

25. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Petr Fabinger (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 25. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1975-1976. 18. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404667>

Terms of use:

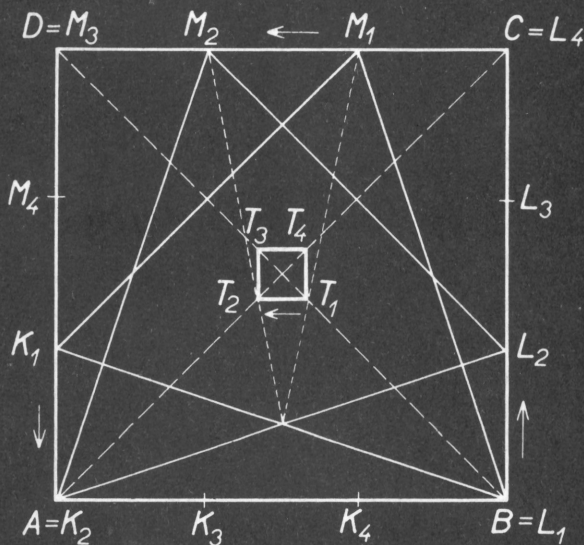
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
 115 67 Praha 1, Žitná 25
 telefon 22 66 01 - 3

XXV. ročník matematické olympiády



SPN

DVACÁTÝ PÁTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva a řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1975–1976*

OSMNÁCTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
115 67 Praha 1, Žitná 25
telefon 22 66 01 - 3

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Petr Fabinger, dr. Jiří Mída, doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.
a dr. František Zítek, CSc.

Slovenské části textu přeložil doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.

Recenzovali dr. Jitka Kučerová a dr. Miroslav Šisler, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1979

Předmluva

Milí řešitelé a spolupracovníci matematické olympiády,

ročenka, kterou dostáváte do ruky, je v podstatě dokumentem o průběhu jubilejního XXV. ročníku MO, jenž proběhl ve školním roce 1975/76. Při příležitosti tohoto jubilea naši celostátní matematické soutěže byla o ní napsána řada článků v odborných i populárních časopisech, proběhlo slavnostní závěrečné kolo v Bratislavě a ve vydavatelství Mladá fronta vyšla jubilejní brožura nazvaná *Dvacet pět let matematické olympiády v Československu*; v ní je mimo jiné i stručná kronika soutěže za uplynulých 25 let. Mezi uveřejněnými články najdete i kritický přehled soutěžních úloh (Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 1976/3). V souvislosti s budoucností olympiády se uvažovalo i o dvou zdánlivě protichůdných tendencích v jejím vývoji, tj. o masovosti a výběrovosti. Ostatně této otázce jsme věnovali zmínku i v předmluvě k ročence XXIV. ročníku.

Nechceme zde opakovat věci, které si můžete přečíst jinde, spíše chceme upozornit na některé tendence, které se objevují ve světě a ke kterým nemůžeme zůstat nevšimaví.

Ve dnech 16. až 21. srpna 1976 se konal v západoněmeckém městě Karlsruhe *III. mezinárodní kongres o vyučování matematice*; zúčastnilo se ho asi 2300 osob z 80 zemí světa. Nebudeme popisovat jeho průběh, ale spíše uvedeme dvě všesvětové tendence, které se na kongresu projevíly a které jsou u nás dobře známé. Výrazně se projevil odklon od přehnaného strukturalismu ve školské matematice; víte snad, co nazýváme v současné matematice — zejména v algebře — strukturami; jsou to množiny s operacemi a relacemi, např. grupy, tělesa, vektorové prostory. Zdůrazňujeme, že slovo „odklon“ neznámá likvidaci. Zvýšená pozornost se věnuje při vyučování aplikacím matematiky; ovšem aplikacím v novém pojetí. Nejde o zařazování izolovaných úloh „z praxe“, ale o vyhledávání reálných situací, které se dají matematizovat a zpracovat prostředky školské matematiky. Na kongresu přednášel o vzájemném působení matematiky a společnosti bývalý předseda ICMI*) sir James Lighthill (GB). Ve své přednášce uvedl dvě konkrétní ukázky problémových situací z reality: znečišťování vodního toku a předpovědi povětrnosti. Hlasy volající po rozumném zařazování aplikací jsou pracovníkům v socialistických zemích dobře známé.

Další novinkou na kongresu bylo vytvoření zvláštní sekce (jedné z třinácti) nazvané Algoritmy a počítače ve vyučování matematice; vedl ji prof. A. Engel (BRD). Ve svém úvodním referátu se zabýval spíše kapesními kalkulačkami než velkými počítači. Důležitost, kterou přikládal kongres otázce zavedení počítačů, se projevíla i v tom, že závěrem

*) Zkratka Mezinárodní komise pro vyučování matematice.

kongresu byla tzv. pódiová diskuse, které se zúčastnili významní didaktikové – vedoucí sekcí a kterou řídil prof. Hans Freudenthal (NL). Diskuse vyzněla v tom smyslu, že zavedení počítačů nemá znamenat jen zmechanizování numerických výpočtů, ale že vyžaduje seznámení žáků s algoritmickým myšlením; do jisté míry má být užívání mini-počítačů školou „algoritmického myšlení“. Podle prof. Engela by žáci měli vystřídat v rozmezí 6 až 18 let asi tři typy počítačů. V návrhu osnovy algoritmického vyučování byla uvedena řada netradičních zajímavých hesel, např. šíření epidemii, náhodné permutace, problémy optimalizace, metoda Monte Carlo aj.

Pro obsahové zaměření naší olympiády v příštích letech vyplynou asi ze světového vývoje významné podněty; k nim by se měla připojit tendence reprezentovaná na světovém kongresu hlasem dosti slabým: je to tendence zdůrazňovat ve výuce pracovní metody a postupy, neboť to je v podstatě klíč k aplikacím. Tím navazujeme na závěr předmluvy k ročence XXIV. ročníku, kde jsme vás žádali o mimo-soutěžní zpracování různých použití obecných pracovních metod, např. metody souřadnic, metody rekurentních definic apod. Naše výzva bohužel tehdy zůstala bez odezvy; pokusíme se v budoucnosti tuto výzvu zkonkretizovat tím, že zařadíme vhodné úlohy do soutěže.

Matematické olympiádě, všem jejím řešitelům i spolupracovníkům přejeme do příštího čtvrtstoletí mnoho úspěchů v práci.

ÚV MO

I. Průběh XXV. ročníku matematické olympiády

1. ORGANIZACE SOUTĚŽE

Pořadatelem soutěže XXV. ročníku matematické olympiády byla opět *ministerstva školství ČSR a SSR s Matematickým ústavem ČSAV, s Jednotou čs. matematiků a fyziků, s Jednotou slovenských matematiků a fyziků* za spolupráce s orgány *Socialistického svazu mládeže*. Protože připravovaný nový statut MO nebyl dosud schválen, řídila se soutěž XXV. ročníku MO opět podle statutu, který byl uveřejněn ve Věstníku MŠK, roč. XIX, str. 126, 127, směrnice 37 ze dne 30. 4. 1963.

Žáci soutěžili celkem ve čtyřech kategoriích: kategorie A je určena pro žáky III. a IV. ročníků škol II. cyklu, kategorie B pro žáky II. ročníků a kategorie C pro žáky I. ročníků těchto škol. V kategorii Z soutěží žáci nejvyšších dvou ročníků základních devítiletých škol. Bylo ovšem možné, aby žák soutěžil po schválení příslušným KV MO, resp. OV MO, i ve vyšší kategorii, než do které patřil.

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

V XXV. ročníku pracoval Ústřední výbor matematické olympiády v tomto složení:

Předseda: *doc. Jan Vyšín, CSc., MÚ ČSAV, Praha*

1. místopředseda: *doc. dr. Jozef Moravčík, CSc., VŠD, Žilina*

2. místopředseda: *prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., MÚ ČSAV, Praha*

1. jednatel: *Petr Fabinger, pedagogická fakulta KU, Praha*

2. jednatel: *dr. Jiří Mída, pedagogická fakulta KU, Praha*
zástupce MŠ ČSR: *Václav Šůla*

zástupce MŠ SSR: *Michal Zöldy*

zástupce ÚV SSM: *Jana Pomazalová, gymnázium, tř. kpt. Jaroše, Brno*

Ostatní členové:

dr. František Běloun, KPÚ, Praha

doc. dr. Lev Bukovský, CSc., přírodovědecká fakulta UPJŠ, Košice

František Hradecký, Praha

dr. Ivan Korec, CSc., přírodovědecká fakulta UK, Bratislava

doc. dr. Alois Kufner, CSc., MÚ ČSAV, Praha

dr. Vlastimil Macháček, pedagogická fakulta KU, Praha

Olga Maříková, gymnázium, Nad štolou 1, Praha 7

akademik Josef Novák, MÚ ČSAV, Praha

Vítazoslav Repáš, gymnázium, Novohradská ul., Bratislava

Stanislav Rypáček, gymnázium, Litoměřická, Praha 9

dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV, Praha
Ing. Oldřich Skopal, gymnázium, tř. kpt. Jaroše, Brno
Jiří Šídlo, gymnázium, Nad školou 1, Praha 7
Miloslav Šmerda, ZDŠ, Bílovice nad Svitavou
František Veselý, Praha
dr. František Zítek, CSc., MÚ ČSAV, Praha

Dalšími členy ÚV MO byli předsedové krajských výborů matematické olympiády:

Praha: prof. dr. Václav Pleskot, ČVUT, Praha
Středočeský kraj: Ludmila Tréglová, gymnázium, Říčany
Jihočeský kraj: dr. Ing. Lada Vaňatová, pedagogická fakulta, České Budějovice
*Západočeský kraj: Věra Rádlová, gymnázium, nám. Odbo-
rářů, Plzeň*
Severočeský kraj: Vladimír Blažek, pedagogická fakulta, Ústí n. L.
Východočeský kraj: dr. Josef Kubát, gymnázium, Pardubice
Jihomoravský kraj: dr. Petr Benda, VUT, Brno
*Severomoravský kraj: prof. dr. Miloslav Zedek, přírodově-
decká fakulta UP, Olomouc*
Bratislava: Katarína Hajtášová, přírodovědecká fakulta UK, Bratislava
*Západoslovenský kraj: doc. dr. Ondrej Šedivý, CSc., peda-
gogická fakulta, Nitra*
Středoslovenský kraj: dr. Ladislav Berger, VŠD, Žilina
*Východoslovenský kraj: dr. Martin Gavalec, přírodovědecká
fakulta UPJŠ, Košice*

Pracovní předsednictvo ÚV MO tvořili (v abecedním pořadí):

Petr Fabinger, prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., dr. Jiří Mída, doc. dr. Jozef Moravčík, CSc., dr. J. Sedláček, CSc., doc. Jan Vyšín, CSc., dr. F. Zitek, CSc. a zástupci MŠ ČSR a SSR.

3. PLENÁRNÍ ZASEDÁNÍ ÚV MO

se konala ve XXV. ročníku MO dvě: podzimní ve dnech 4. a 5. prosince 1975 v Praze, jarní ve dnech 7. a 8. května v Bratislavě.

Podzimní zasedání zhodnotilo XXIV. roč. MO a československou účast na 17. MMO, která se konala v Bulharsku. Důkladně se zabývalo prací pracovních skupin pro úlohy. Konstatovalo se, že se jejich činnost řádně nerozběhla, neboť není možný osobní styk členů v jednotlivých skupinách. Proto bylo rozhodnuto, aby ve skupině pro geometrické úlohy kat. A, B vedené prof. dr. M. Fiedlerem, DrSc., pracovali převážně pražští matematici, právě tak jako ve skupině pro geometrické úlohy kat. C a Z vedené dr. V. Macháčkem a dr. J. Mídou. Ve skupině pro algebraické úlohy kat. A, B budou pracovat převážně matematici ze Středoslovenského kraje a povede ji doc. dr. J. Moravčík, CSc. V Bratislavě bude činná skupina pro algebraické úlohy kat. C a Z, povede ji dr. T. Marcisová. Při výběru úloh pro kat. C a Z je třeba přihlížet k tomu, že v kategorii Z soutěží též žáci 8. roč. ZDŠ a v kategorii C žáci, kteří přišli do 1. roč. středních škol z 8. roč. ZDŠ.

Dále jednal ÚV MO o rozšíření matematických soutěží na nižší třídy ZDŠ. Bylo konstatováno, že za současných

podmínek se nemůže ÚV MO této věci ujmout, je však ochoten poskytnout konzultativní pomoc.

Velmi kladně přijal ÚV MO zprávu o úspěšně se rozvíjející spolupráci s ÚV SSM, který věnuje svou pozornost matematické olympiádě a její nejúspěšnější účastníky odměňuje. Bude třeba zlepšit spolupráci se SSM na krajské úrovni.

O akcích, které ÚV MO pořádá pro účastníky soutěže, a o jubileu MO píšeme ve zvláštních odstavcích.

Jarní zasedání se konalo při příležitosti celostátního III. kola kategorie A jubilejního XXV. ročníku MO. O slavnostní části tohoto zasedání jedná samostatný odstavec, zde si všimneme části pracovní.

ÚV MO se rozhodl zavést *III. (krajské) kolo kategorie Z* všeobecně ve všech krajích s tím, že o úlohách zadaných v tomto kole rozhodnou KV MO. V tomto smyslu je třeba upravit znění statutu MO a FO.

Pro sjednocení klasifikace ve II. kolech bylo rozhodnuto, aby v dalších ročnících MO byly k autorským řešením úloh připojeny podrobné pokyny pro bodové hodnocení žákovských řešení.

ÚV MO se usnesl, aby komentáře k úlohám XXVI. roč. MO vypracovaly KV MO, a to pro kategorii A KV Východoslovenského kraje, pro kategorii B KV Středoslovenského kraje, pro kategorii C KV Bratislavy a pro kategorii Z KV Západoslovenského kraje.

Na tomto zasedání předala zástupkyně ÚV SSM s. Jana Pomazalová předsedovi ÚV MO doc. Janu Vyšínovi, CSc., *putovní pohár*, který věnoval ÚV SSM pro vítěze III. kola kategorie A.

Dále zasedání projednalo další spolupráci ÚV MO s JČSMF a MÚ ČSAV.

4. PRŮBĚH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

Organizace jednotlivých kol soutěže nebyla oproti předešlým ročníkům MO podstatně změněna.

I. kolo, tzv. *studijní*, proběhlo opět ve dvou etapách. Čtyři přípravné úlohy odevzdávali soutěžící všech kategorií svým učitelům (referentům MO) do 15. listopadu 1975. Úlohy byly opraveny, ale neklasifikovány, takže každý žák se mohl zúčastnit soutěžní části I. kola. V této části soutěže, končící pro kategorii A 15. ledna a pro kategorii B a C 15. února 1976, museli žáci podle vlastního výběru vyřešit ze šesti úloh aspoň tři na známku aspoň „dobrou“, aby mohli být navrženi do II. kola. V kategorii Z bylo podmínkou pro navržení do II. kola vyřešení aspoň tří úloh ze čtyř na známku aspoň „dobrou“ do 15. ledna 1976.

II. kolo se konalo v těchto termínech:

kategorie A: 6. března 1976

kategorie B a C: 3. dubna 1976

kategorie Z: 24. února 1976

Celostátní III. kolo kategorie A proběhlo v Bratislavě od 6. do 8. května 1976.

Některé KV MO uspořádaly *krajské kolo* v kategorii Z. Na Slovensku se konalo toto kolo v jednotném termínu pro všechny slovenské kraje.

Číselné údaje o výsledcích soutěže v jednotlivých kategoriích a kolech podávají tabulky 1 až 4. Přehlednou statistiku za XXV. ročník MO podává souhrnná tabulka 5.

5. POMOCNÉ AKCE

Na pomoc řešitelům MO pořádaly soustředění a instruktaže jednak KV MO, v celostátním měřítku ÚV MO.

Na přípravu reprezentantů pro MMO byl zaměřen tzv. korespondenční seminář a také seminář pro pražské řešitele kategorie A.

V *korespondenčním semináři* vedeném doc. dr. J. Moravčíkem, CSc., bylo zadáno pět souborů úloh s tématy: 1. číselná teorie, 2. planimetrie a stereometrie, 3. mnohočleny, funkce a trigonometrie, 4. kombinatorika, 5. soustavy rovnic a nerovnic.

Pražský seminář vedený dr. J. Sedláčkem, CSc., se věnoval podobné problematice jako korespondenční seminář. Přednášeli v něm pracovníci MÚ ČSAV a pražských vysokých škol.

Nejlepší účastníci obou seminářů byli vybráni pro *celostátní soustředění širšího reprezentačního družstva*. Konalo se poprvé ve dvou etapách: týdenní v Březnici (březen 1976) a čtrnáctidenní na Kladně (červen 1976).

Celostátní soustředění řešitelů kategorie A, do něhož jsou vybíráni žáci nejvýše třetích ročníků středních škol, se konalo po dobu dvou týdnů koncem června a začátkem července v Plzni. Mělo tři třídy: matematickou, matematicko-fyzikální a fyzikální. Zúčastnilo se ho 91 žáků. Matema-

tické přednášky zajišťovali pracovníci vysokých škol a vědeckých ústavů ČSR a SSR.

6. NĚKTERÉ AKCE K JUBILEU MO

První z jubilejních akcí byla *tisková konference* v pražském Klubu novinářů, jež se konala 12. září 1975. Řídil ji akademik Josef Novák a vedle novinářů se jí zúčastnil též předseda ÚV MO doc. Jan Vyšín, CSc., a několik organizátorů soutěže.

O soutěži se během jubilejního ročníku častěji psalo i v denním tisku. Tak 9. října 1975 přinesl deník *Mladá fronta* obsáhlejší článek *Do pětadvacátého olympijského roku*. Byl to rozhovor s akademikem Josefem Novákem o našem jubilejním roce. Z článku vyjímáme jeden zajímavý údaj: V prvních 24 ročnících bylo zadáno asi 1700 úloh a opraveno asi 2 611 000 jejich řešení.

Dne 15. ledna 1976 v rámci pravidelných besed pořádaných Jednotou čs. matematiků a fyziků proběhl v Ústředním klubu školství a vědy v Praze *večer o MO*, který úvodním slovem zahájil dlouholetý bývalý předseda ÚV MO akademik J. Novák. Současný předseda doc. J. Vyšín, CSc., ve svém vystoupení charakterizoval vývoj MO, ocenil práci rozsáhlého kolektivu dobrovolných spolupracovníků a vyslovil svůj názor na příčiny neúspěchu čs. řešitelů na mezinárodních MO. V neformální besedě se dostala ke slovu i řada úspěšných řešitelů prvních ročníků MO, kteří jsou nyní už dobře známými matematiky. Na závěr besedy byly promítnuty diapozitivy z některých posledních ročníků MMO.

Ještě před celostátním třetím kolem vyšla knížka *Dvacet pět let matematické olympiády v Československu*, kterou z příspěvků mnoha autorů sestavili doc. dr. J. Moravčík, CSc., a doc. J. Vyšín, CSc. Svazek, na němž se autorsky podíleli i zahraniční matematikové, vyšel v nakladatelství Mladá fronta.

Jako zájmový náklad vytiskli v Žilině neprodejnou publikaci *Menný zoznam priekopníkov matematickej olympiády v ČSSR*. Sešit přináší jména známých i opomenutých školských pracovníků, kteří se v českých a slovenských krajích zasloužili o MO za celé čtvrtstoletí. U každého je do několika řádek zhuštěna charakteristika jeho činnosti.

Také celostátní III. kolo kategorie A mělo v jubilejním ročníku slavnostní ráz. Konalo se v Bratislavě ve dnech 6. až 8. května 1976 a v tutéž dobu zasedal v Bratislavě též Ústřední výbor MO. Ve čtvrtek 6. května v 17 hod. byla soutěž slavnostně zahájena v Zrcadlové síni Primaciálního paláce. Ministerstva školství obou republik udělila při té příležitosti dlouholetým organizátorům soutěže čestná uznání za práci v MO. Další den dopoledne se na gymnáziu v Tomašíkově ulici konala první část soutěže. Po polední přestávce si olympionikové prohlédli pamětihodnosti Bratislavy a po večeri zhlédli představení ve Slovenském národním divadle. Také členové ÚV MO měli ten den bohatý program (zasedání na gymnáziu v Tomašíkově ulici, přijetí delegace na ministerstvu školství, prohlídka pamětihodností). III. kolo skončilo 8. května, kdy se dopoledne řešila druhá část soutěžních úloh. Po obědě se studenti i organizátoři rozejeli zpět do svých domovů.

7. STUDIJNÍ LITERATURA

Letáky MO vyšly koncem září 1975. Texty úloh *MO* otiskly časopisy *Rozhledy matematicko-fyzikální* a *Matematika a fyzika ve škole*.

Nakladatelství *Mladá fronta* vydalo další svazky edice *Škola mladých matematiků*:

č. 36 *Ján Černý*: O aplikáciach matematiky

č. 37 *Beloslav Riečan, Zdena Riečanová*: O pravdepodobnosti

č. 38 *Juraj Bosák*: Latinské štvorce

č. 39 *Alois Kufner*: Nerovnosti a odhady

8. KONKURS JČSMF A JSMF NA NÁVRHY ÚLOH PRO MO

Na jaře 1976 uplynulo deset let od vyhlášení nepřetržitě probíhajícího konkursu na úlohy pro matematickou olympiádu. Do 31. 8. 1976 došlo od jeho vyhlášení celkem 1239 úloh od 111 autorů, k témuž dni bylo celkem odevzdáno 712 úloh a vráceno 387 úloh. Potěšitelné je, že do konkursu zasílají své úlohy i současní a bývalí účastníci *MO*. Ve XXV. ročníku *MO* bylo zadáno 45 úloh získaných konkursem.

