leží uvnitř kružnice se středem v bodě $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ a s poloměrem $r = 1$.

Řešení. Vrcholy daného sedmnáctiúhelníka jsou obrazy kořenů rovnice

$$z^{17} = 1,$$

neboli jsou to čísla

$$z_k = \cos \frac{k \cdot 360^\circ}{17} + i \sin \frac{k \cdot 360^\circ}{17}, \quad (1)$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, 16$. Pro stručnost položíme

$$x_k = \frac{k \cdot 360^\circ}{17}, \quad (2)$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, 16$; pak je

$$z_k = \cos x_k + i \sin x_k.$$

Označme $[z_k]$ bod, který je obrazem čísla z_k ; dále označme m kružnici o středu $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ a poloměru $r=1$. Podle požadavku úlohy hledáme body $[z_k]$, které mají od středu kružnice m vzdálenost menší než 1. Pro tyto body platí

$$\left| z_k - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + i \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \right| < 1$$

neboli

$$\left| \cos x_k - \sqrt{\frac{3}{2}} + i \left(\sin x_k - \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \right| < 1. \quad (3)$$

Protože platí $|a_1 + ia_2| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ neboli $|a_1 + ia_2|^2 = a_1^2 + a_2^2$, kde a_1, a_2 jsou reálná čísla, můžeme vztah (3) nahradit vztahem

$$\left(\cos x_k - \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 + \left(\sin x_k - \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 < 1.$$

Po úpravě pravé strany dostaneme

$$\cos^2 x_k + \sin^2 x_k - 2 \sqrt{\frac{3}{2}} (\cos x_k + \sin x_k) + 2 \cdot \frac{3}{2} < 1$$

neboli

$$2 \sqrt{\frac{3}{2}} (\cos x_k + \sin x_k) > 2 \cdot \frac{3}{2},$$

a tedy

$$\cos x_k + \sin x_k > \sqrt{\frac{3}{2}}$$

neboli

$$\sin(90^\circ - x_k) + \sin x_k > \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Odtud podle známého vzorce dostaneme

$$2 \sin 45^\circ \cdot \cos (45^\circ - x_k) > \sqrt{\frac{3}{2}},$$

a protože $\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, máme dále

$$\cos (45^\circ - x_k) > \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

neboli

$$\sin (45^\circ + x_k) > \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Protože $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60^\circ = \sin 120^\circ = \sin 420^\circ = \sin 480^\circ$, leží číslo $45^\circ + x_k$ buď v intervalu $(60^\circ, 120^\circ)$ nebo v intervalu $(420^\circ, 480^\circ)$; druhý interval zřejmě nepřichází v úvahu, protože platí $k < 17$. Proto musí platit

$$60^\circ < 45^\circ + x_k < 120^\circ$$

neboli

$$15^\circ < x_k < 75^\circ.$$

Odtud vzhledem ke vztahu (2) dostaneme

$$\frac{17}{24} < k < \frac{85}{24},$$

neboli $k = 1, k = 2, k = 3$. Snadno se přesvědčíme, že vrcholy $[z_1], [z_2], [z_3]$ daného sedmnáctiúhelníka skutečně vyhovují úloze; tím je úloha řešena.

Řešil s. Ehrfried Losert,

11. b třída jedenáctiletky v Opavě.

Jiné řešení (viz obr. 15). Označme P obraz bodu nula, dále $C \equiv [1, 0]$, $C' \equiv [0, 1]$ a $S \equiv [\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}]$. Zřejmě je

$$\sphericalangle CPS = 45^\circ. \quad (1)$$

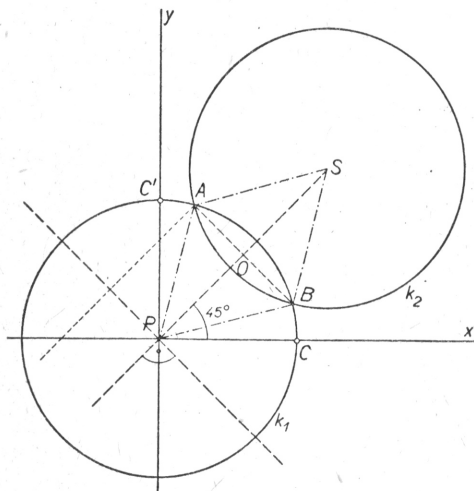
Uvažujme kružnice $k_1 \equiv [P, r_1 = 1]$, $k_2 \equiv [S, r_2 = 1]$. Jejich středná podle Pythagorovy věty je

$$PS = \sqrt{3}. \quad (2)$$

Protože je $r_1 = r_2 = 1$, platí pro kružnice k_1, k_2 vztah

$$|r_1 - r_2| < PS < r_1 + r_2$$

a obě kružnice mají tedy dva různé společné body A, B . Dále je zřejmé, že všechny body kružnice k_2 leží uvnitř pravého úhlu $\sphericalangle CPC'$.



Obr. 15.

Jestliže existují vrcholy daného sedmnáctiúhelníka, které splňují požadavky úlohy, pak leží nutně uvnitř úhlu $\sphericalangle APB$ a obráceně všechny vrcholy sedmnáctiúhelníka, které uvnitř tohoto úhlu leží, zřejmě vyhovují úloze.

Všimněme si čtyřúhelníka $APBS$; jeho strany mají vesměs velikost 1. Proto je to kosočtverec; je tedy $PS \perp AB$. Označme O střed tohoto kosočtverce; pak je $PO = \frac{1}{2} \cdot PS$ a podle (2) je tedy

$$PO = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku PBO , kde $\sphericalangle O = 90^\circ$, je přepona $PB = 1$, odvěsna $PO = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, a proto podle známé poučky je

$$\sphericalangle BPO = 30^\circ. \quad (3)$$

Při označení uvedeném v obr. 15 je

$$\sphericalangle CPB = \sphericalangle CPO - \sphericalangle BPO,$$

$$\sphericalangle CPA = \sphericalangle CPO + \sphericalangle OPA$$

neboli vzhledem ke vztahům (1), (3) je

$$\sphericalangle CPB = 15^\circ, \quad \sphericalangle CPA = 75^\circ. \quad (4)$$

O argumentech α_k vrcholů daného sedmnáctiúhelníka platí

$$\alpha_k = \frac{k \cdot 360^\circ}{17},$$

kde celé číslo k probíhá čísla 0, 1, 2, ..., 16. Hledáme ta α_k , pro něž podle (4) platí

$$15^\circ < \alpha_k < 75^\circ.$$

Této podmínce vyhovují čísla $k = 1, 2, 3$. Příslušné vrcholy sedmnáctiúhelníka zřejmě vyhovují požadavkům úlohy. Tedy: Tři z vrcholů daného sedmnáctiúhelníka mají od bodu S vzdálenost menší než číslo 1.

Řešil s. Aleš Pultr,

10.d třída 6. jedenáctiletky v Praze 6.

4. Buďte a, b, c daná reálná čísla, vesměs navzájem různá. Potom rovnice

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0. \quad (1)$$

má vždy reálné řešení. Dokažte.

Řešení. Předpokládejme, že jsme našli řešení x dané rovnice. Potom je nutně číslo x různé od kteréhokoliv z čísel a, b, c neboli platí

$$Z = (x - a)(x - b)(x - c) \neq 0; \quad (2)$$

jinak by totiž alespoň jeden ze zlomků na levé straně rovnice (1) neměl smysl. Za předpokladu, že platí (2), znásobme obě strany rovnice (1) číslem Z ; dostaneme rovnici

$$(x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) + (x - a)(x - b) = 0, \quad (3)$$

kteřá je pro ta x , pro něž platí vztah (2), ekvivalentní s rovnicí (1). Tuto rovnici snadno upravíme na tvar

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0. \quad (4)$$

Tedy každé reálné řešení x rovnice (4) je řešením rovnice (1), platí-li o něm zároveň vztah (2). Protože rovnici (4) umíme snadno řešit, musíme dokázat, že o jejím řešení x platí vztah (2); stačí dokázat, že rovnice (3) nemá řešení $x = a$ nebo $x = b$ nebo $x = c$. Dokažme na př., že rovnice (3) nemá řešení $x = a$. Dosadíme $x = a$ do levé strany rovnice (3). Dostaneme

$$(a - b)(a - c). \quad (5)$$

Podle předpokladu jsou a, b, c různá čísla, a proto je číslo (5) různé od nuly, t. j. $x = a$ není kořenem rovnice (3) a tedy ani rovnice (4).

Nyní dokážeme, že rovnice (4) má dva reálné různé kořeny

$$x_1 = \frac{1}{3}(a + b + c + \sqrt{D}), \quad x_2 = \frac{1}{3}(a + b + c - \sqrt{D}), \quad (6)$$

kde $D = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$.

Důkaz. Tu platí

$$D = \frac{1}{2} [(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)]$$

neboli

$$D = \frac{1}{2} [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

Protože a, b, c jsou navzájem různá čísla, je vždy

$$(a - b)^2 > 0, (b - c)^2 > 0, (c - a)^2 > 0;$$

proto je $D > 0$ a oba kořeny (6) jsou reálné různé, což jsme měli dokázat.

Protože z předchozího již víme, že pro $x = x_1$ nebo $x = x_2$ platí vztah (2), jsou rovnice (4), (1) ekvivalentní; proto čísla $x = x_1, x = x_2$ jsou též kořeny rovnice (1). Má tedy rovnice (1) dvě reálná různá řešení.

Podle řešení s. Břetislava Nováka, žáka 10.b tř.
jedenáctiletky v Chrudimi,
a s. Ehrfrieda Loserta, žáka 11.b tř.
jedenáctiletky v Opavě.

4. Úlohy I. kola kategorie B.

1. Řešte soustavu rovnic

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x+1} + m(y-2) &= 1, \\ \frac{m}{x+1} + y - 1 &= 2m, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

kde x, y jsou neznámé a m je dané reálné číslo.

Proveďte diskusi řešitelnosti dané soustavy vzhledem k různým hodnotám čísla m .

Řešení. Nechť daná soustava (1) má řešení (x, y) . Pak je nutně

$$x \neq -1, \quad (2)$$

jinak by zlomek $\frac{1}{x+1}$ neměl smysl. Potom lze soustavu (1) uvést na tvar

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x+1} + m(y-2) &= 1, \\ \frac{m}{x+1} + y-2 &= 2m-1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Položme

$$\frac{1}{x+1} = u, \quad y-2 = v. \quad (4)$$

Po dosazení ze (4) do (3) dostaneme soustavu

$$\left. \begin{aligned} u + mv &= 1, \\ mu + v &= 2m-1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

To je soustava lineárních rovnic pro neznámé u, v ; tato čísla jsou při existující dvojici (x, y) určena vztahy (4). Znásobme druhou rovnici (5) číslem $-m$ a přičteme ji k první rovnici (5); dostaneme

$$u(1-m^2) = 1+m-2m^2$$

neboli

$$u(1-m)(1+m) = (1-m)(1+2m). \quad (6)$$

Když existuje řešení $(x \neq -1, y)$ soustavy (1), potom číslo u , určené podle (4), vyhovuje rovnici (6). Ptejme se, zda obráceně číslo u , které vyhovuje vztahu (6), vede přes soustavu (5) a vztahy (4) k řešení (x, y) soustavy (1). Rozeznávejme dva případy.

Případ [1]. Nechť je $(1-m)(1+m) \neq 0$, t. j. nechť platí

$$m \neq 1, \quad m \neq -1. \quad (7)$$

Potom z (6) dostaneme

$$u = \frac{1 + 2m}{1 + m}. \quad (8)$$

Z výsledku (8) a z druhé rovnice (5) dostaneme

$$v = -\frac{1}{1 + m}. \quad (9)$$

Soustava (5) má zřejmě jediné řešení (u, v) dané vztahy (8), (9). Nyní podle vztahů (4) máme k této dvojici (u, v) vypočítat (x, y) . Avšak z prvního vztahu (4) lze vypočítat $x + 1$ jen tehdy, když je $u \neq 0$; to vzhledem k (8) znamená, že musí být $1 + 2m \neq 0$ neboli

$$m \neq -\frac{1}{2}. \quad (10)$$

Je-li $m = -\frac{1}{2}$, nemá soustava (1) řešení.

Jestliže pro m platí vztahy (7), (10), potom ze (4) a (8), (9) vypočteme

$$x = -\frac{m}{1 + 2m}, \quad y = \frac{1 + 2m}{1 + m};$$

tato dvojice skutečně vyhovuje soustavě (1).

Případ [2]. Nechť je $(1 - m)(1 + m) = 0$. Potom musíme uvažovat dvě možnosti:

a) Nechť je $1 + m = 0$, t. j.

$$m = -1.$$

V tomto případě je soustava (1) zřejmě sporná, neboť má platit současně

$$\frac{1}{x + 1} - y = -1, \quad \frac{1}{x + 1} - y = 1.$$

b) Necht' je $1 - m = 0$, t. j. $m = 1$.

Potom se daná soustava (1) redukuje na jedinou rovnici

$$\frac{1}{x+1} + y = 3,$$

z níž lze zřejmě ke každému $x \neq -1$ vypočítat příslušné y .

Závěr. Soustava (1) má pro m různé od čísel $1, -1, -\frac{1}{2}$ jediné řešení. Pro m rovné některému z čísel $-1, -\frac{1}{2}$ nemá řešení. Pro $m = 1$ má nekonečně mnoho řešení; tu ke každému $x \neq -1$ přísluší jedno řešení (x, y) .

2. Necht' a, b, c jsou vesměs různá kladná čísla.

a) Jestliže platí

$$(a-b)(a-c) > 0, \quad (1)$$

potom je číslo a buď největším nebo nejmenším z čísel a, b, c .
Dokažte. Lze tuto větu obrátit?

b) Jestliže platí

$$(a-b)(b-c) > 0, \quad (2)$$

potom je číslo a buď největším nebo nejmenším z čísel a, b, c .
Dokažte. Lze tuto větu obrátit?

c) Jestliže číslo a je největším nebo nejmenším z čísel a, b, c potom platí

$$b \cdot (c+a) > a \cdot (c-a). \quad (3)$$

Dokažte. Lze tuto větu obrátit?

Řešení. a) Necht' platí vztah (1). Potom platí

buď $a - b > 0, a - c > 0$ anebo $a - b < 0, a - c < 0$,

neboli je

$$\text{buď } a > b, a > c \text{ anebo } a < b, a < c.$$

Je tedy číslo a buď největším nebo nejmenším z čísel a, b, c .

Obráceně, nechť je na př.

$$a > b, a > c.$$

Pak je $a - b > 0, a - c > 0$, takže platí (1).

Stejně se dokáže: Je-li $a < b, a < c$, potom platí (1).

Větu tedy můžeme obrátit.

b) Nechť platí (2). Potom je

$$\text{buď } a - b > 0, b - c > 0 \text{ anebo } a - b < 0, b - c < 0,$$

neboli je

$$\text{buď } a > b, b > c \text{ anebo } a < b, b < c. \quad (4)$$

Ze vztahů (4) plyne, že platí

$$\text{buď } a > b, a > c \text{ anebo } a < b, a < c. \quad (5)$$

Je tedy číslo a buď největším nebo nejmenším z čísel a, b, c .
Větu nelze obrátit. Klademe-li na př. $a = 5, b = 3, c = 4$,
tu číslo a je sice největším z čísel a, b, c , avšak $(a - b)(b - c) =$
 $= -2$.

c) Podle předpokladu je

$$\text{buď } a > b, a > c \text{ anebo } a < b, a < c$$

neboli je

$$\text{buď } a - b > 0, a - c > 0 \text{ anebo } a - b < 0, a - c < 0. \quad (6)$$

Vztah (3) je ekvivalentní se vztahem

$$(a - b)(a - c) + 2ab > 0. \quad (7)$$

Když platí vztahy (6), potom platí vztah (7) (neboť je $2ab > 0$) a tím i vztah (3).

Větu nelze obrátit. Na př. pro kladná čísla $a = 5$, $b = 7$, $c = 2$ platí vztah (3), t. j. $7 \cdot 7 > 5 \cdot (-3)$, ale číslo a není ani největším, ani nejmenším z čísel a , b , c .

3. Buď dána kružnice $m \equiv (S, r)$; označme AA' , BB' dva její navzájem kolmé průměry. Uvnitř menšího oblouku AB zvolme bod X a označme K průsečík přímk BX , AA' . Dále označme k kolmici vedenou bodem K k přímce AA' a t tečnu kružnice m v bodě X .

Určete množinu průsečíků Y přímk k , t , když bod X probíhá vnitřek menšího oblouku AB kružnice m .

Řešení. I. Trojúhelník $BB'X$ má podle Thaletovy věty při vrcholu X pravý úhel (obr. 16). Proto o jeho ostrých úhlech $\sphericalangle XBB' = \alpha$, $\sphericalangle XB'B = \beta$ platí vztah

$$\alpha + \beta = 90^\circ. \quad (1)$$

Podle předpokladu leží bod X uvnitř menšího oblouku AB ; je tedy úhel $\sphericalangle BSX$ ostrý. Proto existuje rovnoramenný trojúhelník SBX se základnou BX , při čemž platí

$$\sphericalangle SXB = \alpha. \quad (2)$$

Z tohoto trojúhelníku plyne $2\alpha = 180^\circ - \sphericalangle BSX$, t. j. $2\alpha > 90^\circ$ a tedy

$$90^\circ > \alpha > 45^\circ. \quad (3)$$

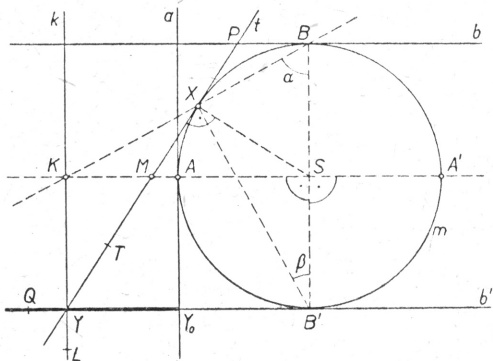
Ze vztahů (1), (3) dostaneme

$$\beta < 45^\circ, 2\beta < 90^\circ. \quad (4)$$

Protože vzhledem k (3) je $\sphericalangle XBS + \sphericalangle BSA = \alpha + 90^\circ < 180^\circ$, mají podle Eukleidova postulátu polopřímky BX , SA společný bod K . V trojúhelníku BKS je $\sphericalangle S = 90^\circ$, $\sphericalangle B = \alpha$ a podle (1) je

$$\sphericalangle BKS = \beta. \quad (5)$$

Přitom vzhledem ke (3), (4) je $\sphericalangle KBS > \sphericalangle BKS$, a proto o příslušných stranách k těmto úhlům protějším platí $SK > SB$ neboli $SK > r$. Leží tedy bod K na prodloužení úsečky SA za bod A a tedy uvnitř poloroviny BSA a vně dané kružnice m . Proto je kolmice k sestavená v bodě K k přímce SA nesečnou kružnice m a leží celá uvnitř poloroviny BSA . Označme $L \neq K$ bod přímky k , který leží uvnitř poloroviny SAB' (opačné k polorovině SAB).



Obr. 16.

Označme $T \neq X$ bod přímky t , který leží v polorovině SXA . Tu podle vlastnosti tečny t v bodě X kružnice m je $\sphericalangle TXS = 90^\circ$ a úhly $\sphericalangle TXS$, $\sphericalangle SXB$ jsou styčné, takže úhel

$$\angle TXB = 90^\circ + \alpha \quad (6)$$

je tupý. Polopřímka XT leží tedy v úhlu $\sphericalangle S XK$ a má proto s úsečkou SK společný bod M ; protože však $M \neq X$ je bodem tečny t , leží vně kružnice m a tedy uvnitř úsečky AK .

Ze vztahu (6) plyne, že $\sphericalangle KXM = 90^\circ - \alpha$ (úhly $\sphericalangle KXM$, $\sphericalangle TXB$ jsou vedlejší) neboli

$$\sphericalangle KXM = \beta. \quad (7)$$

Můžeme předpokládat, že X, M, T je pořádek bodů na přímce t . Pak je však úhel $\sphericalangle TMK$ vnějším úhlem trojúhelníka MKX a platí o něm $\sphericalangle TMK = \sphericalangle BKS + \sphericalangle KXM$ (podle věty o vnějším úhlu $\sphericalangle TMK$ trojúhelníka MKX); vzhledem ke vztahům (5), (7) tedy platí $\sphericalangle TMK = 2\beta$. Odtud a z druhého vztahu (4) plyne, že platí

$$\sphericalangle TMK < 90^\circ. \quad (8)$$

Protože je $\sphericalangle LKA = 90^\circ$, je vzhledem k (8) $\sphericalangle LKA + \sphericalangle TMK < 180^\circ$; proto podle Eukleidova postulátu mají polopřímky KL, MT neboli přímky k, t společný bod Y , který leží uvnitř poloroviny SAB' . Trojúhelník MYK je zřejmě pravoúhlý ($\sphericalangle K = 90^\circ$).

Nyní dokážeme platnost vztahu

$$\triangle KXS \cong \triangle XKY \text{ (usu)}. \quad (9)$$

Důkaz. Oba trojúhelníky mají společnou stranu KX . Dále podle (5), (7) se shodují v úhlech $\sphericalangle XKS, \sphericalangle XKY$. Protože X, M, T je pořádek bodů na přímce t , jsou úhly $\sphericalangle XKS = \beta$, $\sphericalangle SKY = 90^\circ$ styčné a platí $\sphericalangle XKY = 90^\circ + \beta$. Ale i úhly $\sphericalangle XKY = \beta$, $\sphericalangle YXS = 90^\circ$ jsou styčné a platí $\sphericalangle KXS = 90^\circ + \beta$. Je tedy $\sphericalangle KXS = \sphericalangle XKY$. Tím je vztah (9) dokázán.

Ze vztahu (9) plyne $KY = XS$ neboli

$$KY = r.$$

Leží tedy bod Y na tečně b' kružnice m sestrojené v dotykovém bodě B' .

Označme a tečnu kružnice m v bodě A ; dále označme Y_0 průsečík přímek a, b' . Polopřímku opačnou k polopřímce

Y_0B' označme Y_0Q . Protože přímka k leží vně kružnice m , leží zřejmě bod Y uvnitř polopřímky Y_0Q .

II. Obráceně, zvolíme-li uvnitř polopřímky Y_0Q bod Y_1 , přísluší k němu na přímce SA jediný bod K_1 takový, že je $Y_1K_1 \perp SA$, při čemž celá přímka Y_1K_1 leží vně kružnice m . Potom uvnitř úsečky K_1B leží jediný bod $X_1 \equiv B$, který je bodem menšího oblouku AB kružnice m (přímka K_1B nemůže zřejmě být tečnou kružnice m v jejím bodě B , a proto je její sečnou). Sestrojíme-li k bodu X_1 bod Y postupem provedeným v odstavci I, zjistíme, že bod Y je průsečíkem přímek Y_1K_1, b' , t. j. že $Y \equiv Y_1$.

Závěr. Množina všech průsečíků přímek k, t , když bod X probíhá vnitřek menšího oblouku AB , je vnitřek polopřímky Y_0Q , sestavené na konci odstavce I.

4. Kvádr má rozměry a, b, c . Zobraďte v rovnoběžném promítání lomenou čáru na povrchu kvádrů, která je nejkratší spojnici dvou protějších vrcholů tohoto kvádrů.

Konstrukci proveďte na základě předchozího výpočtu.

Řešení. Označme $ABCD, A'B'C'D'$ dvě protější stěny kvádrů, při čemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$; dále označme $AB = a, AD = b, AA' = c$.

Předně je jasné, že lomená čára, spojující dva protější vrcholy kvádrů a ležící ve více než dvou stěnách, je vždy delší než lomená čára ležící ve dvou stěnách.

Na př. na obr. 17 pro A', C platí

$$A'X + XY + YZ + ZC > A'X + XC,$$

neboť podle trojúhelníkové nerovnosti je

$$\begin{aligned} YZ + ZC &> YC, \\ XY + YZ + ZC &> XY + YC > XC. \end{aligned}$$

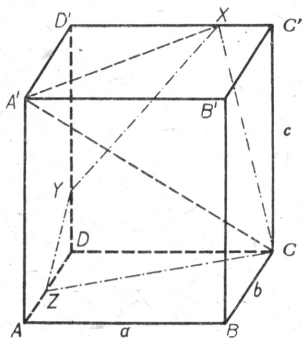
Má-li lomená čára, spojující vrcholy A', C ležet na př. ve stěnách $A'B'C'D'$ a $CDD'C'$ (viz obr. 18), musí přejít po oto-

čení stěny $CDD'C'$ kolem hrany $C'D'$ do roviny $A'B'C'$ v úsečku. Velikost této úsečky je délka přepony pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky a , $b + c$. Velikost této úsečky je tedy

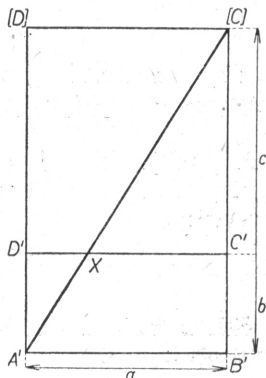
$$\sqrt{a^2 + (b + c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}.$$

Další dvě lomené čáry mají velikosti

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ca}, \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}.$$



Obr. 17.



Obr. 18.

Nejkratší z lomených čar je ta, pro niž je součin $2bc$, resp. $2ca$, $2ab$, nejmenší. Uspořádáme-li rozměry a , b , c podle velikosti

$$a \leq b \leq c,$$

je nejkratší lomená čára ta, která leží ve dvou stěnách se společnou hranou délky c . Takové lomené čáry jsou dvě, je-li $b < c$, čtyři, je-li $a < b = c$, a šest, je-li $a = b = c$. Jejich konstrukce se provede stejně jako v právě uvedeném příkladě (tuto konstrukci již neuvádíme).

5. Nech je dané reálne číslo m . Určte všetky reálne čísla $x \neq -m$, pre ktoré platí vzťah

$$\frac{4x}{x+m} \geq 2. \quad (1)$$

Urobte diskusiu vzhľadom na rôzne čísla m .

Riešenie. Predpokladajme, že sme našli číslo x , ktoré splňuje vzťah (1). Potom musí byť $x+m \neq 0$ čiže

$$x \neq -m; \quad (2)$$

inak by zlomok na ľavej strane vzťahu (1) nemal zmysel. Rozoznávajme dva prípady.

Prípad [1]. Nech je $x+m > 0$, t. j. $x > -m$. (3)

Z platnosti vzťahu (1) dostávame potom postupne tieto nerovnosti:

$$\begin{aligned} 4x &\geq 2(x+m), \\ x &\geq m. \end{aligned} \quad (4)$$

O čísle x vzhľadom na tento vzťah a vzhľadom na vzťah (3) musí platiť

$$x \geq m, \quad x > -m. \quad (5)$$

Obrátene, každé číslo x , o ktorom platia vzťahy (5), splňuje aj vzťahy (4), (2). Pretože je potom $x+m > 0$, dostaneme delením vzťahu (4) týmto číslom, že platí aj vzťah (1).

Prípad [2]. Nech je $x+m < 0$, t. j.

$$x < -m. \quad (6)$$

Z platnosti vzťahu (1) postupne dostaneme:

$$4x \leq 2(x+m), \quad (7)$$

$$x \leq m.$$

O čísle x vzhľadom na tento vzťah a vzťah (6) musí platiť

$$x \leq m, x < -m. \quad (8)$$

Obrátene, každé číslo x , o ktorom platia vzťahy (8), splňuje aj vzťah (7), a pretože je $x + m < 0$, dostaneme delením vzťahu (7) týmto číslom, že platí aj vzťah (1).