Podmínky konkursu jsou uveřejňovány v letácích s úlohami.

TABULKA 1

Kategorie A

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	68	59	54	31
Středočeský	105	97	81	11
Jihočeský	52	48	44	14
Západočeský	39	35	34	7
Severočeský	96	79	60	14
Východočeský	62	57	52	17
Jihomoravský	176	155	140	18
Severomoravský	93	78	76	13
Bratislava	104	54	54	18
Západoslovenský	210	106	103	14
Středoslovenský	118	102	97	17
Východoslovenský	87	55	54	9
ČSR	691	608	541	125
SSR	519	317	308	58
ČSSR	1 210	925	849	183

S — počet všech soutěžících

Ú — počet úspěšných řešitelů

TABULKA 2

Kategorie B

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	90	73	71	25
Středočeský	71	67	64	3
Jihočeský	59	54	48	4
Západočeský	36	34	32	5
Severočeský	123	94	85	7
Východočeský	68	56	52	17
Jihomoravský	136	118	110	13
Severomoravský	95	80	80	15
Bratislava	80	65	64	23
Západoslavený	125	122	117	8
Středoslavený	89	70	70	8
Východoslavený	118	59	45	14
ČSR	678	576	542	89
SSR	412	316	296	53
ČSSR	1 090	892	838	142

S — počet všech soutěžících

Ú — počet úspěšných řešitelů

TABULKA 3

Kategorie C

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	119	102	98	54
Středočeský	132	112	109	23
Jihočeský	80	75	75	17
Západočeský	55	44	39	20
Severočeský	127	89	71	13
Východočeský	85	75	70	21
Jihomoravský	201	183	137	50
Severomoravský	95	73	72	35
Bratislava	99	70	69	32
Západoslovenský	173	160	151	41
Středoslovenský	122	96	96	27
Východoslovenský	192	76	69	22
ČSR	894	753	671	233
SSR	586	402	385	122
ČSSR	1 480	1 155	1 056	355

S — počet všech soutěžících

Ú — počet úspěšných řešitelů

TABULKA 4

Kategorie Z

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	904	492	428	266
Středočeský	591	366	334	160
Jihočeský	761	491	412	230
Západočeský	610	325	278	107
Severočeský	822	458	350	190
Východočeský	524	421	363	84
Jihomoravský	1 518	970	744	311
Severomoravský	1 406	765	609	327
Bratislava	862	316	511	174
Západoslovenský	1 462	1 196	1 183	415
Středoslovenský	1 544	894	834	362
Východoslovenský	1 501	1 031	987	531
ČSR	7 136	4 288	3 518	1 675
SSR	5 369	3 437	3 515	1 482
ČSSR	12 505	7 725	7 033	3 157

S – počet všech soutěžících

Ú – počet úspěšných řešitelů

TABULKA 5
XXV. ročník MO

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	1 181	726	651	376
Středočeský	899	642	588	197
Jihočeský	952	668	579	265
Západočeský	740	438	383	139
Severočeský	1 168	720	566	224
Východočeský	739	609	537	139
Jihomoravský	2 031	1 426	1 131	392
Severomoravský	1 689	996	837	390
Bratislava	1 145	505	698	247
Západoslovenský	1 970	1 584	1 554	478
Středoslovenský	1 873	1 162	1 097	414
Východoslovenský	1 898	1 221	1 155	576
ČSR	9 399	6 225	5 272	2 122
SSR	6 886	4 472	4 504	1 715
ČSSR	16 285	10 697	9 776	3 837

S — celkový počet soutěžících ve všech kategoriích

Ú — celkový počet úspěšných řešitelů ve všech kategoriích

SEZNAM VÍTĚZŮ A ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ CELOSTÁTNÍHO III. KOLA KATEGORIE A VE XXV. ROČNÍKU MO

Vítězové

1. – 2. *Jiří Navrátil*, 3.a, G Olomouc-Hejčín
1. – 2. *Peter Takáč*, 3.c, G Šafárikovo
3. *Jiří Kolafa*, 3.d, G Praha 2, W. Piecka
4. *Pavol Quittner*, 3.b, G Prievidza
5. – 9. *Radvan Hájek*, 4.c, G Praha 6, Arabská
5. – 9. *Jan Kratochvíl*, 2.a, G Pardubice
5. – 9. *Josef Pavel*, 3.a, G Rychnov nad Kněžnou
5. – 9. *Ilja Turek*, 2.g, G Hradec Králové
5. – 9. *Vladimír Technovský*, 4.d, G Banská Štiavnica
10. *Pavel Vondrák*, 4.a, G Ústí nad Labem, Jateční
11. – 14. *Josef Blažek*, 3.a, G Mnichovo Hradiště
11. – 14. *Martin Čadek*, 3.a, G Brno, tř. kpt. Jaroše
11. – 14. *Marián Slodička*, 4.b, G Bratislava, Novohradská
11. – 14. *Miroslav Šedivý*, 4.c, G Jevíčko
15. *Petr Novák*, 4.a, G Pardubice
16. *Pavol Makovický*, 4.a, G Žilina, Horný Val

- 17. *Pavel Komárek*, 4.d, G Praha 2, W. Piecka
- 18. – 20. *Stanislav Červinka*, 4.d, G Praha 1, Štěpánská
- 18. – 20. *Karel Suchomel*, 4.c, G Praha 1, Štěpánská
- 18. – 20. *Magdalena Volkeová*, 4.a, G Praha 6, Leninova

Ostatní úspěšní řešitelé

- 21. – 24. *Jan Bázler*, 3.b, G Mladá Boleslav
- 21. – 24. *Václav Kelar*, 4.b, G Uničov
- 21. – 24. *Jiří Peňáz*, 4.b, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 21. – 24. *Pavel Štoviček*, 4.a, G Pardubice
- 25. *Vlastimil Klíma*, 4.b, G Benešov u Prahy
- 26. *Tomáš Kotrba*, 4.c, G Praha 1, Štěpánská
- 27. *Zdeněk Kalousek*, 2.b, G Jablonec nad Nisou
- 28. *Václav Kotěšovec*, 4.d, G Praha 2, W. Piecka
- 29. – 32. *Andrej Blaho*, 4.b, G Bratislava, Novohradská
- 29. – 32. *Josef Dočkal*, 4.c, G Olomouc, Jiřího z Poděbrad
- 29. – 32. *Ondrej Náther*, 4.b, G Bratislava, Novohradská
- 29. – 32. *Miroslav Vancl*, 4.a, G Ústí nad Labem, Jateční
- 33. – 34. *Vladimír Daněk*, 4.d, G Praha 2, W. Piecka
- 33. – 34. *Petr Pěnička*, 4.d, G Praha 2, W. Piecka
- 35. *Martin Holeňa*, 3.d, G Praha 3, Sladkovského nám.
- 36. – 38. *Igor Böhm*, 3.b, SPŠS Zvolen
- 36. – 38. *Zbyněk Brtna*, 4.b, G Tábor
- 36. – 38. *Jiří Zlatuška*, 3.c, G Brno, tř. kpt. Jaroše
- 39. *Svetozár Malinarič*, 4.a, G Nitra, Párovská
- 40. – 41. *Erik Štěrba*, 4.c, G Praha 1, Štěpánská
- 40. – 41. *Miroslav Zeman*, 4.b, G Bratislava, Novohradská

PŘÍLOHA B

POŘADÍ ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ II. KOLA VE XXV. ROČNÍKU MO

U jednotlivých krajů uvádíme v každé kategorii nejvýše prvních deset úspěšných řešitelů.

Praha

Kategorie A

Václav Kotěšovec, 4.d, G Praha 2, W. Piecka; *Jiří Kolafa*, 3.d, G Praha 2, W. Piecka; *Magdalena Volkeová*, 4.a, G Praha 6, Leninova; *Ivo Bláha*, 4.d, G Praha 2, W. Piecka; *Martin Holeňa*, 4.d, G Praha 3, Sladkovského nám.; *Erik Štěrba*, 4.c, G Praha 1, Štěpánská; *Radvan Hájek*, 4.e, G Praha 6, Arabská; *Pavel Komárek*, 4.d, G Praha 2, W. Piecka; *Lubomír Netolický*, 4.d, G Praha 2, W. Piecka; *Petr Pěnička*, 4.d, G Praha 2, W. Piecka.

Kategorie B

Mirko Navara, 2.d, G Praha 2, W. Piecka; *Pavel Trska*, 2.a, G Praha 6, Leninova; *Jan Matějka*, 2.d, G Praha 2,

W. Piecka; *Zdeněk Vavřín*, 2.c, G Praha 1, Štěpánská; *Jiří Konečný*, 2.d, G Sladkovského nám.; *Jana Uhlířová*, 2.d, G Praha 2, W. Piecka; *Pavel Bolek*, E2, SPŠ jaderná, Praha 4; *Pavel Caisl*, *Jiří Krondák*, *Zuzana Pelantová*, všichni 2.d, G Praha 2, W. Piecka.

Kategorie C

Petr Horský, *Jan Hajič*, *Michal Šourek*, všichni 1.d, G Praha 2, W. Piecka; *Vladimír Smotlacha*, 1.c, G Praha 1, Štěpánská; *Otto Ritter*, 1.d, G Praha 2, W. Piecka; *Vladimír Karas*, 1. roč., G Praha 6, Parlérova; *Alena Lančová*, 1. roč., G Praha 2, W. Piecka; *Stanislava Švecová*, 1.d, G Praha 2, W. Piecka; *Vladimír Tobyáš*, 1.a, G Praha 4, Budějovická.

Středočeský kraj

Kategorie A

Jan Bázler, 3.b, G Mladá Boleslav; *Vlastimil Klíma*, 4.b, G Benešov; *Josef Blažek*, 3.a, G Mnichovo Hradiště; *Milan Procházka*, 4.b, G Mladá Boleslav; *Viktorie Vlachová*, 3.b, G Český Brod; *Miloš Fechtner*, 4.a, G Beroun; *Libuše Rusinová*, 3.a, G Dobříš; *Vladimír Červenka*, 3.a, G Kutná Hora; *Hana Janoušková*, 4.a, G Sedlčany; *Miroslav Havlena*, 3.c, G Kladno.

Kategorie B

Tomáš Gergelits, 2.c, SPŠ Mladá Boleslav; *Jana Vodičková*, 2.b, G Mladá Boleslav; *Václav Blažek*, 2.a, G Příbram.

Kategorie C

Zdeněk Somr, 1.b, G Sedlčany; *Martin Poštulka*, 1.a, G Kralupy; *Pavel Topfer*, 1.a, G Mladá Boleslav; *Šárka Zágorová*, 1.b, G Benešov; *Jan Voves*, 1.a, G Kralupy; *Daniel Zeman*, 1.a, G Nové Strašecí; *František Hodys*, 1.b, G Sedlčany; *Jaroslava Trčková*, 1.b, G Dobříš; *Eva Hamplová*, 1.b, G Mělník; *Petr Maslák*, 1.a, G Nové Strašecí.

Jihočeský kraj

Kategorie A

Zbyněk Brtna, 4.b, G Tábor; *Josef Hes*, 3.a, G K. Šatala, České Budějovice; *Jindřich Trnka*, 3.c, G Tábor; *Jaroslav Tišer*, 4.b, G Strakonice; *Michal Šimek*, 4.a, G Strakonice; *Zdeněk Panec*, 3.b, SPŠ Strakonice; *Marie Divišová*, 4., G Pelhřimov; *Václav Židek*, 3.b, SPŠ Strakonice; *Jaroslav Čapek*, 3.a, SPŠ Strakonice.

Kategorie B

Zdeněk Tůma, G Tábor; *Martin Matzner*, G K. Šatala, České Budějovice; *S. Nevšimal*, G Pelhřimov; *Šárka Koucká*, G Písek; *Karel Štěpán*, G K. Šatala, České Budějovice; *Pavel Svoboda*, G Tábor; *Jitka Jarošová*, G Prachatice.

Kategorie C

I. Bozadžiev, G Tábor; *I. Vonke*, G K. Šatala, České Budějovice; *J. Mládek*, G Soběslav; *M. Zimmermann*, G České Budějovice; *V. Voráček*, G Tábor; *J. Čech*, G Dačice;

J. Němec, G Tábor; *M. Volfová*, G Frachatice; *J. Pavel*, SPŠ Písek.

Západočeský kraj

Kategorie A

Aleš Štrunc, 3.a, G J. Fučíka, Plzeň; *Milan Studený*, 4.a, G Mariánské Lázně; *Pavel Nejedlý*, 4.a, G Karlovy Vary; *Karin Šístková*, 4.a, G Karlovy Vary; *František Mošna*, 4.a, G Blovice; *František Staněk*, 4.a, G J. Fučíka, Plzeň; *Pavel Sedlák*, 4.a, G J. Fučíka, Plzeň.

Kategorie B

Pavel Pyrih, 2.a, G Sušice; *Libor Fiala*, 2.a, G J. Fučíka, Plzeň; *Ladislav Minčíč*, 2.a, G Cheb; *Lubomír Petrák*, 2.a, G Stříbro; *Blanka Zymáková*, 2.a, G J. Fučíka, Plzeň.

Kategorie C

Alena Třeštíková, 1.a, G Stříbro; *Milan Vitek*, 1.a, G J. Fučíka, Plzeň; *Jaromír Urban*, 1.a, G Ostrov n. O.; *Petr Kožina*, 1.b, G Tachov; *Tomáš Kubalík*, 1., SPŠE Plzeň; *Zdeněk Kůs*, 1.a, G Sušice; *Věra Banzetová*, 1.a, G Ostrov n. O.; *Hana Zachardová*, 1.a, G Sušice; *Jindřich Zárobský*, 1., SZTŠ Křimice; *Ludmila Šimůnková*, 1.a, G J. Fučíka, Plzeň.

Severočeský kraj

Kategorie A

Jan Nouza, G Ústí nad Labem; *Michal Kočvara*, G Liberec; *Zdeněk Kalousek*, G Jablonec nad Nisou; *Pavel Vondrák*, G Ústí nad Labem; *Miroslav Vancl*, G Ústí nad Labem; *Vlasta Novotná*, G Teplice; *Milan Vodák*, G Kadaň; *Eva Ciprová*, G Liberec; *Milan Drechsler*, G Frýdlant; *Ivan Benda*, G Litoměřice.

Kategorie B

Zdeněk Kalousek, G Jablonec nad Nisou; *Martin Kovář*, G Liberec; *Karel Svoboda*, G Teplice; *Ondřej Macoun*, G Liberec; *Pavel Němec*, G Ústí nad Labem; *Libor Holečko*, G Liberec; *Miroslav Koucký*, G Jablonec nad Nisou.

Kategorie C

Vladimír Kučera, G Liberec; *Luděk Šefc*, G Ústí nad Labem; *Viliam Maťo*, G Rumburk; *Eva Hlásková*, G Liberec; *Tomáš Kočí*, G Rumburk; *Bohumil Křivohlavý*, G Teplice; *Radomír Kuc*, G Liberec; *Petr Tůma*, G Liberec; *Jiří Mlejnecký*, G Ústí nad Labem; *Jaromír Kulháněk*, G Rumburk.

Východočeský kraj

Kategorie A

Jan Kratochvíl, 2.a, G Pardubice; *Miroslav Šedivý*, 4.c, G Jevíčko; *Petr Novák*, 4.a, G Pardubice; *Pavel Štoviček*,

4.a, G Pardubice; *Ilja Turek*, 2.g, G Hradec Králové; *Josef Pavel*, 3.a, G Rychnov nad Kněžnou; *Petr Bahník*, 2.a, G Pardubice; *Jaroslav Holomek*, 4.b, G Jevíčko; *Richard Liska*, 3.a, G Pardubice; *Ladislav Metelka*, 3.g, G Hradec Králové.

Kategorie B

Jan Kratochvíl, 2.a, G Pardubice; *Ilja Turek*, 2.g, G Hradec Králové; *Petr Bahník*, 2.a, G Pardubice; *Jaromír Matěna*, 2.g, G Hradec Králové; *Karel Findejs*, 2., G Polička; *Miroslav Goljan*, 2.a, G Jaroměř; *Miroslav Tůma*, 2., G Nová Paka; *Miloš Holman*, 2.a, G Vrchlabí; *Vladimír Kučera*, 2.a, G Pardubice; *Vladislav Pekárek*, 2.a, G Pardubice.

Kategorie C

Vladimír Matěna a *Milan Repík*, 1.a, G Trutnov; *Luděk Pešek* a *Tomáš Vlasák*, 1.a, G Pardubice; *Zdeněk Čermák*, 1.d, G Chrudim; *Milan Puš*, 1.a, G Dvůr Králové; *Milan Bareš* a *Milan Znamenáček*, 1.c, SPŠEl Pardubice; *Vladimír Pištora*, 1.g, G Hradec Králové.

Jihomoravský kraj

Kategorie A

Martin Čadek, 3.a, G tř. kpt. Jaroše, Brno; *Jaroslav Šustr*, 3.b, G Blansko; *Tomáš Havlásek*, 4.a, G Bystřice n. P.; *Jiří Peňáz*, 4.b, G tř. kpt. Jaroše, Brno; *Dana Kučeříková*, 4.b, G Holešov; *Jindřich Růžička*, 4.c, G Žďár n. S.; *Vít Sláma*, 3.a, G Slovanské n., Brno; *Luděk Klimeš*, 3.a, G Blansko;

Miroslav Pavel, 4.a, G Jihlava; *David Richter*, 4.b, G Koněvova, Brno.

Kategorie B

Radovan Fiala, 2.b, G Znojmo; *Bohuslav Rudolf*, 2.c, G Uherský Brod; *Jaroslav Zeman*, 2.b, G Jihlava; *Ladislav Mareček*, 2.b, G Koněvova, Brno; *Tomáš Lukeš*, 2.a, G tř. kpt. Jaroše, Brno; *Vladimír Sáňka*, 2.a, G Blansko; *Petr Kučírek*, 2.b, G Koněvova, Brno; *Karel Liedermann*, 2.b, G Křenová, Brno; *Jaroslav Šmarda*, 2.c, G Třebíč.

Kategorie C

Ondřej Čadek, 1.a, G tř. kpt. Jaroše, Brno; *Jindřich Kolář*, 1.a, G Boskovice; *Ivo Černohlávek*, 1.b, G tř. kpt. Jaroše, Brno; *Marek Orel*, 1.a, G tř. kpt. Jaroše, Brno; *Martin Šantavý*, 1.d, G tř. kpt. Jaroše, Brno; *Jan Brázda*, 1.a, G tř. kpt. Jaroše, Brno; *Rad. Kučera*, 1.a, G Koněvova, Brno; *Jiří Povolný*, 1.a, G Koněvova, Brno; *Aleš Šiller*, 1.a, G Koněvova, Brno; *Jiří Bureš*, 1.a, G tř. kpt. Jaroše, Brno.

Severomoravský kraj

Kategorie A

Jiří Navrátil, 3.a, G Olomouc-Hejčín; *Josef Dočkal*, 4.c, G Jiřího z Poděbrad, Olomouc; *Václav Kelar*, 4.b, G Uničov; *Vladimír Patrnák*, 3.b, G Ostrava, Šmeralova ul.; *Ján Mačejovský*, 4.a, G Ostrava, Šmeralova ul.; *Jaroslav Hájek*, 2.c, G Bílovec; *Vladimír Hanák*, 2.c, G Bílovec; *Boris Petrák*,

3.a, G Ostrava-Hrabůvka; *Oskar Linkesch*, E-4.a, SPŠ Ostrava-Vítkovice; *Martin Petrák*, 3.a, G Ostrava-Hrabůvka.

Kategorie B

Petr Gurka, 2.c, G Bílovec; *Pavel Kolařík*, 2.c, G Bílovec; *Petr Tas*, 2.c, G Bílovec; *Jaroslav Hájek*, 2.c, G Bílovec; *Karel Štěpka*, 2.c, G Bílovec; *Rostislav Urban*, 2.a, G Šmeralova ul., Ostrava; *Stanislav Zwyrtek*, 2.b, G Český Těšín; *Emil Filípek*, 2.b, G Český Těšín; *Evžen Horáček*, 2.a, G Olomouc-Hejčín; *Josef Klimeš*, 2.c, G Opava.

Kategorie C

Josef Tkadlec, 1.c, G Bílovec; *Jaroslav Hančl*, 1.c, G Bílovec; *Miroslav Těžký*, 1.c, G Bílovec; *Ryszard Kantor*, 1.c, G Bílovec; *Miroslav Maruška*, 1.c, G Olomouc; *Jiřina Sikorová*, 1.b, G Trinec; *Vladimír Wagner*, 1.a, G Havířov; *Radomír Vrajík*, 1.c, G Bílovec; *Aleš Juřík*, 1.d, G Karviná; *Pavel Motloch*, 1.c, G Frýdek-Místek.

Bratislava

Kategorie A

Andrej Blaho, 4.; *Marián Slodička*, 4.; *Róbert Handlovič*, 3.; *Ondrej Náther*, 4.; *Igor Brilla*, 4.; *Jozef Kiss*, 4.; *Miroslav Zeman*, 4.; *Igor Vavro*, 4.; *Rastislav Vadovič*, 4.; *Gustáv Mrázik*, 3. (Všichni z gymnázia v Novohradské ulici.)

Kategorie B

Štefan Varga, G Novohradská ul.; *Ivan Priecel*, G ul. Červenej armády; *Ivan Mizera*, G Novohradská ul.; *Milan Veščičík*, G ul. Červenej armády; *Štefan Bendžala*, G Novohradská ul.; *Erich Bánhegyi*, G Tomašikova ul.; *Stanislav Kokoška*, G ul. Červenej armády; *Július Ertl*, G ul. Červenej armády; *Ivan Mamrilla*, G Novohradská ul.; *Ján Prokop*, G Novohradská ul. (Všichni 2. roč.)

Kategorie C

Boris Rudolf, G Novohradská ul.; *Peter Schreiber*, G Novohradská ul.; *Zdeno Liška*, G ul. Červenej armády; *Andrej Földes*, G Dunajská ul.; *Ján Mezei*, SPŠ stavebná; *Mona Jančíková*, G Metodova ul.; *Martin Kalina*, G Novohradská ul.; *Norbert Bartalský*, G Novohradská ul.; *Valdemar Čihák*, G ul. Červenej armády; *Zdenka Butková*, G ul. Červenej armády. (Všichni 1. roč.)

Západoslovenský kraj

Kategorie A

Pavol Tarina, 4.c, G Topoľčany; *Svetozár Malinarič*, 4.a, G Nitra; *Juraj Kouřil*, 3.a, G Nové Mesto n. Váhom; *Ján Brezovický*, 4.c, G Nitra; *Ivan Trebichovský*, 3.a, G Nové Mesto n. Váhom; *Ladislav Miklós*, 3. c, G maď. Komárno; *Vojtech Izaóf*, 3.c, G maď. Galanta; *Attila Skuta*, 4.b, G maď. Komárno; *Ján Potfaj*, 3.a, G Nové Mesto n. Váhom; *Jana Stachová*, 4.a, G Nové Mesto n. Váhom.

Kategorie B

Peter Filakovský, G maď. Nové Zámky; *Anna Malús*, G maď. Šamorín; *Rafael Tománek*, G Bánovce n. Bebr.; *Jurak Sekereš*, G Zlaté Moravce; *Michal Oravec*, G Malacky; *Milan Babala*, G Pezinok; *Mikuláš Feher*, G Komárno; *Elemer Antal*, G maď. Dun. Streda.

Kategorie C

Štefan Mešťan, G Šaľa; *Jozef Méhes*, G maď. Dunaj. Streda; *Peter Černo*, G Trenčín; *Ján Uvestán*, G Hlohovec; *Štefan Kubik*, G maď. Galanta; *Peter Pšenek*, G Komárno; *Marián Mach*, G Trenčín; *Imrich Papai*, G maď. Galanta; *Gašpar Froncz*, G Vráble.

Středoslovenský kraj

Kategorie A

Peter Takáč, 3.c, G Šafárikovo; *Igor Böhl*, 3.b, SPŠS Zvolen; *Karol Pekár*, 4.a, G Ružomberok; *Pavel Quittner*, 3.b, G Prievidza; *Pavol Makovický*, 4.a, G Žilina; *Vladimír Technovský*, 4.d, G Banská Štiavnica; *Vladimír Houba*, 4.c, G Žilina; *Miroslav Kysel*, 4.b, G Banská Bystrica; *Miloslav Borík*, 4.a, G Kysucké Nové Mesto; *Mária Grossmannová*, 4.c, G Žilina.

Kategorie B

Ján Detko, G Prievidza; *Milan Beleš*, G Veľký Krtíš; *Vladimír Hudec*, G Vrútky; *Peter Bonda*, G Martin; *Emil*

Gonšor, SPŠ stř. Lipt. Mikuláš; *Peter Kubinec*, G Turzovka; *Eva Richterová*, G Banská Bystrica; *Juraj Zamba*, G Lučenec.

Kategorie C

Jaroslav Guričan, G Dubnica n. Váh.; *Peter Goga*, G Vrútky; *Alfréd Zimmermann*, G Banská Bystrica; *Miroslav Chlebík*, G Čadca; *Jaroslava Maslíková*, G Handlová; *Ferdinand Kubík*, G Námestovo; *Peter Mäsiar*, G Námestovo; *Miroslav Gaži*, G Nová Baňa; *Marián Surový*, SPŠ el. Lipt. Hrádok.

Východoslovenský kraj

Kategorie A

Ladislav Pivka, 4.a, G Košice; *Vladimír Závadský*, 2.a, G Košice; *Ondrej Cako*, 4.d, G Košice; *Michal Čverčko*, Košice; *Marta Mlynarčíková*, 4.b, G Poprad; *Dušan Malenčík*, 4.a, G Košice; *Lubomír Mucha*, 3.d, G Prešov; *Milan Pavlovčík*, 3.c, G Humenné.

Kategorie B

Zlatica Slavíková, 2.a, G Košice; *Miroslav Repický*, 2.a, G Humenné; *Ferdinand Hevery*, 2.b, G Sobrance; *Ján Nižňanský*, 2.a, G Košice; *Michal Pudlák*, 2.a, G Košice; *Anton Ganzarčík*, 2.b, G Poprad; *Ladislav Béreš*, 2.a, G Košice; *Miroslav Beňuška*, 2.a, G Košice; *Oliver Rác*, 2.c, G Poprad; *Miro Dubovinský*, 2.b, G Spišská Nová Ves.

Kategorie C

Jana Borošová, 1.d, G Prešov; Peter Vasil, 1.c, G Michalovce; Jozef Jirásek, 1.a, G Košice; Katarína Dudičová, 1.c, G Prešov; Ivan Žezula, 1.a, G Košice; Ladislav Schichman, 1.b, G Sabinov; František Bereta, 1.a, G Košice; Vladimír Hura, 1.c, G Košice; Ladislav Maceňko, 1., SPŠ Michalovce; Michal Danilák, 1.c, G Prešov.

II. Přípravné úlohy I. kola

KATEGORIE A, B, C

Mezi přípravné úlohy XXV. ročníku MO jsou převážně zařazeny úlohy známé z předchozích ročníků naší soutěže. U těchto úloh uvádíme pouze odkaz, v kterém ročníku byly již řešeny. Údaj o stránce se vztahuje k příslušné ročence. Komentovaná řešení uvádíme jen u úloh, které byly v MO zadány poprvé.

Do první skupiny (opakované úlohy) patří:

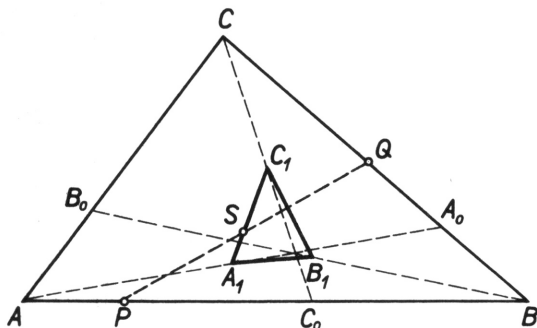
- A – P – 1 (roč. XVII. MO, str. 95),
- A – P – 2 (roč. XX. MO, str. 47),
- B – P – 1 (roč. XXI. MO, str. 136),
- B – P – 2 (roč. XXI. MO, str. 73),
- C – P – 1 (roč. XXI. MO, str. 48),
- C – P – 2 (roč. XVII. MO, str. 50),
- C – P – 3 (roč. XIX. MO, str. 86),
- C – P – 4 (roč. XV. MO, str. 54).

Do druhé skupiny (nové úlohy) patří:

- A – P – 3, A – P – 4, B – P – 3, B – P – 4.

K nim uvádíme následující komentáře:

V rovině je dán trojúhelník **T**. Najděte množinu středů všech takových úseček, které mají oba krajní body na hranici trojúhelníku **T** a které ji rozdělují na dvě stejně dlouhé části.



Obr. 1

Komentář. Uvažujme takto: Pohybuje-li se bod P po hranici daného trojúhelníku ABC stálou rychlostí, pohybuje se bod Q , který spolu s P dělí hranici na dvě stejně dlouhé části, také stálou a stejnou rychlostí. Platí však, jak se např. snadno dokáže metodou souřadnic: Pohybuje-li se v rovině bod P přímočaře rovnoměrně a bod Q přímočaře rovnoměrně, pohybuje se i střed úsečky PQ přímočaře rovnoměrně (popř. je pevný). Označme A_0 takový bod strany BC (proč je to vnitřní bod této strany?), pro který $AB + BA_0 = A_0C + CA$, obdobně B_0 , C_0 příslušné body na AC a AB , a dále A_1 , B_1 , C_1 středy AA_0 , BB_0 , CC_0 (obr. 1). Probíhá-li bod P úsečkou AC_0 , probíhá bod Q úsečkou A_0C , a tedy střed

úsečky PQ pak probíhá úsečku A_1C_1 . Pokračujeme-li dále, dostaneme, že hledanou množinou je hranice trojúhelníku (proč je to trojúhelník?) $A_1B_1C_1$. Uvedený nástin potřebuje ovšem propracovat.

Poznámka. Metodou souřadnic nebo pomocí Cevovy věty lze dokázat, že přímky AA_0 , BB_0 , CC_0 procházejí týmž bodem.

A – P – 4

Je-li trojúhelník T_1 obsažen v trojúhelníku T_2 , pak

(1) délka nejdelší strany trojúhelníku T_1 nepřevyší délku nejdelší strany trojúhelníku T_2 ;

(2) délka nejmenší výšky trojúhelníku T_1 nepřevyší délku nejmenší výšky trojúhelníku T_2 .

Dokažte a zjistěte, kdy v případě (1) a kdy v případě (2) nastane rovnost délek.

Nástin řešení. První tvrzení vyplývá z toho, že délka nejdelší strany trojúhelníku je největší vzdálenost dvou bodů trojúhelníku. Druhé pak z toho, že délka nejmenší výšky trojúhelníku je šířkou nejužšího pásu mezi rovnoběžkami, který daný trojúhelník obsahuje. (To se dokáže např. takto: Je-li P libovolný pás obsahující daný trojúhelník ABC , lze P tak „zúžit“ rovnoběžným zužováním v pás P' , že na každé hraniční přímce už leží alespoň jeden vrchol trojúhelníku. Nechť to jsou vrcholy A a B ; nechť π^+ je polorovina s hranicí AB , která obsahuje vrchol C . Pak alespoň jeden z úseků AA' , BB' kolmic k hraničním přímkám je obsažen v π^+ ; nechť je to AA' . Pak platí $\sphericalangle ABA' \geq \sphericalangle ABC$, a proto je výška v_a daného trojúhelníku menší nebo rovna šířce pásu

P' , tedy i P . Přitom existuje pás, jehož šířka je rovna délce nejmenší výšky.)

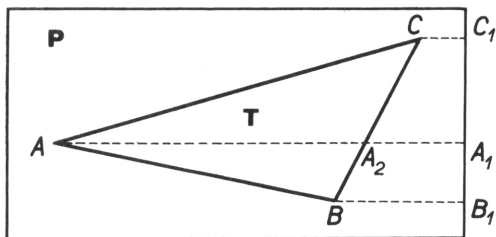
V případě (1) nastává rovnost délek, právě když některá z nejdelších stran trojúhelníku T_1 splývá s některou z nejdelších stran trojúhelníku T_2 . V případě (2) nastává rovnost délek, právě když některá z nejmenších výšek (tj. úseček) trojúhelníku T_1 je totožná s některou nejmenší výškou trojúhelníku T_2 .

B – P – 3

V rovině je dán pravoúhelník P a trojúhelník T , který je v něm obsažen. Dokažte, že o obsahu S_1 pravoúhelníku P a obsahu S_2 trojúhelníku T platí

$$2S_2 \leq S_1$$

a najděte všechny případy, kdy nastane rovnost.



Obr. 2

Nástin řešení. Lze postupovat např. takto (obr. 2):

Nechť z kolmých průmětů A_1 , B_1 , C_1 vrcholů trojúhel-

níku A, B, C na jednu stranu pravoúhelníku je např. A_1 bodem úsečky B_1C_1 . Je-li A_2 průsečík strany BC s přímkou vedenou bodem A rovnoběžně se směrem tohoto promítání, platí o obsahích

$$\begin{aligned} S_2 &= \triangle ABC = \triangle AA_2B + \triangle AA_2C = \\ &= \frac{1}{2}AA_2(A_1B_1 + A_1C_1) = \frac{1}{2}AA_2 \cdot B_1C_1 \leq \frac{1}{2}S_1. \end{aligned}$$

Rovnost nastane, právě když dva vrcholy trojúhelníku jsou sousedními vrcholy pravoúhelníku a třetí leží v protější straně pravoúhelníku.

B – P – 4

Mají-li čtyřstěny $ABCD$ a $A'B'C'D'$ vlastnost, že přímky AB a $A'B'$ splývají, přímky CD a $C'D'$ splývají a přitom platí $AB = A'B'$, $CD = C'D'$, pak mají stejný objem. Dokažte.

Komentář. Základní myšlenka je uvědomit si, že stačí tvrzení dokázat pro případ $C = C'$, $D = D'$ a tohoto tvrzení užít dvakrát. Uvedený speciální případ však ihned plyne z toho, že obsahy trojúhelníků ABD a $A'B'D'$ jsou si rovny a délky výšek k oběma čtyřstěnům z vrcholu C rovněž.

KATEGORIE Z

Z-P-1

a) Rozhodněte nejprve, pro která a, b, c má smysl výraz

$$V = \frac{(a-b)^2}{c^2 - ac - bc + ab} + \frac{(b-c)^2}{a^2 - ab - ac + bc} + \\ + \frac{(c-a)^2}{b^2 - bc - ba + ca}.$$

b) Dokažte, že pro každou trojici čísel a, b, c , pro niž má smysl, je výraz V roven témuž číslu, a vypočtete toto číslo.

Komentář. Úloha Z-P-1 byla poprvé zadána v I. kole kategorie D v VI. roč. MO. Její podrobné řešení lze též nalézt v knížce *Vybrané úlohy z matematické olympiády kat. Z* na str. 44, kterou zpracovali doc. J. Vyšín, CSc., a dr. V. Macháček; v roce 1971 ji vydalo SPN.

Z-P-2

Dokažte, že rozdíl každých dvou kladných trojciferných čísel, z nichž první je zapsáno v desítkové soustavě týmiž číslicemi jako druhé, avšak v opačném pořadí, je dělitelný 9 a 11.

Komentář. Úloha Z-P-2 je přístupná i žákům 8. roč. ZDŠ. Pro její řešení stačí znát běžná pravidla dělitelnosti devíti a jedenácti.

Obě čísla uvažovaná v textu úlohy mají týž ciferný součet, a proto při jejich dělení devíti dostaneme stejné zbytky. Tedy jejich rozdíl je dělitelný devíti.

Pro dělitelnost jedenácti platí *pravidlo*:

Dělíme-li přirozené číslo vyjádřené v desítkové soustavě jedenácti, dostaneme týž zbytek, jako dělíme-li jedenácti součet jeho číslic sudých řádů zmenšený o součet jeho číslic lichých řádů.

Z tohoto pravidla vyplývá, že obě trojčíselná čísla, o nichž se hovoří v textu úlohy, dávají při dělení jedenácti týž zbytek, takže jejich rozdíl je dělitelný jedenácti.

Žáci 9. ročníků k řešení úlohy asi využijí rovnosti

$$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 99(x - z),$$

která platí pro libovolná čísla x, y, z . Avšak i žáci 9. ročníku by si měli všimnout řešení pomocí pravidel dělitelnosti v desítkové soustavě.

Z – P – 3

Je dán rovnoběžník $ABCD$. Potom pro každý bod X roviny rovnoběžníku platí

$$AX < BX + CX + DX ;$$

dokažte.

Komentář. Pro řešení úlohy Z – P – 3 je třeba vědět, že pro vzdálenosti každých tří bodů U, V, T platí

$$UV \leq UT + TV.$$

Přitom rovnost nastane právě tehdy, když bod T náleží úsečce (nenulové či nulové) UV . Úloha je řešena a podrobně komentována v brožuře XXI. roč. MO na str. 66–69.

Z – P – 4

Pro každý trojúhelník ABC se středem S vepsané kružnice platí:

Jestliže

$$\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC > \sphericalangle BCA,$$

pak

$$AS < BS < CS.$$

Dokažte. Platí i věta obrácená k této větě?

Komentář. Řešení úlohy Z – P – 4 se zakládá na znalosti konstrukce středu vepsané kružnice trojúhelníku a na větách o vztahu mezi stranami a úhly trojúhelníku.

Je-li S střed vepsané kružnice $\triangle ABC$, pak z předpokladu, že $\sphericalangle BCA < \sphericalangle ABC$, plyne, že $\sphericalangle SCB < \sphericalangle SBC$. V $\triangle BSC$ je tedy

$$BS < CS. \tag{1}$$

Z předpokladu $\sphericalangle ABC < \sphericalangle CAB$ dále plyne, že $\sphericalangle ABS < \sphericalangle SAB$. V $\triangle ABS$ je tedy

$$AS < BS. \tag{2}$$

Podle (1) a (2) platí

$$AS < BS < CS.$$

Věta obrácená k právě dokázané větě platí. Její důkaz plyne z věty I. uvedené na str. 22 v učebnici G 8. Výše jsme užili věty II. ze str. 23.

III. Soutěžní úlohy I. kola

KATEGORIE A

A-I-1

Nájdite všetky usporiadané dvojice (x, y) nezáporných reálnych čísel, pre ktoré platí:

$$\frac{64x^2y^2}{4x^2 + y^2} = (x + 1)(y + 2)(2x + y).$$

Komentár. Riešenie tejto rovnice s dvoma neznámymi, ktorá má zmysel pre všetky dvojice $(x, y) \neq (0, 0)$ reálnych čísel, je založené na použití Cauchyho nerovnosti o aritmetickom a geometrickom priemere nezáporných reálnych čísel. Pre $(x, y) \neq (0, 0)$ je daná rovnica ekvivalentná s rovnicou

$$(x + 1)(y + 2)(2x + y)(4x^2 + y^2) = 64x^2y^2 \quad (1)$$

a pri $x \geq 0, y \geq 0$ možno na všetky štyri faktory ľavej strany rovnice (1) aplikovať Cauchyho nerovnosť – najlepšie vo formulácii: Pre ľubovoľnú dvojicu a, b nezáporných reálnych čísel platí $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, pričom rovnosť nastane vtedy a len vtedy, keď $a = b$.

To vedie hneď k záveru, že pre všetky $x \geq 0$, $y \geq 0$ platí

$$\begin{aligned} (x+1)(y+2)(2x+y)(4x^2+y^2) &\geq \\ &\geq 16 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{2y} \cdot \sqrt{2xy} \cdot \sqrt{4x^2y^2} = 64x^2y^2. \end{aligned}$$

Riešenie $x = 1$, $y = 2$ dostaneme z podmienky pre rovnosť.

A-1-2

Nech n a k sú prirodzené čísla a $a_1, a_2, \dots, a_n$ kladné reálne čísla, pre ktoré platí $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$.

Dokážte, že platí

$$a_1^{-k} + a_2^{-k} + \dots + a_n^{-k} \geq n^{k+1}.$$

Komentár. Na dôkaz tvrdenia úlohy sa priamo núka metóda úplnej indukcie podľa n . Pre $n = 1$ je $a_1 = 1$ a pre každé prirodzené číslo k zrejme platí rovnosť.

Ťažisko riešenia úlohy je vo vhodnom využití indukčného predpokladu pri dôkaze správnosti tvrdenia pre $n + 1$. Stačí si však uvedomiť, že ak

$$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$$

sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j = 1,$$

potom $0 < a_{n+1} < 1$ a ľahko dostaneme

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{1 - a_{n+1}} = 1.$$

Ak použijeme indukčný predpoklad pre

$$b_j = \frac{a_j}{1 - a_{n+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

dostaneme nerovnosť

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j^{-k} \geq \frac{n^{k+1}}{(1 - a_{n+1})^k} + \frac{1}{a_{n+1}^k}. \quad (2)$$

K úplnosti dôkazu zostáva ukázať, že pravá strana nerovnosti (2) je pre každé reálne číslo $0 < a_{n+1} < 1$ nie menšia než $(n + 1)^{k+1}$. Možno to urobiť napr. tak, že nájdeme minimum funkcie f :

$$f: (0, 1) \mapsto (-\infty, \infty)$$

definovanej predpisom

$$f: x \mapsto \frac{n^{k+1}}{(1 - x)^k} + \frac{1}{x^k}.$$

Použijúc prvú a druhú deriváciu, dostaneme, že funkcia dosahuje minimum v bode

$$\frac{1}{n + 1}.$$

A-1-3

Dané sú prirodzené čísla k a n , $k \leq n$, $n \geq 3$. Určete v intervale $(0, \pi)$ množinu všetkých takých hodnot, ktoré môže nadobúdať veľkosť k -tého najväčšieho vnútorného

uhla konvexného n -uholníka. (Pod k -tým najväčším vnútorným uhlom n -uholníka rozumieme k -ty člen nerastúcej n -člennej postupnosti veľkosti jeho uhlov.)

Komentár. Kvôli zjednodušeniu úvah možno označiť vnútorné uhly $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ konvexného n -uholníka tak, aby platilo

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n.$$

K odvodeniu príslušných odhadov pre α_k , $k = 1, 2, \dots, n$ vyjdeme z toho, že α_k nemôže byť menšie ako aritmetický priemer veľkostí uhlov $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ a nemôže byť väčšie ako aritmetický priemer veľkosti uhlov $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, pričom využijeme základné vzťahy, ktorým vyhovujú veľkosti vnútorných uhlov konvexného n -uholníka:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi, \quad \alpha_1 < \pi, \quad \alpha_n > 0.$$

Takým spôsobom možno ľahko získať nasledujúce odhady:

$$\begin{aligned} \frac{n-2}{n}\pi &\leq \alpha_1 < \pi, \\ \frac{n-k-1}{n-k+1}\pi &< \alpha_k < \pi, \quad k = 2, \dots, n-2; \\ 0 < \alpha_{n-1} &< \frac{n-2}{n-1}\pi, \quad 0 < \alpha_n \leq \frac{n-2}{n}\pi. \end{aligned} \tag{3}$$

Zostáva ukázať, že existujú konvexné n -uholníky, veľkosti vnútorných uhlov, ktoré vyhovujú nerovnostiam

(3) tak, že je splněná podmienka

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots \geq \alpha_n.$$

K tomu stačí uviesť príklad n -uholníka uvedených vlastností pre každý jednotlivý prípad.