Zhrnieme teraz oba výsledky (5), (8).

Záver. [1] Ak je $m = 0$, vyhovuje každé číslo $x \neq 0$ vzťahu (1).

[2] Ak je $m > 0$, každé číslo $x \geq m$ splňuje vzťahy (5) a každé číslo $x < -m$ splňuje vzťahy (8), t. j. ak je $m > 0$, každé číslo x , o ktorom platí jeden zo vzťahov

$$x < -m, x \geq m,$$

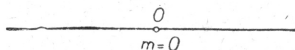
vyhovuje vzťahu (1).

[3] Ak je $m < 0$, každé číslo $x > -m$ splňuje vzťahy (5) a každé číslo $x \leq m$ splňuje vzťahy (8), t. j. ak je $m < 0$, každé číslo x , ktoré splňuje jeden zo vzťahov

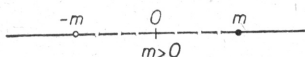
$$x > -m, x \leq m,$$

vyhovuje vzťahu (1).

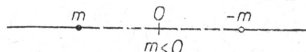
Poznámka. Tieto tri výsledky [1], [2], [3] sú znázornené po rade na obrázkoch 19, 20a, 20b; pritom obraz čísla x vždy padne do tučne vytiahnutej časti číselnej osi.



Obr. 19.



Obr. 20a.



Obr. 20b.

6. Nech je dané reálne číslo a . Urobte rozbor funkcie

$$y = x^2 + |ax^2 - 1|$$

vzhľadom na rôzne hodnoty čísla a ; na základe rozboru načrtnite graf funkcie.

Riešenie. I. Ak je $a \leq 0$, je $ax^2 - 1 < 0$, a preto $|ax^2 - 1| = -ax^2 + 1$; je teda

$$y = (1 - a)x^2 + 1.$$

Funkcia zrejmé nadobúda najmenšiu hodnotu $y_{\min}$ pre $x = 0$, totiž

$$y_{\min} = 1.$$

II. Ak je $a > 0$, rozdelíme definičný obor funkcie číslami $x = x_1$, $x = x_2$, kde

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{a}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Prípád [1]. Pre $x \geq x_2$ je $ax^2 \geq 1$ a teda $|ax^2 - 1| = ax^2 - 1$; preto je

$$y = (1 + a)x^2 - 1. \quad (1)$$

S rastúcim x funkcia rastie; najmenšiu hodnotu $y_{\min}$ nadobúda zrejmé pre $x = x_2$, totiž

$$y_{\min} = \frac{1}{a}.$$

Prípád [2]. Pre $x_1 < x < x_2$ platí $0 < ax^2 < 1$ a teda $|ax^2 - 1| = -ax^2 + 1$; preto je

$$y = (1 - a)x^2 + 1. \quad (2)$$

a) Ak je $a = 1$, je funkcia v tomto obore konštantná, totiž

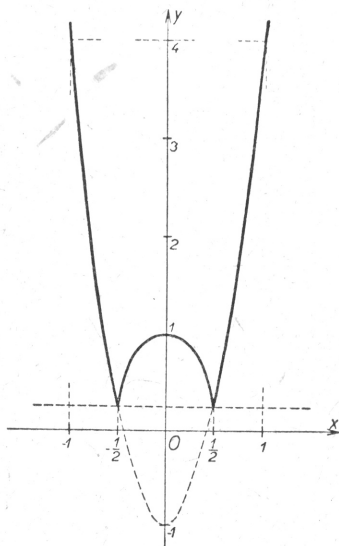
$$y = 1.$$

b) Ak je $0 < a < 1$, sú oba členy na pravej strane vzťahu (2) nezáporné čísla a najmenšiu hodnotu $y_{\min}$ funkcie dostaneme zrejme pre $x = 0$; tu je

$$y_{\min} = 1.$$

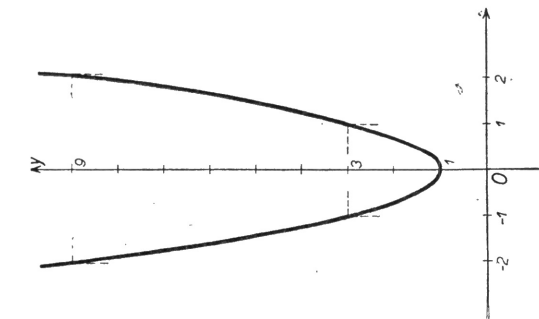
c) Ak je $a > 1$, prvý člen na pravej strane vzťahu (2) nie je kladný a najväčšiu hodnotu $y_{\max}$ funkcie dostaneme pre $x = 0$; tu je

$$y_{\max} = 1.$$

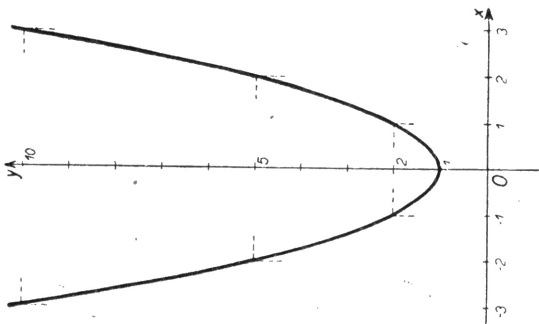


Obr. 21a.

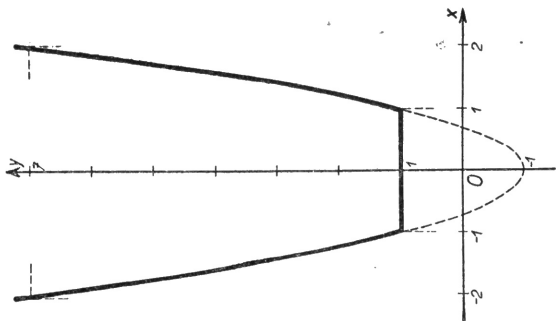
Prípád [3]. Ak je $x \leq x_1$, je $-x \geq x_2$. Pretože graf funkcie je súmerný podľa osi y (t. j. nadobúda pre x tú istú hodnotu ako pre $-x$), je graf funkcie v tejto časti definičného oboru



Obr. 21b.



Obr. 21c.



Obr. 21d.

súmerný podľa osi y ku grafu funkcie v obore $x \geq x_2$ (pozri prípad [1]). Avšak podľa odst. II, prípad [1], je funkcia v intervale $x \geq x_2$ stúpajúca; preto je v intervale $x \leq x_1$ klesajúca. Najmenšiu hodnotu nadobúda pre $x = -x_2$ čiže pre $x = x_1$; tu je

$$y_{\min} = \frac{1}{a}.$$

Pozri obr. 21a) až d), v ktorých sa a po rade rovná 4, -1, 0, 1.

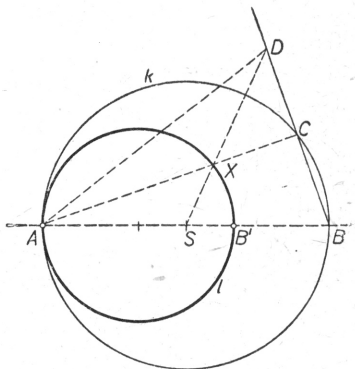
7. Nech je daná kružnica $k \equiv (S, r)$ a jej určitý priemer AB . Nech je ďalej C bod kružnice k , rôzny od bodov A, B . Na polpriamke BC určte bod D tak, aby platilo

$$BD = 2 \cdot BC.$$

a) Úsečky AC, SD majú spoločný bod X , ktorý leží vnútri každej z nich; dokažte to.

b) Čo vyplní bod X , keď bod C prebieha bodmi kružnice k (s výnimkou bodov A, B)?

Riešenie. a) Pretože bod C neleží na priamke AB , existuje trojuholník ABC , v ktorom je podľa Thaletovej vety $\angle BCA = 90^\circ$ (obr. 22). Preto ani body A, B, D neležia v tej-že priamke a existuje rovnoramenný trojuholník ABD . Úsečky AC, DS sú dve z jeho ťažníc. Ťažnice trojuholníka, ako vieme, sa pretínajú v ťažisku, ktoré leží vnútri



Obr. 22.

každej z nich. Preto sa úsečky AC, DS pretnú v bode X , ktorý leží vnútri každej z nich. Pritom platí

$$AX = \frac{2}{3}AC. \quad (1)$$

b) Keď bod C prebieha celú kružnicu k , vyplní bod X podľa známej vety o rovnolahlých kružniciach kružnicu l , ktorá je obrazom kružnice k v rovnolahlosti so stredom A a koeficientom rovnolahlosti $\frac{2}{3}$. Bod X z našej úlohy vyplní teda zmienenú kružnicu l s výnimkou bodu A a bodu B' , ktorý leží vnútri úsečky AB a o ktorom platí

$$AB' = \frac{2}{3}AB.$$

8. Označme $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ veľkosti strán trojuholníka ABC ; ďalej označme

$$x = b^2 + c^2 - a^2, \quad \sphericalangle CAB = \alpha.$$

a) Ak je $\alpha < 90^\circ$, je $x > 0$. Ak je $\alpha = 90^\circ$, je $x = 0$. Ak je $\alpha > 90^\circ$, je $x < 0$. Dokážte to (pri dôkaze použite vetu 12 na str. 263 učebnice Matematika pre siedmy postupný ročník).

b) Dokážte, že vetu uvedenú v úlohe a) možno obrátiť.

Riešenie. a) Ak v trojuholníku ABC uhol $\alpha = 90^\circ$; platí o ňom Pythagorova veta $a^2 = b^2 + c^2$ alebo $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, t. j. $x = 0$.

Skúmame ďalej trojuholník ABC pre prípad, že $\alpha \neq 90^\circ$. Zostrojme pomocný trojuholník $A_1B_1C_1$ tak, že platí

$$\sphericalangle C_1A_1B_1 = \alpha_1 = 90^\circ, \quad A_1C_1 = b, \quad A_1B_1 = c. \quad (1)$$

Tento trojuholník je týmito podmienkami jednoznačne určený. (Podľa vety sus sú všetky trojuholníky zostrojené z týchto prvkov zhodné.) Označme ešte $B_1C_1 = a_1$; podľa Pythagorovej vety platí

$$b^2 + c^2 - a_1^2 = 0. \quad (2)$$

Rozoznávame teraz dva prípady.

Prípad [1]. Nech je $\alpha < 90^\circ$. Potom sa trojuholníky ABC ,

$A_1B_1C_1$ zhodujú v dvoch stranách (pozri (1)), ale o uhloch nimi zovretých platí

$$\alpha < \alpha_1.$$

Podľa známej vety z planimetrie (pozri vetu 12 na str. 263 učebnice Matematika pre 7. postupný ročník) platí potom o príslušných stranách a, a_1

$$a < a_1. \quad (3)$$

Čísla a, a_1 sú kladné a zo vzťahu (3) vyplýva platnosť vzťahu

$$a^2 < a_1^2.$$

Preto je $b^2 + c^2 - a^2 > b^2 + c^2 - a_1^2$ a vzhľadom na vzťah (2) platí $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Tým sme dokázali, že platí $x > 0$.

Prípado [2]. Nech je $\alpha > 90^\circ$. Rovnako ako v prípade [1] dokážeme: pretože platí $\alpha > \alpha_1$, platí podľa citovanej vety potom aj $a > a_1$, čiže $a^2 > a_1^2$. Stáde a zo vzťahu (2) dostaneme postupne

$$b^2 + c^2 - a^2 < b^2 + c^2 - a_1^2, \quad b^2 + c^2 - a^2 < 0, \text{ t. j. } x < 0,$$

čo sme mali dokázať.

Tým sme úlohu a) rozriešili.

b) V úlohe a) sme dokázali tieto vety o trojuholníku ABC :

I. Ak je $\alpha < 90^\circ$, je $x > 0$.

II. Ak je $\alpha = 90^\circ$, je $x = 0$.

III. Ak je $\alpha > 90^\circ$, je $x < 0$.

Každú z týchto viet možno obrátiť.

Dôkaz. Urobíme napr. nepriamy dôkaz obrátenej vety I (ďalšie vety možno dokázať podobne): „Ak je v trojuholníku ABC číslo $x > 0$, je $\alpha < 90^\circ$.“

O uhle α musí platiť práve jeden z troch vzťahov:

1. $\alpha > 90^\circ$.

2. $\alpha = 90^\circ$.

3. $\alpha < 90^\circ$.

Keď platí $\alpha > 90^\circ$, podľa vety III je $x < 0$, čo je spor s predpokladom $x > 0$.

Keď platí $\alpha = 90^\circ$, podľa vety II je $x = 0$, čo je spor s predpokladom $x > 0$.

Zostáva teda prípad $\alpha < 90^\circ$, čo sme mali dokázať.

Tým je úloha b) rozriešená.

9. a) Buďte a, b, c kladná racionální čísla, o nichž platí vzťah

$$a + \sqrt{b} = \sqrt{c}. \quad (1)$$

Dokažte, že potom čísla b, c jsou rovná druhým mocninám racionálních čísel.

b) Buďte a, b, c, d kladná racionální čísla, při čemž číslo b není druhou mocninou racionálního čísla. Jestliže o těchto číslech platí vzťah

$$a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}, \quad (2)$$

potom platí $a = c, b = d$. Dokažte.

Řešení. a) Umocníme obě strany vztahu (1) na druhou; dostaneme rovnost

$$a^2 + b + 2a \cdot \sqrt{b} = c.$$

Odtud vzhledem k tomu, že je $a \neq 0$, vypočítáme $\sqrt{b}$; je

$$\sqrt{b} = \frac{c - a^2 - b}{2a}.$$

Číslo na pravé straně tohoto vztahu je racionální a jeho druhá mocnina je zřejmě rovna b . Tedy podle vztahu (1) je také $\sqrt{c}$ číslo racionální. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

b) Jestliže je $a = c$, je $\sqrt{b} = \sqrt{d}$; po umocnění obou stran poslední rovnosti na druhou dostaneme $b = d$, což je v souladu s tvrzením úlohy.

Nechť je dále $a \neq c$ (dokážeme, že to není možné); pro určitost můžeme předpokládat, že je na př. $a > c$, t. j. $a - c > 0$.

Potom vztah (2) lze uvést na tvar

$$(a - c) + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{d},$$

který splňuje předpoklady úlohy a), takže podle výsledku této úlohy je b druhou mocninou racionálního čísla. To je však spor s předpokladem úlohy. Proto případ $a \neq c$ nemůže nastat.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

10. Číslo 5^{555} je nepředstavitelně veliké; prozradíme vám, že jeho zápis v dekadické soustavě má skoro 400 cifer. Přesto se dá zjistit jednoduchou úvahou skupina cifer, které stojí v tomto zápise na pěti posledních místech. Proveďte tuto úvahu a zjistěte uvedenou skupinu cifer.

Řešení. Sestavme si tabulku skupiny cifer, které stojí na pěti posledních místech mocnin čísla 5 pro přirozená n od $n = 1$ počínajíc; dostaneme opětým násobením číslem 5 tato čísla:

n	skupina					
1	0	0	0	0	5	} A
2	0	0	0	2	5	
3	0	0	1	2	5	
4	0	0	6	2	5	
5	0	3	1	2	5	} B
6	1	5	6	2	5	
7	7	8	1	2	5	
8	9	0	6	2	5	
9	5	3	1	2	5	
10	6	5	6	2	5	
11	2	8	1	2	5	
12	4	0	6	2	5	
13	0	3	1	2	5	

Když budeme pokračovat v násobení číslem 5 dále, objeví se nám totiž periodičnost; budou se zřejmě opakovat skupiny označené v tabulce písmenem **B**. Pro $n = 555$ dostaneme tedy tu skupinu tabulky **B**, která odpovídá tomu z exponentů 5 až 12, k němuž dospějeme, když od čísla 555 budeme postupně odčítat číslo 8.

Když vynecháme část tabulky označenou **A**, budou mít jednotlivé skupiny místo čísla n pořadová čísla $n - 4$ a tedy skupina čísla 5^{555} bude mít pořadové číslo $555 - 4$; dělíme-li toto číslo osmi, pak dostaneme zbytek 7, t. j. když budeme postupovat v naší tabulce od skupiny čísla 5^{11} vždy po osmi, dospějeme po určitém počtu kroků (ten udává celistvá část čísla $\frac{555 - 4}{8}$) ke skupině čísla 5^{555} . Protože čísla 5^{11} , 5^{555}

mají podle naší úvahy tytéž skupiny, má číslo 5^{555} na posledních pěti místech svého zápisu v dekadické soustavě skupinu 28 125, což jsme měli vyšetřit.

11. a) Ve čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$ označme T_n těžiště jeho stěny, která je protější k vrcholu A_n (kde n je některé z čísel 1, 2, 3, 4).

Dokažte: Úsečky A_1T_1 , A_2T_2 , A_3T_3 , A_4T_4 procházejí společným bodem T (zvaným těžiště čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$). Přitom platí

$$A_nT_n = 4 \cdot TT_n \quad (1)$$

(kde $n = 1, 2, 3, 4$).

b) Buď dána rovina ABC a v ní bod P ; dále buď dán bod Q , ležící mimo rovinu ABC . Uvažujme čtyřstěn $ABCD$, jehož vrchol D leží uvnitř polopřímky PQ , a označme T jeho těžiště.

Co vyplní bod T , když bod D probíhá vnitřek polopřímky PQ ?

Řešení. a) I. Nejprve dokážeme, že na př. úsečky A_1T_1 ,

A_4T_4 mají společný bod T (který leží uvnitř každé z nich), při čemž platí

$$A_1T = 3 \cdot TT_1, \quad A_4T = 3 \cdot TT_4. \quad (2)$$

Důkaz (obr. 23). Označme S střed úsečky A_2A_3 . Bod T_1 leží uvnitř úsečky A_4S a bod T_4 uvnitř úsečky A_1S . Protože T_1 je těžiště trojúhelníka $A_2A_3A_4$ a T_4 těžiště trojúhelníka $A_1A_2A_3$, platí

$$SA_4 = 3 \cdot T_1S, \quad SA_1 = 3 \cdot T_4S. \quad (3)$$

Úsečky A_1T_1 , A_4T_4 leží až na krajní body uvnitř trojúhelníka A_1A_4S . Takové úsečky mají vždy společný bod, který leží uvnitř každé z nich; označme jej T .

Zřejmě platí

$$\triangle ST_1T_4 \sim \triangle SA_4A_1,$$

neboť se oba trojúhelníky shodují v úhlu při vrcholu S a dále platí vztahy (3). Proto je $\sphericalangle ST_1T_4 = \sphericalangle SA_4A_1$ a tudíž je $T_1T_4 \parallel A_4A_1$ a dále platí

$$A_4A_1 = 3 \cdot T_1T_4. \quad (4)$$

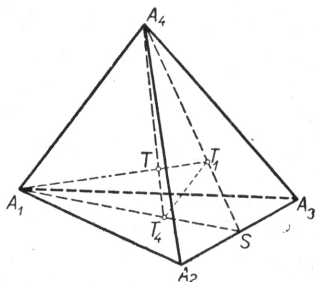
Trojúhelníky TT_1T_4 , TA_1A_4 se shodují v úhlech při vrcholu T (úhly vrcholové) a dále je $\sphericalangle TT_1T_4 = \sphericalangle TA_1A_4$ (úhly střídavé, při čemž je $T_1T_4 \parallel A_4A_1$); proto platí

$$\triangle TT_1T_4 \sim \triangle TA_1A_4.$$

Protože platí vztah (4), plyne z této podobnosti

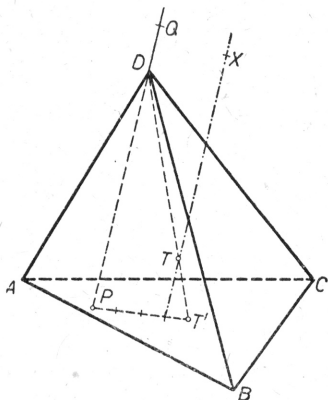
$$\frac{TA_1}{TT_1} = \frac{TA_4}{TT_4} = 3. \quad (5)$$

Tím jsou vztahy (2) dokázány.



Obr. 23.

II. Víme, že uvnitř úsečky A_1T_1 leží jediný bod T , o němž platí první vztah (2), a proto když budeme vyšetřovat společný bod úseček A_1T_1 , A_2T_2 nebo společný bod úseček A_1T_1 , A_3T_3 , dospějeme právě k bodu T , který jsme sestrojili v odstavci I. Tím je dokázáno, že úsečky A_1T_1 , A_2T_2 , A_3T_3 , A_4T_4 mají společný bod T , který leží uvnitř každé z nich. Ze vztahů (5) a obdobných dalších dostaneme snadno vztahy (1). Tím jsme provedli řešení úlohy a).



Obr. 24.

b) I. Označme T' (srovnej s obr. 24) těžiště trojúhelníka ABC a uvnitř polopřímky PQ zvolme bod D . Uvažujme čtyřstěn $ABCD$ a označme T jeho těžiště. Podle úlohy a) platí, že bod T leží uvnitř úsečky DT' , při čemž je

$$TT' = \frac{1}{4} \cdot DT'. \quad (6)$$

Body P, T' mají v rovině ABC zcela určitou polohu, bod D probíhá vnitřek polopřímky PQ . V rovině, která obsahuje přímku PQ a bod T' (a taková rovina existuje alespoň jedna),

uvažujme stejnolehlost S o středu T' a o koeficientu stejnolehlosti $\frac{1}{4}$. V této stejnolehlosti vzhledem ke vztahu (6) bod T přísluší bodu D .

Bodu P v této stejnolehlosti S přísluší bod O a polopřímce PQ polopřímka OX , při čemž bod X leží uvnitř poloprostoru $ABCQ$ a dále je $OX \parallel PQ$.

Bod T proto leží uvnitř polopřímky OX pro každou polohu bodu D , který leží uvnitř polopřímky PQ .

Poznámka. Jestliže je $P \equiv T'$, potom splývají polopřímky OX, PQ a body O, T' , při čemž platí vztah (6). Jestliže však

je $P \neq T'$, potom jsou polopřímky OX , PQ různé a rovněž je $O \neq T'$; platí vztah (6) a dále je $OT' = \frac{1}{4} \cdot PT'$.

II. Obráceně, když zvolíme uvnitř polopřímky OX libovolný bod T_0 , přísluší mu ve stejnoolehlosti S' o středu T' a o koeficientu 4 stejnoolehlosti v rovině položené přímkou PQ a bodem T' (taková rovina existuje alespoň jedna) bod D_0 , který zřejmě padne dovnitř polopřímky PQ ; odtud plyne, že bod T_0 je těžištěm čtyřstěnu $ABCD_0$. Tím je úloha řešena.

Závěr. Body T vyplní vnitřek polopřímky OX , která v rovině obsahující body P , Q , T' přísluší polopřímce PQ ve stejnoolehlosti S , jejímž středem je bod T' a jejíž koeficient je roven číslu $\frac{1}{4}$.

12. Označme T střed základny PQ daného rovnoramenného trojúhelníka OPQ . V polorovině PQO buď dána kružnice $k = (S, r)$, která se dotýká přímky PQ v bodě T .

Sestrojte uvnitř úsečky OP bod A a uvnitř úsečky OQ bod B , které mají tyto vlastnosti:

(1) Je $AB \parallel PQ$.

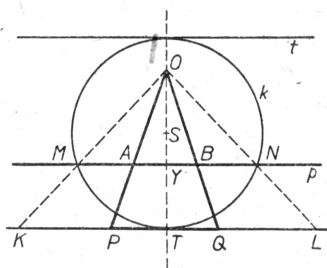
(2) Přímka AB protne kružnici k ve dvou různých bodech M , N .

(3) Platí $MN = 3 \cdot AB$.

Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy vzhledem k daným číslům a , v , r , kde $a = \frac{1}{2} \cdot PQ$, $v = OT$.

Řešení. I. Rozbor.

Předpokládejme, že jsme sestrojili přímku $AB \parallel PQ$, která je řešením úlohy (obr. 25). Označení průsečíků M , N přímky AB s kružnicí k



Obr. 25.

volme tak, aby body přímky AB byly v pořádku M, A, B, N . Podle požadavků textu úlohy nutně platí

$$MN = 3 \cdot AB. \quad (1)$$

Proto vzhledem k souměrnosti kružnice k a trojúhelníka OPQ podle přímky OT platí

$$MA = AB = BN. \quad (2)$$

Označme po řadě K, L průsečíky přímek OM, ON s přímkou PQ . Potom jsou body K, P, Q, L po řadě stejnohlé s body M, A, B, N podle středu O stejnohllosti. Odtud vzhledem k platnosti vztahů (2) plyne

$$KP = PQ = QL. \quad (3)$$

II. Nyní celý předchozí postup obrátíme a provedeme tuto konstrukci (obr. 25): Na přímce PQ , v níž leží základna PQ daného rovnoramenného trojúhelníka OPQ , sestrojme body $K \neq Q, L \neq P$ tak, že platí vztahy (3). Označme M společný bod kružnice k a úsečky OK , a to takový, že leží uvnitř této úsečky. Bodem M vedme přímku $p \parallel PQ$. Označme $N \neq M$ další společný bod přímky p a kružnice k a dále označme A, B po řadě body společné přímce p a přímkám OP, OQ . Za předpokladu, že bod M leží uvnitř úsečky OK , uvažujme stejnohllost o středu O , ve které bodu K přísluší bod M . V této stejnohllosti přímce PQ přísluší přímka $p \parallel PQ$, bodům P, Q, L po řadě body A, B, N , které vzhledem k poloze bodu M uvnitř úsečky OK leží zřejmě po řadě uvnitř úseček OP, OT, OQ, OL .

Ze stejnohllosti bodů K, P, Q, L s body M, A, B, N a z platnosti vztahů (3) plyne platnost vztahu

$$MA = AB = BN,$$

takže přímka p je skutečně řešením úlohy; tím je podán též důkaz správnosti řešení úlohy.

III. Řešitelnost úlohy závisí na tom, zda existuje uvnitř úsečky OK bod M , který je zároveň bodem kružnice k . Na tomto základě provedeme diskusi řešitelnosti. Především je

$$\begin{aligned} ST &= r, \quad PT = a, \\ OT &= v, \quad KT = 3a. \end{aligned} \quad (4)$$

Protože bod K leží na tečně PTQ kružnice k , leží vně této kružnice.

Rozeznávejme tři případy:

Případ [1]. Nechť je $v < 2r$. Tu bod O leží uvnitř kružnice k a podle známé základní věty má úsečka OK s kružnicí k právě jeden společný bod M . V tomto případě má úloha právě jedno řešení.

Případ [2]. Nechť je $v = 2r$. Tu leží bod O na kružnici k . Ale přímka OK není kolmá k přímce OT (jinak by platilo $OK \parallel PQ$, což odporuje tomu, že bod K leží na přímce PQ); proto není přímka OK tečnou kružnice k a je tedy nutně její sečnou. Přitom druhý průsečík M přímky OK a kružnice k leží zřejmě uvnitř úsečky OK . V tomto případě má úloha opět právě jedno řešení.