Na ukážku se budeme zabývat jen podmínkou α_k . Zvolme libovolné přirozené číslo $n \geq 4$ a číslo $k \in \{2, 3, \dots, n-2\}$. Dále zvolme libovolné reálné číslo x splňující nerovnosti

$$\frac{n-k-1}{n-k+1} \pi < x < \pi.$$

Nejdříve dokážeme, že pro uvažovaná čísla n a k platí

$$\frac{n-k-1}{n-k+1} \pi < \frac{n-2}{n} \pi < \pi. \quad (4)$$

Pravá nerovnost je zřejmá, druhou dokážeme nepřímou. Nechť

$$\frac{n-k-1}{n-k+1} \geq \frac{n-2}{n}. \quad (5)$$

Pak

$$n(n-k-1) \geq (n-2)(n-k+1),$$

odkud plyne

$$-n \geq n-2n+2k-2,$$

tj.

$$k \leq 1,$$

což je spor. Tedy nerovnost (5) neplatí a platí (4).

Dále rozlišme tři případy:

a) Necht' $x = \frac{n-2}{n} \pi$. Pak položíme

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{n-2}{n} \pi.$$

Odtud plyne, že n -úhelník s k -tým největším úhlem o velikosti x existuje a je jím např. pravidelný n -úhelník.

b) Necht' $\frac{n-k-1}{n-k+1} \pi < x < \frac{n-2}{n} \pi$. Potom položíme

$$\alpha_k = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = x$$

a

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = \frac{(n-2)\pi - (n-k+1)x}{k-1}.$$

Snadno se dokáže, že

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi, \quad (6)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} > \alpha_k = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n.$$

Odtud již plyne existence n -úhelníka, jehož k -tý největší úhel má velikost x .

c) Necht' $\frac{n-2}{n} \pi < x < \pi$. Potom položíme

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = x$$

a

$$\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_n = \frac{(n-2)\pi - k \cdot x}{n-k}.$$

Snadno se dokáže, že platí (6) a že

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k > \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n > 0.$$

Z těchto vztahů již vyplývá existence n -úhelníka, jehož k -tý největší úhel má velikost x .

A—I—4

V rovině je dán čtverec $P_1P_2P_3P_4$. Určete množinu vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, o nichž platí, že $AC = BD$, přičemž celá úhlopříčka BD leží ve čtverci $P_1P_2P_3P_4$.

Komentář. Nejprve uvážíme, jaká je množina $\mathbf{V}(B, D)$ vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, pro které $AC = BD$, jsou-li oba body B a D pevné. (Výsledkem je množina bodů, které mají od úsečky BD vzdálenost menší než BD , a přitom neleží na přímce BD .) Pak stačí zjistit, co je sjednocení všech množin $\mathbf{V}(B, D)$, probíhají-li body B a D všechny možné dvojice navzájem různých bodů čtverce $P_1P_2P_3P_4$. Z rozboru vyplývá, že výsledkem je sjednocení $\mathbf{V}(P_1, P_3) \cup \mathbf{V}(P_2, P_4)$, což je sjednocení čtyř shodných otevřených kruhů o středech P_1, P_2, P_3, P_4 a poloměrech P_1P_3 .

A—I—5

V rovině jsou dány dva trojúhelníky $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T}_2$. Sestrojte takový rovnoběžník $ABCD$, jehož vrcholy A a C leží na hranici trojúhelníku $\mathbf{T}_1$ a rozdělují ji na dvě stejně dlouhé

části a zároveň vrcholy B a D leží na hranici trojúhelníku T_2 , kterou také rozdělují na dvě stejně dlouhé části.

Komentář. K řešení užijeme výsledku 3. přípravné úlohy kategorie A. Je-li totiž $ABCD$ některý rovnoběžník vyhovující úloze, pak střed tohoto rovnoběžníku je obsažen jak v množině středů všech úseček, jejichž krajní body pólí obvod trojúhelníku T_1 , tak i v obdobné množině trojúhelníku T_2 . Pro středy hledaných rovnoběžníků proto padají v úvahu jen průsečíky hranic trojúhelníků T_1 a T_2 , které jsou řešením zmíněné přípravné úlohy. Z takto vzniklých průsečíků je třeba odstranit ty, které nevedou k rovnoběžníku (jsou-li úsečky, které pólí obvody trojúhelníků, obsaženy v přímce). Ze zbylých středů najdeme řešení. Množina středů může obsahovat i nekonečně mnoho bodů (mají-li hranice trojúhelníků T_1 a T_2 společnou úsečku). Může proto i množina hledaných rovnoběžníků být nekonečná.

A – I – 6

V rovině jsou dány dva trojúhelníky $\triangle_1, \triangle_2$ této vlastnosti: Ke každému rovnoramennému trojúhelníku T_1 , který obsahuje $\triangle_1$, resp. $\triangle_2$, existuje trojúhelník T_2 shodný s T_1 , který obsahuje $\triangle_2$, resp. $\triangle_1$. Dokažte, že trojúhelníky $\triangle_1, \triangle_2$ jsou shodné.

Komentář. Základní myšlenkou řešení je volit k jednomu z daných trojúhelníků $\triangle_1$ (o stranách $a \leq b \leq c$) a $\triangle_2$ (o stranách $a' \leq b' \leq c'$) opsaný rovnoramenný trojúhelník určité vlastnosti (s nejmenší maximální stranou apod.).

Druhý trojúhelník pak nutně má opsaný rovnoramenný trojúhelník téže vlastnosti, který je s předchozím rovnoramenným trojúhelníkem shodný. Přitom užijeme 4. přípravné úlohy kategorie A.

Všimněme si, že trojúhelník $\triangle_1$ je obsažen v rovnoramenném trojúhelníku s rameny délky c , která svírají úhel α (je $\alpha \leq 60^\circ$), ale není obsažen podle (1) zmíněné přípravné úlohy v žádném rovnoramenném trojúhelníku s rameny délky menší než c , svírajícími úhel α , ani v žádném rovnoramenném trojúhelníku s rameny délky c , svírajícími úhel menší než α .

Protože podobný výrok platí i o trojúhelníku $\triangle_2$, je nutně $c' = c$ a $\alpha' = \alpha$.

Uvědomíme-li si, že k $\triangle_1$ existuje rovnoramenný trojúhelník, jehož nejmenší výška je rovna v_c , pak z (2) zmíněné přípravné úlohy vyplývá obdobnou úvahou $v_c = v'_c$. Odtud snadno plyne shodnost obou trojúhelníků $\triangle_1$ a $\triangle_2$.

KATEGORIE B

B-I-1

Nech a, b, c sú ľubovoľné kladné reálne čísla. Potom neexistuje trojuholník, ktorého strany by mali dĺžky

$$a\sqrt{c^2 - b^2}, \quad b\sqrt{c^2 - a^2}, \quad c^2.$$

Dokážte.

Komentár. Je zrejmé, že sa stačí obmedziť na prípad $c > a, c > b$. Formulácia úlohy nabáda k tomu, aby si rie-

šiteľ zvolil metódu nepriamého dôkazu. Ak predpokladáme, že trojuholník so stranami daných dĺžok existuje, bude to znamenať, že dané čísla musia vyhovovať trojuholníkovým nerovnostiam. K dôkazu daného tvrdenia bude stačiť, ak z niektorej z nich odvodíme spor.

Je prirodzené najskôr to skúsiť s nerovnosťou

$$c^2 < a\sqrt{c^2 - b^2} + b\sqrt{c^2 - a^2}. \quad (1)$$

K ďalšej úprave nerovnosti (1) je treba preskúmať vzájomný vzťah čísel c^2 a $a\sqrt{c^2 - b^2}$, resp. c^2 a $b\sqrt{c^2 - a^2}$. Z daných podmienok ľahko odvodíme, že $c^2 > a\sqrt{c^2 - b^2}$, čo nám umožní (1) upraviť na tvar

$$0 < c^2 - a\sqrt{c^2 - b^2} < b\sqrt{c^2 - a^2},$$

z ktorého po umocnení a jednoduchých úpravách už ľahko dostaneme $(a - \sqrt{c^2 - b^2})^2 < 0$.

B – I – 2

Je daný konvexný deväťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$. Päť z jeho vrcholov zafarbíme na červeno, zostávajúce štyri na modro. Koľkými spôsobmi možno realizovať takéto zafarbenie vrcholov, ak má práve trinásť uhlopriečok deväťuholníka spájať vrcholy rovnakej farby?

Komentár. Ide o jednoduchú kombinatorickú úlohu, ktorú možno riešiť najjednoduchšie úplným výčtom a rozborom možností.

Uvedomíme si, koľkými úsečkami možno spojiť vrcholy rovnakej farby. Lahko sa vidí, že červené vrcholy spája celkom 10 úsečiek, modré vrcholy 6 úsečiek. Z týchto úsečiek sú však niektoré stranami daného deväťuholníka, zatiaľ čo nás zaujímajú len jeho uhlopriečky. Treba si uvedomiť, že k tomu, aby úsečka spájajúca vrcholy rovnakej farby bola stranou, je nutné a stačí, aby tieto vrcholy boli susednými vrcholmi daného deväťuholníka.

Ďalej možno uvažovať napr. tak, že modré vrcholy rozdelia obvod konvexného 9-uholníka na 4 časti, v ktorých je určitým spôsobom rozmiestnených 5 červených vrcholov. Analýzou jednotlivých prípadov sa možno ľahko presvedčiť, že počet uhlopriečok spájajúcich červené vrcholy je vždy o 3 väčší než počet uhlopriečok spájajúcich vrcholy modré. Z toho vyplýva, že 13 uhlopriečok spájajúcich vrcholy rovnakej farby sa dostane práve vtedy, keď bude 8 červených a 5 modrých. Zo 6 modrých úsečiek môže byť teda len jedna stranou 9-uholníka. Tú možno vybrať práve 9 spôsobmi. Medzi vrcholmi, ktoré spája táto strana neleží ani jeden červený vrchol. Zostáva teda zistiť, koľkými spôsobmi možno 5 červených vrcholov rozdeliť do troch častí obvodu deväťuholníka určených modrými vrcholmi, pričom je zrejmé, že žiadna z týchto častí nemôže zostať prázdna. Každý riešiteľ už ľahko môže zistiť, že to ide práve 6 spôsobmi (3,1,1; 1,3,1; 1,1,3; 2,2,1; 2,1,2; 1,2,2). Z toho priamo vyplýva, že zafarbenie vrcholov s požadovanými vlastnosťami možno realizovať $9 \cdot 6 = 54$ spôsobmi.

Pre všetky reálne čísla x je definovaná reálna funkcia f takto:

$$f: x \mapsto \frac{x^2 + 2px - 2}{x^2 - 2x + 2}, \quad (2)$$

kde p je parameter.

Určte všetky reálne čísla p , pre ktoré platí

$$|f(x)| < 2 \quad (3)$$

pre všetky reálne čísla x .

Komentár. Ľahko sa presvedčíme, že diskriminant trojčlena $x^2 - 2x + 2$ je záporný, čo znamená, že predpisom (2) je funkcia f definovaná pre všetky reálne x . Keďže $x^2 - 2x + 2 > 0$ pre $x \in (-\infty, \infty)$, ľahko možno získať sústavu nerovností ekvivalentnú s (3):

$$3x^2 + 2(p - 2)x + 2 > 0, \quad x^2 - 2(p + 2)x + 6 > 0. \quad (4)$$

Ak dojdeme k tejto sústave, stačí si uvedomiť, za akých podmienok pre p budú nerovnosti (4) súčasne splnené pre všetky reálne x . Bude to zrejme vtedy, keď kvadratické funkcie na ľavých stranách nerovností nebudú mať reálne korene. To dáva podmienky pre diskriminanty

$$(p - 2)^2 - 6 < 0 \quad \text{a} \quad (p + 2)^2 - 6 < 0,$$

z ktorých pre p dostávame sústavu nerovností. Jej riešenie by už nemalo byť problémom. Znázornením získaných vzťa-

hov na číselnej osi dostaneme pre p podmienku

$$2 - \sqrt{6} < p < -2 + \sqrt{6}. \quad (5)$$

Obrátením postupu sa ľahko presvedčíme, že všetky p určene (5) vyhovujú podmienkam úlohy.

B – I – 4

V rovine jsou dány dva tupouhlé trojúhelníky takové, že v každém případě, když jeden z nich je obsažen v nějakém pravoúhelníku $\mathbf{P}_1$, pak existuje pravoúhelník $\mathbf{P}_2$, který je shodný s $\mathbf{P}_1$ a obsahuje druhý z daných trojúhelníků. Dokažte, že oba dané trojúhelníky jsou shodné.

Komentář. Cesta k řešení je volit takové pravoúhelníky opsané daným trojúhelníkům $\triangle_1$ (o stranách $a \leq b \leq c$) a $\triangle_2$ (o stranách $a' \leq b' \leq c'$), které mají určité vlastnosti (např. nejmenší obsah apod.) a které jsou trojúhelníky $\triangle_1$ a $\triangle_2$ jednoznačně určeny. Přitom užijeme výsledku 3. přípravné úlohy kategorie B.

Podle výsledku této úlohy existuje k tupouhlému trojúhelníku $\triangle_1$ jediný opsaný pravoúhelník $\mathbf{P}$, který má obsah rovný dvojnásobku obsahu trojúhelníku $\triangle_1$ (všechny ostatní mají obsah větší). Tento pravoúhelník má jednu stranu délky c a druhou délky v_c , která je (proč?) menší než c .

Obdobně existuje k tupouhlému trojúhelníku $\triangle_2$ jediný opsaný pravoúhelník $\mathbf{P}'$ nejmenšího obsahu a jeho strany mají délky c' a $v'_c < c'$.

Z předpokladu úlohy snadno plyne, že pravoúhelník $\mathbf{P}$ je shodný s pravoúhelníkem $\mathbf{P}'$. Tedy je $c = c'$ a $v_c = v'_c$,

neboť c a c' jsou větší ze stran. K dokončení důkazu shodnosti trojúhelníků $\triangle_1$ a $\triangle_2$ stačí ukázat, že o nejmenších úhlech platí $\alpha = \alpha'$. Kdyby bylo např. $\alpha < \alpha'$, pak by k pravoúhelníku P_1 obsahujícímu $\triangle_1$, jehož úhlopříčka je stranou délky c trojúhelníku $\triangle_1$ a jehož úhel úhlopříčky a strany je α , neexistoval shodný pravoúhelník obsahující $\triangle_2$.

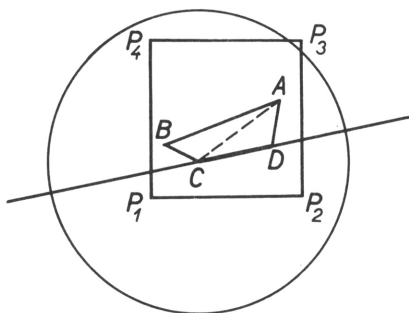
B—I—5

V rovině je dán čtverec $P_1P_2P_3P_4$. Najděte množinu vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, jejichž strana CD je celá obsažena ve čtverci $P_1P_2P_3P_4$ a je druhou nejdelší stranou čtyřúhelníku $ABCD$.

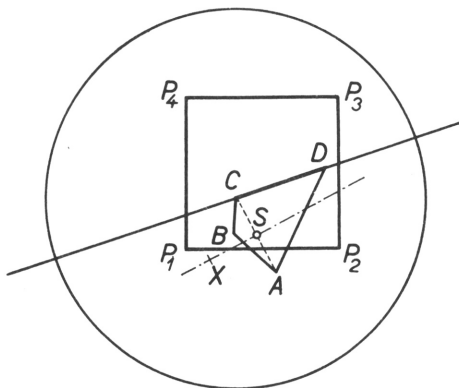
Komentář. Nejprve najdeme pro pevné body C a D množinu $\mathbf{M}(C, D)$ vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, u nichž je CD druhou nejdelší stranou (to znamená, že jsou-li p, q, r, s délky stran a $p \geq q \geq r \geq s$, pak $CD = q$). Z názoru dojdeme k domněnce, že $\mathbf{M}(C, D)$ je otevřený kruh $\mathbf{K}$ (tj. kruh bez hraniční kružnice) se středem C a poloměrem rovným dvojnásobku délky CD , z něhož jsou vyňaty body přímky CD . Důkaz pak probíhá např. takto: Je-li $ABCD$ čtyřúhelník uvedených vlastností (obr. 3a, b), pak je buď $AD \leq CD$, a pak $AC < AD + CD \leq 2 \cdot CD$, anebo $AD > CD$, ale pak nutně $BC \leq CD$ i $AB \leq CD$, tedy $AC < AB + BC \leq 2 \cdot CD$. Tedy A leží uvnitř kruhu $\mathbf{K}$ a mimo přímku CD .

Je-li obráceně A vnitřní bod kruhu $\mathbf{K}$, neležící na přímce CD , pak dostaneme čtvrtý vrchol B čtyřúhelníku $ABCD$ uvedených vlastností, např. takto: Je-li $AD < CD$, volíme

jako bod B čtvrtý vrchol rovnoběžníku $ABCD$. Je-li $AD \geq CD$, označíme S střed úsečky AC a SX tu polopřímku v ose úsečky AC , která neobsahuje vnitřní body



a)



b)

Obr. 3

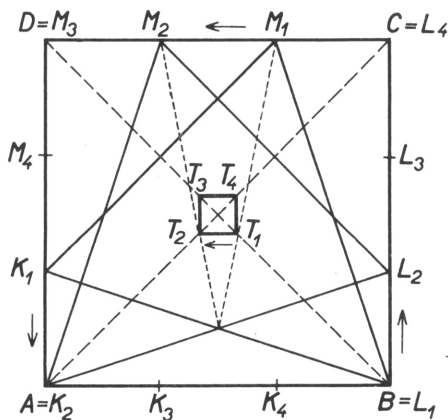
trojúhelníku ACD . Jako bod B pak volíme nějaký bod polopřímky SX , dostatečně blízký k bodu S a různý od S .

Odtud již snadno vyplývá, že řešením úlohy je sjednocení čtyř otevřených kruhů o středech P_1, P_2, P_3 a P_4 a polo-

měrech rovných dvojnásobku délky P_1P_3 . Toto sjednocení skutečně obsahuje každou množinu $\mathbf{M}(C, D)$, probíhající-li body C a D body daného čtverce $P_1P_2P_3P_4$.

B – I – 6

V rovině je dán čtverec. Najděte množinu těžišť všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží na hranici čtverce tak, že dělí jeho obvod na tři části stejné délky.



Obr. 4

Komentář. K řešení této úlohy lze např. užít metody analytické geometrie. Postupným vyšetřením těch částí hledané množiny, u nichž všechny tři vrcholy proměnného trojúhelníku probíhají úsečky, dostáváme výsledek. Hledanou mno-

žinou je hranice čtverce, který má společný střed a přímky úhlopříček s daným čtvercem a jehož strana má délku rovnou devítině délky strany daného čtverce (obr. 4).

KATEGORIE C

C-I-1

Je dáno 7 navzájem různých prvočísel. Pak součin všech jejich kladných rozdílů je dělitelný číslem 163 840. Dokažte.

Komentář. Upozorňujeme, že mezi danými prvočísly může být jediné sudé prvočíslo 2, které působí jisté potíže, a proto budeme pracovat jen s 6 lichými prvočísly, která uspořádáme vzestupně

$$2 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < p_6.$$

Kladných rozdílů prvočísel $p_1, \dots, p_6$ je $\binom{6}{2} = 15$. Součin s kladných rozdílů daných prvočísel obsahuje tedy 15 sudých činitelů a je dělitelný číslem $2^{15} = 32\,768$. Přezkoumáme vztah mezi čísly 163 840 a 32 768 a zjistíme, že je

$$32\,768 \cdot 5 = 163\,840.$$

Tato malá analýza nás dovedla k závěru: Je třeba dokázat, že aspoň jeden činitel čísla s je 5. Přitom používáme jedné věty z elementární číselné teorie: Jsou-li čísla x, y nesoudělná, pak číslo N je dělitelné součinem $x \cdot y$, právě když je dělitelné každým z čísel x, y .

Důkaz dělitelnosti čísla s číslem 5 je trochu náročnější; opírá se o metodu velmi typickou, které by se měla věnovat pozornost; jde v podstatě o zbytkové třídy – neboli zbytky čísel při dělení číslem 5.

Utvoříme 5 kladných rozdílů

$$p_2 - p_1, \quad p_3 - p_1, \quad p_4 - p_1, \quad p_5 - p_1, \quad p_6 - p_1. \quad (1)$$

a) Jsou-li zbytky modulo 5 u pěti kladných rozdílů (1) vesměs navzájem různé, musí se mezi nimi vyskytovat také zbytek 0; příslušný rozdíl je pak násobek pěti a naše tvrzení je v případě a) dokázáno.

b) Pripusťme tedy, že aspoň dva z rozdílů (1) dávají tentýž zbytek z modulo 5; např.

$$p_2 - p_1 = 5\alpha + z, \quad p_5 - p_1 = 5\beta + z; \quad (2)$$

přitom α, β jsou navzájem různá nezáporná celá čísla, $\alpha < \beta$. Vypočteme z (2) kladný rozdíl $p_5 - p_2$;

$$p_5 - p_2 = 5(\beta - \alpha),$$

kde $\beta - \alpha$ je kladné číslo. Proto je $p_5 - p_2$ násobek pěti a naše tvrzení je dokázáno také v případě b).

C-I-2

Dokažte, že každé přirozené číslo $x > 1$ lze napsat právě jedním způsobem ve tvaru

$$x = \frac{n(n+1)}{2} + y,$$

kde $1 \leq y \leq n+1$.