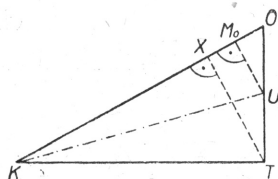
Případ [3]. Nechť je $v > 2r$. V tomto případě všechny společné body kružnice k a přímky OK , pokud existují, leží nutně uvnitř úsečky OK ; to plyne z toho, že všechny body kružnice k leží v přímém pásu obou rovnoběžných tečen PQ , t této kružnice k a část přímky OK , která v tomto pásu leží, patří celá úsečce OK .

Označme U společný bod osy úhlu $\sphericalangle OKT$ a úsečky OT ; dále označme X patu kolmice vedené bodem T k přímce OK (obr. 26). Podle Eukleidovy věty o odvěsně z pravoúhlého trojúhelníka OKT plyne

$$KX = \frac{KT^2}{OK}, \quad OX = \frac{OT^2}{OK} \quad (4')$$

a podle Eukleidovy věty o výšce z téhož trojúhelníka dostaneme $TX^2 = KX \cdot OX$.

Dosaďme sem z předchozích vztahů (4') za KX , OX ; po úpravě dostaneme



Obr. 26.

$$TX = \frac{KT \cdot OT}{OK}.$$

Odtud pomocí vztahů (4) snadno vypočítáme, že

$$TX = \frac{3av}{\sqrt{9a^2 + v^2}}, \quad (5)$$

neboť podle Pythagorovy věty je $OK = \sqrt{9a^2 + v^2}$. Označme M_0 patu kolmice vedené bodem U k přímce OK ; dále označme $UT = \varrho$. Zřejmě platí

$$UM_0 = UT = \varrho. \quad (6)$$

Ze stejnosti úseček TX , UM_0 podle středu O stejnosti plyne

$$\frac{UM_0}{TX} = \frac{OU}{OT}$$

neboli vzhledem k (6), (4)

$$\frac{\varrho}{TX} = \frac{v - \varrho}{v};$$

po snadné úpravě dostaneme

$$\varrho(v + TX) = v \cdot TX,$$

t. j.

$$\varrho = \frac{v \cdot TX}{v + TX}.$$

Po dosazení ze vztahu (5) a úpravě obdržíme

$$\varrho = \frac{3av}{3a + \sqrt{9a^2 + v^2}}, \quad (7)$$

což je číslo menší než $\frac{1}{2}v$, jak se snadno usoudí.

A nyní dokážeme:

Případ a). Jestliže platí

$$\frac{1}{2}v > r > \varrho \quad (8)$$

neboli jestliže bod S leží uvnitř úsečky OU a zároveň je $r < \frac{1}{2}v$, potom má úloha dvě různá řešení.

Případ b). Jestliže platí $r = \varrho$ neboli jestliže je $S \equiv U$, má úloha právě jedno řešení.

Případ c). Jestliže platí

$$r < \varrho \quad (9)$$

neboli jestliže bod S leží uvnitř úsečky UT , nemá úloha řešení.

Důkaz. Případ a) Když platí vztahy (8), je přímka OK sečnou kružnice k , neboť vzdálenost bodu S od přímky OK je zřejmě menší než ϱ a podle (8) tedy menší než r . Podle odst. a) oba různé společné body přímky OK a kružnice k leží uvnitř úsečky OK a každý z nich tedy vede k jednomu řešení.

Případ b) je zřejmý.

Případ c). Protože bod S má od přímky OK zřejmě vzdálenost větší než UM_0 neboli ϱ , je vzhledem ke vztahu (9) vzdálenost bodu S od přímky OK větší než poloměr r kružnice k a přímka OK je nesečnou kružnice k . Proto nemá úloha řešení.

Tím je provedena diskuse všech případů [1] až [3], a protože není jiné možnosti, je provedena i diskuse celé úlohy.

13. Pro každé reálné číslo a platí vztah

$$3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2; \quad (1)$$

dokažte.

Určete všechna reálná čísla a , pro která nastane rovnost.

Řešení. I. Necht' tvrzení vyslovené v úloze není správné, t. j. necht' pro některé reálné číslo a platí vztah

$$3(1 + a^2 + a^4) < (1 + a + a^2)^2. \quad (2)$$

Dokážeme, že tento předpoklad vede ke sporu.

Ze vztahu (2) postupně plynou tyto vztahy

$$\begin{aligned} 3 + 3a^2 + 3a^4 &< 1 + a^2 + a^4 + 2a + 2a^2 + 2a^3, \\ 0 &< 2(a - 1) - 2a^3(a - 1), \\ 0 &< -2(a - 1)(a^3 - 1), \\ 0 &< -2(a - 1)(a - 1)(a^2 + a + 1), \\ 0 &< -2(a - 1)^2(a^2 + a + 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Nejprve dokážeme, že pro každé reálné a je výraz $a^2 + a + 1$ kladný.

Důkaz. Postupně platí

$$a^2 + a + 1 = a^2 + 2a \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Výraz $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$ je pro každé reálné číslo a zřejmě nezáporný; proto, když k němu přičteme kladné číslo $\frac{3}{4}$, dostaneme kladné číslo. Tím je dokázáno, že výraz $a^2 + a + 1$ je kladný pro každé reálné číslo a .

Nyní ještě dokážeme, že výraz $-2(a - 1)^2$ je roven nule pro $a = 1$ a pro $a \neq 1$ je záporný.

Důkaz. Výraz $(a - 1)^2$ je pro $a = 1$ zřejmě roven nule a tím je roven nule i výraz $-2(a - 1)^2$. Pro $a \neq 1$ je výraz $(a - 1)^2$ kladný, a proto je výraz $-2(a - 1)^2$ záporný. Tím je tvrzení dokázáno.

Součin kladného výrazu $a^2 + a + 1$ a nekladného výrazu $-2(a - 1)^2$ není kladný (t. j. je buď roven nule nebo záporný); proto nemůže platit vztah (3) a předpoklad (2) vede tedy ke sporu. Tím je tvrzení uvedené v úloze dokázáno.

II. Z předchozího odstavce plyne, že vztah (1) je ekvivalentní se vztahem

$$0 \geq -2(a - 1)^2(a^2 + a + 1). \quad (4)$$

Případ rovnosti ve vztahu (4) může nastat jedině pro $(a - 1)^2 = 0$ neboli pro $a = 1$, neboť výraz $a^2 + a + 1$ je pro každé reálné číslo a kladný.

Tím je řešení úlohy provedeno.

14. Označme obvyklým způsobem a, b, c strany trojúhelníka α, β, γ jeho úhly. Platí-li pro úhly vztah $\beta = 3\alpha$, platí pro strany vztah

$$\frac{c^2}{(b - a)^2} = \frac{b + a}{a};$$

dokažte.

Řešení. Podle předpokladu je $\beta = 3\alpha$ (obr. 27); proto platí $b > a$ a tedy $b - a > 0$. Přitom jsme označili $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Rozdělme úhel $\sphericalangle ABC$ ve tři shodné úhly

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBE = \sphericalangle EBC = \alpha,$$

kde D, E jsou body úsečky AC ; na ní tedy leží body v pořádku A, D, E, C . Tu platí:

$\sphericalangle BDE = 2\alpha$ (vnější úhel v trojúhelníku ADB , v němž je $\sphericalangle A = \sphericalangle B$);

$\sphericalangle CEB = 3\alpha$ (vnější úhel v trojúhelníku BDE , v němž je $\sphericalangle B = \alpha$, $\sphericalangle D = 2\alpha$).

Podle věty uu o podobnosti trojúhelníků platí

$$\triangle ABC \sim \triangle BEC \quad (1)$$

(je totiž $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EBC$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BEC$),

$$\triangle BDE \sim \triangle ABE \quad (2)$$

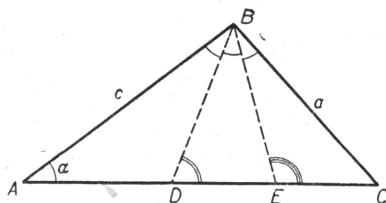
(je totiž $\sphericalangle BDE = \sphericalangle ABE$, $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BAE$).

Trojúhelník ABD má při straně AB shodné úhly velikosti α ; proto je rovnoramenný a platí

$$AD = BD. \quad (3)$$

Trojúhelník BDC má při straně BD shodné úhly velikosti 2α ; proto je rovnoramenný a platí

$$DC = BC = a. \quad (4)$$



Obr. 27.

Pak je

$AD = AC - DC$ a odtud podle (4) dostaneme $AD = b - a$; proto vztah (3) lze psát

$$AD = BD = b - a. \quad (5)$$

Ze vztahu (1) plyne

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CE}{CB}, \quad \frac{AB}{CA} = \frac{BE}{CB}$$

neboli

$$\frac{a}{b} = \frac{CE}{a}, \quad \frac{c}{b} = \frac{BE}{a}.$$

Odtud plyne

$$CE = \frac{a^2}{b}, \quad BE = \frac{ac}{b}. \quad (6)$$

Ze vztahu (2) plyne

$$\frac{BE}{BD} = \frac{AE}{AB};$$

odtud vzhledem ke vztahům (6), (5) dostaneme

$$\frac{ac}{b} : (b - a) = \frac{AE}{c}$$

neboli

$$AE = \frac{ac^2}{b(b - a)}. \quad (7)$$

Podle sestrojení bodů D , E platí

$$DE = DC - CE,$$

$$AE = AD + DE$$

neboli

$$AE = AD + DC - CE.$$

Do posledního vztahu dosadíme ze vztahů (7), (5), (4), (6);
obdržíme

$$\frac{ac^2}{b(b - a)} = b - a + a - \frac{a^2}{b}$$

neboli

$$\frac{ac^2}{b(b - a)} = \frac{b^2 - a^2}{b}.$$

Po úpravě (především rozložíme $b^2 - a^2$ a obě strany rovnosti znásobíme číslem b) dostaneme

$$\frac{c^2}{(b - a)^2} = \frac{b + a}{a},$$

což jsme měli dokázat.

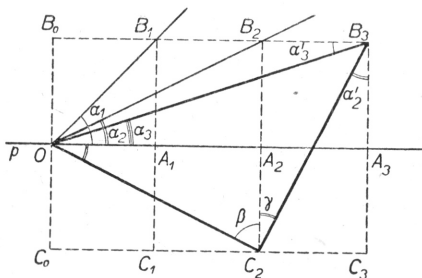
15. Buď dána přímka $p \equiv OA_1A_2A_3$, při čemž platí $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = a$, kde a je dané kladné číslo. V jedné z obou polorovin vyřatých přímkou p sestrojíme čtverce $OA_1B_1B_0$, $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$. Označme $\sphericalangle B_1OA_3 = \alpha_1$, $\sphericalangle B_2OA_3 = \alpha_2$, $\sphericalangle B_3OA_3 = \alpha_3$.

Dokažte, že platí

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 90^\circ.$$

Řešení (obr. 28). Zřejmě je

$$\alpha_1 = 45^\circ. \quad (1)$$



Obr. 28.

Sestrojíme k bodům B_0, B_1, B_2, B_3 po řadě body C_0, C_1, C_2, C_3 souměrně sdružené podle dané přímky p . Dostaneme tak čtverce $OA_1C_1C_0$, $A_1A_2C_2C_1$, $A_2A_3C_3C_2$, jejichž strany mají rovněž velikost a .

Platí

$$\triangle OB_2A_2 \cong \triangle B_3C_2C_3 \text{ (sus)}, \quad (2)$$

$$\triangle OB_2A_2 \cong \triangle C_2B_3B_2 \text{ (sus)}. \quad (3)$$

Označme (viz obr. 28) $\sphericalangle OC_2A_2 = \beta$, $\sphericalangle B_2C_2B_3 = \gamma$, $\sphericalangle C_3B_3C_2 = \alpha'_2$, $\sphericalangle OB_3B_0 = \alpha'_3$.

Protože je $\sphericalangle A_2OC_2 = \alpha_2$ (souměrnost vzhledem k přímce p),
je

$$\beta = 90^\circ - \alpha_2. \quad (4)$$

Ze vztahů (2), (3) plyne

$$\gamma = \alpha_2, \quad (5)$$

$$\alpha'_2 = \alpha_2. \quad (6)$$

Dále je

$$\alpha'_3 = \alpha_3 \text{ (střídavé úhly)}. \quad (7)$$

Sečteme-li vztahy (4), (5), dostaneme $\beta + \gamma = 90^\circ$, takže trojúhelník OB_3C_2 má $\sphericalangle C_2 = 90^\circ$; protože však je $OC_2 = B_3C_2$, je trojúhelník rovnoramenný a tudíž

$$\sphericalangle OB_3C_2 = 45^\circ.$$

Z toho plyne (podle obrázku), že

$$\alpha'_2 + \alpha'_3 = 45^\circ, \quad (8)$$

neboť $\sphericalangle B_2B_3A_3 = 90^\circ$.

Nyní dosadíme do vztahu (8) ze vztahů (6), (7) a dostaneme

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 45^\circ.$$

Přičteme-li k oběma stranám tohoto vztahu obě strany vztahu (1), dostaneme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 90^\circ,$$

což jsme měli dokázat.

16. Budte dány dvě různé roviny $\kappa \parallel \varrho$. V rovině κ je dán kruh $\mathbf{K}$ o středu S a o poloměru $2m$; v rovině ϱ je dán čtverec $ABCD$ o straně velikosti $2a$. Buď X libovolný bod kruhu $\mathbf{K}$ a Y libovolný bod čtverce $ABCD$ (tedy na př. i bod vnitřku); označme Z střed úsečky XY .

Co vyplní všechny body Z , když bod X probíhá všechny body kruhu $\mathbf{K}$ a když bod Y probíhá všechny body čtverce $ABCD$?

Řešení. Pomocné věty. Při řešení úlohy uijeme některých známých vět. Dají se snadno odvodit použitím stejno-
lehlosti v rovině (ostatně viz větu 37 na str. 92 učebnice
Geometrie pro 10. post. ročník).

V1. Buďte dány dvě rovnoběžné různé roviny β, γ . Když bod B probíhá rovinu β a bod C rovinu γ , potom střed D úsečky BC probíhá rovinu δ , která je rovnoběžná s rovinami β, γ a má od nich stejné vzdálenosti.

V2. Buďte dány dvě rovnoběžné roviny β, γ , které nejsou ani vrcholové, ani rovnoběžné s některou vrcholovou přímkou daného jehlanového prostoru o vrcholu V . Potom obě roviny protínají tento jehlanový prostor v podobných mnohoúhelnících **B, C**.

Označme po řadě $b > 0, c > 0$ vzdálenosti bodu V od rovin β, γ . Buďte $B_1 \neq B_2$ dva libovolně zvolené body v rovině β a C_1, C_2 po řadě společné body roviny γ s přímkami VB_1, VB_2 . Potom platí

$$\frac{B_1 B_2}{C_1 C_2} = \frac{b}{c}. \quad (1)$$

Když bod B_1 probíhá mnohoúhelník **B**, probíhá bod C_1 mnohoúhelník **C** a obráceně; mnohoúhelníky **B, C** jsou podobné (poměr podobnosti je $\frac{b}{c}$).

V3. Buďte dány dvě rovnoběžné roviny β, γ a bod V , který neleží v žádné z nich. Dále buď dán v rovině β kruh **B** o středu S_B . Potom rovina γ protne kuželový prostor o vrcholu V a řídicím kruhu **B** v kruhu **C**, jehož střed S_C leží na přímce VS_B ; přitom o poloměrech r_B, r_C kruhů **B, C** platí

$$r_C : r_B = \frac{c}{b},$$

kde $b > 0, c > 0$ jsou po řadě vzdálenosti bodu V od rovin β, γ .

Budte $B_1 \neq S_B$, $C_1 \neq S_C$ po řadě body rovin β , γ , které leží v přímce s bodem V . Potom platí současně právě jedna z těchto dvojic nerovností:

$$a) S_B B_1 < r_B, \quad S_C C_1 < r_C,$$

$$b) S_B B_1 = r_B, \quad S_C C_1 = r_C,$$

$$c) S_B B_1 > r_B, \quad S_C C_1 > r_C.$$

Řešení dané úlohy. I. Označme σ rovinu rovnoběžnou s rovinami κ , ϱ , a to takovou, že má od obou rovin κ , ϱ rovné vzdálenosti (obr. 29).

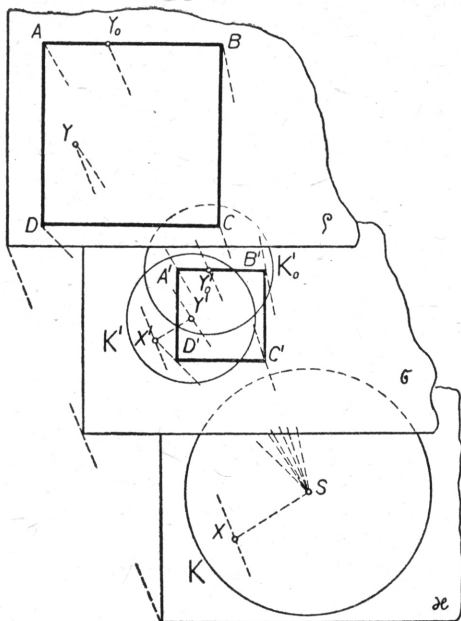
Podle věty **V1** leží středy Z úseček XY , kde bod X probíhá rovinu κ a bod Y rovinu ϱ , v rovině σ .

Uvažujme jehlanový prostor o vrcholu v daném bodě S a řídícím čtverci $ABCD$. Roviny ϱ , σ protnou podle věty **V2** jehlanový prostor ve čtvercích $ABCD$, $A'B'C'D'$. Když bod Y probíhá čtverec $ABCD$, probíhá podle **V2** průsečík Y' přímky SY s rovinou σ čtverec $A'B'C'D'$. Přitom platí $A'B' = \frac{1}{2} \cdot AB$ neboli $A'B' = a$; to plyne z toho, že poměr vzdáleností bodu S od rovin σ , ϱ je roven $\frac{1}{2}$.

Uvažujme nyní kuželový prostor o vrcholu Y , kde Y je určitý bod čtverce $ABCD$, a řídícím kruhu $\mathbf{K}$. Rovina σ protne tento prostor podle věty **V3** v kruhu $\mathbf{K}'$ o poloměru m , neboť poměr vzdáleností bodu Y od rovin σ , κ je roven $\frac{1}{2}$; střed Y' kruhu $\mathbf{K}'$ je průsečík přímky YS s rovinou σ . Když bod X probíhá kruh $\mathbf{K}$, vyplní podle věty **V3** průsečík X' přímky YX s rovinou σ kruh $\mathbf{K}'$. Bod X' patří do hledané množiny $\mathbf{Z}$ bodů Z , o nichž mluví text úlohy.

Když bod Y nyní probíhá všechny body čtverce $ABCD$, přísluší ke každé jeho poloze v rovině σ příslušný bod Y' a určitý kruh $\mathbf{K}'$ se středem Y' a poloměrem m .

Příslušné body X' těchto kruhů $\mathbf{K}'$ patří do hledané množiny $\mathbf{Z}$ bodů Z z textu úlohy. Tímto způsobem zřejmě dostáváme všechny hledané body Z . Množinu $\mathbf{Z}$ dostaneme tedy tak, že



Obr. 29.

kolem každého bodu Y' čtverce $A'B'C'D'$ sestrojíme kruh K' o poloměru m ; množina bodů X' těchto kruhů je hledaná množina Z . Ta se skládá zřejmě z těchto útvarů (viz obr. 30):

[1] Ze čtverce $A'B'C'D'$;

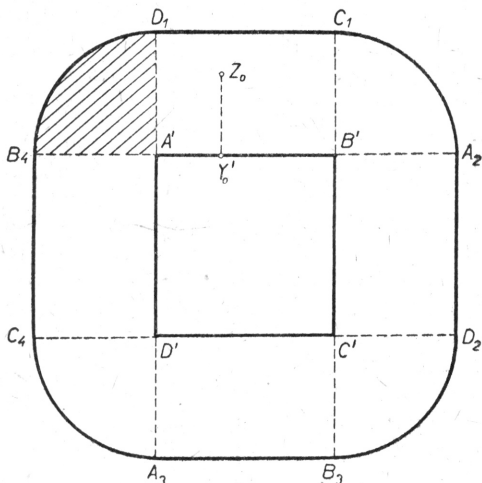
[2] ze čtyř obdélníků $A'B'C_1D_1$, $B'C'D_2A_2$, $C'D'A_3B_3$, $D'A'B_4C_4$, které nemají se čtvercem $A'B'C'D'$ žádný společný vnitřní bod, při čemž platí $B'C_1 = C'D_2 = D'A_3 = A'B_4 = m$;

[3] ze čtyř čtvrtkruhů o poloměru m , které leží v úhlech $\sphericalangle D_1A'B_4$, $\sphericalangle C_1B'A_2$, $\sphericalangle D_2C'B_3$, $\sphericalangle A_3D'C_4$; střed každého

z těchto čtvrtkruhů splývá s vrcholem příslušného pravého úhlu.

II. Nyní dokážeme, že obráceně každý bod Z_0 množiny $\mathbf{Z}$ je středem určité úsečky X_0Y_0 , kde X_0 je bodem kruhu $\mathbf{K}$ a Y_0 bodem čtverce $ABCD$; naším úkolem je sestavit ke zvolenému bodu Z_0 množiny $\mathbf{Z}$ příslušné body X_0, Y_0 . Pro důkaz tohoto tvrzení rozeznávejme tyto možnosti:

Případ [1]. Nechť bod Z_0 je bodem čtverce $A'B'C'D'$. Označme Y_0 průsečík přímky SZ_0 s rovinou ϱ . Podle věty



Obr. 30.

V2 je bod Y_0 bodem čtverce $ABCD$. Za bod X_0 volme bod S , t. j. $X_0 \equiv S$. Podle věty **V1** je průsečík Z_0 přímky X_0Y_0 (neboli přímky SY_0) s rovinou σ středem úsečky X_0Y_0 . Tím je pro tento případ tvrzení dokázáno.

Případ [2]. Nechť bod Z_0 je bodem některého z obdélníků [2], ale neleží na žádné ze stran čtverce $A'B'C'D'$. Nechť pro

určitost je Z_0 na př. bodem obdélníka $A'B'C_1D_1$. Vedme bodem Z_0 kolmici k přímce $A'B'$ (viz obr. 30) a označme Y'_0 její patu. Ta padne do úsečky $A'B'$, při čemž podle vlastností obdélníka a podle předpokladu o bodu Z_0 je

$$Z_0 Y'_0 \leq m.$$

Proto bod Z_0 je bodem kruhu K'_0 o poloměru m a o středu Y'_0 . Podle věty **V2** protne přímka SY'_0 rovinu ϱ v bodě Y_0 , který je bodem úsečky AB .

Uvažujme kuželový prostor o vrcholu Y_0 a o řídícím kruhu K ; podle věty **V3** protne rovina σ tento kuželový prostor v kruhu o středu Y'_0 a poloměru m , t. j. právě v uvažovaném kruhu K'_0 . Patří tedy přímka $Y_0 Z_0$ do tohoto kuželového prostoru, a proto protne rovinu κ v bodě X_0 , který je bodem kruhu K . Podle věty **V1** je však průsečík Z_0 přímky $X_0 Y_0$ s rovinou σ středem úsečky $X_0 Y_0$, při čemž podle právě provedené konstrukce je X_0 bodem kruhu K a Y_0 bodem čtverce $ABCD$. Tím je pro tento případ tvrzení dokázáno.

Případ [3]. Nechť Z_0 je bodem jednoho čtvrtkruhu [3], na př. toho čtvrtkruhu, který leží v pravém úhlu $\sphericalangle B_4 A' D_1$; tento čtvrtkruh je částí kruhu K'_0 o středu $A' \equiv Y'_0$ a poloměru m . Provedme pro bod Y'_0 touž úvahu jako v případě [2]. Dospějeme opět k bodům $Y_0 \equiv A$ a X_0 , z nichž první je bodem čtverce $ABCD$ a druhý bodem kruhu K . Střed úsečky $X_0 Y_0$ podle věty **V1** je zřejmě daný bod Z_0 . Tím je pro tento případ tvrzení dokázáno.

III. Závěr. Protože každý bod množiny Z je zahrnut alespoň v jednom z diskutovaných případů, je hořejší tvrzení dokázáno a množina Z je skutečně množinou všech bodů Z , o nichž mluví text úlohy.

5. Úlohy II. kola kategórie B.

1. Nech a je dané reálne číslo. Urobte rozbor funkcie

$$y = ax^2 + |x^2 - 1| \quad (1)$$

vzhľadom na rôzne hodnoty čísla a ; na základe rozboru načrtnite graf tejto funkcie.

Riešenie. Ak je $|x| \geq 1$, je $x^2 - 1 \geq 0$, $|x^2 - 1| = x^2 - 1$, teda

$$y = (a + 1)x^2 - 1.$$

Ak je $|x| < 1$, je $x^2 - 1 < 0$, teda $|x^2 - 1| = -x^2 + 1$, teda

$$y = (a - 1)x^2 + 1.$$

Diskusia. Rozoznávajme tri prípady:

Prípád [1]. Nech je $a = -1$. Potom predpis (1) pre $|x| \geq 1$ znie $y = -1$, pre $|x| < 1$ znie $y = -2x^2 + 1$. Priebeh funkcie zachycuje obr. 31.

Prípád [2]. Nech je $a = 1$. Potom predpis (1) pre $|x| \geq 1$ znie $y = 2x^2 - 1$, pre $|x| < 1$ znie $y = 1$. Priebeh zachycuje obr. 32.

Prípád [3]. Nech je $|a| \neq 1$. Potom sa graf skladá z troch parabolických oblúkov; na pr. pre $a = 0$ je znázornený na obr. 33.

2. Dokažte:

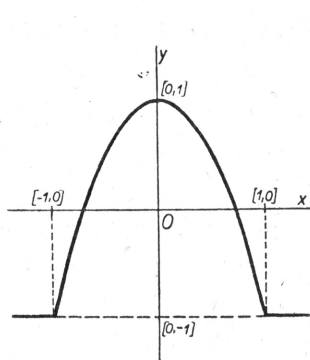
- a) Pro každé reálne číslo x platí $x^2 - x + 1 \neq 0$.
- b) Pro každé reálne číslo x platí vzťah

$$\frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1} \leq 2.$$

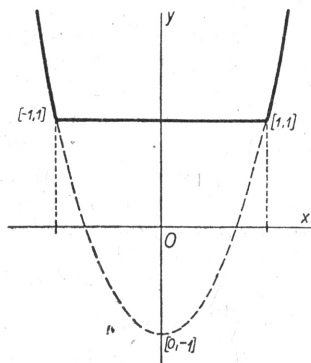
Řešení. a) Platí

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

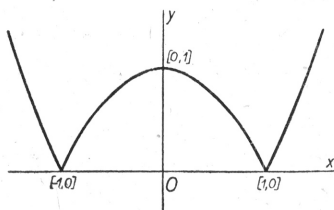
První sčítanec posledního součtu je číslo nezáporné, druhý je číslo kladné; jejich součet je tedy číslo kladné pro všechna reálná x . Tím je tvrzení dokázáno.



Obr. 31.



Obr. 32.



Obr. 33.

b) Předpokládejme, že některá z obou rovností neplatí; dokážeme, že to není možné. Je třeba se zabývat dvěma nerovnostmi.

Případ [1]. Nechť platí

$$\frac{2}{3} > \frac{x^2 - 1}{x^2 - x + 1}. \quad (1)$$

Znásobme tuto nerovnost kladným číslem $3(x^2 - x + 1)$; dostaneme

$$2(x^2 - x + 1) > 3(x^2 + 1)$$

neboli

$$0 > x^2 + 2x + 1,$$

t. j.

$$0 > (x + 1)^2.$$

Avšak číslo $(x + 1)^2$ je nezáporné, t. j. rovné nule nebo větší než nula; proto poslední vztah není možný. Předpoklad (1) tedy vede ke sporu.

Případ [2]. Nechť platí

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1} > 2. \quad (2)$$

Znásobme obě strany této nerovnosti kladným číslem $x^2 - x + 1$; dostaneme

$$x^2 + 1 > 2(x^2 - x + 1)$$

neboli

$$0 > x^2 - 2x + 1,$$

t. j.

$$0 > (x - 1)^2.$$

To je spor, neboť číslo $(x - 1)^2$ je nezáporné, tedy větší než nula nebo rovné nule. Proto předpoklad (2) vede ke sporu.

Závěr. Protože neplatí žádný ze vztahů (1), (2), platí vztahy uvedené v textu úlohy, což jsme měli dokázat.

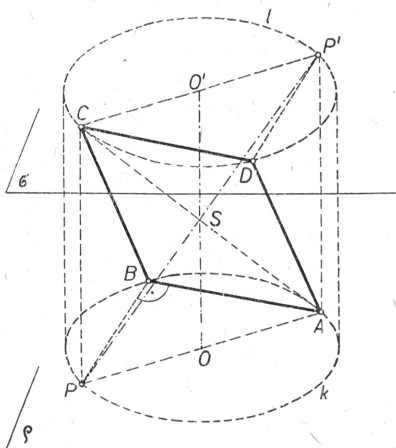
3. Buď dána rovina ϱ a mimo ni bod C ; označme P patu kolmice vedené bodem C k rovině ϱ . V rovině ϱ buď dále dán

bod A různý od bodu P . Uvažujte obdélník $ABCD$, kde B je bod roviny ϱ ; střed tohoto obdélníka označte S .

a) Vyšetřte množinu bodů B všech takto sestrojených obdélníků $ABCD$.

b) Vyšetřte množinu vrcholů D všech takto sestrojených obdélníků $ABCD$.

Řešení (obr. 34). a) Předně si všimněme, že středy všech obdélníků, které vyhovují úloze, splývají se středem S úsečky AC a jsou tedy totožné. Označme O střed úsečky AP a k kružnici v rovině ϱ o středu O a poloměru $\frac{1}{2}AP$. Dokážeme: Množinou bodů B je kružnice k s výjimkou bodu A .



Obr. 34.

Důkaz. Úsečka SO je střední příčkou trojúhelníka ACP , kde $\sphericalangle P = 90^\circ$. Proto je $SO \parallel CP$, a protože je $CP \perp \varrho$, je též $SO \perp \varrho$. Bod P zřejmě patří do vyšetřované množiny,

nikoli však bod A (neboť v obdélníku $ABCD$ je vždy $B \neq A$).

Uvažujme libovolný obdélník $ABCD$, který vyhovuje úloze, a to takový, že $B \neq P$ (a ovšem $B \neq A$). Potom platí

$AB \perp BC$ (sousední strany obdélníka),

$AB \perp CP$ (přímka CP stojí kolmo k rovině ϱ).

Je tedy

$$AB \perp (PBC).$$

Proto je přímka AB kolmá ke všem přímkám roviny PBC a tedy i k přímce PB , neboli $\sphericalangle PBA = 90^\circ$. Leží tedy podle Thaletovy věty všechny vyšetřované body B na kružnici k , což jsme měli dokázat.

Obráceně, každý bod $B \neq A$ kružnice k je vrcholem jednoho obdélníka $ABCD$, který vyhovuje úloze. O bodu P je to zřejmé. Uvažujme nyní bod B kružnice k různý od bodů P , A . Pak je $\sphericalangle PBA = 90^\circ$. Přímka AB stojí kolmo k přímkám PB , PC (neboť je $PC \perp \varrho$), a proto je

$$AB \perp (PBC).$$

Je tedy přímka AB kolmá ke všem přímkám roviny PBC a tedy i k přímce BC ; proto je $\sphericalangle ABC = 90^\circ$. Sestrojíme-li v rovině ABC k bodu B bod D souměrně sdružený podle středu S souměrnosti, je $ABCD$ rovnoběžník s pravým úhlem při vrcholu B a je to tedy obdélník.

Tím je úloha a) rozřešena.

b) Protože je $CD \parallel AB$, leží body D v rovině $\sigma \parallel \varrho$, vedené bodem C . Přitom je S pevný bod (střed dané úsečky AC). Bod D z daného bodu B dostaneme, když na prodloužení úsečky BS za bod S sestrojíme bod D tak, aby platilo $SD = SB$. Označme P' , O' v rovině APC body souměrně sdružené k bodům P , O vzhledem ke středu S souměrnosti.

Zřejmě je $P'D = PB$, $O'P' = O'C = OP$, $CD = AB$, a proto je

$$\triangle CP'D \cong \triangle APB \text{ (sss),}$$

takže $\sphericalangle CDP' = 90^\circ$. Leží tedy bod D v rovině σ na kružnici $l \equiv (O', O'C)$, tedy na kružnici shodné s kružnicí k .

Obráceně, každý bod $D \neq C$ právě určené kružnice l je vrcholem jednoho obdélníka $ABCD$, který splňuje podmínky úlohy. O bodu P' je to samozřejmé (viz obdélník $APCP'$). Nechť je tedy $D \neq P'$, takže existuje úhel $\sphericalangle CDP' = 90^\circ$. V rovině ACD sestrojme obdélník $ABCD$; jeho střed je zřejmě bod S . Rovina ACD protne roviny $\sigma \parallel \varrho$ v přímkách $DC \parallel p$, kde p prochází bodem A , a proto je $p \equiv AB$, takže bod B leží v rovině ϱ . Tím jsme sestrojili obdélník $ABCD$ příslušný k bodu D .

Hledanou množinou bodů D je tedy výše sestrojená kružnice l , ovšem s výjimkou bodu C . Tím je úloha b) rozřešena.

Poznámka. Úlohu je také možno řešit užitím plochy kulové $\kappa \equiv (S, SA)$, která protne roviny ϱ, σ v kružnicích $k \equiv (O, OA)$, $l \equiv (O', O'C)$.

4. V téže polorovině vyřáté danou přímkou p leží trojúhelníky $ABC, A'B'C'$ tak, že body A, B, A', B' leží v přímce p . Označme $AB = c, A'B' = c'$; dále označme v, v' velikosti výšek v těchto trojúhelnících, které po řadě přísluší ke stranám $AB, A'B'$ daných trojúhelníků.

Sestrojte přímku $q \parallel p$ takovou, aby protala úsečky $AC, BC, A'C', B'C'$ uvnitř po řadě v bodech M, N, M', N' takových, že platí $MN = M'N'$. Provedte diskusi řešitelnosti úlohy vzhledem k daným číslům c, c', v, v' za předpokladu, že platí $v > v'$.

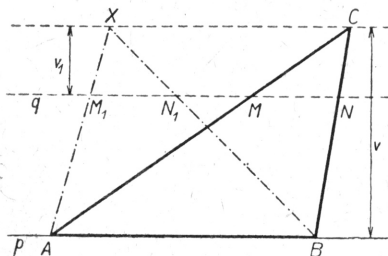
(Dokažte nejprve: Každý trojúhelník ABX , ležící v polorovině ABC , o straně AB a příslušné výšce v , vytne na hledané přímce q úsečku téže délky.)

Řešení. Pomocná věta V. Budte ABC, ABX trojúhelníky, jejichž výšky příslušné ke straně AB jsou si rovny; přímka $q \parallel AB$ protne úsečky CA, CB, XA, XB po řadě v bodech M, N, M_1, N_1 . Potom je $MN = M_1N_1$ (viz obr. 35).

Důkaz. Označme v_1 vzdálenost rovnoběžek XC , q ; vzdálenost přímek XC , AB je podle textu úlohy v . Platí

$$\triangle ABC \sim \triangle MNC \quad (\text{shodnost v úhlech}), \quad (1)$$

$$\triangle ABX \sim \triangle M_1N_1X \quad (\text{shodnost v úhlech}). \quad (2)$$



Obr. 35.

Protože v podobných trojúhelnících je poměr příslušných výšek roven poměru podobnosti (což lze snadno dokázat), je podle (1) a (2)

$$\frac{MN}{AB} = \frac{v_1}{v}, \quad \frac{M_1N_1}{AB} = \frac{v_1}{v}.$$

Odtud plyne $MN = M_1N_1$.

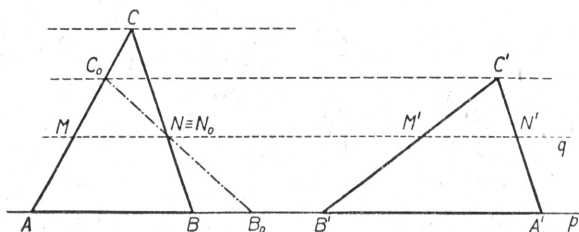
Řešení úlohy. Podle pomocné věty V (viz obr. 36) můžeme při konstrukci přímky q nahradit trojúhelník $A'B'C'$ pomocným trojúhelníkem AB_0C_0 , kde B_0 leží na polopřímce AB a C_0 leží na polopřímce AC , při čemž je $AB_0 = A'B' = c'$ a výška trojúhelníka AB_0C_0 příslušná ke straně AB_0 je v' (leží tedy body C_0 , C' na rovnoběžce k přímce AB). Hledaná přímka q , jestliže existuje, protne úsečku B_0C_0 v bodě N_0 a bude platit $MN_0 = M'N' = MN$ neboli $MN_0 = MN$; protože body N , N_0 leží v polorovině ACB (neboli v polorovině AC_0B_0), je $N \equiv N_0$.

Odtud plyne konstrukce bodů M, N, M', N' :

Sestrojíme trojúhelník AB_0C_0 , jak bylo právě popsáno. Bod C_0 padne dovnitř úsečky AC , neboť je $v > v'$. Společný bod úseček BC, B_0C_0 označme N (viz obr. 36); bodem N vedme přímku $q \parallel AB$. Označme po řadě M, M', N' body společné přímce q a úsečkám $AC, A'C', B'C'$. Podle pomocné věty V je

$$MN = M'N'$$

a q je hledaná přímka.



Obr. 36.

Úloha je za předpokladu $v > v'$ (t. j. když bod C_0 leží uvnitř úsečky AC) řešitelná právě tehdy, když úsečky B_0C_0, BC mají společný bod N , ležící uvnitř každé z nich. To zřejmě nastane právě tehdy, když bod B_0 leží na prodloužení úsečky AB za bod B ; to znamená, že platí $c' > c$. Za tohoto předpokladu má úloha jediné řešení. Jestliže je $c' \leq c$, nemá úloha řešení.

6. Úlohy I. kola kategorie C.

1. Do nádržky stále přitéká rovnoměrným proudem voda. Jestliže se v určitém okamžiku otevrou tři stejné odtokové trubice, vyprázdní se nádrž za 18 hodin. Kdybychom v témže

okamžiku otevřeli jen dvě ze tří odtokových trubíc, vyprázdnila by se nádrž za 30 hodin.

Za kolik hodin by se vyprázdnila nádrž, kdybychom ve zmíněném okamžiku otevřeli pouze jednu ze tří odtokových trubíc?

Řešení. Označme 1 množství vody (t. j. jednotkové množství), které do nádrže přiteče za 1 hodinu; dále nechť jednou ze shodných odtokových trubíc oteče za 1 hodinu q vody (udáno ve zvolených jednotkách pro množství).

V prvním případě za 1 hodinu ubude $3q - 1$ vody a za 18 hodin tedy ubude

$$a_1 = 18(3q - 1).$$

Ve druhém případě za 1 hodinu ubude $2q - 1$ vody a za 30 hodin tedy ubude

$$a_2 = 30(2q - 1).$$

Ve třetím případě za 1 hodinu ubude $q - 1$ vody a za x hodin tedy ubude

$$a_3 = x(q - 1);$$

přítom nechť x udává dobu (v hodinách), za kterou se nádrž v tomto třetím případě vyprázdní.

V každém z těchto případů se nádrž vyprázdní, t. j. oteče všechna voda, která v daném okamžiku byla v nádrži; platí tedy $a_1 = a_2 = a_3$. Odtud dostaneme vztahy

$$18(3q - 1) = 30(2q - 1), \quad (1)$$

$$30(2q - 1) = x(q - 1). \quad (2)$$

Ze vztahu (1) plyne $q = 2$ a odtud a ze vztahu (2) dostaneme

$$x = 90.$$

Nádrž se ve třetím případě vyprázdní za 90 hodin; snadno se přesvědčíme, že toto číslo úloze vyhovuje.

2. Když o číslech $a, b, c, d \neq 0$ platí

$$d = a + b + c,$$

potom platí též

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a - d)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2.$$

Dokažte.

Lze větu obrátit?

Řešení. I. Správnost tvrzení dokážeme, když dokážeme, že výraz

$$V = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - [(a - d)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2]$$

je roven nule pro každou čtveřici takových čísel a, b, c, d , o nichž platí

$$d = a + b + c \quad (1)$$

neboli

$$a + b + c - d = 0. \quad (2)$$

Výraz V upravme postupně takto:

$$V = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - [a^2 + b^2 + c^2 + 3d^2 - 2ad - 2bd - 2cd] = 2ad + 2bd + 2cd - 2d^2 = 2d(a + b + c - d).$$

Je tedy

$$V = 2d(a + b + c - d). \quad (3)$$

Podle vztahu (2) je součin na pravé straně předchozí rovnosti roven nule, t. j.

$$V = 0,$$

což jsme měli dokázat.

(Poznámka. Tvrzení je zřejmě nezávislé na předpokladu $d \neq 0$.)

II. Obrácená věta zní: Jestliže pro každou čtveřici čísel $a, b, c, d \neq 0$ platí vztah

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a - d)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2, \quad (4)$$

potom platí vztah

$$d = a + b + c.$$

Dokážeme správnost této věty.

Stejným postupem jako v odstavci I dospějeme k tomu, že vztah (4) lze uvést na tvar (viz vztah (3))

$$2d(a + b + c - d) = 0,$$

který platí podle předpokladu pro každou čtveřici čísel $a, b, c, d \neq 0$.

Protože je $d \neq 0$, musí být

$$a + b + c - d = 0$$

neboli

$$d = a + b + c,$$

což jsme měli dokázat.

3. Jestliže přímka rozdělí trojúhelník ABC ve dva rovnoramenné trojúhelníky, má trojúhelník ABC buď dva úhly o součtu 90° , nebo dva úhly v poměru $1 : 2$, nebo dva úhly v poměru $1 : 3$. Dokážte.

Řešení. Označme v trojúhelníku ABC úhly $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$. Přímka p , která dělí trojúhelník ABC ve dva trojúhelníky, musí procházet jedním z jeho vrcholů, na př. vrcholem C (kdyby totiž neprocházela vrcholem, musila by protínat dvě strany trojúhelníka ABC , ale pak by jej rozdělovala na trojúhelník a čtyřúhelník). Označme D bod, ležící mezi body A, B , v němž přímka p protíná přímku AB . Potom je buď jeden z obou vedlejších úhlů $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle CDB$ tupý, nebo jsou oba tyto úhly pravé. Nechť na př. platí, že (srovnej s obr. 37)

$$\sphericalangle BDC \cong 90^\circ.$$

Uvažujme každou z obou možností zvlášť.

a) Necht' je $\sphericalangle BDC = 90^\circ$; pak je též $\sphericalangle ADC = 90^\circ$. Pak má rovnoramenný trojúhelník DBC nutně základnu BC (jedině proti základně rovnoramenného trojúhelníka může ležet pravý úhel) a trojúhelník DAC má z téhož důvodu základnu AC . Ale rovnoramenný trojúhelník pravoúhlý má při základně úhly 45° . Je tedy $\beta = \alpha = 45^\circ$ a $\gamma = 90^\circ$, takže platí

$$\alpha : \gamma = 1 : 2, \quad \alpha + \beta = 90^\circ,$$

což jsme měli dokázat.

b) Necht' je

$$\sphericalangle BDC > 90^\circ. \quad (1)$$

Pak má rovnoramenný trojúhelník DBC nutně základnu BC (jedině proti základně rovnoramenného trojúhelníka může ležet tupý úhel). Je tedy

$$\sphericalangle DCB = \beta, \quad (2)$$

$$\sphericalangle BDC = 180^\circ - 2\beta. \quad (3)$$

Vzhledem ke vztahu (1) odtud plyne

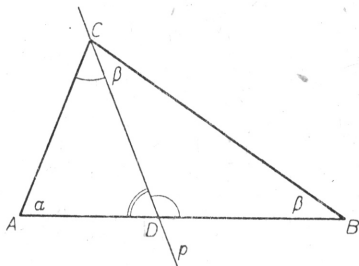
$$180^\circ - 2\beta > 90^\circ, \text{ t. j. } \beta < 45^\circ.$$

Protože $\sphericalangle BDC$ je tupý, je vedlejší úhel $\sphericalangle ADC$ ostrý a trojúhelník ACD může být rovnoramenný třemi způsoby.

Případ [1]. Necht' trojúhelník DAC má základnu AC . Součet obou shodných úhlů při této základně je roven úhlu $\sphericalangle BDC$, který je vnějším úhlem trojúhelníka DAC . Je tedy $\alpha = \frac{1}{2} \sphericalangle BDC$ a podle vztahu (3) je $\alpha = 90^\circ - \beta$. Proto je

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

což jsme měli dokázat.



Obr. 37.

Případ [2]. Necht' trojúhelník DAC má základnu AD ; oba úhly α , $\sphericalangle ADC$ při této základně jsou shodné, a protože úhly $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle BDC$ jsou vedlejší, je podle (3) $\sphericalangle ADC = 2\beta$ a tedy též $\alpha = 2\beta$. Proto je

$$\alpha : \beta = 2 : 1,$$

což jsme měli dokázat.

Případ [3]. Necht' trojúhelník DAC má základnu DC ; oba úhly $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle DCA$ při této základně jsou shodné, a protože podle (3) je $\sphericalangle ADC = 2\beta$ (úhly $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle BDC$ jsou vedlejší), je též

$$\sphericalangle DCA = 2\beta. \quad (4)$$

Ale $\gamma = \sphericalangle DCB + \sphericalangle DCA$; odtud a ze vztahů (2), (4) dostaneme, že $\gamma = \beta + 2\beta$ neboli $\gamma = 3\beta$. Proto je

$$\beta : \gamma = 1 : 3,$$

což jsme měli dokázat.

Protože jiné možnosti nejsou, je tvrzení úlohy dokázáno.

4. Necht' je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a bod X , jehož vzdálenost od bodu S je x .

a) Největší možný součet vzdáleností bodu X od kterýchkoli dvou bodů kružnice k (různých nebo splývajících) je $2(x + r)$. Dokažte.

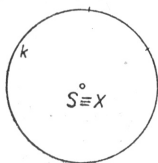
b) Jaký útvar vyplní body, jejichž součet vzdáleností od kterýchkoli dvou bodů kružnice k není větší než poloviční délka kružnice k .

Řešení. a) I. Jestliže je $x = 0$, potom je $X \equiv S$ a každý bod kružnice k má od bodu X vzdálenost r ; pak je součet vzdáleností bodu X od kterýchkoli dvou bodů kružnice k roven $2r$ neboli $2(x + r)$, což je v soulase s tím, co jsme měli dokázat (obr. 38a).

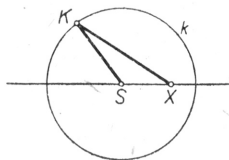
II. Nechť je nadále $x > 0$, t. j. $X \neq S$. Budiž K libovolný bod kružnice k a označme v_K vzdálenost bodů X, K . Rozeznávejme dvě možnosti.

1. Nechť bod K neleží na přímce XS , takže existuje trojúhelník XSK , ve kterém je $XS = x$, $SK = r$, $XK = v_K$; tu platí (obr. 38b) $XK < XS + SK$ (součet dvou stran trojúhelníka XSK je menší než strana třetí) neboli

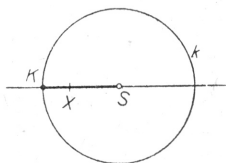
$$v_K < x + r. \quad (1)$$



Obr. 38a.



Obr. 38b.



Obr. 38c.

2. Nechť bod K leží na přímce XS . Rozeznávejme tyto případy:

Případ [1]. Nechť bod X je bodem úsečky KS (je $X \neq S$ a $0 < x \leq r$; obr. 38c). Potom je buď $K \equiv X$ nebo je $K \neq X$, ale vždy platí $v_K + XS = KS$ neboli $v_K + x = r$ a tedy $v_K = r - x$. Protože je $r - x \leq x + r$, je v tomto případě platný vztah

$$v_K < x + r. \quad (2)$$

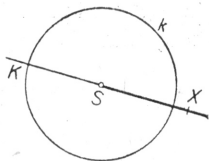
Případ [2]. Nechť bod X je vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce SK (takže je X, K, S pořádek uvažovaných bodů; obr. 38d). Potom platí $XK = XS + SK$ neboli

$$v_K = x + r. \quad (3)$$

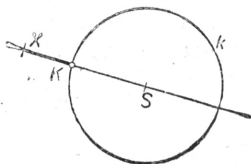
Případ [3]. Nechť bod X je vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce KS (takže je X, K, S pořádek uvažova-

ných bodů a tedy $x > r$; obr. 38e). Potom platí $XK = XS - SK$ neboli $v_K = x - r$. Tu je $x - r < x + r$ a tedy

$$v_K < x + r. \quad (4)$$



Obr. 38d.



Obr. 38e.

Závěr odst. II. Ze vztahů (1) až (4) plyne, že pro každou polohu bodu X i pro každou polohu bodu K platí

$$v_K \leq x + r. \quad (5)$$

Bud' L bod kružnice k ; pak o vzdálenosti v_L bodu X od bodu L rovněž platí

$$v_L \leq x + r. \quad (6)$$

Sečtením vztahů (5), (6) dostaneme

$$v_K + v_L \leq 2(x + r),$$

což jsme měli dokázat. Příklad rovnosti skutečně nastane, jak vyplývá z diskuse případu [2] pro $L \equiv K$.

Poznámka. Protože je buď $x = 0$ nebo $x > 0$, je úvahami z odstavců I, II tvrzení úlohy dokázáno.

b) Necht' bod X vyhovuje předpokladům úlohy b). Pak je největší možný součet jeho vzdáleností od kterýchkoli dvou bodů kružnice k roven $2(x + r)$. Podle požadavků úlohy tedy platí

$$2(x + r) \leq \pi r,$$

kde πr je poloviční délka kružnice k . Odtud dostaneme

$$x \leq r(\frac{1}{2}\pi - 1);$$

číslo

$$\varrho = r(\tfrac{1}{2}\pi - 1) \quad (7)$$

je zřejmě kladné. Odtud plyne, že každý bod X , který vyhovuje úloze, je bodem kruhu o středu S a poloměru ϱ .

Nechť obráceně je X_0 libovolný bod tohoto kruhu a x_0 vzdálenost bodu X_0 od bodu S . Potom tedy platí

$$x_0 \leq r(\tfrac{1}{2}\pi - 1)$$

neboli

$$2(x_0 + r) \leq \pi r. \quad (8)$$

Ale číslo $2(x_0 + r)$ podle úlohy a) je největší možný součet vzdáleností bodu X_0 od kterýchkoli dvou bodů kružnice k a vztah (8) říká, že tento součet není větší než poloviční délka kružnice k ; bod X_0 tedy patří do hledané množiny bodů.

Tím je dokázáno, že hledanou množinou bodů je kruh o středu S a poloměru ϱ , který je dán vztahem (7).

5. Dokažte, že každá dvě přirozená čísla, která jsou v desítkové soustavě zapsána symboly

$$(xyzxyz), (uvuvuv),$$

kde x, y, z, u, v jsou některé z cifer 0, 1, 2, 3, ..., 9, jsou soudělná.

Řešení. Označme M první a N druhé z obou daných čísel. Lze psát

$$\begin{aligned} M &= 10^5x + 10^4y + 10^3z + 10^2x + 10y + z = \\ &= (10^3 + 1)(10^2x + 10y + z) = \\ &= 7 \cdot 11 \cdot 13(10^2x + 10y + z); \end{aligned}$$

dále pak

$$\begin{aligned} N &= 10^5u + 10^4v + 10^3u + 10^2v + 10u + v = \\ &= (10u + v)(10^4 + 10^2 + 1) = (10u + v) \cdot 10101 = \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot (10u + v). \end{aligned}$$

Čísla 7 a 13 jsou tedy dělitelé obou daných čísel; jsou tedy obě daná čísla soudělná, což jsme měli dokázat.

6. Jistě znáte, jaký je tah koněm na šachovnici. Rozřešíte tedy snadno tuto úlohu:

Určete, kolik tahů koněm lze provést na čtvercové šachovnici, která má n^2 polí (kde $n > 1$ je přirozené číslo).

Řešení. Rozeznávejme případy:

a) Při $n = 2$ nelze provést žádný tah koněm.

2	2	2
2	0	2
2	2	2

Obr. 39.

2	3	3	2
3	4	4	3
3	4	4	3
2	3	3	2

Obr. 40.

b) Při $n = 3$ určíme počet tahů koněm snadno podle obr. 39 (na každé pole šachovnice vepíšeme počet tahů koněm, které lze z tohoto pole celkem provést). Dostaneme celkem $2 \cdot 8 = 16$ tahů.

c) Při $n = 4$ dostaneme počet tahů podle obr. 40, to je celkem $12 \cdot 4 = 48$ tahů.

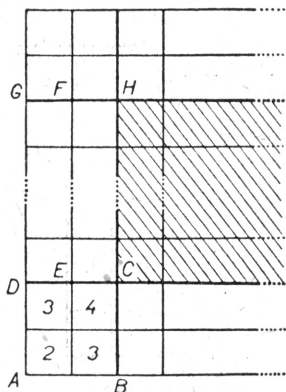
d) Při $n > 4$ oddělíme ze šachovnice při jejím obvodu dvě řady (viz obrázek 41). Zbude tak čtverec **M** o straně $n - 4$, který má $(n - 4)^2$ políček (v obr. 41 je vyšrafován). Z každého políčka tohoto čtverce **M** lze provést 8 tahů; lze tedy z políček čtverce **M** provést celkem

$$8(n - 4)^2 \text{ tahů.} \quad (1)$$

Nyní určíme počet tahů, které lze provést z obou řad, jež jsme oddělili při obvodu šachovnice.

[1] Máme tu především 4 čtverce typu $ABCD$ (viz obr. 41); z nich lze provést celkem

$$12 \cdot 4 = 48 \text{ tahů.} \quad (2)$$



Obr. 41.