Komentář. Formulace úlohy není právě nejšťastnější. Úloha by se měla přeformulovat takto:

Ke každému přirozenému číslu $x > 1$ existuje právě jedna dvojice přirozených čísel (n, y) tak, že platí

$$x = \frac{1}{2}n(n+1) + y$$

a zároveň

$$1 \leq y \leq n+1.$$

Z této nové formulace lze utvořit kultivovanější text bez zbytečné proměnné y ; zní takto:

Ke každému přirozenému číslu $x > 1$ existuje jediné přirozené číslo n tak, že platí

$$1 \leq x - \frac{1}{2}n(n+1) \leq n+1. \quad (1)$$

Přičtením čísla $\frac{1}{2}n(n+1)$ ke všem stranám nerovnosti (1) dostaneme ekvivalentní nerovnosti

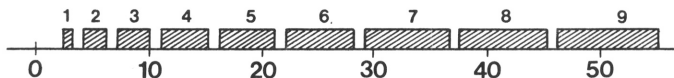
$$\frac{1}{2}n(n+1) + 1 \leq x \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \quad (2)$$

Doporučujeme sestavit tabulku dolních a horních mezí intervalů (2) pro $n = 1$ až 12.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{2}n(n+1) + 1$	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79
$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91

Doporučujeme dále znázornit na číselné ose tyto intervaly (jejichž hranice jsou v předchozí tabulce v sloupcích); obr. 5.

Na obr. jsou připsány i délky intervalů. Z názoru je patrné, že každé přirozené číslo x náleží do jediného z těchto intervalů. Příčinou tohoto faktu je, že dolní hranice



Obr. 5

$(n + 1)$ -ho intervalu je právě o 1 větší než horní hranice n -tého intervalu. Skutečně:

$$\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) + 1 - \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) = 1.$$

Ověříme ještě, že předpoklad „ n je přirozené číslo“ je nezbytný. Zvolíme-li např. $x = 4$, vyhovuje $n = 2$ (interval $\langle 4; 6 \rangle$), ale také např. $n = \frac{3}{2}$ (interval $\langle \frac{23}{8}; \frac{35}{8} \rangle$). Nepožadujeme-li, aby n bylo přirozené číslo, má úloha více řešení.

C – I – 3

Pro která reálná m má rovnice

$$\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + mx} = \frac{2}{1 + x} \quad (1)$$

celočíslné kořeny? Určete je.

Komentář. Stává se pomalu tradicí, že v komentáři upozorňujeme na nutnost zabývat se textem úlohy, objasnit ho, vyslovit úlohu určitěji, popřípadě hledat jiné její formulace.

Tato činnost je velmi užitečná pro matematickou erudici; z tohoto hlediska je taková „škola formulací“ vítaná; vždyť praxe nedává matematikovi také zcela přesně formulované úlohy.

V úloze C–I–3 je na první pohled zřejmé, že daná rovnice (1) má celočíselný kořen $x = 0$ pro každé reálné m . Tím je vlastně zodpověděna první otázka. Úloha „určete je“ není dost jasná; jsou míněny celočíselné kořeny nebo reálná m nebo obojí? Měli bychom asi žádat a) nalezení množiny **M** všech hodnot parametru m , pro které má daná rovnice (1) aspoň jedno celočíselné nenulové řešení; b) vyjádření příslušných celočíselných kořenů pomocí m ; c) vyjádření prvků m množiny **M**, která bude asi nekonečná, pomocí nějaké funkce f .

Z následujícího výčtu vyloučíme $x = 0, 1, -1$; neboť $x = 0$ je kořenem pro každé reálné m , pro $x = 1, -1$ pozbývá rovnice (1) smyslu. Z (1) pak dostaneme

$$(3m - 1)x = m - 3$$

a odtud

$$m = \frac{x - 3}{3x - 1} \quad (2)$$

a

$$x = \frac{m - 3}{3m - 1}. \quad (3)$$

Zvolíme-li v (2) za x libovolné celé číslo různé od 0, 1, -1 , dostaneme všechna čísla m z množiny **M**, neboli rovnice (2) udává funkci f . To zjistíme zkouškou – dosazením do (1)

za m z (2); vyjde

$$\frac{1}{1-x} + \frac{3x-1}{3x-1+x^2-3x} = \frac{2}{1+x};$$

po úpravě

$$\frac{2}{x+1} = \frac{2}{1+x}.$$

Otázka b) je zodpověděna rovnicí (3) s tím doplňkem, že ke každému reálnému m přísluší ještě $x = 0$ (z (3) dostaneme $x = 0$ jedině pro $m = 3$).

C–I–4

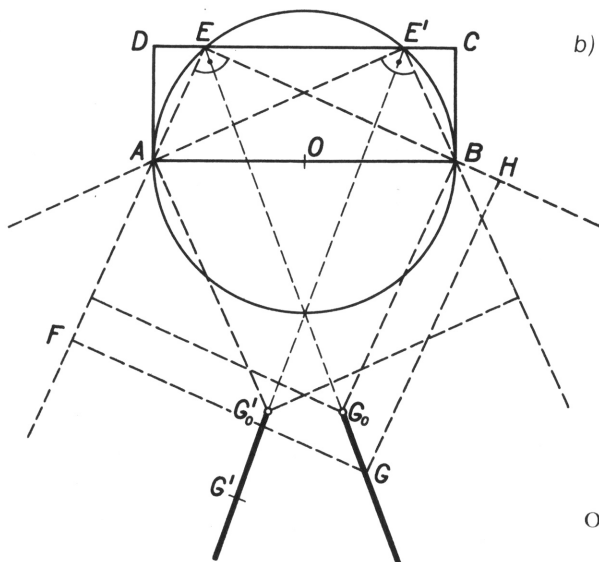
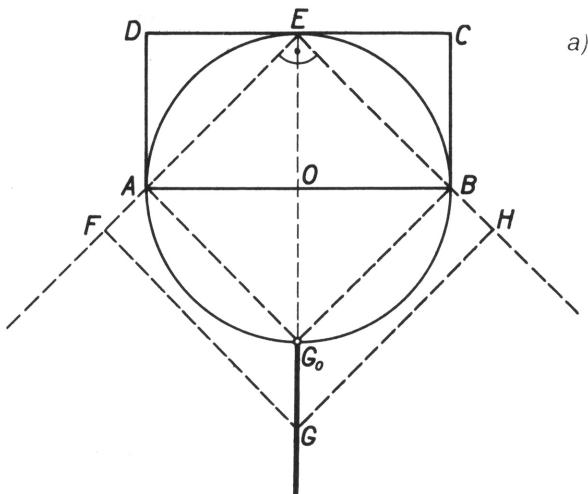
Je dán pravoúhelník $ABCD$. Sestrojte množinu vrcholů G všech takových čtverců $EFGH$, že bod E leží na úsečce CD a body F a H po řadě leží na prodlouženích úseček EA , EB za body A , B .

Komentář. Tato úloha je celkem nenáročná. Při jejím řešení plně vystačíte se znalostmi získanými v 7. a 8. roč. ZDŠ.

Řešení úlohy C–I–4 má tři klíčové body:

1. Je třeba si všimnout, že $\sphericalangle AEB = 90^\circ$, tj. že bod E leží na Thaletově půlkružnici nad průměrem AB . Odtud je zřejmé, že pro $\frac{1}{2}AB < BC$ je hledaná množina prázdná a že bude vhodné v dalších úvahách rozlišit dva případy podle toho, zda $\frac{1}{2}AB = BC$ nebo $\frac{1}{2}AB > BC$ (obr. 6a a 6b).

2. Dále je třeba uvážit, že polopřímka EG je osou úhlu AEB . Body hledané množiny mohou tedy ležet jedině na osách pravých úhlů AEB , kde bod E leží na úsečce CD .



Obr. 6

3. Je třeba realizovat požadavek, aby body F a H po řadě ležely na prodlouženích úseček EA , EB za body A , B .

Hledaná množina je znázorněna na obr. 6a a 6b. Na obr. 6a je to otevřená polopřímka G_0G , kdežto na obr. 6b sjednocení dvou otevřených polopřímek G_0G a G'_0G' .

Poznámka. Doporučujeme čtenářům, aby řešili zobecněné úlohy, v nichž je $EFGH$

- a) obdélník s daným poměrem stran;
- b) kosočtverec s daným vnitřním úhlem $\sphericalangle FEH$;
- c) rovnoběžník s daným vnitřním úhlem $\sphericalangle FEH$ a s daným poměrem stran.

C – I – 5

Na dané kružnici se pohybují v témž smyslu stálými rychlostmi tři body A , B , C ; první má dobu oběhu T , druhý $\frac{1}{2}T$, třetí $\frac{1}{3}T$. V čase $t = 0$ uvedené body splývaly. Kolikrát v časovém intervalu $\langle 0, T \rangle$ tvořily body A , B , C vrcholy pravoúhlého trojúhelníku?

Komentář. V této úloze se seznámíte s matematickým popisem periodických dějů. Řešení úlohy vyžaduje znalost Thaletovy věty, výpočtu délky kružnice, zákona dráhy rovnoměrného pohybu, tedy látky probírané nejpozději v 8. ročníku ZDŠ.

K úvodnímu seznámení s problematikou periodických dějů mohou posloužit následující úlohy.

1. Po kružnici o poloměru 2 cm se pohybuje bod s periodou $T = 10$ s. Určete jeho dráhu za a) 1 s, 2 s, 5 s, 10 s,

16 s, 20 s; b) za dobu t ; $t + T$, $t + \frac{1}{2}T$, $t + kT$, kde k je celé číslo.

2. Vypočtete postupnou rychlost v bodu, který oběhne kružnici o poloměru r za dobu T .

3. Po kružnici se pohybuje bod X s periodou T . Průměr této kružnice je AB . Bod X prošel bodem A v okamžiku t_0 . Určete:

a) čas bezprostředně předchozího a bezprostředně následujícího průchodu bodu X α) bodem A , β) bodem B ;

b) čas prvních tří po sobě jdoucích průchodů bodu X , které následovaly po okamžiku t_0 α) bodem A , β) bodem B ;

c) čas t_k , v němž bod X prošel po k -té od okamžiku t_0 α) bodem A , β) bodem B ;

d) jakou dráhu urazil bod X od t_0 do t_k ?

4. Po kružnici obíhají ve stejném smyslu dva body X a Y s periodami T_X a T_Y .

α) Kolikrát za dobu T_X body X a Y splynou, platí-li:

a) $T_X : T_Y = 2 : 1$; b) $T_X : T_Y = 1 : 1$; c) $T_X : T_Y = 3 : 2$.

Řešte též pro případ, že body X a Y obíhají v navzájem opačných smyslech. Záleží na tom, od jakého okamžiku měříme čas t ?

β) Určete dobu jejich k -tého vzájemného splynutí od okamžiku $t = 0$, kdy se začaly pohybovat z téhož bodu.

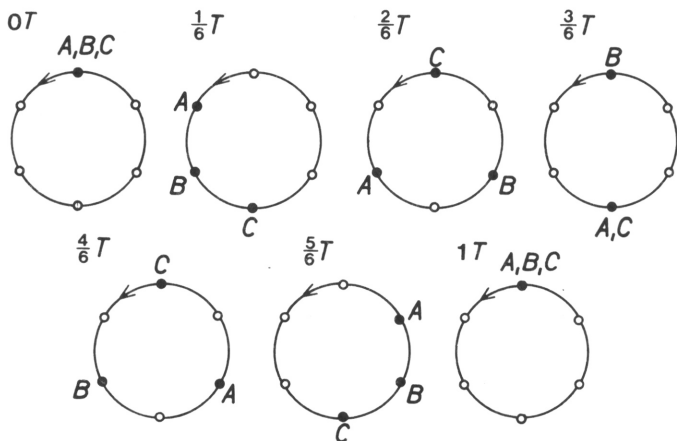
Přistupme k naší úloze. Body A , B , C tvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku, právě když dva z nich jsou krajními body téhož průměru dané kružnice, přičemž třetí bod nesplyne se žádným z nich. Jsou tedy celkem tři možnosti (které?).

Úloha C–I–5 i přípravné úlohy jsou v podstatě úlohy geometrické; proto by bylo nevhodné, kdybychom je řešili jen algebraicky, bez obrázků.

Úloha C–I–5 se dá řešit experimentálně pomocí obrázků, znázorňujících fáze pohybů všech tří bodů A , B , C pro

$$0, \frac{1}{6}T, \frac{2}{6}T, \frac{3}{6}T, \frac{4}{6}T, \frac{5}{6}T, T.$$

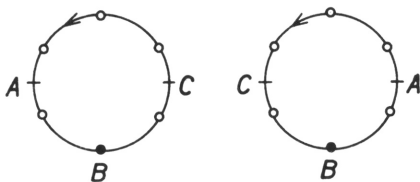
Provedení je patrné z obr. 7, který lze nahradit pohyblivým modelem. Z tohoto obrázku lze snadno vyčíst, že dvo-



Obr. 7

jice A , B a dvojice B , C jsou v intervalu $\langle 0, T \rangle$ krajními body průměru jen pro $A = C$, naproti tomu u dvojice A , C nastane tato situace dvakrát a bod B přitom nesplyne se žádným z bodů A , C (viz obr. 8).

Při kreslení náčrtů stále užíváme faktu, že bod B , resp. C se pohybuje dvakrát, resp. třikrát rychleji než bod A . Výsledky získané intuitivně kontrolujeme výpočty.



Obr. 8

Probereme podrobněji případ, kdy úsečka AB je průměrem dané kružnice. To nastane, právě když rozdíl drah s_B bodu B a s_A bodu A (měřených od okamžiku $t = 0$) je roven lichému násobku délky půlkružnice, tj. $(2k - 1)\pi r$, kde k je celé kladné číslo. Platí tedy

$$2vt - vt = (2k - 1)\pi r.$$

Dosadíme

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

a po úpravě máme

$$t = (2k - 1) \cdot \frac{1}{2}T.$$

V intervalu $\langle 0; T \rangle$ však leží jediné t splňující poslední rovnici, totiž $\frac{1}{2}T$.

Nyní určíme polohu bodu C . Tento bod urazil za čas $\frac{1}{2}T$ dráhu

$$s_c = 3vt = 3 \cdot \frac{2\pi r}{T} \cdot \frac{1}{2}T = 3\pi r,$$

takže splývá s bodem A . Body A, B, C tedy netvoří v žádném okamžiku vrcholy pravoúhlého trojúhelníku, jehož přeponou by byla úsečka AB .

Stejným způsobem postupujeme i v dalších případech. Ukáže se, že je nemožné, aby přeponou trojúhelníku byla úsečka BC .

Výpočet ukáže, že je možný jedině případ, kdy přeponou trojúhelníku je AC . Tento případ nastane v $\langle 0; T \rangle$ dvakrát.

Úlohu C–I–5 můžeme obměnit např. tím, že změníme poměr period třeba na $1:3:4$, nebo ho zadáme obecněji. Jinou obměnu získáme tím, že budeme uvažovat trojúhelník rovnostranný či rovnoramenný apod. Body A, B, C se nemusí pohybovat po kružnici. Mohou probíhat obvod, např. trojúhelníku (rovnostranného, pravoúhlého aj.) nebo čtverce či jinou uzavřenou rovinnou křivku. Tak dostaneme další varianty úlohy.

C–I–6

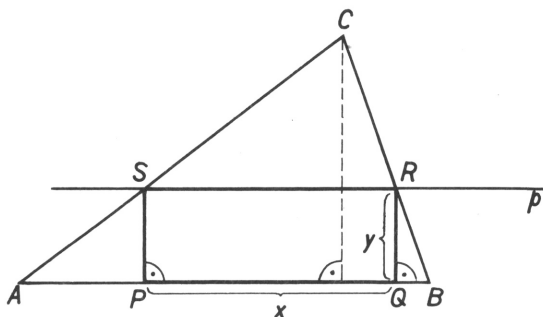
Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Označme $\mathbf{M}$ množinu všech pravoúhelníků, jejichž dva vrcholy leží na straně AB a zbývající dva na stranách AC a BC .

a) Dokažte větu **V**: Jestliže dva různé pravoúhelníky z množiny $\mathbf{M}$ mají též obvod o , pak všechny pravoúhelníky z množiny $\mathbf{M}$ mají obvod o .

b) Nalezněte aspoň jeden takový trojúhelník ABC , ve kterém je splněn předpoklad věty **V**.

Komentář. Každý řešitel by se měl nejdříve zamyslet nad tím, jak postupovat při vepisování pravoúhelníků danému

$\triangle ABC$, mají-li náležet do množiny **M**. S tímto problémem se bylo možno setkat již při řešení úlohy C – P – 3. Nejprve sestojíme uvnitř poloroviny ABC rovnoběžku p s přímkou AB , jejíž vzdálenost od AB je menší než výška v trojúhelníku ABC na stranu AB (obr. 9). Průsečíky přímky p se



Obr. 9

stranami AC a BC označme po řadě S a R . Z bodů S a R spusťme kolmice na přímku AB a označme jejich paty po řadě P a Q . Trojúhelník ABC je ostroúhlý, a proto body P a Q jsou vnitřními body úsečky AB . Pak pravoúhelník $PQRS$ je zřejmě prvkem množiny **M**.

Dalším problémem, na který asi každý řešitel narazí, je vyjádření velikosti strany PQ vepsaného pravoúhelníku $PQRS$ pomocí vzdálenosti QP přímky p od strany AB a pomocí nějakých prvků daného $\triangle ABC$. Charakter problému odpovídá užití velikosti strany AB .

Položme $AB = c$, $PQ = x$ a $QR = y$. Z podobnosti troj-

úhelníků ABC a SRC plyne

$$x : c = (v - y) : v,$$

tj.

$$x = \frac{(v - y)c}{v}.$$

Pro obvod o vepsaného pravoúhelníku $PQRS$ pak dostáváme

$$\begin{aligned} o &= 2 \cdot \left(\frac{(v - y)c}{v} + y \right), \\ o &= \frac{2}{v} \cdot ((v - c)y + vc). \end{aligned} \quad (1)$$

Vzorec (1) otevírá cestu k řešení dané úlohy.

a) Necht' dva různé pravoúhelníky $PQRS$ a $P'Q'R'S'$ patřící do množiny $\mathbf{M}$ mají též obvod o . Přitom necht' $PQ \subset AB$, $P'Q' \subset AB$, $QR = y$ a $Q'R' = y'$. Zřejmě $y \neq y'$. Ze vzorce (1) plyne

$$(v - c)y + vc = (v - c)y' + vc,$$

tj.

$$(y - y')(v - c) = 0.$$

Protože $y \neq y'$, je

$$v = c. \quad (2)$$

Podle vzorce (1) pak dostáváme, že v každém ostroúhlém $\triangle ABC$, v němž je splněn předpoklad věty **V**, je obvod každého pravoúhelníku z množiny $\mathbf{M}$ roven $2c$. Tím je věta **V** dokázána.

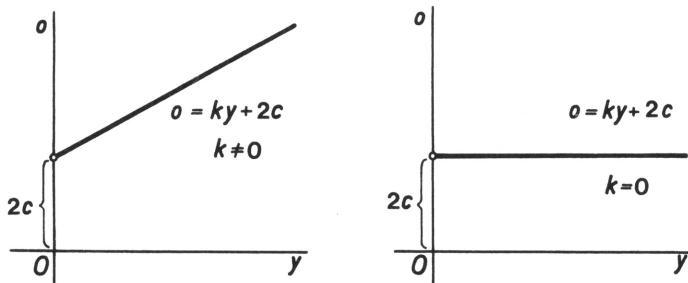
b) V předešlém odstavci jsme dokázali, že v každém ostroúhlém $\triangle ABC$, v němž platí (2), kde $AB = c$ a v je výška

na stranu AB , mají všechny pravoúhelníky z množiny $\mathbf{M}$ též obvod. Množina $\mathbf{M}$ má přitom nekonečně mnoho prvků. Tedy předpoklad věty **V** splňuje každý ostroúhlý $\triangle ABC$, v němž strana AB a výška na ni mají stejnou velikost.

Elegantnější řešení úlohy nabízí toto funkční pojetí vzorce (1). Označíme-li $\frac{2(v - c)}{v} = k$, zní (1)

$$o = ky + 2c. \quad (3)$$

Čísla k , $2c$ jsou konstanty, y , o proměnné; funkce (3) je lineární, jejím grafem je přímka buď různoběžná s osou y (je-li $k \neq 0$), nebo rovnoběžná s osou y (je-li $k = 0$); viz obr. 10.



Obr. 10

Úlohu C–I–6 lze dále rozvíjet. Sama se nabízí otázka: Je prvkem množiny $\mathbf{M}$ vždy aspoň jeden čtverec? Docházíme tak ke známé úloze vepsat danému ostroúhlému trojúhelníku čtverec. Dále se lze zamyslet nad tím, zda by ne-

bylo možno úlohu C–I–6 zobecnit i pro případ, kdy $\triangle ABC$ není ostroúhlý.

Logickou strukturu úlohy C–I–6 lze objevit také např. při řešení této úlohy:

Je dán ostroúhlý $\triangle ABC$.

a) Dokažte větu **P**: Jestliže uvnitř strany AB existují dva různé body, které mají též součet d vzdáleností od stran AC a BC , pak každý vnitřní bod strany AB má součet vzdáleností od stran AC a BC roven číslu d .

b) Nalezněte aspoň jeden takový $\triangle ABC$, ve kterém je splněn předpoklad věty **P**.

KATEGORIE Z

Z–I–1

Je dán výraz

$$a^2 + b^2 + \left(\frac{ab}{a-b} \right)^2.$$

a) Dosadíme-li $a = 5$, $b = 7$, dostaneme zlomek, jehož jmenovatel i číselník je druhou mocninou přirozeného čísla. Přesvědčte se o tom.

b) Dokažte, že vlastnost popsanou v odstavci a) má každá dvojice navzájem různých celých čísel a , b .