Ze všech čtyř obdélníků typu $CDGH$ lze tedy provést $4 \cdot 10(n - 4)$ neboli

$$40 \cdot (n - 4) \text{ tahů.} \quad (5)$$

Počet všech tahů koněm na šachovnici podle (1), (2) a (5) je roven

$$\begin{aligned} & 8(n - 4)^2 + 48 + 40(n - 4) = \\ & = 8[(n - 4)^2 + 5(n - 4) + 6] = 8(n - 4 + 3)(n - 4 + 2) = \\ & = 8 \cdot (n - 1)(n - 2). \end{aligned}$$

Všech tahů koněm na šachovnici při $n > 4$ je tedy

$$8 \cdot (n - 1)(n - 2). \quad (6)$$

[2] Konečně máme čtyři obdélníky typu $CDGH$ (viz obr. 41) o rozměrech $n - 4, 2$.

Z každého políčka obdélníka $EDGF$ lze provést 4 tahy, tedy celkem

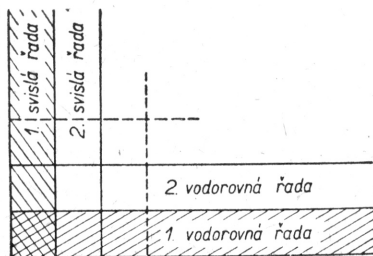
$$4 \cdot (n - 4) \text{ tahů.} \quad (3)$$

Z každého políčka obdélníka $CEFH$ lze provést 6 tahů, tedy ze všech jeho políček

$$6 \cdot (n - 4). \quad (4)$$

Lze tedy ze všech políček obdélníka $CDGH$ podle (3) a (4) provést $4(n - 4) + 6(n - 4)$ neboli $10 \cdot (n - 4)$ tahů.

Pro $n = 8$ (obvyklá šachovnice) je celkem 336 tahů. Snadno se přesvědčíme, že výraz (6) je platný též pro $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ (viz případy a), b), c)).



Obr. 42.

Jiné řešení. (Viz obr. 42.) Budiž $n \geq 3$. Rozdělme všechny možné tahy koněm, o nichž mluví úloha, do osmi tříd. Snadno zjistíme, že určitý tah je tím zařazen právě do jedné z těchto tříd. Jsou to tyto třídy tahů:

- tah o dvě pole vpřed a jedno pole vpravo;
- tah o dvě pole vpřed a jedno pole vlevo;
- tah o dvě pole vzad a jedno pole vpravo;
- tah o dvě pole vzad a jedno pole vlevo;
- tah o jedno pole vpřed a o dvě pole vpravo;
- tah o jedno pole vpřed a o dvě pole vlevo;
- tah o jedno pole vzad a o dvě pole vpravo;
- tah o jedno pole vzad a o dvě pole vlevo.

Vyšetříme nyní, kolik je možných různých tahů třídy a). Mysleme si, že jsme takový tah provedli. Potom musil kůň stát původně na polí, které patří do jedné z prvních $n - 2$ vodorovných řad a zároveň do jedné z prvních $n - 1$ svislých řad. Takových polí je celkem $(n - 1)(n - 2)$ a každému z nich přísluší právě jeden tah třídy a).

Týmž úsudkem dospějeme k tomu, že každá z uvedených osmi tříd obsahuje právě $(n - 1)(n - 2)$ různých tahů. Protože žádné dvě třídy neobsahují společný prvek, je celkem možno učinit koněm na dané šachovnici $8(n - 1)(n - 2)$ různých tahů, což jsme měli vyšetřit.

Řešil s. Vladimír Šabršula,
tř. 9c jedenáctileté střední školy v Přerově.

7. Buď přímka AB a na ní bod Z . Bodem Z sestrojme přímku $p \perp AB$ a zvolme na ní bod $C \neq Z$. Označme T těžiště trojúhelníka ABC .

Jaký útvar vyplní bod T , když bod $C \neq Z$ probíhá přímku p ?

Řešení (viz obr. 43). Označme O střed úsečky AB . O těžišti T podle známé věty platí

$$OT = \frac{1}{3}OC. \quad (1)$$

Rozeznávejme dvě možnosti.

Případ [1]. Necht' je $Z \equiv O$. Potom přímky p , OC splývají a body T zřejmě vyplní kolmici vedenou bodem O k přímce AB , a to s výjimkou bodu O .

Případ [2]. Necht' je $Z \neq O$ (obráz. 43). Mysleme si, že máme řešit známou úlohu rozdělit úsečku OC na tři shodné díly. Provedme to takto:

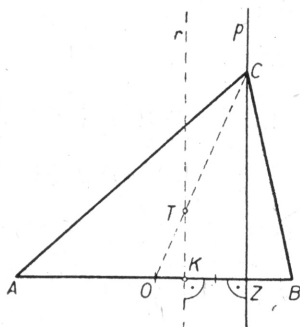
Mějme úsečku OZ rozdělenou na tři shodné díly a označme K ten bod úsečky OZ , pro nějž platí

$$OK = \frac{1}{3}OZ.$$

Jestliže bod K známe, vedeme jím rovnoběžku r k přímce ZC ; ta protne úsečku OC v bodě T , o kterém platí vskutku vztah (1). Probíhá-li tedy bod $C \neq Z$ přímku p , leží příslušný bod $T \equiv K$ na přímce r .

Obráceně, každý bod $Q \neq K$ přímky r je těžištěm trojúhelníka ABP , kde P je průsečík přímek OQ , p . To proto, že těžištěm trojúhelníka ABP je právě bod Q , jak se snadno dokáže. Tím je úloha řešena.

8. Buď dán deltoid $ABCD$ s osou souměrnosti AC (deltoid



Obr. 43.

$ABCD$ je vypuklý čtyřúhelník, který má přímku AC za osu souměrnosti). Označte S průsečík přímek AC , BD . Bodem S veďte kolmice k přímkám AB , BC , CD , DA a označte po řadě M , N , P , Q jejich paty.

a) Ve čtyřúhelníku $MNPQ$ platí $MQ \parallel NP$. Dokažte.

b) Označte $\sphericalangle BAD = 2\alpha$, $\sphericalangle BCD = 2\gamma$. Vyjádřete velikosti úhlů čtyřúhelníka $MNPQ$ pomocí úhlů α , γ .

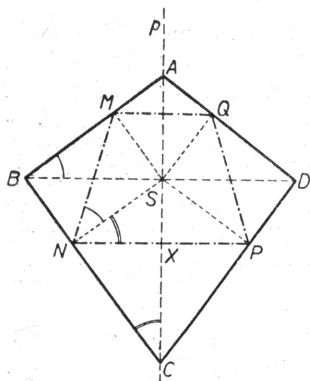
c) Rozhodněte, kdy je čtyřúhelník $MNPQ$ lichoběžník a kdy rovnoběžník.

Řešení (obr. 44). a) V souměrnosti o ose $p \equiv AC$ je bod A k sobě souměrně sdružen; stejně to platí i o bodu C . Obrazem bodu B v této souměrnosti je bod D a obráceně. Obrazem přímky AB je přímka AD a obráceně. Proto obraz bodu M leží na přímce AD . Protože je $\sphericalangle SMA = 90^\circ$, je i obraz tohoto úhlu úhel pravý. Odtud plyne, že obrazem bodu M je bod Q . Stejně se zjistí, že body N , P jsou souměrně sdruženy podle osy p . Proto je

$$MQ \perp p, NP \perp p, BD \perp p$$

a přímky MQ , NP , BD jsou rovnoběžné.

b) Trojúhelníky SBM , SBN mají při vrcholech M , N pravé úhly. Kružnice nad průměrem BS tedy prochází také body M , N . Proto je



Obr. 44.

$\sphericalangle MBS = \sphericalangle MNS$ (obvodové úhly), $\sphericalangle MBS = R - \alpha$ (z trojúhelníka ABS , kde je $\sphericalangle S = 90^\circ$). Je tedy

$$\sphericalangle MNS = R - \alpha. \quad (1)$$

Označme X průsečík přímek NP , p . Tu platí

$$\sphericalangle SNX + \sphericalangle NSC = 90^\circ$$

(neboť trojúhelník NSX má $\sphericalangle X = 90^\circ$). Dále je

$$\sphericalangle NCS + \sphericalangle NSC = 90^\circ$$

(neboť trojúhelník SCN má $\sphericalangle N = 90^\circ$). Porovnáním obou

posledních rovností dostaneme $\sphericalangle SNX = \sphericalangle NCS$, kde $\sphericalangle NCS = \gamma$; tedy

$$\sphericalangle SNX = \gamma. \quad (2)$$

Konečně platí

$$\sphericalangle MNP = \sphericalangle MNS + \sphericalangle SNX.$$

Odtud podle (1), (2) je

$$\sphericalangle MNP = 90^\circ - \alpha + \gamma. \quad (3)$$

O úhlech $\sphericalangle MNP$, $\sphericalangle NMQ$ platí

$$\sphericalangle MNP + \sphericalangle NMQ = 180^\circ \text{ (úhly přilehlé).}$$

Proto je podle (3)

$$\sphericalangle NMQ = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + \gamma)$$

neboli

$$\sphericalangle NMQ = 90^\circ + \alpha - \gamma. \quad (4)$$

Ze souměrnosti čtyřúhelníka $MNPQ$ podle osy p a ze vztahů (3), (4) plyne, že

$$\sphericalangle NPQ = 90^\circ - \alpha + \gamma, \quad \sphericalangle PQM = 90^\circ + \alpha - \gamma.$$

c) Čtyřúhelník $MNPQ$ bude lichoběžníkem, když platí

$$\sphericalangle MNP \neq \sphericalangle NMQ, \quad (5)$$

a bude obdélníkem, když oba přilehlé úhly $\sphericalangle MNP$, $\sphericalangle NMQ$ si budou rovny (každý z nich 90°), t. j. když bude platit

$$\sphericalangle MNP = \sphericalangle NMQ. \quad (6)$$

Případ (6) nastane, když podle (3), (4) je

$$90^\circ - \alpha + \gamma = 90^\circ + \alpha - \gamma$$

neboli

$$\begin{aligned} 2\gamma &= 2\alpha, \\ \gamma &= \alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

V tomto případě jsou všechny strany deltoidu $ABCD$ sobě rovny a je to kosočtverec. Obráceně, je-li $ABCD$ kosočtverec, platí (7) a úhly čtyřúhelníka $MNPQ$ jsou podle (3), (4), (5), (6) vesměs pravé, takže $MNPQ$ je obdélník. Jinak je tento čtyřúhelník rovnoramenný lichoběžník se základnami NP , MQ .

9. Necht' o reálných číslech a , b , c vesměs různých od nuly platí vztah

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) = 0. \quad (1)$$

Určete všechna přirozená čísla n , pro která platí vztah

$$\left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n}\right)\left(\frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n}\right)\left(\frac{1}{c^n} + \frac{1}{a^n}\right) = 0. \quad (2)$$

Řešení. Protože je $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, mají zlomky ve vztazích (1), (2) smysl. Na levé straně vztahu (1) vytkneme $\frac{1}{a^2 b^2 c^2}$; dostaneme

$$\frac{1}{a^2 b^2 c^2} (a + b)(b + c)(c + a) = 0,$$

a protože je $\frac{1}{a^2 b^2 c^2} \neq 0$, platí

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 0.$$

Odtud plyne, že alespoň jeden ze tří činitelů na levé straně poslední rovnosti musí být roven nule; platí tedy alespoň jeden ze vztahů

$$a + b = 0, \quad b + c = 0, \quad c + a = 0$$

neboli platí alespoň jeden ze vztahů

$$[1] \quad a = -b, \quad [2] \quad b = -c, \quad [3] \quad c = -a.$$

Nechť na př. platí vztah [3]. Potom pro liché přirozené číslo n je

$$\frac{1}{c^n} + \frac{1}{a^n} = \frac{1}{c^n} + \frac{1}{(-c)^n} = \frac{1}{c^n} - \frac{1}{c^n} = 0,$$

t. j. platí

$$\frac{1}{c^n} + \frac{1}{a^n} = 0.$$

Proto skutečně platí vztah (2). Protože však alespoň jeden ze tří vztahů [1] až [3] vždycky platí, je při lichém přirozeném

čísla n vždycky jeden ze tří činitelů levé strany vztahu (2) rovná se nule a tudíž vztah (2) platí.

Naproti tomu pro sudé přirozené n je

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} > 0, \quad \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} > 0, \quad \frac{1}{c^n} + \frac{1}{a^n} > 0.$$

Proto z platnosti vztahu [3] při sudém n nikterak neplyne platnost vztahu (2).

Závěr. Z platnosti vztahu (1) za předpokladu, že a , b , c jsou reálná čísla vesměs různá od nuly, plyne platnost vztahu (2) právě tehdy, jestliže je n liché přirozené číslo.

10. Buď N přirozené číslo, které má tyto vlastnosti:

(1) Je druhou mocninou přirozeného čísla.

(2) Jeho zápis v desítkové soustavě má na místě jednotek cifru 6.

Dokažte, že na místě desítek v zápise tohoto čísla stojí lichá cifra.

Řešení. Číslo N má tvar

$$(10a + b)^2, \tag{1}$$

kde a je některé celé nezáporné číslo a b je některé z čísel 0, 1, 2, ..., 9. Podle (1) tedy je

$$N = 100a^2 + 20ab + b^2.$$

O cifře na místě desítek v zápisu čísla N bude rozhodovat součet s jednotek čísla $2ab$ a desítek čísla b^2 (platí, že $b^2 < 100$).

Nyní dokážeme, že na místě jednotek v právě zmíněném součtu s je lichá cifra.

Důkaz. Když číslo N má na místě jednotek cifru 6, potom musí být číslo b rovno číslu 4 nebo číslu 6; pak je totiž $4^2 = 16$, $6^2 = 36$ a na místě jednotek je tedy šestka; jiná možnost není.

Odtud dále plyne, že k číslu $2ab$ musíme přičíst buď 1 nebo

3 (počet desítek čísel 16 nebo 36). Avšak číslo $2ab$ je sudé; proto když k němu přičteme číslo 1 nebo 3, dostaneme číslo s , které je liché. Tím je důkaz tvrzení úlohy proveden.

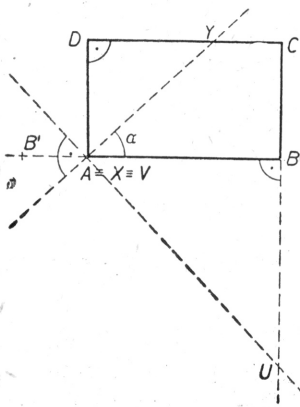
11. Buď dán obdélník $ABCD$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$. Na přímkách AB , BC , CD , DA zvolte po řadě body X , U , Y , V tak, aby platilo $XY \perp UV$.

Potom platí

$$\frac{UV}{XY} = \frac{a}{b}.$$

Dokažte.

Řešení. I. Uvažujme nejprve případ, kdy platí $A \equiv X \equiv V$.



Obr. 45.

Označme AB' polopřímku opačnou k polopřímce AB . Uvažujme dvě možnosti:

a) Nechť je $Y \equiv D$. Pak je $U \equiv B$ a tvrzení dané úlohy je samozřejmé.

b) Nechť je $Y \neq D$ (obr. 45). Pak jsou dvě možnosti:

Případ [1]. Bod Y leží uvnitř úhlu $\sphericalangle DAB$.

Případ [2]. Bod Y leží uvnitř úhlu $\sphericalangle DAB'$ vedlejšího k úhlu $\sphericalangle DAB$.

Důkaz tvrzení úlohy provedeme pro případ [1]; případ [2] se dokáže obdobně. Dokažme, že platí

$$\triangle AUB \sim \triangle AYD. \quad (1)$$

Důkaz. Každý z obou trojúhelníků především existuje; bod Y totiž neleží na přímce AD , neboť je $Y \neq D$; proto je

těž $U \neq B$. Dále je $\sphericalangle ADY = \sphericalangle ABU = 90^\circ$. Označíme-li $\sphericalangle YAB = \alpha$, je $\alpha < 90^\circ$ a platí

$$\sphericalangle DAY = 90^\circ - \alpha, \sphericalangle BAU = 90^\circ - \alpha;$$

proto je $\sphericalangle DAY = \sphericalangle BAU$. Oba trojúhelníky (1) se tedy shodují ve dvou úhlech, a proto jsou podobné. Tím je důkaz proveden.

Ze vztahu (1) nyní plyne

$$\frac{AU}{AY} = \frac{AB}{AD} \quad \text{neboli} \quad \frac{AU}{AY} = \frac{a}{b},$$

t. j.

$$\frac{UV}{XY} = \frac{a}{b}, \quad (2)$$

což jsme měli dokázat.

II. Když obě nebo jedna z přímek $UV \perp XY$ neprocházejí bodem A , sestrojíme bodem A přímky

$$u \parallel UV, x \parallel XY \quad (3)$$

a označíme po řadě $X' \equiv A$, Y' průsečíky přímky x s přímkami AB , CD a dále U' , $V' \equiv A$ průsečíky přímky u s přímkami BC , DA . Vzhledem k platnosti vztahů (3) se snadno dokáže, že platí

$$UV = U'V', XY = X'Y', U'V' \perp X'Y'. \quad (4)$$

Ale na úsečky $U'V'$, $X'Y'$ lze nyní užít výsledku (2) z odst. I, takže o nich platí vztah

$$\frac{U'V'}{X'Y'} = \frac{a}{b}.$$

Dosadíme-li sem z prvních dvou vztahů (4), dostaneme

$$\frac{UV}{XY} = \frac{a}{b},$$

což jsme měli dokázat.
Tím je úloha řešena.

12. Buď dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a uvnitř této kružnice bod $A \neq S$.

Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, jehož vrcholy B, C, D leží na kružnici k a jehož strana $AB = r$.

Řešení. Pomocné úlohy. Při řešení dané úlohy uijeme těchto dvou výsledků (srovnej s obr. 46):

V1. Dvě kružnice $k \equiv (S, r)$, $k' \equiv (A, r)$, kde $S \neq A$, se protínají ve dvou bodech $B \neq B'$ právě tehdy, jestliže platí vztah

$$AS < 2r.$$

Přitom je přímka AS osou úsečky BB' , takže úsečky AB, AB' leží v opačných polorovinách. Dále přímka BB' je osou úsečky AS .

V2. Buď dána kružnice $k \equiv (S, r)$, přímka AB a kladné číslo $m < 2r$. Potom v kružnici k existují právě dvě různé tětivy CD, C_1D_1 , o nichž platí

$$CD = C_1D_1 = m, CD \parallel AB, C_1D_1 \parallel AB.$$

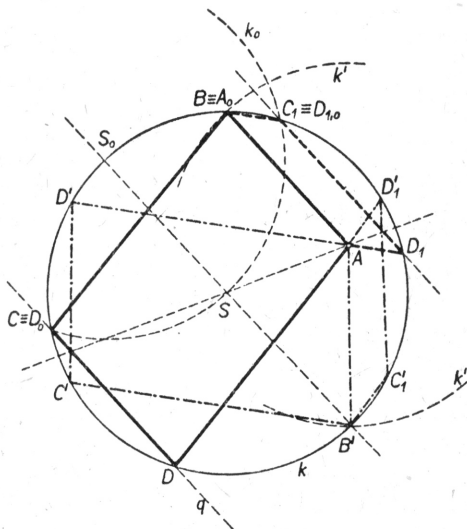
Řešení úlohy V2. Předpokládejme, že jsme našli řešení úlohy **V2**. Máme tedy na kružnici k takové body C, D , o nichž platí $CD = m, CD \parallel AB$.

Provedme posunutí kružnice k tak, že bod D přejde v bod C ; velikost posunutí je m a směr posunutí je dán polopřímkou DC . Označme $D_0 \equiv C$ novou polohu bodu D a $k_0 \equiv (S_0, r)$ novou polohu kružnice $k \equiv (S, r)$; protože bod D_0 leží na kružnici k_0 , je bod $D_0 \equiv C$ společným bodem kružnic k, k_0 . Podle toho provedeme konstrukci.

Posuňme kružnici k do polohy $k_0 \equiv (S_0, r)$ tak, že o bodu S_0 platí

$$SS_0 = m, SS_0 \parallel AB.$$

Přitom ze dvou možných poloh bodu S_0 zvolíme jednu (změna polohy znamená jen výměnu označení bodů C, D). Označme $D_0 \equiv C$ jeden ze společných bodů kružnic k, k_0 . Obráceným (zpětným) posunutím přejde bod S_0 v bod S a bod $D_0 \equiv C$ v bod D ; protože přitom kružnice k_0 přejde v kružnici k , leží bod $D \neq C$ na kružnici k a dále na přímce $q \parallel AB$, vedené bodem $D_0 \equiv C$. Podle konstrukce zřejmě platí $CD = m$, $CD \parallel AB$.



Obr. 46.

Úloha má dvě různá řešení, neboť podle věty **V1** je středná $SS_0 = m$ obou kružnic k, k_0 menší než $2r$, a proto tyto kružnice mají společné dva různé body $D_0 \neq D_{1,0}$; tyto body jsou podle téže věty souměrně sdružené podle přímky SS_0 . Z toho plyne,

že i obě hledané tětivy CD , C_1D_1 jsou odděleny přímkou SS_0 a tudíž jsou navzájem různé.

Řešení dané úlohy. I. Rozbor. Předpokládejme, že jsme sestrojili rovnoběžník $ABCD$, který splňuje požadavky úlohy. O něm platí

$$AB = CD, AB \parallel CD.$$

Leží tedy bod B jednak na kružnici k a jednak na kružnici $k' \equiv (A, r)$. Úsečka CD , která je podle požadavků úlohy tětivou kružnice k , má velikost r a platí $CD \parallel AB$. Těchto dvou nutných podmínek užijeme ke konstrukci hledaného rovnoběžníka.

II. Sestrojme kružnici $k' \equiv (A, r)$. Podle **V1** se kružnice k' , k protnou ve dvou různých bodech B , B' , neboť o středné platí $AS < r$ (bod A leží uvnitř kružnice k); oba body B , B' jsou souměrně sdružené podle přímky AS (viz obr. 46).

Každý z bodů B , B' povede k jedné skupině řešení. Konstrukci provedeme podle **V2** jen pro bod B . (Konstrukce pro bod B' se provede zcela obdobně; příslušné výsledky však snadno obdržíme, když k výsledkům, sestrojeným pro bod B , sestrojíme útvary souměrně sdružené podle přímky AS , neboť v této souměrnosti přecházejí body B , B' jeden v druhý a kružnice k přechází v sebe samu.)

Podle konstrukce v úloze **V2** sestrojíme tětivy CD , resp. C_1D_1 kružnice k , pro něž $CD = AB$, $CD \parallel AB$, resp. $C_1D_1 = AB$, $C_1D_1 \parallel AB$. Úsečky CD ani C_1D_1 neleží v přímce AB ; kdyby totiž přímka AB vyřála na kružnici k tětivu délky r , pak by kromě bodu B i bod A ležel na kružnici k , po případě vně kružnice, neboť $AB = r$. To však odporuje předpokladu, že A je vnitřní bod kružnice k . Existují tedy čtyřúhelníky $ABCD$, ABC_1D_1 ; to jsou však nutně podle **V2** rovnoběžníky, neboť podle konstrukce o nich platí

$$DC \parallel AB, DC = AB \text{ a } D_1C_1 \parallel AB, D_1C_1 = AB.$$

Oba rovnoběžníky $ABCD$, ABC_1D_1 podle předchozí konstrukce zřejmě vyhovují požadavkům úlohy a jsou navzájem

různé; to plyne z toho, že mají společnou stranu AB , kdežto body C, C_1 jsou podle konstrukce navzájem různé.

III. Nyní dokážeme, že úloha má čtyři řešení.

Sestrojíme-li k oběma rovnoběžníkům

$$ABCD, ABC_1D_1 \quad (1)$$

útvary souměrně sdružené podle osy AS souměrnosti, dostaneme další rovnoběžníky

$$AB'C'D', AB'C_1D'_1. \quad (2)$$

Dokážeme, že všechny čtyři rovnoběžníky (1), (2) jsou navzájem různé. O dvojici rovnoběžníků (1) a tím i o dvojici (2) jsme to dokázali. Stačí, když dokážeme, že jsou různé rovnoběžníky

$$ABCD, AB'C'D' \quad (3)$$

a rovnoběžníky

$$ABCD, AB'C_1D'_1 \quad (4)$$

(zbývající dvojice dostaneme z těchto dvojic užitím souměrností podle přímky AS). Důkaz provedme pro dvojici (3); důkaz pro dvojici (4) se provede zcela obdobně.

Předpokládejme naopak, že rovnoběžníky (3) splývají; dokážeme, že to není možné. Oba rovnoběžníky mají společný vrchol A ; protože úsečky AB, AB' jsou podle **V1** přímkou AS odděleny, nemohou strany AB, AB' splýnout. Pripusťme, že splyne strana AB prvního rovnoběžníka se stranou AD' druhého. Dokážeme, že ani to není možné.

Nechť splývají strany AB, AD' ; pak musí splývat i body B, D' . Ze vztahu $B \equiv D'$ vyplývá, že musí vzhledem k souměrnosti podle přímky AS splývat též body D, B' neboli musí platit $D \equiv B'$. Pak však již nutně musí být $C \equiv C'$. Protože podle konstrukce je $AB = AB' = r$, plyne z předchozího, že $AD = r$; proto je rovnoběžník $ABCD$ kosoúhelník o straně velikosti r . Protože body B, C, D leží na kružnici k

a pretože je $BC = CD = r$, jsou tyto body tři ze sousedních vrcholů pravidelného šestiúhelníka vepsaného kružnici k . O tomto pravidelném šestiúhelníku je však známo, že čtyřúhelník $SBCD$ je kosočtverec o straně velikosti r . Protože body D, B lze vést po řadě jen po jedné rovnoběžce ke stranám CB, BD , usoudíme snadno, že oba rovnoběžníky $ABCD, SBCD$ nutně splývají, t. j. že platí $A \equiv S$. To však je proti předpokladu textu dané úlohy, že je $A \neq S$. Nemohou proto rovnoběžníky (3) splýnout.

Tím je dokázáno, že daná úloha má čtyři různá řešení (3), (4).

13. Určte všetky prirodzené čísla p , pre ktoré je číslo

$$N = p^2 - 25$$

nezáporné a deliteľné ôsmimi.

Riešenie. Nech $N = p^2 - 25$ je číslo deliteľné ôsmimi; potom príslušné prirodzené číslo p je rozdielne od čísel 1, 2, 3, 4. Preto je nevyhnutne $p > 4$. Avšak platí

$$N = (p - 5)(p + 5). \quad (1)$$

Ak je N deliteľné ôsmimi, musí byť jedno z čísel

$$p - 5, p + 5 \quad (2)$$

párne. Avšak z toho vyplýva, že číslo p je nevyhnutne nepárne číslo a z toho ďalej, že obe čísla (2) sú párne (súčet aj rozdiel dvoch nepárnych čísel je párne číslo). Je teda číslo p nepárne, väčšie než 4; čísla (2) sú obe párne a jedno z nich musí byť deliteľné štyrmi.

Každé nepárne číslo $p > 4$ možno písať v tvare

$$p = 5 + 2k, \quad (3)$$

kde k je celé nezáporné číslo a ke každému celému nezápornému číslu k vzťah (3) priraduje nepárne číslo $p > 4$. Tu je

$$p - 5 = 2k, p + 5 = 2(k + 5). \quad (4)$$

Rozoznávajme dve možnosti:

Prípad [1]. Nech číslo k vo vzťahu (3) je nepárne; potom číslo $k + 5$ v druhom vzťahu (4) je párne a číslo $2(k + 5)$ je súčin dvoch párných čísel a teda je deliteľné štyrmi. Pretože číslo $p - 5$ je párne, je číslo N deliteľné ôsmimi.

Prípad [2]. Nech číslo k vo vzťahu (3) je párne; potom číslo $2k$ v prvom vzťahu (4) je deliteľné štyrmi a pretože $p + 5$ je párne číslo, je číslo N deliteľné ôsmimi.

Z týchto výsledkov vyplýva: Číslo N dané vzťahom (1) je deliteľné ôsmimi pre každé nepárne $p > 4$. Pre párne prirodzené čísla p je N zrejme nepárne číslo a teda nie je deliteľné ôsmimi.

14. Riešte sústavu rovníc

$$\frac{x}{a} + ay = a, \quad (1)$$

$$ax + \frac{y}{a} = 1, \quad (2)$$

kde x, y sú neznáme a $a \neq 0$ je dané reálne číslo.

Riešenie. Znásobme rovnicu (2) číslom $-a^2 \neq 0$ a pričítajme k nej rovnicu (1). Dostaneme rovnicu

$$\frac{x}{a} - a^3x = a - a^2$$

alebo

$$x \cdot \frac{1 - a^4}{a} = a(1 - a)$$

a teda

$$x(1 - a^4) = a^2(1 - a). \quad (3)$$

Ďalej znásobme rovnicu (1) číslom $-a^2 \neq 0$ a pripočítajme k nej rovnicu (2); dostaneme postupne

$$y \left(\frac{1}{a} - a^3 \right) = 1 - a^3,$$

$$y \cdot \frac{1 - a^4}{a} = 1 - a^3$$

a teda

$$y(1 - a^4) = a(1 - a^3). \quad (4)$$

I. Riešenie (x, y) danej sústavy musí spĺňať každú z rovníc (3), (4). Každá z týchto rovníc má jediné riešenie, ak je $1 - a^4 \neq 0$, t. j. ak je

$$(1 - a)(1 + a)(1 + a^2) \neq 0.$$

Stade ľahko vyplýva, že vedľa $a \neq 0$ musí platiť

$$a \neq 1, a \neq -1.$$

Potom dvojica

$$x = \frac{a^2(1 - a)}{1 - a^4}, \quad y = \frac{a(1 - a^3)}{1 - a^4}$$

alebo

$$x = \frac{a^2}{(1 + a)(1 + a^2)}, \quad y = \frac{a(1 + a + a^2)}{(1 + a)(1 + a^2)}$$

je riešením danej sústavy, ako sa ľahko presvedčíme dosadením do rovníc (1), (2).

II. Ak je $a = 1$, sú zrejme obe dané rovnice totožné a riešenie je

$$x, y = 1 - x,$$

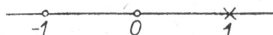
kde x je ľubovoľné číslo.

III. Ak je $a = -1$, daná sústava znie

$$\begin{aligned}x + y &= 1, \\x + y &= -1\end{aligned}$$

a je zrejme sporná; riešenie neexistuje.

Poznámka. Na obrázku 47 sú vyznačené výnimočné prípady na osi čísel pre číslo a . Krúžok značí, že riešenie alebo sústava neexistuje, krížik, že sústava má nekonečne mnoho riešení. Pre ostatné čísla a má sústava jediné riešenie.



Obr. 47.

15. Nech sú dané dva rôzne body A, B . Urobme po rade kružidlom tieto konštrukcie:

(1) Zostrojme priesečníky kružníc (B, BA) , (A, AB) a jeden z nich označme C . Ďalej zostrojme priesečník $D \neq A$ kružníc (B, BA) , (C, CA) a konečne priesečník $E \neq C$ kružníc (B, BA) , (D, DC) .

(2) Zostrojme priesečníky U, V kružníc (A, AB) , (E, EA) .

(3) Zostrojme priesečník $X \neq A$ kružníc (U, UA) , (V, VA) .

Dokážte:

a) Body A, B, E ležia v priamke.

b) Platí $\triangle EAU \sim \triangle UAX$.

c) Platí $AX = BX$.

Poznámka. V texte úlohy používame označenie (S, SQ) pre kružnicu so stredom S a s polomerom SQ .

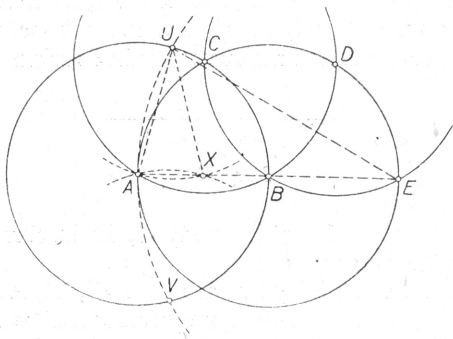
Riešenie (obr. 48). Označme $r = AB$. Body C, D, E iste existujú (konštrukcia pravidelného šesťuholníka). Kružnice $(A, AB = r)$, $(E, EA = 2r)$ majú strednú $AE = 2r$; táto splňuje trojuholníkovú nerovnosť

$$EA - AB < AE < EA + AB,$$

lebo je $EA - AB = r$, $EA + AB = 3r$ a nerovnosť

$$r < 2r < 3r$$

skutočne platí. Z toho vyplýva, že obe kružnice (A, AB) , (E, EA) sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch U, V , pričom priamka ABE je osou úsečky UV .



Obr. 48.

Body U, A, V , ktoré ležia na kružnici $(E, EA = 2r)$, sú podľa predošlého tri rôzne body, a preto kružnice (U, UA) , (V, VA) existujú a majú zhodné polomery $UA = VA = r$. Pretože priamka UV neprechádza bodom A , je $UV < 2r$, lebo body U, V ležia na kružnici $(A, AB = r)$. Je teda stredná UV zhodných kružníc (U, UA) , (V, VA) menšia než súčet $2r$ ich polomerov, a preto sa tieto kružnice pretnú v bode $X \neq A$, ktorý leží na priamke ABE , ako vyplýva zo súmernosti oboch týchto kružníc podľa tejto priamky. Body A, X sú súmerne združené podľa priamky UV ; pretože kružnica (E, EA) prechádza bodom A , oddeľuje priamka UV body A, B . Z oboch týchto výsledkov vyplýva, že bod X leží vnútri polpriamky AB .

Teraz o trojuholníkoch EAU , UAX platí

$$EA = EU = 2r, \quad UA = UX = r,$$

t. j. sú rovnoramenné; pritom majú pri základňách AU , AX spoločný uhol $\sphericalangle UAX$ a teda sa zhodujú vo všetkých uhloch.

Preto je

$$\triangle EAU \sim \triangle UAX.$$

Pretože pomer veľkostí príslušných strán je $\frac{EA}{UA} = 2$, platí o príslušných stranách

$$AU = 2 \cdot AX;$$

pretože $AU = AB$, platí teda

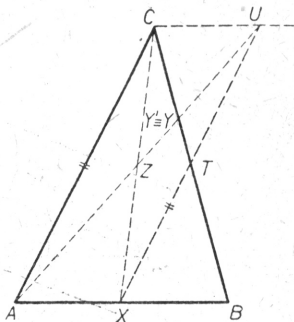
$$AB = 2 \cdot AX,$$

takže bod X je stredom úsečky AB , čo sme mali dokázať.

16. Trojuholník ABC má obsah 24 cm^2 . Označme X stred strany AB a Y taký bod strany BC , že platí $BY = 2 \cdot CY$; ďalej označme Z spoločný bod úsečiek CX , AY . Vypočítajte obsah štvoruholníka $XYBZ$.

Riešenie (pozri obr. 49a). Zostrojíme stred T strany BC a na predĺžení úsečky XT za bod T určíme bod U tak, aby platilo $TU = TX$. Podľa vlastnosti strednej pričky trojuholníka

ABC je $XU = CA$ a $AXUC$ je rovnobežník. Jeho uhlopriečka AU obsahuje jednu z ťažníc trojuholníka XUC . Druhá ťažnica tohto trojuholníka je úsečka CT . Ťažisko trojuholníka XUC



Obr. 49a.

je bod Y' úsečky CT , pre ktorý platí $CY' = \frac{2}{3}CT = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}BC) = \frac{1}{3}BC = CY$. Je teda $Y' \equiv Y$ a priamky AY , AU splynú. Bod Z je preto priesečníkom uhlopriečok rovnobežníka $AXUC$, t. j. platí

$$CZ = XZ. \quad (1)$$

Okrem toho je bod Y ťažiskom trojuholníka XUC ; preto je $YZ = \frac{1}{3}ZU = \frac{1}{3}AZ$, alebo

$$AZ = 3 \cdot YZ. \quad (2)$$

Ak označíme teraz p obsah trojuholníka ABC , platí pre obsahy obrazcov

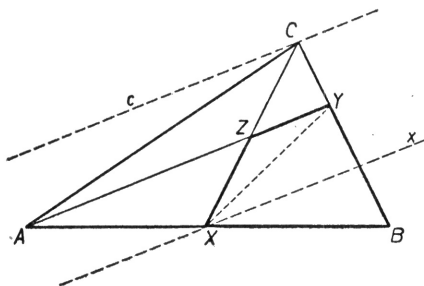
$$AXC = \frac{1}{2}p, \quad AYC = \frac{1}{3}p,$$

a ďalej

$$AXZ = \frac{1}{2} \cdot AXC = \frac{1}{4}p.$$

Preto obsah P štvoruholníka $XYYZ$ je

$$P = p - \frac{1}{3}p - \frac{1}{4}p = \frac{5}{12}p = 10 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Obr. 49b.

Inakšie riešenie (obr. 49b). Označme $O(MNP)$ obsah trojuholníka MNP . V našej úlohe platia vzťahy (v cm^2)

$$O(ABC) = 24,$$

$$O(AXC) = O(BXC) = 12 \text{ (lebo je } AX = BX), \quad (1)$$

$$O(ABY) = \frac{2}{3} \cdot O(ABC) = 16 \text{ (lebo je } BY = \frac{2}{3} \cdot BC), \quad (2)$$

$$O(ACY) = \frac{1}{3} \cdot O(ABC) = 8 \text{ (lebo je } CY = \frac{1}{3} \cdot BC), \quad (3)$$

$$O(AXY) = \frac{1}{2} \cdot O(ABY) = 8 \text{ (lebo je } AX = BX), \quad (4)$$

$$O(BXY) = \frac{2}{3} \cdot O(BXC) = 8 \text{ (lebo platí (1) a } BY = \frac{2}{3} \cdot BC), \quad (5)$$

$$O(CXY) = \frac{1}{3} \cdot O(BXC) = 4 \text{ (lebo platí (1) a } CY = \frac{1}{3} \cdot BC). \quad (6)$$

Označme $c \parallel AY$, $x \parallel AY$ rôzne rovnobežky vedené bodmi C , X . Keďže trojuholníky ACY , AXY majú spoločnú stranu AY a rovnaké obsahy (viď (3), (4)), musia byť aj ich výšky príslušné ku strane AY rovnaké. Preto sú vzdialenosti rovnobežiek AY , c a AY , x tiež rovnaké. Podľa známej vety je preto bod Z stredom úsečky XC , t. j. platí $CZ = XZ$. Odtiaľ plynie

$$O(CZY) = O(XZY) = \frac{1}{2} \cdot O(CXY) = 2 \text{ (podľa (6)).} \quad (7)$$

Obsah o štvoruholníka $XYBZ$ je súčtom obsahov $O(XZY)$, $O(BXY)$ (pozri (7), (5)), t. j.

$$o = 2 + 8.$$

Odpoveď. Obsah štvoruholníka $XYBZ$ je 10 cm^2 .

Riešil s. Jozef Bárdoš,
tr. 9a jedenáštočnej strednej školy v Sabinove.

7. Úlohy II. kola kategórie C.

1. Riešte rovnicu

$$\frac{x}{x-m} + \frac{x}{x+m} = \frac{2x}{x+1} \quad (1)$$

s neznámou x .

Urobte diskusiu riešiteľnosti danej rovnice vzhľadom na dané reálne číslo m .

Riešenie. Ak je x riešením rovnice (1), musí byť

$$x \neq m, x \neq -m, x \neq -1; \quad (2)$$

inak by zlomky v rovnici (1) nemali zmysel. Znásobíme obe strany v (1) výrazom $(x - m)(x + m)(x + 1) \neq 0$. Dostaneme po rade rovnice

$$x(x + m)(x + 1) + x(x - m)(x + 1) - 2x(x - m)(x + m) = 0,$$

$$x[x^2 + mx + x + m + x^2 - mx + x - m - 2x^2 + 2m^2] = 0,$$

$$x[2x + 2m^2] = 0,$$

$$2x[x + m^2] = 0.$$

Musí byť teda buď $x = 0$, buď $x + m^2 = 0$. Pýtajme sa, či číslo x , ktoré vyhovuje jednej z týchto podmienok, je riešením rovnice (1); máme dva prípady.

Prípad [1]. Keď je $x = 0$, vzhľadom k vzťahom (2) musí byť $m \neq 0$. Ak je $m \neq 0$, je $x = 0$ skutočne riešením rovnice (1), ako sa ľahko presvedčíme dosadením do rovnice (1).

Prípad [2]. Keď je $x + m^2 = 0$, čiže $x = -m^2$, musí vzhľadom na (2) platiť:

a) Jednak $-m^2 \neq m$ alebo $m(m + 1) \neq 0$, t. j. o číse m musí platiť $m \neq 0, m \neq -1$.

b) Jednak $-m^2 \neq -m$, čiže $m(m - 1) \neq 0$, t. j. o číse m musí platiť $m \neq 0, m \neq 1$.

c) Jednak $-m^2 \neq -1$, čiže $(m - 1)(m + 1) \neq 0$, t. j. musí platiť $m \neq 1, m \neq -1$.

Číslo $x = -m^2$ je riešením rovnice (1), keď je zároveň $m \neq 0, m \neq 1, m \neq -1$. Potom je totiž ľavá strana rovnice (1)

$$L = \frac{-m^2}{-m(m + 1)} + \frac{-m^2}{-m(m - 1)} =$$

$$= \frac{-m^2}{-m(m+1)(m-1)} \cdot (m-1+m+1) =$$

$$= \frac{2m^3}{m(m+1)(m-1)} = \frac{2m^2}{(m+1)(m-1)};$$

pravá strana je

$$P = \frac{-2m^2}{-m^2+1} = \frac{2m^2}{(m+1)(m-1)}.$$

Výrazy L , P majú za predpokladu $m(m+1)(m-1) \neq 0$ význam a je $L = P$, takže $x = -m^2$ je riešením rovnice.

Záver. 1. Ak je $m = 0$, má rovnica (1) tvar

$$\frac{2x}{x} = \frac{2x}{x+1}$$

a nemá zrejme vôbec žiadne riešenie.

2. Ak je $m = -1$, má rovnica (1) tvar

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x+1}$$

a má vzhľadom na (2) jediné riešenie $x = 0$ (pozri prípad [1]).

3. Ak $m = 1$, potom rovnica (1) má tvar

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$$

a má teda tiež jediné riešenie $x = 0$ (pozri prípad [1]).

4. Ak číslo m splňuje podmienky $m \neq 0$, $m \neq -1$, $m \neq 1$, má rovnica (1) dve rôzne riešenia

$$x = 0, x = -m^2.$$

2. Dokážte, že každú celistvú čiastku korún väčšiu než 7 Kčs možno vyplatiť pomocou trojkorunových a päťkorunových štátoviek.

Udajte najmenší počet trojkorunových a päťkorunových štátoviek, ktorým možno vyplatiť čiastku 364 Kčs.

Riešenie. Čiastky od 8 Kčs do 17 Kčs možno vyplatiť napr. takto:

$$\left. \begin{array}{l} 8 = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1, \\ 9 = 3 \cdot 3, \\ 10 = 5 \cdot 2, \\ 11 = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2, \\ 12 = 3 \cdot 4, \\ 13 = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1, \\ 14 = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3, \\ 15 = 5 \cdot 3, \\ 16 = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2, \\ 17 = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 4. \end{array} \right\} (z)$$

Čiastku x Kčs väčšiu než 17 Kčs rozložíme na súčet $x = z + d$, kde číslo z je práve jediné z čísel (z) ; pritom počty jednotiek v číslach x, z sa navzájom rovnajú a číslo $\frac{d}{10}$ je celistvý počet desiatok čísla x . Čiastku z Kčs vyplatíme potom podľa jedného zo vzťahov (z) a čiastku d vyplatíme v päťkorunáčkach (ich počet je $2 \cdot \frac{d}{10}$). Tým je prvá časť úlohy rozriešená.

Čiastku 364 Kčs rozložíme na súčet

$$364 = 14 + 350 = (5 \cdot 1 + 3 \cdot 3) + 5 \cdot 35 \cdot 2 = 5 \cdot 71 + 3 \cdot 3.$$

Počet päťkorunových štátoviek už zrejme nemožno zvýšiť (na úkor trojkorunových), takže najmenší počet štátoviek potrebných k výplate je

71 kusov päťkorunáčok a 3 kusy trojkorunáčok.

3. Buď dána úsečka S_1S_2 a uvnitř této úsečky bod P . Označme $S_1P = v_1$, $S_2P = v_2$; nechť o číslech v_1, v_2 platí $v_1 \geq v_2$. Opíšme kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1), k_2 \equiv (S_2, r_2)$ o daných poloměrech r_1, r_2 ; dále označme $p \perp S_1S_2$ přímkou, která prochází bodem P .

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod A ležel na kružnici k_1 , bod C na kružnici k_2 a aby body B, D ležely na přímce p .

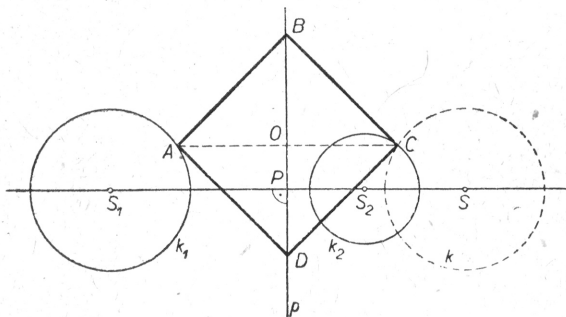
Jestliže kružnice k_1, k_2 nemají společný bod na přímce p a jestliže platí

$$|r_1 - r_2| \leq v_1 - v_2 < r_1 + r_2, \quad (1)$$

potom má úloha řešení; dokažte.

(Užijte souměrnosti vzhledem k přímce p .)

Řešení (srovnej s obr. 50). Nechť existuje čtverec $ABCD$, který vyhovuje požadavkům úlohy.



Obr. 50.

Označme $k \equiv (S, r_1)$ kružnici, která je souměrně sdružená s kružnicí k_1 podle přímky p . Protože je $S_1S_2 \perp p$, leží bod S uvnitř polopřímky PS_2 , při čemž je

$$PS_2 \leq PS;$$

proto vzdálenost s bodů S_2, S je

$$s = v_1 - v_2. \quad (2)$$

Body A , C jsou souměrně sdružené podle osy p ; bod C leží jednak na kružnici k_2 (podle požadavku úlohy), jednak na kružnici k (to plyne ze souměrnosti bodů A , C podle osy p). Je tedy bod C společným bodem kružnic k_2 , k . Na základě toho provedeme konstrukci.

Sestrojíme ke kružnici k_1 kružnici $k \equiv (S, r_1)$ souměrně sdruženou podle přímky p . Jeden ze společných bodů kružnic k_2 , k označme C . Bod souměrně sdružený k bodu C podle přímky p označme A ; bod A leží na kružnici k_1 . Označme O střed úsečky AC ; ten leží jistě na přímce p . Na každou z obou opačných polopřímek, ve které bod O rozděluje přímku p , nanesme úsečku $\frac{1}{2} \cdot AC$; dostaneme body $B \equiv D$. Čtýrhelník $ABCD$ je hledaný čtverec.

Správnost provedené konstrukce je zřejmá. Provedeme diskusi. Především je z konstrukce zřejmé, že musí být $A \equiv C$. V úvahu tedy přicházejí jen ty body společné kružnicím k a k_2 , které neleží na přímce p .

Kružnice k , k_2 mají společný bod:

- a) když se protínají nebo
- b) když se dotýkají nebo
- c) když splývají.

Případ a) nastane, když platí o vzdálenosti $s = v_1 - v_2$ středů S_1 , S_2 vztah

$$|r_1 - r_2| < v_1 - v_2 < r_1 + r_2.$$

Případ b) nastane, když platí
bud'

$$v_1 - v_2 = r_1 + r_2$$

anebo

$$|r_1 - r_2| = v_1 - v_2.$$

Případ c) nastane, když je $v_1 = v_2$ a $r_1 = r_2$.

Když platí (1), pak nastává vždy jeden z případů a), b), c).

Závěr. V případech a), b) řešení úlohy existuje, když společné body kružnic k_1 , k_2 neleží na přímce p . V případě c) je nekonečně

mnoho řešení; každý bod kružnice k_2 může být hledaným bodem C , pokud však neleží na přímce p .

4. Buď dán trojúhelník ABC a kružnice $k \equiv (S, r)$ tomuto trojúhelníku opsaná. Osa úhlu $\sphericalangle BCA$ protne kružnici k ještě v druhém průsečíku $D \neq C$.

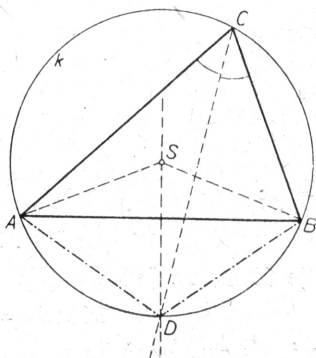
Dokažte, že trojúhelník ABD je rovnoramenný a že přímka SD je jeho osou souměrnosti.

Řešení (obr. 51). Víme, že polovina úhlu trojúhelníka je úhel ostrý. Proto o obou shodných úhlech $\sphericalangle ACD$, $\sphericalangle DCB$ platí

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB < 90^\circ.$$

Tyto úhly jsou obvodové a k nim příslušné středové úhly jsou rovny jejich dvojnásobkům, takže jsou duté; jsou to tedy úhly $\sphericalangle ASD$,

$\sphericalangle DSB$. Tyto úhly jsou tudíž shodné a styčné (mají společné rameno SD a ramena SA , SB jsou různé polopřímky, neboť jinak by bylo $A \equiv B$). Proto v souměrnosti o ose SD jsou polopřímky SA , SB souměrně sdružené, a protože je $SA = SB = r$, jsou i body A , B souměrně sdružené podle osy SD . Je tedy přímka SD osou úsečky AB . Protože však bod D je různý od bodů A , B a leží na kružnici k , nemůže již padnout na přímku AB ; proto existuje trojúhelník DAB , při čemž přímka DS je osou úsečky AB , t. j. $DA = DB$. Je tedy trojúhelník DAB rovnoramenný a přímka DS je jeho osou souměrnosti, což jsme měli dokázat.



Obr. 51.

8. Úlohy I. kola kategórie D.

1. Päť chlapcov pracovalo šesť dní na chmeľovej brigáde. Za vykonanú prácu im mala byť vyplatená odmena úmerná vykonanej práci, ale s tou výhradou, že z tejto odmeny im zrazia na stravovanie čiastku 6 Kčs denne za každého chlapca. Pritom priemerný denný výkon prvého chlapca bol 6, druhého 11, tretieho 12, štvrtého 15 a piateho 16 vertelov načesaného chmeľu. Za vykonanú prácu dostali chlapci po zjednanej zrážke odmenu v rýdzej čiastke celkom 180 Kčs. Vypočítajte, ako sa chlapci spravodlivo rozdelia o túto čiastku.

Riešenie. Za stravovanie zaplatili chlapci 180 Kčs, lebo $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$. Celková odmena, ktorú chlapci dostali, sa rovná súčtu rýdzej čiastky 180 Kčs a čiastky 180 Kčs, ktorú museli zaplatiť za stravovanie, t. j. 360 Kčs.

Túto čiastku rozdelíme v pomere

$$6 : 11 : 12 : 15 : 16,$$

čo je 60 dielov. Jeden diel je

$$360 : 60 = 6 \text{ (Kčs).}$$

To je čiastka, ktorú by chlapec dostal za týždeň, keby denne načesal jeden vertel.

Pri bezplatnom stravovaní by chlapci dostali po rade

$$6 \cdot 6, 6 \cdot 11, 6 \cdot 12, 6 \cdot 15, 6 \cdot 16,$$

t. j.

$$36, 66, 72, 90, 96 \text{ (Kčs).}$$

Pretože stravovanie za 6 dní (po 6 Kčs denne) každého chlapca stálo $6 \cdot 6$ neboli 36 Kčs, musíme od každej práve vypočítanej čiastky odčítať 36 Kčs. Preto chlapci dostanú po rade tieto čiastky:

$$36 - 36, 66 - 36, 72 - 36, 90 - 36, 96 - 36$$

alebo

$$0, \quad 30, \quad 36, \quad 54, \quad 60 \text{ (Kčs).}$$

(Kontrola: Súčet týchto rýdzych čiastok je skutočne 180 Kčs.)

2. Siedmi spolužiáci si na začiatku prázdnin vzájomne sľúbili, že každý napíše trom ďalším z nich zpravu o svojom prázdninovom pobyte.

Je to možné zariadiť tak, aby každý z nich dostal práve tri listy od tých troch spolužiakov, ktorým sám napísal?

Riešenie. Keby to bolo možné, písal by žiak A žiakovi B a žiak B žiakovi A, čo znamená, že by všetci žiaci napísali dohromady párny počet listov.

V skutočnosti písal každý žiak tri listy, takže všetkých 7 žiakov odoslalo $3 \cdot 7$ listov; to je však nepárne číslo. Preto nie je možné zariadiť rozoslanie listov tak, aby každý žiak dostal práve tri listy od tých troch spolužiakov, ktorým sám písal.

3. Budte dány dve úsečky o veľkostiach p , q . Narýsujte rovnostranný trojuholník ABC o strane veľkosti p a označte O stred kružnice jemu opísanej. Na predĺžení úsečky AB za bod B určete bod X tak, aby platilo $BX = q$. Na predĺžení úsečky BC za bod C určete bod Y tak, aby platilo $CY = q$. Na predĺžení úsečky CA za bod A určete bod Z tak, aby platilo $AZ = q$.

a) Pak je trojuholník XYZ rovnostranný; dokažte.

b) Pak platí $OX = OY = OZ$ a kružnice $k \equiv (O, OX)$ prechádza všetkými tromi vrcholmi trojuholníka XYZ . Dokažte.

Řešení (obr. 52). a) O trojuholníku XYZ máme dokázat, že platí

$$XY = YZ = ZX.$$

Důkaz. Podle textu úlohy je trojuholník ABC rovnostranný, neboť platí

$$AB = BC = CA = p.$$

Podle konstrukce bodů X , Y , Z je

$$BX = CY = AZ = q. \quad (1)$$

Protože je

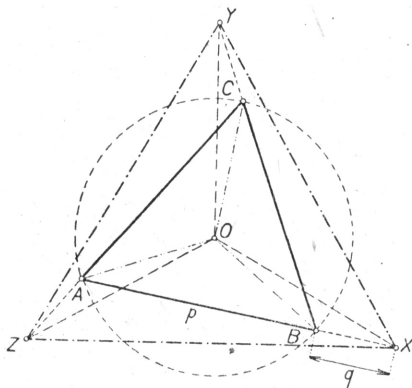
$$AX = AB + BX = p + q,$$

$$BY = BC + CY = p + q,$$

$$CZ = CA + AZ = p + q,$$

platí dále

$$AX = BY = CZ. \quad (2)$$



Obr. 52.