Komentář. Pro $a = 5$, $b = 7$ vypočteme $74 + \left(-\frac{35}{2}\right)^2 = \frac{1521}{4} = \left(\frac{39}{2}\right)^2$. Vlastní důkaz (úloha b) záleží v úpravě daného výrazu. Jakýsi „vtip“ důkazu je v tom, že nebudeme provádět všechny naznačené výkony, ale že budeme stále

„hlídat“, zda se nám při výpočtu neobjeví v čitateli druhá mocnina mnohočlenu.

Daný výraz můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{1}{(a-b)^2} \cdot [(a^2 + b^2)(a-b)^2 + a^2b^2].$$

Stačí upravit výraz v lomených závorkách takto:

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 2ab) + a^2b^2 = \\ & = (a^2 + b^2)^2 - 2ab(a^2 + b^2) + a^2b^2. \end{aligned}$$

Při pozorném pohledu vidíme, že poslední výraz je druhou mocninou dvojčlenu

$$(a^2 + b^2) - ab.$$

Z – I – 2

Dokažte, že každé přirozené číslo $n \geq 6$ lze vyjádřit jako součet dvou přirozených čísel, z nichž jedno je prvočíslo a druhé je číslo složené.

Komentář. Tato úloha je přiměřená žákům 8. ročníku. Jediný impuls, který stačí, je pokyn, aby člen součtu, který je prvočíslo, byl co nejmenší (2, 3). Druhý člen bude určité složené číslo, bude-li to číslo sudé a větší než 2. Provedeme několik pokusů s prvočísly 2, 3.

$$10 = 2 + 8, \quad 7 = 3 + 4, \quad 26 = 2 + 24,$$

$$19 = 3 + 16, \dots$$

Z nich je patrné, že je třeba rozlišit případy, kdy dané číslo n je sudé a kdy je liché. Je-li číslo $n \geq 6$, je

pro sudé n : $n - 2 \geq 4$, $n - 2$ sudé ;

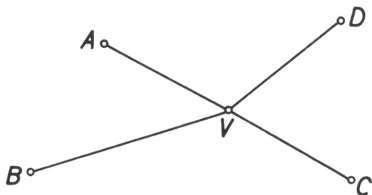
pro liché n : $n - 3 \geq 4$, $n - 3$ sudé .

Z-I-3

V rovině daného vypuklého čtyřúhelníku $ABCD$ naleznete všechny body, jejichž součet vzdáleností od vrcholů A, B, C, D je nejmenší.

Komentář. Úlohu je možno formulovat také takto:

V polabské rovině se má vybudovat vodovod pro čtyři farmy státního statku, které leží ve vrcholech konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 11). Kde by bylo třeba postavit vodojem V , aby celková délka přípojek AV, BV, CV, DV byla co nejkratší?



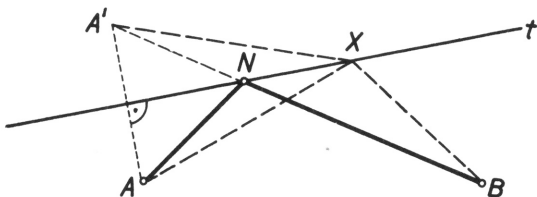
Obr. 11

Úlohy s obdobným námětem minimalizace se vyskytují dost často. Velmi známá je např. tato úloha:

Na obr. 12 znázorňují body A, B dvě vesnice a přímka t

železniční trať. Kde je třeba vybudovat společné nádraží N , aby celková délka silnic AN a BN byla minimální?

Tato úloha je velmi snadná, leží-li body A, B v opačných polorovinách s hranicí t . Leží-li body A, B v téže polo-rovině, pak nádraží bude v bodě N , který je průsečíkem



Obr. 12

přímky t a přímky BA' , kde bod A' je obrazem bodu A v souměrnosti s osou t . Podle trojúhelníkové nerovnosti totiž pro každý bod $X \in t$ platí

$$\begin{aligned} AX + BX &= A'X + BX \geq A'B = \\ &= A'N + NB = AN + BN. \end{aligned}$$

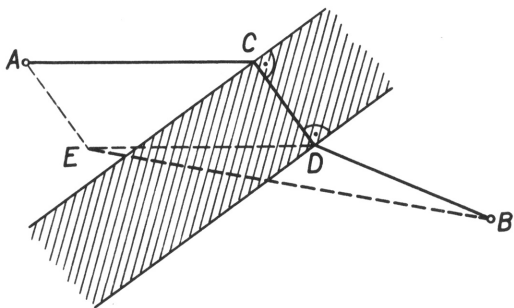
V knížce *Zajímavá geometrie* od J. I. Perelmana (Mladá fronta 1954, překlad z ruštiny) je na str. 67 další obdobná úloha:

Mezi body A a B teče řeka (nebo je průplav) s přibližně rovnoběžnými břehy (obr. 13). Přes řeku se má postavit most v pravém úhlu k jejím břehům. Kde je třeba vybrat místo pro most, aby cesta z A do B byla nejkratší?

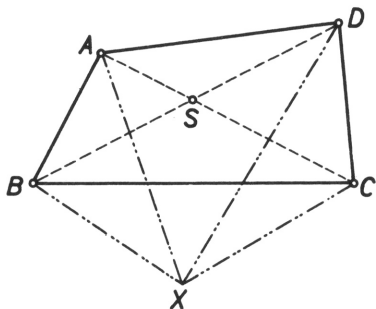
Při řešení vyjdeme z toho, že minimální má být součet $AC + DB$, tj. součet $ED + DB$, kde AE a CD jsou shodné

a souhlasně orientované úsečky. Je tedy třeba, aby bod D ležel uvnitř úsečky EB .

Vraťme se k úloze Z–I–3. Hledaný bod je jediný a je průsečíkem S úhlopříček daného čtyřúhelníku $ABCD$



Obr. 13



Obr. 14

(obr. 14). Odhad, že řešením je bod S , je nejobtížnější krok při řešení dané úlohy. Důkaz správnosti tohoto odhadu je již snadný. Pro každý bod X roviny daného čtyřúhelníku

totiž platí:

$$\begin{aligned} & AX + BX + CX + DX = \\ & = (AX + CX) + (BX + DX) \geq AC + BD. \end{aligned}$$

Rovnost nastává, právě když bod X leží zároveň uvnitř úsečky AC i BD , tj. právě když $X = S$.

Poznámka. Zobecněním úlohy Z-I-3 se velmi populárně zabývá na str. 78 knížka L. A. Ljusternika *Variační principy v geometrii a ve fyzice* (SNTL 1957, překlad z ruštiny). Uvedená knížka vznikla z přednášek pro účastníky moskevské MO.

Z-I-4

Je dán obdélník $ABCD$ a přirozené číslo n . Sestrojte vně obdélníku $ABCD$ po řadě na přímkách AB , BC , CD , DA body A' , B' , C' , D' tak, aby platilo

$$AA' = CC' = \frac{1}{n} AB$$

a

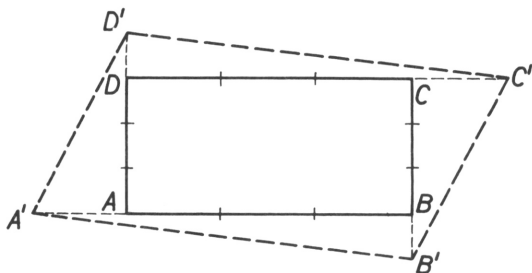
$$BB' = DD' = \frac{1}{n} BC.$$

a) Dokažte, že body A' , B' , C' , D' jsou vrcholy rovnoběžníku.

b) Vypočtete obsah rovnoběžníku $A'B'C'D'$ pomocí čísla n a obsahu P obdélníku $ABCD$.

c) Pro které přirozené číslo n má rovnoběžník $A'B'C'D'$ největší možný obsah?

Komentář. Úloha Z–I–4 by neměla působit ani žákům 8. ročníků větší potíže. Na obr. 15 je $n = 3$. Místo A', B', C', D' by bylo vhodnější označovat body A_n, B_n, C_n, D_n .



Obr. 15

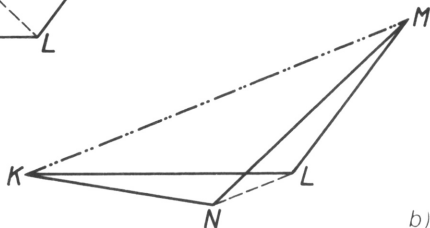
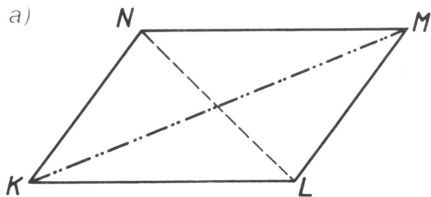
Část a) plyne ze vztahů

$$\triangle A'B'B \cong \triangle C'D'D$$

a

$$\triangle CC'B' \cong \triangle AA'D'.$$

a)



Obr. 16

b)

K důkazu užijeme věty sus. Považujeme za vhodné upozornit, že k tomu, aby čtyři body K, L, M, N byly vrcholy rovnoběžníku, nestačí splnění podmínek $KL = MN$ a $LM = NK$ (obr. 16a, b). Buď je ještě třeba se zabývat rovnoběžností stran, nebo si povšimnout, zda úsečky KM a NL jsou skutečně úhlopříčkami. Proto by bylo lépe užít souměrnosti podle průsečíku úhlopříček AC, BD . Tato souměrnost vyměňuje body A', C' a B', D' a tvrzení a) je evidentní.

b) Označme a, b velikosti AB, BC . Pak pro obsah P_n rovnoběžníku $A'B'C'D'$ ($A_nB_nC_nD_n$) platí

$$\begin{aligned} P_n &= P + 2(P_{A'B'B} + P_{A'D'A}) = \\ &= P + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a \cdot \frac{b}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot b \cdot \frac{a}{n} = \\ &= P + 2 \cdot \frac{n+1}{n^2} \cdot ab = \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2} \cdot P. \end{aligned}$$

c) Zkusme nejdříve vyšetřit, kdy $\triangle A'B'B$ má největší možný obsah. Odvěsny má zřejmě největší možné pro číslo $n = 1$. Tedy obsah $\triangle A'B'B$ je největší možný pro $n = 1$.

Obdobně zjistíme, že také $\triangle A'D'A$ má největší možný obsah pro $n = 1$. Tedy odpověď v části c) zní: $n = 1$.

Část c) by bylo možno také řešit hledáním maxima funkce

$$f: n \mapsto \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2}$$

v oboru přirozených čísel. Z rovnosti

$$\frac{n^2 + 2n + 2}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}$$

plyne, že toto maximum nastává pro $n = 1$; lze totiž snadno dokázat, že $f(n)$ s rostoucím n klesá. To vyplývá z výpočtu

$$f(n) - f(n + 1) = \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n + 1} \right) + \left(\frac{2}{n^2} - \frac{2}{(n + 1)^2} \right) > 0.$$

Každý dvojčlen v závorkách je totiž kladné číslo, neboť ze dvou zlomků s týmiž čitateli je větší ten, který má menšího jmenovatele.

Jinak nejjednodušší odůvodnění tvrzení c) je geometrické: všechny body A_n, B_n, C_n, D_n ($n > 1$) padnou zřejmě do vnitřku rovnoběžníku $A_1B_1C_1D_1$, a proto platí pro obsahy pro všechna $n > 1$

$$A_nB_nC_nD_n < A_1B_1C_1D_1.$$

Poznámka. Úlohy podobné úloze Z – I – 4 lze nalézt v kap. IV. na str. 152 v knížce Vyšín – Macháček: *Vybrané úlohy z MO kat. Z* (SPN 1971).

IV. Úlohy II. kola

KATEGORIE A

A – II – 1a

Je dané prirodzené číslo $n \geq 2$ a reálne čísla a_i, b_i ,
 $i = 1, 2, \dots, n$, pre ktoré platí

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n, \quad 0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n.$$

Potom platí

I.:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n > a_1 b_2 + \dots + a_{n-1} b_n + a_n b_1,$$

II.:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n > a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

Dokažte.

Riešenie. I. Nerovnosť dokážeme matematickou indukciou. Pre $n = 2$ máme

$$0 < (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) = a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

z čoho hneď vyplýva

$$a_1b_1 + a_2b_2 > a_1b_2 + a_2b_1.$$

Nech pre čísla $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n, n+1$ platí

$$0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1}, \quad 0 < b_1 < \dots < b_n < b_{n+1}, \quad (1)$$

a daná nerovnosť je správna pre prirodzené číslo n . Potom

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} a_ib_i &= \sum_{i=1}^n a_ib_i + a_{n+1}b_{n+1} > a_1b_2 + \dots + \\ &+ a_{n-1}b_n + a_nb_1 + a_{n+1}b_{n+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Z toho, že $b_{n+1} > b_1, a_{n+1} > a_n$, vyplýva

$$a_nb_1 + a_{n+1}b_{n+1} > a_nb_{n+1} + a_{n+1}b_1 \quad (3)$$

a z (2), (3) vyplýva správnosť danej nerovnosti pre prirodzené číslo $n+1$.

Opäť použijeme metódu matematickej indukcie. Pre $n=2$ sme nerovnosť dokázali vyššie. Nech pre čísla $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n, n+1$ platí (1) a nech je daná nerovnosť správna pre prirodzené číslo n , pričom je budeme aplikovať na čísla $0 < a_1 < \dots < a_n, 0 < b_2 < \dots < b_{n+1}$, tj.

$$a_1b_2 + \dots + a_nb_{n+1} > a_1b_{n+1} + \dots + a_nb_2. \quad (4)$$

Ak ke každej strane nerovnosti (4) pripočítame $a_{n+1}b_1$ a použijeme nerovnosť I., dostaneme II. pre prirodzené číslo $n+1$. Tým sú obe časti tvrdenia dokázané.

Je daná funkcia

$$f(x) = \frac{12x - 6x^2}{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 9}.$$

Určete všetky reálne čísla x , pre ktoré $f(x)$ nadobúda najmenšiu hodnotu.

Riešenie. 1. *spôsob*: Čitateľa zlomku, ktorým je daná funkcia definovaná možno písať v tvare $-6(x^2 - 2x)$. Keďže $(x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, možno menovateľa zlomku prepísať do tvaru

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 9 = (x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x) + 9$$

a ak označíme $x^2 - 2x = z$, potom pre $x \neq 0$, $x \neq 2$, tj. $z \neq 0$, platí

$$y = \frac{-6}{\left(z + \frac{9}{z}\right) - 3}. \quad (1)$$

Keďže podľa Cauchyho nerovnosti pre $z > 0$ platí

$$z + \frac{9}{z} = 6, \quad (2)$$

pričom rovnosť v (2) nastane vtedy a len vtedy, keď $z = 3$, ľahko sa vidí, že pre všetky $z > 0$ je $y \geq -2$; najmenšiu hodnotu $y = -2$ nadobúda daná funkcia pre $z = 3$ čiže pre $x^2 - 2x = 3$, odkiaľ dostaneme $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Pre $z = 0$ je totiž $y = 0$ a pre $z < 0$ je jmenovateľ zlomku (1) záporný a $y > 0$.

Záver: Daná funkcia nadobúda najmenšiu hodnotu pre $x = -1$ a $x = 3$.

2. *způsob*: Funkci f upravíme na tvar

$$f(x) = \frac{k}{g(x)},$$

kde k je konstanta. Dělením zjistíme, že

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 9 = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3) + 9,$$

takže pro $x \neq 0$, $x \neq 2$ lze psát

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(-6)(x^2 - 2x)}{(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3) + 9} = \\ &= \frac{-6}{x^2 - 2x - 3 + \frac{9}{x^2 - 2x}}. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že $f(x)$ bude minimální, právě když funkce

$$g(x) = x^2 - 2x - 3 + \frac{9}{x^2 - 2x}$$

bude minimální v kladných hodnotách. Derivujeme funkci g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x - 2 - \frac{9(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \\ &= 2(x - 1) \frac{(x^2 - 2x)^2 - 9}{(x^2 - 2x)^2}. \end{aligned}$$

Odtud již snadno zjistíme, že $g'(x)$ se anuluje jednak pro $x = 1$ (ale $g(1) < 0$), jednak pro $x = -1$ a $x = 3$, což jsou

právě hledané hodnoty. Je totiž

$$(x^2 - 2x)^2 - 9 = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 3);$$

první trojčlen má kořeny -1 a 3 , druhý nemá reálné kořeny.

3. *způsob*: Velmi jednoduché řešení vychází z faktu (který lze „objevit“, když si aspoň hruba nakreslíme průběh funkce f pro malé hodnoty argumentu), že graf funkce f je symetrický vzhledem k přímce $x = 1$.

Položme $x = 1 + y$; funkce f tak přejde ve funkci

$$h(y) = (-6) \frac{y^2 - 1}{y^4 - 5y^2 + 13},$$

která je zřejmě sudá. Položíme-li dále $y^2 = z$, přejde funkce h na funkci

$$q(z) = (-6) \frac{z - 1}{z^2 - 5z + 13}.$$

Funkci q snadno zderivujeme:

$$\begin{aligned} q'(z) &= (-6) \cdot \frac{z^2 - 5z + 13 - 2z^2 + 7z - 5}{(z^2 - 5z + 13)^2} = \\ &= \frac{6}{(z^2 - 5z + 13)^2} (z^2 - 2z - 8). \end{aligned}$$

Funkce q' se anuluje pro

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 8} = \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix}.$$

Zápornému kořenu neodpovídá reálné y ; kořenu $z = 4$ odpovídají hodnoty $y = +2$ a $y = -2$, tzn. $x = 3$ a $x = -1$.

Zbývá ověřit, že v těchto bodech má f , resp. h skutečně *minimum*, což se provede obvyklým způsobem.

A – II – 2a

Jsou dány trojúhelníky $\mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T}_2$ s obsahy P_1 a P_2 a poloměry vepsaných kružnic ϱ_1 a ϱ_2 . Je-li trojúhelník $\mathbf{T}_1$ obsažen v trojúhelníku $\mathbf{T}_2$, pak platí

$$\varrho_1 \geq \frac{P_1}{P_2} \varrho_2 .$$

Dokažte.

Řešení. Označme o_1, o_2 délky obvodů prvního a druhého trojúhelníku. Platí tedy

$$P_1 = \frac{1}{2} o_1 \varrho_1 ,$$

$$P_2 = \frac{1}{2} o_2 \varrho_2 .$$

Proto je dokazovaná nerovnost ekvivalentní nerovnosti

$$o_1 \leq o_2 ,$$

kterou nyní dokážeme.

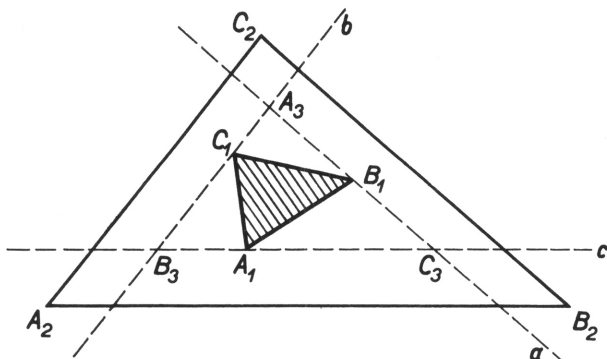
1. *způsob*: Budiž $\mathbf{T}_1 = \triangle A_1 B_1 C_1$, $\mathbf{T}_2 = \triangle A_2 B_2 C_2$, $\mathbf{T}_1 \subset \subset \mathbf{T}_2$ (obr. 17).

Vedme rovnoběžku c se stranou $A_2 B_2$ tím z vrcholů A_1, B_1, C_1 , který má nejmenší vzdálenost od přímky $A_2 B_2$ (na

obr. 17 je to vrchol A_1); pak přímka c odděluje přímku A_2B_2 a trojúhelník $\mathbf{T}_1$. Obdobně sestrojme přímky a , b . Pak označme A_3 , B_3 , C_3 (v libovolném pořádku) vrcholy trojúhelníku $\mathbf{T}_3$, určeného přímkami a , b , c . Nyní stačí dokázat, že pro obvody o_1 , o_2 , o_3 trojúhelníků $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$ platí

$$o_1 \leq o_3, \quad (1)$$

$$o_3 \leq o_2. \quad (2)$$



Obr. 17

Ad (1). Všechny vrcholy A_1 , B_1 , C_1 leží na obvodě trojúhelníku $\mathbf{T}_3$. Je tedy např. $A_1B_1 \leq A_1C_3 + B_1C_3$; tato nerovnost platí, ať leží body A_1 , B_1 na různých stranách $\mathbf{T}_3$ nebo na téže straně. Sečtením tří takových nerovností dostaneme nerovnost (1).

Ad (2). Nerovnost (2) dokážeme, uvědomíme-li si, že každá strana trojúhelníku $\mathbf{T}_3$ je menší nebo rovna té straně trojúhelníku $\mathbf{T}_2$, s níž je rovnoběžná (např. na obr. 17 je $A_3B_3 < A_2C_2$, neboť body A_3 , B_3 leží v trojúhelníku $\mathbf{T}_2$).

2. způsob: Prodloužíme stranu A_1B_1 trojúhelníku $\mathbf{T}_1$; její průsečíky s obvodem $\mathbf{T}_2$ označíme P, Q (obr. 18).

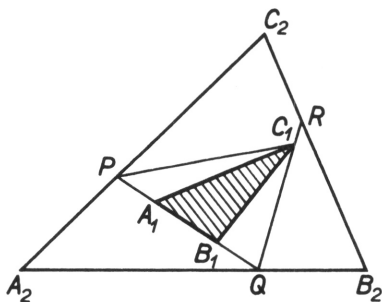
Pro obvod o_3 trojúhelníku PQC_1 platí podle trojúhelníkové nerovnosti

$$o_1 \leq o_3. \quad (3)$$

Je totiž $A_1C_1 \leq A_1P + PC_1$, $B_1C_1 \leq B_1Q + QC_1$.