Dále platí $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 60^\circ$ (trojúhelník ABC je rovnostranný); proto platí $\sphericalangle XBY = 180^\circ - \sphericalangle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Podobně se dokáže, že $\sphericalangle YCZ = 120^\circ$, $\sphericalangle ZAX = 120^\circ$.

Trojúhelníky BYX , CZY se shodují podle věty sus, neboť podle (1) je

$$BX = CY,$$

podle (2) je

$$BY = CZ,$$

a dále je

$$\sphericalangle XBY = \sphericalangle YCZ = 120^\circ.$$

Je tedy skutečně

$$\triangle BYX \cong \triangle CZY \text{ (sus)}. \quad (3)$$

Stejně dokážeme, že platí

$$\triangle CZY \cong \triangle AXZ. \quad (4)$$

Ve shodných trojúhelnících jsou příslušné strany shodné. Podle vztahu (3) tedy je

$$XY = YZ$$

a podle vztahu (4) je

$$YZ = ZX.$$

Z obou těchto vztahů dostaneme

$$XY = YZ = ZX,$$

což jsme měli dokázat.

b) Je známa věta: „Každému trojúhelníku se dá opsat jen jedna kružnice.“

Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC . Tu platí

$$OA = OB = OC. \quad (5)$$

Podle textu úlohy máme dokázat, že platí

$$OX = OY = OZ.$$

Důkaz. Úsečka OX je strana trojúhelníka OBX , ve kterém je

$$\sphericalangle OBX = \sphericalangle OBC + \sphericalangle CBX = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ.$$

Úsečka OY je strana trojúhelníka OCY , ve kterém je rovněž

$\sphericalangle OCY = 150^\circ$ (to se dokáže stejně jako v předchozím případě).

O trojúhelnících OBX , OCY platí

$$\triangle OBX \cong \triangle OCY \text{ (sus)},$$

neboť se shodují v úhlech $\sphericalangle OBX = \sphericalangle OCY = 150^\circ$, dále je podle (5)

$$OB = OC$$

a podle (1) je

$$BX = CY.$$

V těchto shodných trojúhelnících si přísluší strany OX , OY , které jsou proto shodné; je tedy

$$OX = OY. \quad (6)$$

Stejně se dokáže, že platí

$$\triangle OCY \cong \triangle OAZ \text{ (sus);}$$

odtud plyne, že

$$OY = OZ. \quad (7)$$

Spojením vztahů (6), (7) dostaneme $OX = OY = OZ$, což jsme měli dokázat.

4. Narýsujte trojúhelník ABC . Konstrukcí určete uvnitř strany AC bod X a uvnitř strany BC bod Y tak, aby platilo

$$AX = XY, XY \parallel AB.$$

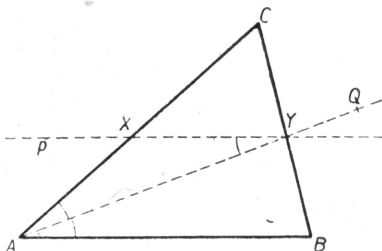
Dokažte správnost provedené konstrukce.

Řešení (obr. 53). I. Rozbor úlohy. Předpokládejme, že jsme našli takové body X , Y , že platí $AX = XY$, $XY \parallel AB$. Pak však je trojúhelník XAY rovnoramenný a strana AY je jeho základnou. Avšak úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné; proto je

$$\sphericalangle XAY = \sphericalangle AYX. \quad (1)$$

Protože dále je $XY \parallel AB$, jsou střídavé úhly $\sphericalangle AYX$, $\sphericalangle YAB$ shodné (viz učebnice M7, str. 284, věta 4'); platí tedy

$$\sphericalangle AYX = \sphericalangle YAB. \quad (2)$$



Obr. 53.

Spojením vztahů (1), (2) dostaneme $\sphericalangle XAY = \sphericalangle YAB$. Odtud plyne, že polopřímka AY je osou úhlu $\sphericalangle XAB$ neboli úhlu $\sphericalangle CAB$.

II. Konstrukce. Na základě tohoto výsledku provedeme konstrukci bodů X , Y takto:

1. Sestrojíme osu AQ úhlu $\sphericalangle CAB$ a označíme Y její průsečík se stranou BC .

2. Bodem Y sestrojíme přímku $p \parallel AB$; její průsečík se stranou AC označíme X .

XY je hledaná úsečka.

III. Důkaz správnosti konstrukce. Nyní máme dokázat, že body X , Y , které jsme právě sestrojili, skutečně splňují tyto dvě podmínky:

$$XY \parallel AB, \quad AX = XY.$$

První tvrzení je jistě správné, neboť tak jsme sestrojili přímku $p \equiv XY$.

Druhé tvrzení je rovněž správné, neboť je

$\sphericalangle XAY = \sphericalangle YAB$ (podle konstrukce je AQ osa úhlu $\sphericalangle CAB$) a dále

$\sphericalangle YAB = \sphericalangle XYA$ (střídavé úhly jsou si rovny, neboť je $AB \parallel XY$).

Z toho plyne, že $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XYA$, takže trojúhelník XAY je rovnoramenný (proti shodným úhlům v trojúhelníku leží shodné strany), t. j. platí $AX = XY$, což jsme měli dokázat.

Úloha má proto vždycky právě jedno řešení.

5. Daný je zlomok

$$\frac{-x}{a^2 + y^2},$$

kde a je dané číslo různé od nuly; čísla x, y volíme libovolně. Potom pre každú dvojicu čísel x, y

a) menovateľ daného zlomku je kladné číslo; dokážte to;

b) znamienko daného zlomku je opačné k znamienku čísla x , alebo sa číslo x aj daný zlomok súčasne rovnajú nule; dokážte to.

Riešenie. a) Pretože číslo a je rôzne od nuly, je číslo a^2 kladné. Číslo y sa buď rovná nule, buď je od nuly rôzne; preto je y^2 nezáporné číslo (t. j. nula alebo kladné číslo). Súčet $a^2 + y^2$ je súčtom kladného a nezáporného čísla, teda je to kladné číslo. Tým sme dokázali, že menovateľ daného zlomku je kladné číslo.

b) Pretože menovateľ daného zlomku je podľa predošlej úlohy a) kladné číslo, má daný zlomok zmysel (existuje).

Ak je $x = 0$, potom $-x = 0$ a zlomok sa rovná nule.

Ak je x kladné číslo, je $-x$ záporné číslo a teda aj zlomok je záporné číslo (podiel záporného a kladného čísla je záporné číslo).

Ak je x záporné číslo, je $-x$ a teda aj zlomok kladné číslo (podiel dvoch kladných čísel je kladné číslo).

Tým sme dokázali: Ak je $x = 0$, rovná sa daný zlomok nule. Ak je $x \neq 0$, má daný zlomok znamienko opačné k znamienku čísla x .

6. Budte a, b, c tri jakkoli zvolená čísla. Potom číslo

$$x = 4(a^2 + b^2 + c^2) - [(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2]$$

je číslo nezáporné; dokažte.

Dále udejte všechny trojice čísel a, b, c , pro které je číslo x rovno nule.

Řešení. Provedme výkony naznačené v daném výrazu; dostaneme postupně:

$$\begin{aligned} x &= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - [a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + 2bc + c^2 + \\ &\quad + c^2 + 2ca + a^2] = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 2a^2 - 2b^2 - 2c^2 - \\ &\quad - 2ab - 2bc - 2ca = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) = \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2. \end{aligned}$$

Je tedy

$$x = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2. \quad (1)$$

Jsou známy tyto věty: Druhá mocnina nuly je nula. Druhá mocnina čísla kladného nebo záporného je číslo kladné. Je-li součet několika nezáporných čísel roven nule, je každé z těchto čísel rovno nule.

Protože číslo x je podle výsledku (1) součtem druhých mocnin čísel $a - b, b - c, c - a$, je to číslo nula nebo číslo kladné, t. j. číslo nezáporné. To jsme měli dokázat.

Když zvolíme $a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$ neboli když zvolíme $a = b, b = c, c = a$, bude též $(a - b)^2 = 0, (b - c)^2 = 0, (c - a)^2 = 0$; pak bude též $x = 0$.

Obráceně, když je $x = 0$, pak o číslech a, b, c platí

$$a = b = c,$$

což ihned dokážeme.

Důkaz. Protože každé z čísel $(a - b)^2$, $(b - c)^2$, $(c - a)^2$ je číslo nezáporné, může být jejich součet roven nule jen tehdy, když každé z nich je rovno nule. Ale na př. ze vztahu $(a - b)^2 = 0$ plyne $(a - b) \cdot (a - b) = 0$, t. j. musí platit $a - b = 0$, takže je $a = b$. Z dalších dvou vztahů odvodíme podobně, že musí platit $b = c$, $c = a$ neboli musí platit $a = b = c$.

Výsledek. Všechny trojice čísel a , b , c , pro něž je $x = 0$, tedy dostaneme, když utvoříme všechny trojice sobě rovných čísel.

7. Narýsujte trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C . Na prodloužení strany AC za bod C určete bod B_1 tak, aby bylo $CB_1 = CB$. Na prodloužení strany BC za bod C určete bod A_1 tak, aby bylo $CA_1 = CA$. Bodem C sestrojte přímkou p kolmou k přímce A_1B_1 a označte D její patu.

a) Platí $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C$. Dokažte.

b) Přímka p protne přímku AB v bodě F , který leží uvnitř úsečky AB . Dokažte.

c) Bod F , který jste sestrojili, je středem úsečky AB . Dokažte.

d) Pomocí předchozích výsledků dokažte známou větu, že střed kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku pólí jeho přeponu.

Řešení. Užijeme označení bodů, přímek a úhlů, jak je uvedeno na obr. 54. Protože trojúhelník ABC je pravoúhlý (je $\sphericalangle C = 90^\circ$), platí

$$\alpha + \beta = 90^\circ. \quad (1)$$

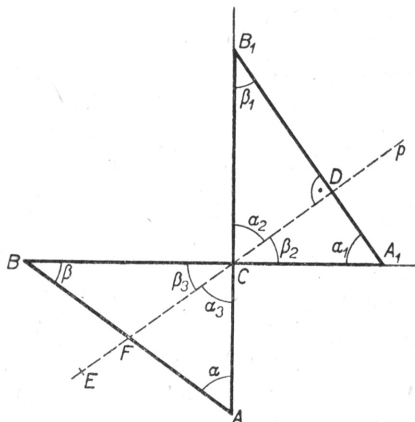
a) Máme dokázat, že platí $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C$.

Důkaz. Podle provedené konstrukce trojúhelníka A_1B_1C z daného trojúhelníka ABC platí $CA = CA_1$, $CB = CB_1$, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B_1CA_1$ (úhly vrcholové). Oba trojúhelníky se tedy shodují podle věty sus.

Ze shodnosti těchto trojúhelníků plyne (viz obr. 54)

$$\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1; \quad (2)$$

přitom je podle (1) každý z těchto úhlů ostrý.



Obr. 54.

b) Pata D kolmice p vedené bodem C k přímce A_1B_1 padne dovnitř úsečky A_1B_1 .

Důkaz. Protože α_1, β_1 jsou podle úlohy a) ostré úhly, padne bod D dovnitř ramen A_1B_1, B_1A_1 těchto úhlů (viz též učebnici M7, str. 267, příklad 17), t. j. dovnitř úsečky A_1B_1 , která je společnou částí těchto polopřímek.

Odtud plyne, že úhel α_2 leží uvnitř úhlu $\sphericalangle A_1CB_1$, a proto je ostrý; protože $\alpha_2 = \alpha_3$ (vrcholové úhly), padne úhel α_3 dovnitř úhlu $\sphericalangle ACB$. Proto má polopřímka CE (opačná k polopřímce CD) s úsečkou AB společný bod F , který leží uvnitř této úsečky (viz učebnici M7, str. 172, obr. 31).

c) Protože jsou trojúhelníky A_1CD, B_1CD pravoúhlé (právé úhly jsou při vrcholu D), platí

$$\alpha_2 = 90^\circ - \beta_1, \quad \beta_2 = 90^\circ - \alpha_1$$

a tedy vzhledem k (2), (1) je

$$\alpha_2 = 90^\circ - \beta = \alpha, \quad \beta_2 = 90^\circ - \alpha = \beta; \text{ je tedy } \alpha_2 = \alpha, \\ \beta_2 = \beta.$$

Protože však je $\alpha_2 = \alpha_3$, $\beta_2 = \beta_3$ (úhly vrcholové), dostaneme odtud $\alpha_3 = \alpha$, $\beta_3 = \beta$.

Odtud plyne:

[1] V trojúhelníku FAC je

$$\alpha_3 = \alpha,$$

a proto též

$$FC = FA. \quad (3)$$

[2] V trojúhelníku FBC je

$$\beta_3 = \beta,$$

a proto též

$$FB = FC. \quad (4)$$

Spojením vztahů (4), (3) dostaneme $FB = FA$, t. j. bod F je středem úsečky AB . To jsme měli dokázat.

d) Podle vztahů (3), (4) z úlohy c) dostaneme

$$FA = FB = FC,$$

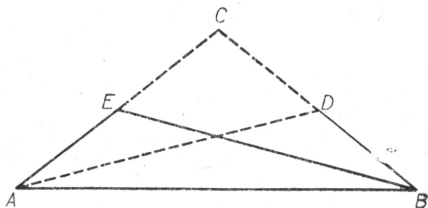
t. j. bod F má od každého z vrcholů trojúhelníka ABC touž vzdálenost. Bod F je proto středem kružnice tomuto trojúhelníku opsané.

Protože ABC byl libovolně zvolený trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C , platí výsledek právě odvozený pro každý pravoúhlý trojúhelník, t. j. platí: Střed F kružnice, opsané trojúhelníku pravoúhlému, je středem jeho přepony.

8. Rovnoramenný trojúhelník ABC so základňou AB má obvod 50 cm. Označte D střed strany BC a E střed strany AC .

Obvod trojuholníka ABE je o 8 cm väčší než obvod trojuholníka ACD .

Vypočítajte veľkosti strán trojuholníka ABC a postup výpočtu odôvodnite.



Obr. 55.

Riešenie (obr. 55). Označme $z = AB$ (základňa rovnoramenného trojuholníka ABC), $r = CA = CB$ (rameno). Predovšetkým platí

$$\triangle ABE \cong \triangle BAD \text{ (sus)},$$

lebo $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$ (trojuholník ABC je rovnoramenný), $AE = BD = \frac{1}{2}r$ a strana AB je spoločná pre oba trojuholníky. Môžeme preto vo svojich úvahách o veľkostiach strán trojuholníka ABE nahradiť trojuholníkom BAD .

Trojuholníky ADB , ADC sa zhodujú v spoločnej strane AD a ďalej v stranách BD , DC (lebo bod D je stredom úsečky BC). Keď teda od obvodu trojuholníka ABD odčítame obvod trojuholníka ADC , dostaneme

$$AB - AC = 8 \text{ alebo } z - r = 8.$$

Základňa z je teda o 8 väčšia než rameno r , t. j.

$$z = r + 8. \quad (1)$$

Ale obvod trojuholníka ABC je

$$z + 2r = 50.$$

V tomto súde môžeme podľa (1) nahradiť základňu z súčtom $r + 8$, čím dostaneme

$$3r + 8 = 50.$$

Trojnásobok ramena zväčšený o 8 sa teda rovná číslu 50; trojnásobok ramena je teda 42. Preto platí

$$3r = 42$$

a z toho

$$r = 14.$$

Na základe tohto výsledku teraz ľahko vypočítame podľa (1)

$$z = 14 + 8 = 22.$$

Teda je $AB = 22$, $CA = CB = 14$.

Skúška. Základňa je skutočne o 8 väčšia než rameno. Pretože sa trojuholníky ADB , ADC zhodujú v strane AD a v stranách $BD = DC$, líšia sa ich obvody práve o toľko, o koľko sa líšia strany AB , AC , t. j. o 8. Obvod trojuholníka ABC je teda $2 \cdot 14 + 22 = 50$, čo súhlasí s predpokladom úlohy.

9. Vzdálenosť Prahy a Brna po železniční trati je $s = 255$ km. Rychlík projede túto trať za dobu $t = 4\frac{3}{4}$ hod. Chceme-li, aby sa doba jazdy rychlíku zkrátila o $p = 10$ %, o koľko percent (označte q) sa musí zvýšiť priemerná rýchlosť c rychlíku?

Řešení. Když vlak ujede průměrnou rychlostí c km/hod dráhu s km, potřebuje k tomu doby

$$t = \frac{s}{c} \text{ (hodin).} \quad (1)$$

Když vlak ve druhém případě pojede průměrnou rychlostí c' km/hod, která je o q % vyšší než rychlost c , pak je

$$c' = c \left(1 + \frac{q}{100} \right) \text{ km/hod.}$$

Označme v tomto druhém případě jízdní dobu t' . O číslech s , c' , t' potom platí vztah

$$t' = \frac{s}{c'}$$

neboli

$$t' = s : \left[c \left(1 + \frac{q}{100} \right) \right].$$

Proveďme úpravu tohoto výsledku; postupně dostaneme

$$t' = s : \left[c \cdot \frac{100 + q}{100} \right] = s \cdot \frac{100}{c(100 + q)},$$

t. j.

$$t' = \frac{s}{c} \cdot \frac{100}{100 + q}. \quad (2)$$

Podle textu úlohy se zvýšením rychlosti na c' km/hod zmenší doba jízdy o p %, t. j. platí

$$t' = t \cdot \left(1 - \frac{p}{100} \right).$$

Tento výraz snadno upravíme, když členy v závorce uvedeme na téhož jmenovatele 100; dostaneme

$$t' = t \cdot \frac{100 - p}{100}.$$

Dosaďme do tohoto výsledku za t ze vztahu (1) a výraz, který tak dostaneme, porovnejme s pravou stranou výrazu (2); obdržíme rovnost

$$\frac{s}{c} \cdot \frac{100 - p}{100} = \frac{s}{c} \cdot \frac{100}{100 + q}.$$

Protože číslo t ve vztahu (1) je různé od nuly, můžeme poslední

rovnici znásobit číslem $\frac{c}{s}$, čímž obdržíme

$$\frac{100 - p}{100} = \frac{100}{100 + q}. \quad (3)$$

Podle textu úlohy je $p = 10$, takže po dosazení tohoto čísla do předchozí rovnice dostaneme po snadné úpravě

$$\frac{9}{10} = \frac{100}{100 + q}.$$

Obě strany této rovnice znásobíme číslem $10 \cdot (100 + q)$, čímž dostaneme

$$9 \cdot (100 + q) = 1000.$$

Odtud postupně obdržíme

$$9q = 1000 - 900,$$

$$9q = 100,$$

$$q = \frac{100}{9},$$

$$q = 11 \frac{1}{9}.$$

Odpověď. Chceme-li, aby se jízdní doba rychlíku zkrátila o 10 %, musí se průměrná rychlost rychlíku zvýšit o $11 \frac{1}{9} \%$.

Jiné řešení. Doba jízdy t se má zkrátit o $p = 10 \%$, tedy na 90 %, t. j. v poměru 90 : 100 neboli 9 : 10. Jestliže se doba t zmenší v poměru 9 : 10, musí se rychlost c zvětšit v poměru převráceném 10 : 9. Původní rychlost c je 100 %, nová rychlost je $100 \cdot \frac{10}{9} = \frac{1000}{9} = 111 \frac{1}{9}$. Zvýšila se tedy o $q = 11 \frac{1}{9} \%$.

Řešení zaslal s. J. Adámek,
předseda OVMO v Praze 12.

10. Budte a, b, c čísla, která nejsou všechna současně rovna nule; přitom o nich platí vztah

$$ab + bc + ca = 0. \quad (1)$$

Potom výraz

$$\frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (2)$$

má pro všechna taková čísla a, b, c touž hodnotu. Dokažte správnost tohoto tvrzení a vypočtete hodnotu daného výrazu.

Řešení. Alespoň jedno z čísel a, b, c je různé od nuly (předpoklad úlohy). Proto je alespoň jedno z čísel a^2, b^2, c^2 kladné, při čemž některá z nich mohou být rovna nule, ale žádné není záporné; jsou to tedy nezáporná čísla. Proto je součet těchto čísel kladný. To znamená, že číslo

$$a^2 + b^2 + c^2$$

je různé od nuly a zlomek (2) má pro všechna přípustná čísla a, b, c význam (t. j. existuje).

Upravme nyní čitatele Q zlomku (2); platí postupně

$$Q = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca).$$

Ale výraz v poslední závorce je podle předpokladu (1) roven nule, takže $Q = a^2 + b^2 + c^2$, což je číslo rovné jmenovateli daného zlomku (2).

Zlomek (2) má tedy tvar $\frac{Q}{Q}$ neboli je roven číslu 1; pro každou přípustnou trojici čísel a, b, c má tedy touž hodnotu. To jsme měli dokázat.

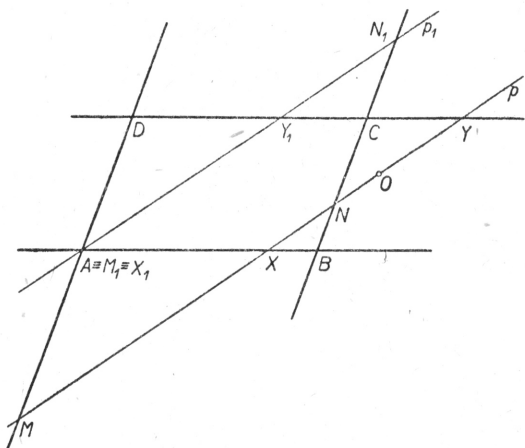
11. Buď dán rovnoběžník $ABCD$ a libovolný bod O . Bodem O sestrojte přímku p , která má tuto vlastnost:

Přímka p protne rovnoběžky AB, DC v bodech X, Y a rovnoběžky AD, BC v bodech M, N tak, že platí $XY = MN$.

Dokažte správnost nalezené konstrukce a rozhodněte, kolik má úloha řešení.

Řešení. Při řešení této úlohy uijeme této známé věty (označme ji **V**): Buďte a, b dvě různé rovnoběžky. Protněme je přímkou u v bodech U_1, U_2 . Potom každá přímka $v \parallel u$ protíná přímky, a, b v bodech V_1, V_2 a platí $U_1U_2 = V_1V_2$.

Důkaz věty. Jsou-li u, v různé rovnoběžky, je čtyřúhelník $U_1U_2V_2V_1$ rovnoběžník a věta je proto správná. Jsou-li u, v splývající přímky, potom je $U_1 \equiv V_1, U_2 \equiv V_2$; pak je věta samozřejmě platná.



Obr. 56a.

I. Provedme nejprve rozbor úlohy. Předpokládejme, že existuje přímka p , která má vlastnosti požadované v úloze (viz obr. 56a, b). Označme po řadě X, Y, M, N průsečíky přímky p s přímkami AB, CD, AD, BC . Rozlišujeme dvě možnosti:

[1] Polopřímky XY , MN mají též smysl (obr. 56a).

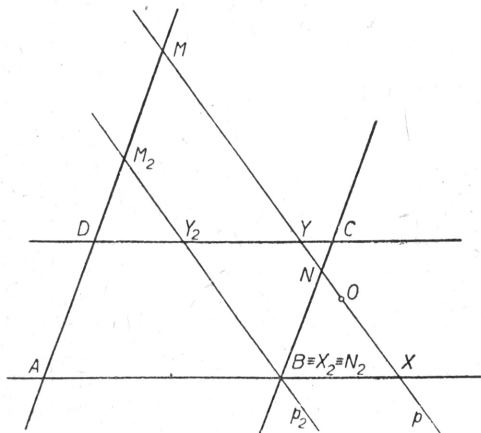
[2] Polopřímky XY , MN nemají též smysl (obr. 56b).

Případ [1] (obr. 56a). Vedme bodem A přímku $p_1 \parallel p$ a označme po řadě N_1 , Y_1 její průsečíky s přímkami BC , CD . Potom podle věty V postupně platí

$$AN_1 = MN = XY = AY_1$$

neboli

$$AN_1 = AY_1. \quad (1)$$



Obr. 56b.

Přitom polopřímky AN_1 , AY_1 , které mají společný počátek A , splývají. Proto ze vztahu (1) plyne, že i oba body N_1 , Y_1 splývají; protože N_1 leží na přímce BC , Y_1 leží na přímce CD , splývají body N_1 , Y_1 s bodem C . Odtud plyne, že přímka p_1 splývá s přímkou AC , t. j. platí $p_1 \equiv AC$.

Případ [2] (obr. 56b). Vedme bodem B přímku $p_2 \parallel p$

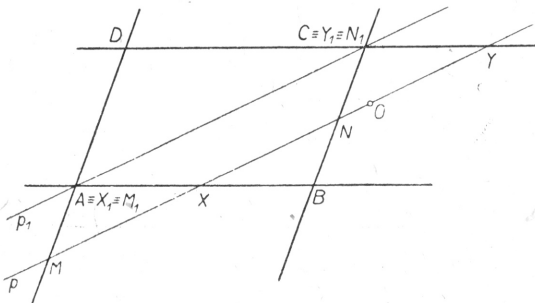
a označme po řadě M_2 , Y_2 její průsečíky s přímkami AD , CD . Potom podle věty V postupně platí

$$BM_2 = NM = XY = BY_2$$

neboli

$$BM_2 = BY_2.$$

Přitom polopřímky BM_2 , BY_2 , které mají společný počátek B , splývají; protože bod M_2 leží na přímce AD a bod Y_2 na přímce CD , splývají body M_2 , Y_2 s bodem D . Odtud plyne, že přímka p_2 splývá s přímkou BD , t. j. platí $p_2 \equiv BD$.



Obr. 57a.

II. Z výsledku rozboru plyne, že hledaná přímka p musí být rovnoběžná právě s jednou z přímek AC , BD . Podle toho provedeme konstrukci:

Případ [1]. Bodem O vedme přímku $p \parallel AC$ (obr. 57a) a zavedme označení jako v obrázku. Podle věty V platí

$$XY = AC, AC = MN$$

a tedy též

$$XY = MN,$$

takže přímka p je jednou z přímek, které vyhovují podmínkám úlohy a požadavkům úlohy.

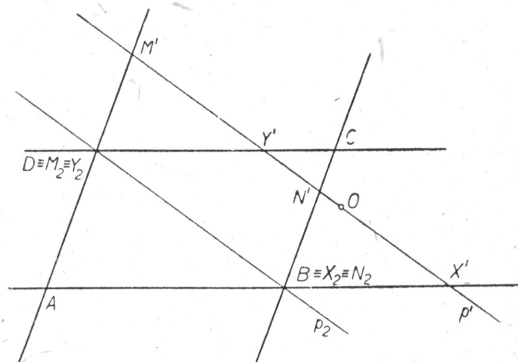
Případ [2]. Bodem O vedme přímku $p' \parallel BD$ (obr. 57b) a zavedme označení jako v obrázku. Podle věty V platí

$$X'Y' = BD, \quad BD = M'N'$$

a tedy též

$$X'Y' = M'N',$$

takže přímka p' je jednou z přímek, které vyhovují podmínkám a požadavkům úlohy.



Obr. 57b.

Závěr. Podle rozboru musí být hledaná přímka rovnoběžná právě s jednou z přímek AC , BD . Avšak daným bodem O lze sestavit právě jednu přímku $p \parallel AC$ a právě jednu přímku $p' \parallel BD$, což jsme právě provedli; proto má daná úloha vždycky právě dvě (různá) řešení (viz obě konstrukce v obr. 57a, b).

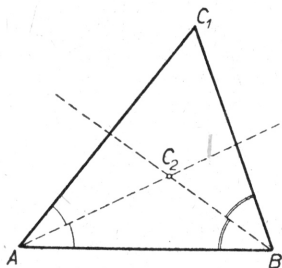
12. V trojúhelníku ABC_1 označme úhly

$$\sphericalangle C_1AB = \alpha, \quad \sphericalangle ABC_1 = \beta, \quad \sphericalangle BC_1A = \gamma.$$

Uvnitř trojúhelníka ABC_1 leží bod C_n takový, že platí

$$\sphericalangle C_n AB = \frac{1}{n} \alpha, \quad \sphericalangle ABC_n = \frac{1}{n} \beta;$$

přitom je n dané přirozené číslo větší než číslo 1.



Obr. 58.

Vyjádřete velikost úhlu $\sphericalangle AC_n B$ pomocí velikosti úhlu γ .

Řešení (obr. 58). O úhlech trojúhelníka ABC_1 platí $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ neboli

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma. \quad (1)$$

Označme $\sphericalangle AC_n B = \gamma_n$. O úhlech trojúhelníka ABC_n platí

$$\sphericalangle AC_n B = 180^\circ - \sphericalangle BAC_n - \sphericalangle ABC_n$$

neboli

$$\gamma_n = 180^\circ - \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n},$$

t. j.

$$\gamma_n = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{n}.$$

Dosaďme do tohoto výsledku ze vztahu (1) za $\alpha + \beta$; dostaneme

$$\gamma_n = 180^\circ - \frac{180^\circ - \gamma}{n}$$

neboli

$$\gamma_n = 180^\circ - \frac{180^\circ}{n} + \frac{\gamma}{n}.$$

Po vytknutí čísla 180 z prvních dvou členů pravé strany poslední rovnosti obdržíme konečně

$$\gamma_n = 180^\circ \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{\gamma}{n}.$$

Skutečně se nám podařilo vyjádřit velikost úhlu γ_n pomocí velikosti úhlu γ a čísla n .

13. a) Ak m je prirodzené číslo, platí

$$\frac{1}{5} < \frac{1+m}{5+m}; \quad \frac{1+m}{5+m} < 1;$$

dokážte to.

b) Vypočítajte hodnoty výrazu

$$\frac{1+m}{5+m}$$

pre $m = 100, 200, 300$ a označte ich po rade z_1, z_2, z_3 .

Určte rozdiely $z_2 - z_1, z_3 - z_2$ a rozhodnite, ktorý z nich je väčší.

Riešenie. a) Správnosť prvej nerovnosti dokážeme, keď dokážeme, že rozdiel

$$r = \frac{1+m}{5+m} - \frac{1}{5}$$

je kladné číslo pre každé prirodzené číslo m , ktoré do tohto výrazu dosadíme.

Dôkaz. Postupne platí

$$r = \frac{5(1+m) - (5+m)}{(5+m) \cdot 5} = \frac{4m}{5 \cdot (5+m)}.$$

Všimnime si teraz posledný zlomok. Čitateľ $4m$ je prirodzené číslo; aj menovateľ $5(5 + m)$ je prirodzené číslo. Preto je zlomok kladné číslo a tým aj rozdiel r je kladné číslo. Tým sme dokázali správnosť prvej nerovnosti.

Správnosť druhej nerovnosti dokážeme, keď dokážeme, že rozdiel

$$r' = 1 - \frac{1 + m}{5 + m}$$

je kladné číslo pre každé prirodzené číslo m .

Dôkaz. Postupne platí

$$r' = \frac{5 + m - (1 + m)}{5 + m} = \frac{4}{5 + m}.$$

Všimnime si posledný zlomok. Čísla 4, $5 + m$ sú prirodzené čísla; preto je číslo r' kladné číslo, čo sme mali dokázať.

Tým sme rozriešili úlohu a).

b) Tu platí

$$z_1 = \frac{101}{105}, \quad z_2 = \frac{201}{205}, \quad z_3 = \frac{301}{305}.$$

Ďalej je

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= \frac{201}{205} - \frac{101}{105} = \frac{201 \cdot 105 - 205 \cdot 101}{205 \cdot 105} = \\ &= \frac{21\,105 - 20\,705}{205 \cdot 105} = \frac{400}{205 \cdot 105}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} z_3 - z_2 &= \frac{301}{305} - \frac{201}{205} = \frac{301 \cdot 205 - 201 \cdot 305}{305 \cdot 205} = \\ &= \frac{61\,705 - 61\,305}{305 \cdot 205} = \frac{400}{305 \cdot 205}. \end{aligned} \quad (2)$$

Menovateľ zlomku (1) je $205 \cdot 105$, kdežto menovateľ zlomku (2) je $305 \cdot 205$. Tu $305 \cdot 205 - 205 \cdot 105 = 205(305 - 105) = 205 \cdot 200$, čo je prirodzené číslo. Preto má zlomok (1) menšieho menovateľa než zlomok (2). Je teda prvý zlomok väčší než druhý, a preto platí

$$z_2 - z_1 > z_3 - z_2.$$

Odpoveď. Prvý z rozdielov je väčší než druhý.

14. Daný je výraz

$$4x^4y^2 + 1 - x^2 \cdot (4y^2 + 1).$$

Dokážte: Ak dosadíme do tohto výrazu za x, y ľubovoľnú dvojicu čísel, o ktorých platí $x > 1, y > 1$, je hodnota daného výrazu vždy kladné číslo.

Riešenie. Označme daný výraz Q a upravme ho postupne takto:

$$\begin{aligned} Q &= 4x^4y^2 + 1 - x^2(4y^2 + 1) = (4x^4y^2 - 4x^2y^2) - (x^2 - 1) = \\ &= 4x^2y^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(4x^2y^2 - 1) = \\ &= (x + 1)(x - 1)(2xy + 1)(2xy - 1). \end{aligned}$$

Daný výraz Q sa teda rovná výrazu

$$Q = (x + 1)(x - 1)(2xy + 1)(2xy - 1). \quad (1)$$

Avšak podľa predpokladu je $x > 1, y > 1$; preto vo výraze (1) je

[1] prvý činiteľ kladné číslo,

[2] druhý činiteľ kladné číslo,

[3] tretí činiteľ kladné číslo,

[4] štvrtý činiteľ kladné číslo, ako ihneď dokážeme. Súčin xy je číslo väčšie než 1 (súčin dvoch čísel väčších než 1 je väčší než 1); preto je $2xy$ číslo väčšie než 2 a teda číslo $2xy - 1$ je väčšie než 1, teda kladné číslo.

Všetky štyri činitele výrazu (1) sú teda kladné čísla; ale súčin samých kladných čísel je kladné číslo. Teda číslo Q je kladné, čo sme mali dokázať.

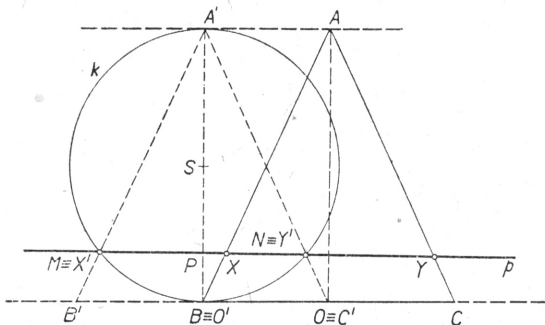
15. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC . Ďalej je v polrovine BCA daná kružnica k , ktorá sa dotýka v bode B priamky BC a ktorej priemer sa rovná vzdialenosti bodu A od priamky BC .

Zostrojte takú sečnicu p kružnice k , ktorá má tieto vlastnosti:

(1) Je $p \parallel BC$.

(2) Sečnica p pretína kružnicu k v bodoch M, N a strany AB, AC trojuholníka v bodoch X, Y ; pritom platí $MN = XY$.

Dokážte, že taká priamka p je práve jedna.



Obr. 59.

Riešenie (obr. 59). I. Rozbor. Predpokladajme, že sme danú úlohu rozriešili, t. j. že sa nám podarilo zostrojiť priamku p , ktorá spĺňa požiadavky vyslovené v texte úlohy (pozri obr. 59).

Označme O stred úsečky BC , takže OA je os súmernosti rovnoramenného trojuholníka ABC (je teda $OA \perp BC$, $OB = OC$). Ďalej označme S stred danej kružnice k , ktorej polomer je $r = \frac{1}{2}OA$. Bod S leží vnútri polroviny BCA . Označenie bodov M, N voľme tak, aby bod N padol dovnútra polroviny BSC .

Premiestme teraz trojuholník ABC do novej polohy $A'B'C'$ (novú polohu bodu O označme O') takto:

[1] Bod O' splýva s bodom B .

[2] Úsečka $O'C'$ splýva s úsečkou BO , t. j. bod C' splýva s bodom O . (To je možné, lebo platí $BO = OC$.)

[3] Bod A' padne dovnútra polroviny BCS alebo BCA .

Pretože priamka BC je dotyčnicou kružnice k v bode B , je $BS \perp BC$ a bod A' leží na polpriamke BS a ďalej na kružnici k , takže BA' je priemerom kružnice k .

Označme X', Y' nové polohy bodov X, Y . Pretože bod X má od priamky BC vzdialenosť d , ktorá sa rovná vzdialenosti priamok $BC \parallel p$, má aj bod X' od priamky BC vzdialenosť d . Avšak pretože bod X' leží v tej istej polrovine BCA ako priamka p , padne bod X' na priamku p . Rovnako sa dokáže, že bod Y' padne na priamku p . Pritom platí $X'Y' = XY$ (premiestenie), $XY = MN$ (podľa predpokladu, že priamka p je riešením); teda je $X'Y' = MN$. Ale priamka BS je zrejme osou súmernosti ako kružnice k , tak aj trojuholníka $A'B'C'$ a priamky p . Preto sú body M, N súmerne združené podľa priamky BS a to isté platí aj pre body X', Y' . Označme P priesečník priamok BS, p ; platí teda $PM = PN = \frac{1}{2} \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot X'Y' = PX' = PY'$. Teda $PM = PX', PN = PY'$; pretože body M, X' ležia na tejže polpriamke PM (ktorá je časťou priamky p), nevyhnutne navzájom splývajú, t. j. $M \equiv X'$. Rovnako sa dokáže, že splývajú aj body N, Y' , alebo že platí $N \equiv Y'$.

Ak má teda úloha riešenie, je bod $M \equiv X'$ spoločným bodom kružnice k a úsečky $A'B'$; bod $N \equiv Y'$ je potom spoločným bodom kružnice k a úsečky $A'C'$. Na základe tohto rozboru úlohy urobíme teraz konštrukciu.

II. Konštrukcia. Premiestime trojuholník ABC do novej polohy tak, ako je to popísané v predošlom odstavci I. Označme $M \neq A'$ priesečník priamky $A'B'$ s kružnicou k a $N \neq A'$ priesečník priamky $A'C'$ s tou istou kružnicou k . Potom

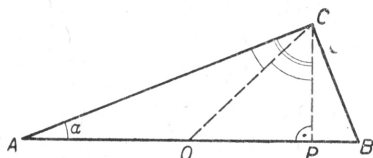
MN je hľadaná priamka $p \parallel BC$, ktorá má s úsečkou AB spoločný bod X a s úsečkou AC spoločný bod Y . Táto konštrukcia je zrejme správna.

III. Diskusia. Priamka AA' je dotyčnicou kružnice k v bode A' ; každá iná priamka prechádzajúca bodom A' je sečnicou kružnice k . Teda priamka $A'B'$ je sečnicou kružnice k (priamky $A'B'$, AA' sú iste navzájom rozdielne). Preto na priamke $A'B'$ okrem bodu A' leží ešte druhý priesečník s kružnicou k ; je to zrejme hľadaný bod $M \neq A'$. Tým sme dokázali, že úloha má vždy práve jedno riešenie.

16. Buď dán pravoúhlý trojuholník ABC o přeponě AB , ve kterém platí $BC < AC$. Označte P patu kolmice vedené bodem C k přímce AB ; dále označte O střed úsečky AB a $\sphericalangle CAB = \alpha$.

a) Body na přímce AB leží v pořádku A, O, P, B ; dokažte.

b) Vyjádřete velikost úhlu $\sphericalangle OCP$ pomocí velikosti úhlu α .



Obr. 60.

Řešení. a) Protože oba úhly $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ jsou ostré, padne pata P kolmice, vedené bodem C k přímce AB , dovnitř úsečky AB (obr. 60).

Protože je $BC < AC$, platí o příslušných protějších úhlech k těmto stranám trojúhelníka ABC , že

$$\alpha < \sphericalangle ABC. \quad (1)$$

Přitom platí (ostré úhly v pravoúhlém trojúhelníku ABC)

$$\sphericalangle ABC = 90^\circ - \alpha. \quad (2)$$

Z trojúhelníka ACP , v němž je při vrcholu P pravý úhel, vypočteme velikost úhlu $\sphericalangle ACP$; platí

$$\sphericalangle ACP = 90^\circ - \alpha. \quad (3)$$

Porovnáme-li tento výsledek se vztahem (2), vidíme, že platí

$$\sphericalangle ACP = \sphericalangle ABC;$$

podle vztahu (1) odtud plyne, že

$$\alpha < \sphericalangle ACP. \quad (4)$$

Je známo, že střed O přepony AB pravoúhlého trojúhelníka ABC je středem kružnice tomuto trojúhelníku opsané; proto je $OB = OA = OC$. Z toho plyne, že trojúhelník OAC je rovnostranný (se základnou AC). Proto úhly při jeho základně AC jsou shodné; platí tedy

$$\sphericalangle ACO = \alpha. \quad (5)$$

Dosadíme-li odtud do vztahu (4), dostaneme

$$\sphericalangle ACO < \sphericalangle ACP.$$

Protože však oba tyto úhly se společným ramenem AC leží v téže polorovině vytáté přímkou AC , padne polopřímka CO (až na svůj počátek C) dovnitř úhlu $\sphericalangle ACP$. Z toho plyne, že body na úsečce AB leží v pořádku A, O, P, B . To jsme měli dokázat.

b) Z předchozího odstavce a) plyne, že

$$\sphericalangle OCP = \sphericalangle ACP - \sphericalangle ACO.$$

Dosadíme sem ze vztahů (3), (5) za úhly $\sphericalangle ACP$, $\sphericalangle ACO$; dostaneme

$$\sphericalangle OCP = 90^\circ - \alpha - \alpha$$

neboli

$$\sphericalangle OCP = 90^\circ - 2\alpha.$$

Tím jsme vypočítali velikost úhlu $\sphericalangle OCP$ pomocí velikosti úhlu α , což bylo naším úkolem.

9. Úlohy II. kola kategorie D.

1. Obdélník $ABCD$ má rozměry $AB = 6\frac{3}{5}$ cm, $BC = 4\frac{2}{3}$ cm; označte F střed strany AB . Výpočtem řešte úlohu:

Na polopřímce BC určete bod X takový, aby obsah trojúhelníka AFX byl roven $\frac{5}{8}$ obsahu obdélníka $ABCD$. (Vypočtete velikost x úsečky BX .)

Řešení (obr. 61). Obsah P obdélníka $ABCD$ je (v cm^2)

$$P = 6\frac{3}{5} \cdot 4\frac{2}{3}.$$

$\frac{5}{8}$ obsahu P je

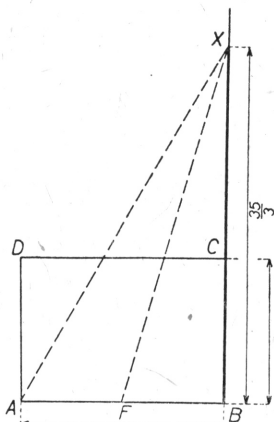
$$6\frac{3}{5} \cdot 4\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}. \quad (1)$$

Trojúhelník AFX má stranu

$$AF = 6\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \quad (2)$$

a velikost příslušné výšky v centimetrech označíme x ; obsah tohoto trojúhelníka je (v cm^2)

$$\frac{1}{2} \cdot AF \cdot x.$$



Obr. 61.

Dosaďme sem za AF ze vztahu (2); dostaneme

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot x.$$

Toto číslo má být rovno číslu (1); tím dostaneme rovnici

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot x = \frac{5}{8} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot 4 \frac{2}{3}.$$

Znásobme tuto rovnici číslem převráceným k číslu $\frac{1}{2} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$; pak se na pravé straně zkrátí $6 \frac{3}{5}$ a dostaneme

$$x = \frac{5}{8} \cdot 4 \frac{2}{3} \cdot 4;$$

odtud postupně dostáváme

$$x = \frac{5}{2} \cdot \frac{14}{3},$$

$$x = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{3},$$

$$x = \frac{35}{3},$$

$$x = 11 \frac{2}{3}.$$

Velikost úsečky BX je $11 \frac{2}{3}$ cm.

Zkouška. Obsah T trojúhelníka AFX je (v cm^2)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 11 \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 33 \cdot 1 \cdot 35}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} = \\ &= \frac{1 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 7}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{77}{4}. \end{aligned}$$

Obsah P obdĺníka $ABCD$ je (v cm^2)

$$P = 6 \frac{3}{5} \cdot 4 \frac{2}{3} = \frac{33 \cdot 14}{5 \cdot 3} = \frac{11 \cdot 14}{5}.$$

$\frac{5}{8}$ obsahu P je

$$\frac{11 \cdot 14}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{11 \cdot 7}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{77}{4},$$

čož je rovno číslu T .

2. Číslovanie stránok učebnice matematiky pre 6. ročník sa začína číslom 5 a končí sa číslom 272. Podobne v učebnici pre 7. ročník sa začína číslovanie stránok číslom 3 a končí sa číslom 320; v učebnici pre 8. ročník začína sa číslovanie číslom 3 a končí sa číslom 255.

Kolko cifier by sme museli napísať, keby sme chceli znova všetky uvedené strany rovnakým spôsobom očíslovať vo všetkých troch učebniciach?

Riešenie. V učebnici M6 je očíslované číslom:

a) jednociferným	5 strán, k čomu treba	5 cifier,
b) dvojciferným	90 „ „ „ „	180 „ „
c) trojciferným	173 „ „ „ „	519 „ „

V učebnici M7 je očíslované číslom:

a) jednociferným	7 strán, k čomu treba	7 cifier,
b) dvojciferným	90 „ „ „ „	180 „ „
c) trojciferným	221 „ „ „ „	663 „ „

V učebnici M8 je očíslované číslom:

a) jednociferným	7 strán, k čomu treba	7 cifier,
b) dvojciferným	90 „ „ „ „	180 „ „
c) trojciferným	156 „ „ „ „	468 „ „

To je celkom 2209 cifier.

Na očíslovanie uvedených strán v spomínaných troch učebniciach treba 2209 cifier.

Dokážte, že úloha má riešenie len vtedy, keď je úsečka SP kratšia než polovica prepony AB .


$$\sphericalangle BCP + \sphericalangle CPS = 180^\circ \quad (1)$$
 $\angle CPS = 90^\circ.$

Konštrukcia. Zostrojíme úsečku $SP = 31$ mm. V bode P zostrojíme kolmicu p k priamke SP a zvolíme jednu z oboch opačných polpriamok, na ktoré rozdeľuje bod P priamku p ; označíme ju PQ . Na polpriamke PQ bude ležať bod A . Zostrojíme ho takto: okolo bodu S opíšeme kružnicu k s polomerom

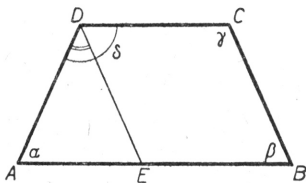
$\frac{1}{2}AB$. Spoločný bod polpriamky PQ a kružnice k je hľadaný bod A .

Bod B leží na polpriamke opačnej k polpriamke SA ; zostrojíme ho tak, že na túto polpriamku nanesieme úsečku $SB = SA$. Bod C leží na polpriamke opačnej k polpriamke PA ; zostrojíme ho tak, že na túto polpriamku nanesieme úsečku $PC = PA$.

Dôkaz správnosti konštrukcie. Podľa urobenej konštrukcie je trojuholník ASP pravouhlý ($\sphericalangle P = 90^\circ$). Ďalej je podľa našej konštrukcie SP strednou priečkou trojuholníka ABC , a preto je $BC \parallel SP$. Stade ľahko dokážeme (podobne ako v rozборе), že uhol $\sphericalangle BCA = 90^\circ$. Preto trojuholník ABC má všetky vlastnosti, ktoré požaduje úloha.

Diskusia. Úloha má riešenie, keď kružnica k a priamka p majú spoločný bod rozdielny od bodu P , t. j. keď priamka p má s kružnicou k dva rôzne spoločné body A, A' (platí $PA = PA'$). To nastane vtedy, keď je $SP < \frac{1}{2} \cdot AB$, čo je v danej úlohe splnené. Potom má úloha dve rôzne riešenia. Oba trojuholníky $ABC, A'B'C'$ sú navzájom súmerne združené podľa priamky SP .

4. Načrtněte libovolný lichoběžník $ABCD$ o základnách $AB \parallel CD$ tak, aby základna AB byla větší než základna CD .



Obr. 63.

Dokažte, že součet úhlů lichoběžníka při základně CD je větší než součet úhlů při základně AB .

Řešení (obr. 63). Označme po řadě $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ úhly lichoběžníka $ABCD$ při jeho vrcholech A, B, C, D . Především platí

$$(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 360^\circ \quad (1)$$

(součet úhlů čtyřúhelníka).

Na polopřímku BA nanese se úsečku CD ; dostaneme úsečku $BE = CD$ (bod E leží uvnitř úsečky AB , neboť je $AB > CD$ a tedy též $AB > BE$). Čtyrúhelník $EBCD$ je rovnoběžník, neboť je $EB = DC$, $EB \parallel DC$, a proto je

$$\sphericalangle EDC + \gamma = 180^\circ \text{ (úhly přilehlé).} \quad (2)$$

Protože polopřímka DE dělí úhel δ ve dva úhly styčné, je

$$\sphericalangle EDC < \delta.$$

Proto když ve vztahu (2) nahradíme úhel $\sphericalangle EDC$ úhlem δ , dostaneme

$$\delta + \gamma > 180^\circ. \quad (3)$$

Ze vztahu (1) a z výsledku (3) snadno usoudíme, že

$$\alpha + \beta < 180^\circ.$$

Je tedy skutečně

$$\alpha + \beta < \gamma + \delta,$$

což jsme měli dokázat.



I. K PRŮBĚHU IV. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIADY	3
II. ZPRÁVA O VÝSLEDKÁCH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE	
A. Soutěž I. kola	15
B. Soutěž II. kola	17
C. Soutěž III. kola kategorie A	24
III. ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE	
1. Úlohy I. kola kategorie A	27
2. Úlohy II. kola kategorie A	69
3. Úlohy III. kola kategorie A	79
4. Úlohy I. kola kategorie B	92
5. Úlohy II. kola kategorie B	131
6. Úlohy I. kola kategorie C	138
7. Úlohy II. kola kategorie C	169
8. Úlohy I. kola kategorie D	176
9. Úlohy II. kola kategorie D	204

Za přispění spolupracovníků zpracoval Rudolf Zelinka

ČTVRTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIADY

Obálku navrhl Karel Uhlík

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství n. p. v Praze
jako svou publikaci č. 65-0-01

Edice Pomocné knihy všeobecně vzdělávacích škol

Odpovědná redaktorka: Květoslava Šnejdárková

Technický redaktor: Stanislav Šimůnek

Z nové sazby písmem Plantin vytiskly Pražské tiskárny, n. p., provozovna 03, Praha

Formát papíru 70 × 100 cm

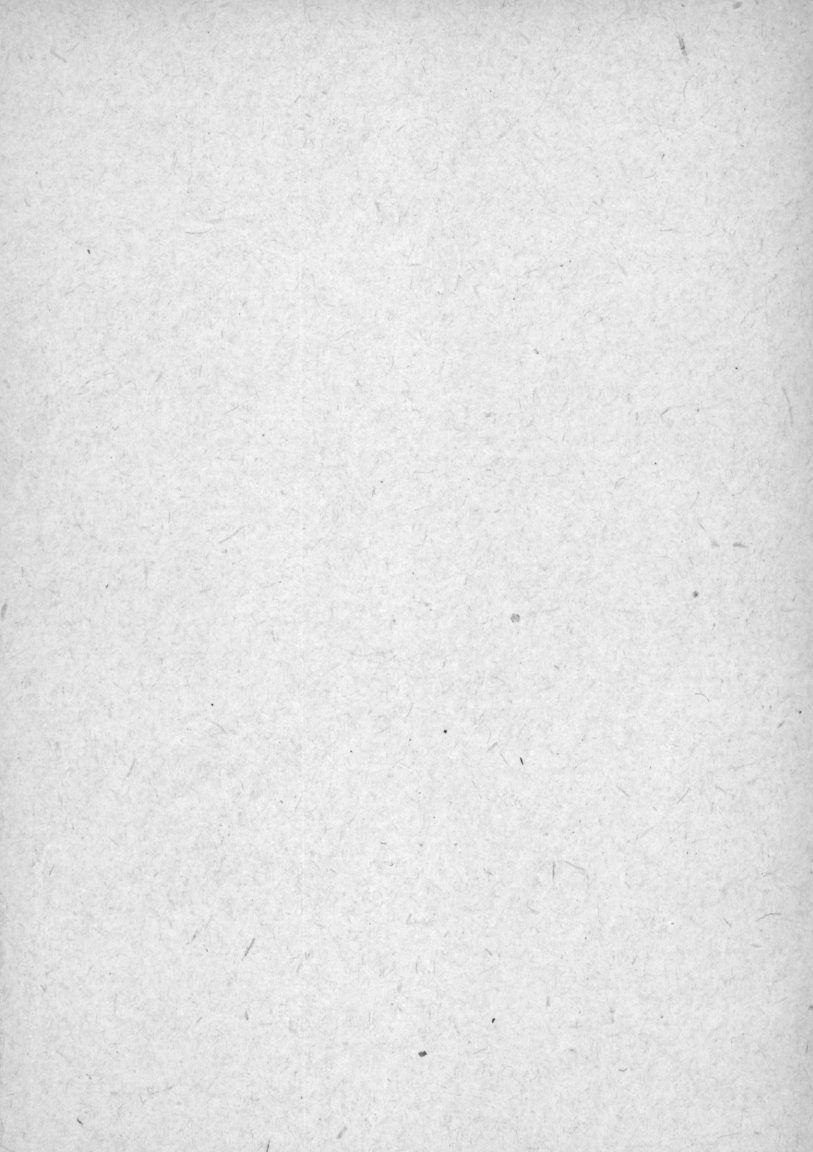
PAP 3,58 — AA 8,54 — VA 8,77 — HSV č.j. 19 529/56/SV 3 — D - 04 359

Thematická skupina a podskupina 02-57

Vydání 1.

Cena brož. výtisku Kčs  5,52

56/II-13





65-0-01 — 16/1

Cena brož. výtisku Kčs ~~1128~~ 5,52
56/II-13