Neleží-li bod C_1 na obvodě trojúhelníku $\mathbf{T}_2$, prodloužíme stranu QC_1 a její druhý průsečík s obvodem $\mathbf{T}_2$ označíme R . Pro obvod o_4 trojúhelníku PQR platí podle trojúhelníkové nerovnosti

$$o_3 \leq o_4. \quad (4)$$



Obr. 18

Spojením (3), (4) dostaneme nerovnost $o_1 \leq o_4$. Trojúhelník PQR má všechny vrcholy na obvodě $\mathbf{T}_2$; je tedy

$$o_4 \leq o_2. \quad (5)$$

Spojením (3), (4), (5) dostaneme nerovnost $o_1 \leq o_2$.

Najděte všechny hodnoty parametru t , pro které rovnice

$$|x| + |x - y| + y + t = 0 \quad (1)$$

je analytickým vyjádřením úhlu; přitom (x, y) jsou kartézské souřadnice bodu v rovině.

Řešení. Najdeme množinu dvojic (x, y) vyhovující rovnici (1) pro pevné $t = t_0$. Budeme tyto dvojice hledat ve čtyřech množinách:

$$\mathbf{M}_1 = \{(x, y) \mid x \geq 0 \wedge x - y \geq 0\},$$

$$\mathbf{M}_2 = \{(x, y) \mid x \geq 0 \wedge x - y < 0\},$$

$$\mathbf{M}_3 = \{(x, y) \mid x < 0 \wedge x - y \geq 0\},$$

$$\mathbf{M}_4 = \{(x, y) \mid x < 0 \wedge x - y < 0\}.$$

V $\mathbf{M}_1$ je (1) ekvivalentní s $x + (x - y) + y + t_0 = 0$ neboli

$$x = -\frac{1}{2}t_0; \quad (2)$$

v $\mathbf{M}_2$ je (1) ekvivalentní s $x - (x - y) + y + t_0 = 0$ neboli

$$y = -\frac{1}{2}t_0; \quad (3)$$

v $\mathbf{M}_3$ je (1) ekvivalentní s $-(x) + (x - y) + y + t_0 = 0$ neboli

$$t_0 = 0; \quad (4)$$

v $\mathbf{M}_4$ je (1) ekvivalentní s $-(x) - (x - y) + y + t_0 = 0$ neboli

$$x - y = \frac{1}{2}t_0. \quad (5)$$

Rozlišujme nyní hodnoty parametru t_0 .

1. Je-li $t_0 > 0$, nedostáváme v žádné z množin $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$ řešení.

2. Je-li $t_0 = 0$, je v $\mathbf{M}_1$ řešení $x = 0, x - y \geq 0$,
v $\mathbf{M}_2$ není žádné řešení,
v $\mathbf{M}_3$ je celé $\mathbf{M}_3$ řešením,
v $\mathbf{M}_4$ není žádné řešení.

Celkem jsou pro $t_0 = 0$ řešením všechny dvojice (x, y) , pro něž je zároveň $x \leq 0$ a $x - y \geq 0$. Každá z těchto nerovností je v rovině souřadnic x, y analytickým vyjádřením (uzavřené) poloroviny. Průnikem těchto polorovin je konvexní úhel.

3. Je-li $t_0 < 0$, dostáváme v $\mathbf{M}_1$ polopřímku $x = -\frac{1}{2}t_0, y \leq -\frac{1}{2}t_0$, v $\mathbf{M}_2$ úsečku $y = -\frac{1}{2}t_0, 0 \leq x < -\frac{1}{2}t_0$, v $\mathbf{M}_3$ prázdnou množinu a v $\mathbf{M}_4$ polopřímku $y = x - \frac{1}{2}t_0, x < 0$.

Je proto $t = 0$, jediná hodnota parametru t , již odpovídá v rovině souřadnic x, y úhel.

A – II – 3a

Sú dané reálne čísla x, y tak, že existujú

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4}(x + y)^2 = a, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{4}(x - y)^2 = b.$$

Vyjadrite $\operatorname{tg}(xy)$ pomocou čísel a, b . Pre ktoré a, b nie je $\operatorname{tg}(xy)$ definované?

Řešení. Označme $u = \frac{1}{4}(x + y)^2, v = \frac{1}{4}(x - y)^2$. Protože $xy = u - v$, máme vyjádřit $\operatorname{tg}(xy)$, tj. $\operatorname{tg}(u - v)$, pomocí

$\operatorname{tg} u$ a $\operatorname{tg} v$. Užijeme vzorce:

$$\operatorname{tg}(u - v) = \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v},$$

pokud $1 + \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v \neq 0$; je-li $1 + \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} v = 0$, není $\operatorname{tg}(u - v)$ definován.

Dostáváme výsledek: Je-li $ab = -1$, není $\operatorname{tg}(xy)$ definován; je-li $ab \neq -1$, je

$$\operatorname{tg}(xy) = \frac{a - b}{1 + ab}.$$

A – II – 3b

Je dán ostroúhlý trojúhelník **T** s obsahem P . Sestrojte aspoň jeden pravoúhlý trojúhelník, který je obsažen v trojúhelníku **T** a má obsah větší nebo rovný $\frac{1}{3}P\sqrt{3}$.

Řešení. Pokusíme se sestrojit pravoúhlý trojúhelník obsažený v **T**, který má co největší obsah (aniž tuto vlastnost budeme dokazovat), a pak ukážeme, že jeho obsah je aspoň $\frac{1}{3}P\sqrt{3}$.

Budeme předpokládat, že **T** má vrcholy A, B, C a že jeho strany a, b, c splňují $a \geq b \geq c$ (tedy o úhlech α, β, γ platí $\alpha \geq \beta \geq \gamma$). Rozlišujme dva případy:

1. $\gamma < 45^\circ$. Označme D patu výšky z bodu B . Zřejmě je D bodem trojúhelníku **T**; ukážeme, že trojúhelník BCD splňuje podmínky úlohy. Je pravoúhlý, a protože $CD =$

$= a \cos \gamma$, splňuje jeho obsah P' nerovnosti

$$\frac{P'}{P} = \frac{CD}{b} = \frac{a}{b} \cos \gamma \geq \cos \gamma > \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. $\gamma \geq 45^\circ$. Označme V průsečík oblouku Thaletovy kružnice nad stranou BC a kolmicí k BC v jejím středu S . Protože

$$\sphericalangle VBC = 45^\circ \leq \gamma \leq \beta = \sphericalangle ABC,$$

$$\sphericalangle VCB = 45^\circ \leq \gamma = \sphericalangle ACB,$$

je $V \in \mathbf{T}$. Ukážeme, že pravoúhlý trojúhelník BCV splňuje podmínky úlohy, tj. že jeho obsah P' není menší než $\frac{1}{3}P\sqrt{3}$. Protože $a \geq b \geq c$, leží vrchol A v oblasti $\bullet$ ohraničené úsečkou BC a dvěma oblouky kružnic se středy v B , popř. C a poloměry $BC = a$. Každý bod v $\bullet$ má od přímky BC vzdálenost nejvýše rovnou výšce rovnostranného trojúhelníku se stranou BC , tj. $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Proto je $P \leq \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Avšak $P' = \frac{1}{4}a^2$, takže $P' \geq \frac{P}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}P\sqrt{3}$. Řešení je úplné.

KATEGORIE B

B – II – 1a

Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla p, q platí:

Jestliže

$$pq \leq 1 \tag{1}$$

pak

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) \geq 4. \quad (2)$$

Řešení. Z předpokladu (1) vyplývá

$$p \leq \frac{1}{q}.$$

Pak platí

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) - 4 &\geq \left(1 + \frac{1}{p}\right)(1 + p) - 4 = \\ &= \frac{(1 + p)^2 - 4p}{p} = \frac{(1 - p)^2}{p} \end{aligned} \quad (3)$$

Číslo p je podle předpokladu kladné, dále pro každé číslo p platí $(1 - p)^2 \geq 0$, takže z nerovnosti a rovností (3) plyne dokazovaná nerovnost (2).

Jiné řešení. Poněvadž $pq \leq 1$, je také $(pq)^2 \leq pq$ a $\frac{1}{pq} \geq 1$.

Dále je

$$\begin{aligned} (p + q)^2 &= p^2 + q^2 + 2pq = p^2 - 2pq + q^2 + 4pq = \\ &= (p - q)^2 + 4pq \geq 4pq \geq 4(pq)^2, \end{aligned}$$

a tedy

$$p + q \geq 2pq$$

neboli

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 2.$$

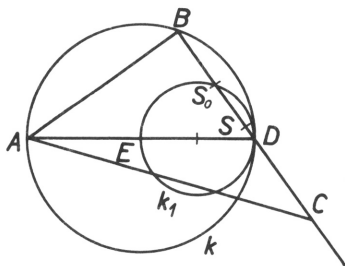
Máme tedy

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{q}\right) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} \geq 1 + 2 + 1 = 4.$$

B – II – 1b

V rovině jsou dány různé body A, D . Najděte množinu středů odvěsen BC všech pravoúhlých trojúhelníků ABC , u nichž pouze tato odvěsna obsahuje bod D .

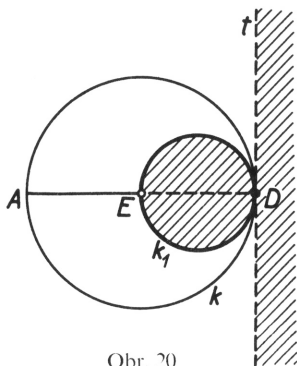
Řešení. Nechť ABC je jeden pravoúhlý trojúhelník vyhovující úloze. Jeden z úhlů $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ je pravý; jeho vrchol označme B (obr. 19). Bod D tedy leží na úsečce BC ,



Obr. 19

takže vrchol B leží na Thaletově kružnici k nad úsečkou AD . Při pevném vrcholu B můžeme přitom bod C měnit tak, že probíhá polopřímku opačnou k polopřímce DB . Středů S proto probíhají (při pevném bodu B) polopřímku S_0D s počátkem ve středu S_0 úsečky BD . Měníme-li nyní bod B na

kružnici k , ovšem tak, že $B \neq A$ a $B \neq D$, pak bod S_0 probíhá Thaletovou kružnicí k_1 nad úsečkou DE , kde E je střed úsečky AD . Protože obráceně každý bod každé polopřímky



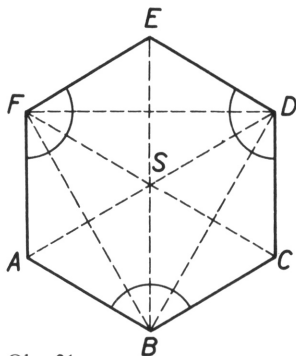
Obr. 20

S_0D , kde S_0 je bodem kružnice k_1 , různým od D a E , je bodem hledané množiny $\mathbf{M}$, je množina $\mathbf{M}$ zřejmě tvořena kruhem s hranicí k_1 , s výjimkou průměru DE , avšak se započítaným bodem D , a otevřenou polorovinou s hranicí t , což je tečna ke kružnici k_1 v bodě D , neobsahující bod A (obr. 20).

B – II – 2a

Je daný konvexný šestiúhelník $ABCDEF$. Ak jeho uhlopriečky vychádzajúce z vrcholu B delia uhol ABC na štyri rovnaké diely a analogickú vlastnosť majú uhlopriečky vychádzajúce z vrcholov D a F , potom daný šestiúhelník je pravidelný. Dokážte.

Řešení. Na obr. 21 je znázorněn konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ s vlastnostmi uvedenými v textu úlohy. Protože BE je osa úhlu FBD , DA osa úhlu BDF a FC osa úhlu DFB ,



Obr. 21

protínají se uvedené tři přímky v jednom bodě (středu kružnice vepsané trojúhelníku BDF), který označíme S . Protože $\sphericalangle SFB = \sphericalangle BFA$ a $\sphericalangle SBF = \sphericalangle FBA$ a BF odděluje body S a A , jsou tyto body A a S souměrně sdružené podle přímky BF . Tedy $SA \perp BF$, takže SD je výška trojúhelníku BDF . Z obdobné úvahy o dalších dvou přímkách vyplývá, že S je také průsečíkem výšek $\triangle BDF$ neboli, že trojúhelník BDF je rovnostranný. Protože A a S jsou souměrné podle BF a obdobně pro S , E a S , C , je daný šestiúhelník pravidelný.

B – II – 2b

Na vrchlíku kulové plochy o poloměru 1 s výškou 1 jsou umístěny čtyři různé body tak, že žádný z nich neleží na

hraniční kružnici vrchlíku. Dokažte, že aspoň dva z nich mají vzdálenost menší než $\sqrt{2}$.

Řešení. Označme S „severní pól“ vrchlíku. Každý bod vrchlíku, který neleží na hraniční kružnici, má od S vzdálenost menší než $\sqrt{2}$. Splývá-li tedy některý z daných bodů A_1, A_2, A_3, A_4 s bodem S , je výsledek správný.

Nyní předpokládejme, že žádný z daných bodů nesplývá se S . Pak čtyři „poledníky“ vycházející z S a procházející body A_1, A_2, A_3, A_4 mají vlastnost, že alespoň dva z nich svírají u bodu S úhel nepřesahující 90° . Snadno se však vidí, že příslušné dva body mají vzdálenost menší než $\sqrt{2}$.

B – II – 3a

Určte všechny dvojice celých čísel x, y , které vyhovují systému nerovnic

$$x - |y^2 - 3y| + \frac{1}{3} > 0, \quad (1)$$

$$x + |y - \frac{3}{2}| < 2.$$

Riešenie. Z nerovnic (1) jednoduchou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{3} &> |y^2 - 3y|, \\ 2 - x &> |y - \frac{3}{2}|, \end{aligned} \quad (2)$$

z čoho pre x vyplýva

$$-\frac{1}{3} < x < 2. \quad (3)$$

Nerovniciam (3) vyhovujú zrejme len celé čísla $x = 0$ a $x = 1$.
Z druhej z nerovníc (2) pre $x = 0$ dostaneme

$$|y - \frac{3}{2}| < 2. \quad (4)$$

Nerovnici (4) vyhovujú zrejme len celé čísla $y = 0, 1, 2, 3$.
Pre $x = 1$ dostávame z druhej nerovnice (2) nerovnicu

$$|y - \frac{3}{2}| < 1,$$

ktorej vyhovujú len celé čísla $y = 1, 2$.

Možné riešenia sústavy (1) zapíšeme v tabuľke:

x	0	0	0	0	1	1
y	0	1	2	3	1	2

Skúškou dosadením sa ľahko presvedčíme, že vyhovujú len dvojice $x = 0, y = 0$ a $x = 0, y = 3$. Ostatné štyri dvojice sústave (1) nevyhovujú, pretože nesplňajú prvú z daných nerovníc.

B – II – 3b

1. Dokážte, že pre každé reálne kladné číslo a platí

$$a + \frac{1}{a} \geq 2. \quad (1)$$

Kedy nastane rovnosť?

2. Nájdite všetky kladné riešenia sústavy rovníc

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = 2, \quad (2)$$

$$x_2 + \frac{1}{x_3} = 2,$$

$$x_3 + \frac{1}{x_1} = 2.$$

Riešenie. 1. Nech $a > 0$ je ľubovólne reálne číslo. Potom

$$(a - 1)^2 \geq 0,$$

z čoho vyplýva postupne $a^2 - 2a + 1 \geq 0$, $a^2 + 1 \geq 2a$,
 $a + \frac{1}{a} \geq 2$, čím je nerovnosť (1) dokázána. Rovnosť nastane
len pre $a = 1$.

2. Ak predpokladáme, že (x_1, x_2, x_3) je kladné riešenie
sústavy (2), sčítaním všetkých troch rovníc dostaneme

$$x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1} = 6$$

čiže

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_3 + \frac{1}{x_3}\right) = 6, \quad (3)$$

Podľa 1. však platí

$$x_i + \frac{1}{x_i} = 2 \quad \text{pre } i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Sčítáním všech 3 nerovností (4) dostaneme

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_3 + \frac{1}{x_3}\right) \geq 6,$$

přičom rovnosť (3) nastane vtedy a len vtedy, keď platí rovnosť v (4) pre všetky $i = 1, 2, 3$. Tá však podľa 1. nastane len pre $x_i = 1$ pre $i = 1, 2, 3$.

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že trojica $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ sústave (2) vyhovuje.

KATEGORIE C

C – II – 1a

Most Klementa Gottwalda v Praze je dlouhý 486 m. Chodec, který přes něj šel průměrnou rychlostí 1,5 m/s, počítal auta protijedoucího proudu. První z nich ho začalo míjet v okamžiku, kdy vstoupil na most, 55. auto v okamžiku jeho příchodu do poloviny mostu. Vypočtete, jakou průměrnou rychlostí se pohyboval proud, jestliže vzdálenost předních čel každých dvou bezprostředně po sobě jedoucích aut byla 45 m.

Řešení. Vzdálenost čel 1. a 55. auta je

$$54 \cdot 45 = 2\,430 \quad (\text{metrů}).$$

Lze si představit, že v okamžiku, kdy chodec vstupuje na most, je čelo 55. auta vzdáleno od středu mostu

$$2\,430 - \frac{1}{2} \cdot 486 = 2\,187 \quad (\text{metrů}).$$

Tuto vzdálenost ujede za dobu, kterou potřebuje chodec k přejití poloviny mostu, tj. za

$$\frac{243}{1,5} = 243 \cdot \frac{2}{3} = 162 \quad (\text{sekund}).$$

Průměrná rychlost proudu aut tedy byla v m/s

$$\frac{2 \cdot 187}{162} = \frac{27}{2} = 13,5,$$

tj. 48,6 km/h.

Zkouška. Jestliže se proud aut pohyboval rychlostí 48,6 km/h = 13,5 m/s, pak za dobu než chodec došel do poloviny mostu, tj. za

$$\frac{243}{1,5} = 162 \quad (\text{sekund}),$$

odjela z mostu část proudu dlouhá

$$13,5 \cdot 162 = 2\,187 \quad (\text{metrů}).$$

To však znamená, že přes střed mostu přejelo celkem $2\,430 : 45 = 54$ aut a že 55. auto je právě před polovinou mostu, což odpovídá textu úlohy. Tím je zkouška provedena.

C – II – 1b

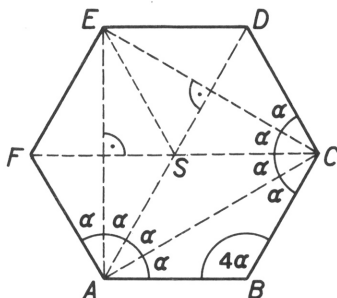
Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má shodné vnitřní úhly při vrcholech A , B a C , jeho úhlopříčky vycházející z vrcholu A dělí úhel BAF na čtyři shodné díly a jeho úhlopříčky vycházející z vrcholu C dělí obdobně úhel BCD . Dokažte, že šestiúhelník $ABCDEF$ je pravidelný.

Řešení. Označme 4α velikost úhlu BAF (obr. 22). Pak z $\triangle ABC$ plyne:

$$\alpha + 4\alpha + \alpha = 180^\circ,$$

tj.

$$\alpha = 30^\circ.$$



Obr. 22

Platí tedy

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 120^\circ. \quad (1)$$

Trojúhelník ACE je rovnostranný, neboť

$$\sphericalangle EAC = \sphericalangle ACE = 2\alpha = 60^\circ.$$

Úhlopříčka AD je tedy kolmá na úhlopříčku EC . Označme S průsečík AD a EC . Z osových souměrností podle EC pak plyne, že

$$\sphericalangle CDE = \sphericalangle CSE = 120^\circ. \quad (2)$$

Obdobně dokážeme, že

$$\sphericalangle AFE = \sphericalangle ASE = 120^\circ. \quad (3)$$

Z rovností (1), (2) a (3) plyne, že šestiúhelník $ABCDEF$ je pravidelný.

C – II – 2a

Dokažte, že z 50 libovolně zvolených navzájem různých prvočísel lze vždy vybrat 13 čísel tak, že rozdíl každých dvou z nich je dělitelný pěti.

Řešení. Zvolme libovolně 50 navzájem různých prvočísel. Každé prvočíslo dává při dělení 5 zbytek 0 nebo 1 nebo 2 nebo 3 nebo 4. Zvolených 50 prvočísel lze podle toho roztrždit do pěti navzájem disjunktních tříd, označme je C_0 , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 . Prvočísla jsou navzájem různá, a proto je třída C_0 jednoprvková nebo prázdná, jejím prvkem může být jedině číslo 5. Tedy množina $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ má aspoň 49 prvků. Třídý jsou disjunktní, takže aspoň jedna ze tříd C_1 , C_2 , C_3 , C_4 obsahuje 13 čísel. Jsou-li p , q dvě libovolná prvočísla patřící do této třídy, pak existují taková celá čísla x , y , z , že platí

$$p - q = (5x + z) - (5y + z) = 5(x - y),$$

což je číslo dělitelné pěti.

C – II – 2b

Určte všechny dvojice celých čísel x , y , které vyhovují sýstave nerovnic

$$\begin{aligned} y - |x^2 - 2x| + \frac{1}{2} &> 0, \\ y + |x - 1| &< 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Riešenie. Jednoduchou úpravou z nerovnic (1) dostaneme

$$y + \frac{1}{2} > |x^2 - 2x|, \quad (2)$$

$$2 - y > |x - 1|,$$

z čoho vyplýva, že pre y musí platiť

$$y + \frac{1}{2} > 0 \wedge 2 - y > 0,$$

t. j.

$$-\frac{1}{2} < y < 2. \quad (3)$$

Nerovnosti (3) vyhovujú z celých čísel len $y = 0$ a $y = 1$. Z druhej nerovnosti (2) vyplýva, že sústave (1) môžu vyhovovať len nasledujúce dvojice celých čísel:

y	0	0	0	1
x	0	1	2	1

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že dvojica $x = 1, y = 0$ sústave (1) nevyhovuje, ostatné tri dvojice, t. j. $x = 0, y = 0$; $x = 2, y = 0$; $x = 1$ sú riešením.

C – II – 3a

Uvnitř kružnice o poloměru 1 jsou dány čtyři různé body. Dokažte, že jsou mezi nimi dva, jejichž vzdálenost je menší než $\sqrt{2}$.

Řešení. Je-li některý z daných bodů A, B, C, D totožný se středem kružnice S , tvrzení je pravdivé. Není-li tomu tak,

utvoříme polopřímky SA , SB , SC a SD . Platí nyní: Alespoň dvě z těchto polopřímek svírají úhel nejvýše 90° . (Nepřímo: Kdyby ne, pak SB , SC , SD leží v téže polorovině a hranicí procházející středem S kolmo k SA ; vedeme-li obdobnou polorovinu pro SB , zbude pro dvě polopřímky SC a SD úhel menší než 90° .) Jsou-li to např. polopřímka SA a SB , pak body A a B mají vzdálenost menší než $\sqrt{2}$ (jsou to body v pravoúhlém trojúhelníku o odvěsnách 1, různé od obou vrcholů u přepony). Tím je úloha rozřešena.

C – II – 3b

Do rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB je vepsán rovnoramenný lichoběžník $MNPQ$ tak, že jeho základna MN je částí strany AB , vrchol P náleží ramenu BC , vrchol Q ramenu AC a platí $MN = 3PQ$.

Vyšetřte množinu středů středních příček všech takových lichoběžníků.

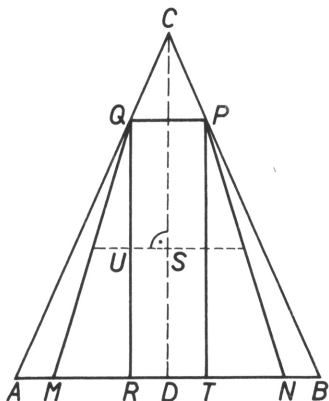
Řešení. Označme D střed základny AB . Místo lichoběžníků můžeme do $\triangle ABC$ vepisovat pravoúhelníky $RTPQ$, jejichž strana RT je částí strany AB , které jsou souměrné podle přímky CD a pro které platí

$$RT = PQ = \frac{1}{3}MN \leq \frac{1}{3}AB.$$

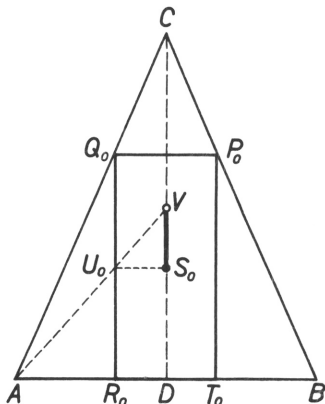
Na obr. 23 je nakreslen takový pravoúhelník $RTPQ$; střed S střední příčky lichoběžníku $MNPQ$ je zároveň středem pravoúhelníku $RTPQ$ a leží na úsečce CD . Bod S můžeme sestavit také jako patu kolmice spuštěné na přímku CD ze středu U strany QR .

Sestrojíme obě mezní polohy bodu R : je to předně bod R_0 , pro který platí $DR_0 = \frac{1}{3}DA$ a $R = D$. K nim sestrojíme příslušné body S : je to jednak bod S_0 (obr. 24), jednak bod $S = V$ (V je střed úsečky CD). Všechny body U leží totiž na úsečce AV .

Hledaná množina bodů je úsečka S_0V ; počítá se k ní bod S_0 , ale nikoli bod V .



Obr. 23



Obr. 24

KATEGORIE Z

Z – II – 1

Rozložte v součin dvojčlenů prvního stupně:

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 2) - x + 1.$$

Výsledek ověřte pro $x = -1$.

Řešení. Jednoduchými úpravami a postupným vytýkáním dostáváme:

$$\begin{aligned} & (x-1)(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2) - x + 1 = \\ & = (x-1)[(x-2)(x-3) + (x-2) - 1] = \\ & = (x-1)(x-3)(x-2+1) = (x-1)(x-3)(x-1) = \\ & = (x-1)^2(x-3). \end{aligned}$$

Z – II – 2

Je dán vypuklý čtyřúhelník $ABCD$. Označme M a N po řadě středy stran AD a BC .

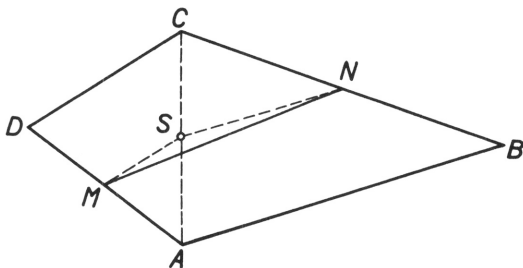
Dokažte následující tvrzení: Jestliže

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD), \quad (1)$$

pak střed S úhlopříčky AC leží uvnitř úsečky MN a $AB \parallel CD$.

Řešení. Úsečky MS a SN jsou po řadě středními příčkami (obr. 25) trojúhelníků ACD a ABC . Tedy

$$MS \parallel CD, \quad SN \parallel AB \quad (2)$$



Obr. 25

a

$$MS = \frac{1}{2}CD, \quad SN = \frac{1}{2}AB,$$

takže

$$MS + SN = \frac{1}{2}(AB + CD).$$

Jestliže tedy platí (1), pak je bod C vnitřním bodem úsečky MN . Pak podle (2) platí

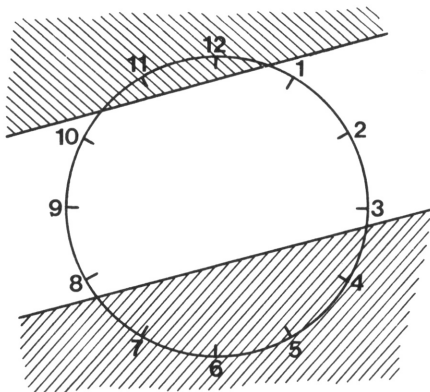
$$MN \parallel AB \quad \text{a} \quad MN \parallel CD,$$

tj.

$$AB \parallel CD.$$

Z – II – 3

Na obrázku je znázorněn hodinový ciferník a dvě rovnoběžné přímky (viz obr. 26), z nichž žádná neprochází žádným z bodů 1 až 12. Změňte polohu přímek tak, aby součet



Obr. 26

čísel ležících v každé z vyšrafovaných polorovin byl roven součtu čísel ležících v pásu rovnoběžek.

Řešení. Zjistíme nejprve součet všech čísel na ciferníku:

$$1 + 2 + \dots + 12 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 = 2 \cdot 3 \cdot 13.$$

Součet v každé z částí ciferníku musí být tedy 26. Určeme nejprve tu část, do níž patří číslo 12. Experimentováním zjistíme, že $26 = 12 + 1 + 11 + 2$. Jedna z hledaných polorovin obsahuje tedy body ciferníku označené 1, 2, 11, 12. Analogicky zjistíme, že $26 = 10 + 3 + 9 + 4$, takže pás obsahuje body ciferníku označené 3, 4, 9 a 10 a zbývající polovina body ciferníku označené 5, 6, 7, 8.

Dalším experimentováním se přesvědčíme, že 12 nemůže ležet uvnitř rovnoběžkového pásu, neboť součty $11 + 12 + 3$, $12 + 1 + 6 + 7$, $12 + 1 + 2 + 5 + 6$ a $12 + 1 + 2 + 3 + 8$ nevedou k řešení.

Z – II – 4

Je dán čtverec $ABCD$ o straně 10 a přirozené číslo $n \geq 2$. Sestrojte po řadě uvnitř úseček AB , BC , CD , DA body A_n , B_n , C_n , D_n tak, aby platilo

$$AA_n = BB_n = CC_n = DD_n = \frac{10}{n}. \quad (1)$$

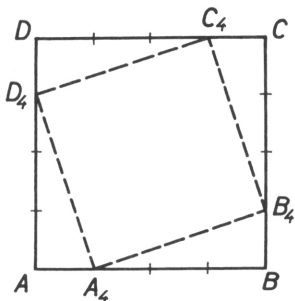
- a) Dokažte, že body A_n , B_n , C_n , D_n jsou vrcholy čtverce.
- b) Vyjádřete obsah P_n čtverce $A_nB_nC_nD_n$ pomocí čísla n .
- c) Dokažte, že ze všech čtverců $A_nB_nC_nD_n$ má nejmenší obsah čtverec $A_2B_2C_2D_2$, tj. že pro každé přirozené číslo $n \geq 3$ je rozdíl $P_n - P_2$ kladné číslo.

Řešení. a) Z textu úlohy plyne, že

$$A_n B = B_n C = C_n D = D_n A = (n - 1) \cdot \frac{10}{n}. \quad (2)$$

Z podmínek (1) a (2) a z toho, že čtyřúhelník $ABCD$ je čtverec (obr. 27), dostáváme, že

$$\triangle A_n B B_n \cong \triangle B_n C C_n \cong \triangle C_n D D_n \cong \triangle D_n A A_n, \quad (3)$$



Obr. 27

takže

$$A_n B_n = B_n C_n = C_n D_n = D_n A_n, \quad (4)$$

tj. čtyřúhelník $A_n B_n C_n D_n$ je rovnostranný. Ze shodnosti pravoúhlých trojúhelníků (3) plyne, že

$$\sphericalangle D_n A_n A + \sphericalangle B_n A_n B = 90^\circ,$$

tj.

$$\sphericalangle D_n A_n B_n = 90^\circ,$$

takže čtyřúhelník $A_n B_n C_n D_n$ je podle (4) čtvercem.

b) Z $\triangle A_n B B_n$ dostáváme podle (1) a (2)

$$A_n B_n^2 = \left(\frac{10}{n}\right)^2 + \left(\frac{(n-1) \cdot 10}{n}\right)^2.$$

Tedy pro každé $n \geq 2$ je

$$P_n = 100 \cdot \frac{(n-1)^2 + 1}{n^2}. \quad (5)$$

c) Podle rovnosti (5) platí pro každé přirozené číslo $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} P_n - P_2 &= 100 \left[\frac{(n-1)^2 + 1}{n^2} - \frac{1}{2} \right] = \\ &= 100 \cdot \frac{2 \cdot (n^2 - 2n + 1) + 2 - n^2}{2n^2} = \\ &= 100 \cdot \frac{n^2 - 4n + 4}{2n^2} = 100 \cdot \frac{(n-2)^2}{2n^2}. \end{aligned}$$

Pro každé $n \geq 3$ je tedy skutečně $P_n - P_2 > 0$, c. b. d.

V. Úlohy III. kola kategorie A

A – III – 1

Určete všechny trojice celých čísel x, y, z , pro které platí

$$x^2 + y^2 = 3z^2. \quad (1)$$

Řešení. Existuje alespoň jedna trojice celých čísel vyhovující (1), totiž trojice

$$x = y = z = 0. \quad (2)$$

Předpokládejme, že existují ještě jiné trojice (x, y, z) vyhovující (1); v nich je pak nutně $z \neq 0$. Vezměme takovou trojici vyhovující (1), v níž je z^2 minimální (tedy $z^2 > 0$).

Čísla x, y vyjádříme ve tvaru

$$x = 3a + p, \quad y = 3b + q,$$

kde a, b, p, q jsou celá čísla, $0 \leq |p| \leq 1$, $0 \leq |q| \leq 1$. Pro čísla x^2, y^2 pak bude možno psát

$$x^2 = 9a^2 + 6ap + p^2 = 3k + p^2,$$

$$y^2 = 9b^2 + 6bq + q^2 = 3l + q^2,$$

takže

$$3z^2 = x^2 + y^2 = 3(k + l) + p^2 + q^2.$$

Z toho je vidět, že číslo $p^2 + q^2$ musí být dělitelné třemi. Přitom

$$0 \leq p^2 \leq 1,$$

$$0 \leq q^2 \leq 1,$$

takže

$$0 \leq p^2 + q^2 \leq 2.$$

Jediné celé číslo dělitelné třemi v těchto mezích je 0. Platí

$$p^2 + q^2 = 0,$$

takže

$$p = q = 0,$$

a tedy

$$x = 3a, \quad y = 3b.$$

Potom však

$$x^2 + y^2 = 9(a^2 + b^2) = 3z^2,$$

tedy

$$3(a^2 + b^2) = z^2.$$

Odtud je vidět, že číslo z^2 , a tedy i z , je dělitelné třemi: $z = 3c$, $z^2 = 9c^2$. Platí tedy

$$a^2 + b^2 = 3c^2,$$

takže trojice (a, b, c) vyhovuje (1) a přitom zřejmě

$$0 < c^2 < 9c^2 = z^2.$$

To je však spor s předpokladem, že z^2 je minimální.

Neexistují tedy trojice x, y, z vyhovující (1), v nichž by bylo $z \neq 0$.

Jediná trojice vyhovující (1) je trojice (2).

Dokažte, že pro každé reálné číslo x z intervalu $0 \leq x \leq 1$ platí

$$\frac{(1-x)x^2}{(1+x)^3} < \frac{1}{25}. \quad (1)$$

Řešení. Důkaz provedeme nepřímou. Předpokládejme, že existuje takové číslo $x \in \langle 0, 1 \rangle$, pro něž platí

$$\frac{(1-x)x^2}{(1+x)^3} \geq \frac{1}{25}, \quad (2)$$

tj. po odstranění zlomků

$$25(1-x)x^2 \geq (1+x)^3$$

a po další úpravě

$$26x^3 - 22x^2 + 3x + 1 \leq 0. \quad (3)$$

Pro každé číslo x platí

$$(2x-1)^2(7x+1) = 28x^3 - 24x^2 + 3x + 1,$$

a proto nerovnost (3) lze psát ve tvaru

$$(2x-1)^2(7x+1) - 2x^3 + 2x^2 \leq 0,$$

tj.

$$(2x-1)^2(7x+1) + 2x^2(1-x) \leq 0. \quad (4)$$

Pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je

$$(2x-1)^2(7x+1) \geq 0,$$

přičemž rovnost nastává jen pro $x = \frac{1}{2}$; pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$

je též

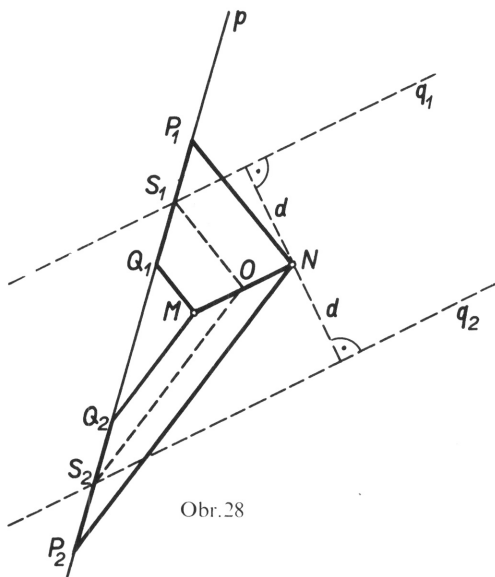
$$2x^2(1 - x) \geq 0$$

a rovnost platí pouze pro $x = 0$ nebo $x = 1$. Tedy pro žádné $x \in \langle 0, 1 \rangle$ neplatí nerovnost (4), a tedy ani nerovnost (2). Tím je nerovnost (1) dokázána pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

Poznámka. Úlohu můžeme řešit též tak, že nalezneme maximum funkce $f(x) = \frac{(1-x)x^2}{(1+x)^3}$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

A – III – 3

V dané polorovině s hranicí p jsou dány dva body M, N v různých vzdálenostech od přímky p . Sestrojte lichoběž-



Obr.28

ník $MNPQ$, jehož vrcholy P, Q leží na přímce p a jehož obsah je roven obsahu čtverce o straně MN .

Řešení. Necht' $MNPQ$ je lichoběžník vyhovující úloze. Pak je $MQ \parallel PN$. Označíme-li S střed ramena PQ , pak obsah trojúhelníku MNS je roven polovině obsahu lichoběžníku $MNPQ$. Má proto bod S od přímky MN vzdálenost $d = MN$, a přitom ovšem $S \in p$.

Odtud vyplývá konstrukce (obr. 28). K přímce MN vedeme ve vzdálenosti $d = MN$ dvě rovnoběžky q_1 a q_2 , které protnou přímku p po řadě v bodech S_1 a S_2 . Označíme-li ještě O střed úsečky MN , pak lichoběžníky MNP_1Q_1 , pro který $NP_1 \parallel OS_1 \parallel MQ_1$, a MNP_2Q_2 , pro který $NP_2 \parallel OS_2 \parallel MQ_2$, vyhovují úloze a jsou to všechna řešení.

A – III – 4

Najděte řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 - \dots - & - x_n = 2a, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - \dots - & - x_n = 4a, \\ -x_1 - x_2 + 7x_3 - \dots - & - x_n = 8a, \\ \dots\dots\dots & \\ -x_1 - x_2 - x_3 - \dots + (2^n - 1)x_n = 2^na. \end{array}$$

s neznámými $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ a daným reálným parametrem a .

Řešení. Označíme-li $x_1 + x_2 + \dots + x_n = s$, můžeme přepsat danou soustavu takto:

$$\begin{aligned} -s + 2x_1 &= 2a, \\ -s + 4x_2 &= 4a, \\ -s + 8x_3 &= 8a, \\ &\dots\dots\dots \\ -s + 2^n x_n &= 2^n a. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$x_i = a + \frac{s}{2^i} \quad (1)$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Sečtením všech rovnic (1) dostáváme

$$s = na + s \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right). \quad (2)$$

Užijeme-li vzorec pro součet n prvních členů geometrické posloupnosti, plyne z rovnice (2)

$$s = na + s \left(1 - \frac{1}{2^n} \right),$$

takže

$$s = na \cdot 2^n. \quad (3)$$

Z rovnic (1) pak podle (3) obdržíme řešení dané soustavy rovnic:

$$x_i = a(1 + n \cdot 2^{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Zkouška. Dosadíme podle (4) do levé strany k -té rovnice

$(k = 1, 2, \dots, n)$ dané soustavy. Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned}
 & -x_1 - x_2 - \dots - x_{k-1} + \\
 & + (2^k - 1)x_k - x_{k+1} - x_{k+2} - \dots - x_n = \\
 & = -\sum_{i=1}^n x_i + 2^k x_k = \\
 & = -\sum_{i=1}^n a(1 + n \cdot 2^{n-i}) + 2^k a(1 + n \cdot 2^{n-k}) = \\
 & = -na - na \cdot 2^n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} + 2^k a + na \cdot 2^n = \\
 & = -na - na \cdot 2^n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + 2^k a + na \cdot 2^n = 2^k a.
 \end{aligned}$$

Pravá strana k -té rovnice dané soustavy je také $2^k a$. Vzorci (4) tedy skutečně dávají řešení dané soustavy rovnic.

Závěr: Daná soustava rovnic má pro každou hodnotu parametru a jediné řešení. Je dáno vzorci (4).

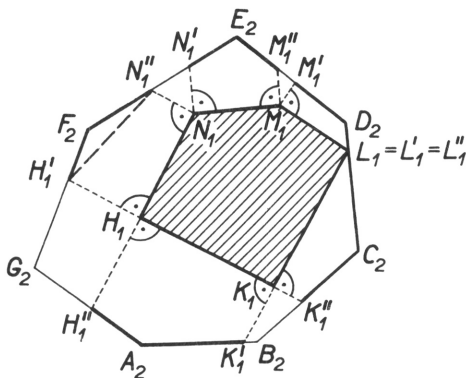
A – III – 5

Je-li vypuklý mnohoúhelník s obvodem o_1 obsažen ve vypuklém mnohoúhelníku s obvodem o_2 , pak platí $o_1 \leq o_2$. Dokažte.

Řešení provedeme pro případ znázorněný na obr. 29. Použitá metoda řešení však bude zcela obecná.

Na obr. 29 mnohoúhelník $H_1 K_1 L_1 M_1 N_1$ s obvodem o_1 leží v mnohoúhelníku $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 F_2 G_2$ s obvodem o_2 . Ve všech vrcholech vnitřního mnohoúhelníku vztyčíme kol-

mice ke každé jeho straně s a určíme jejich průsečíky s hranicí vnějšího mnohoúhelníku, a to na každé kolmici ten z průsečíků, který leží v polovině s hranicí s opačné k polovině, v níž leží vnitřní mnohoúhelník. Tak dostaneme body $H'_1, H''_1, K'_1, K''_1, L'_1 (= L''_1 = L_1), M'_1, M''_1, N'_1, N''_1$.



Obr. 29

Každá tlustě vytažená lomená čára na obr. 29 má délku aspoň takovou jako její pravoúhlý průmět do hranice $H_1K_1L_1M_1N_1$. Je totiž např.

$$N''_1F_2H'_1 \geq N''_1H'_1 \geq N_1H_1 \quad (1)$$

a obdobně

$$\begin{aligned} H''_1A_2K'_1 &\geq H_1K_1, & K''_1C_2L'_1 &\geq K_1L_1, \\ L''_1D_2M'_1 &\geq L_1M_1, & M''_1E_2N'_1 &\geq M_1N_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Spojením (1), (2) dostaneme pro délku o'_2 tlustě vytažené

části hranice vnějšího mnohoúhelníku:

$$o'_2 \geq o_1. \quad (3)$$

Protože každý vnitřní úhel konvexního mnohoúhelníku $H_1K_1L_1M_1N_1$ je dutý, je na hranici vnějšího mnohoúhelníku $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2$ pořadí průmětů vrcholů H_1, K_1, L_1, M_1, N_1 následující:

$$H'_1, H''_1, K'_1, K''_1, L'_1, M'_1, M''_1, N'_1, N''_1 *),$$

a platí tedy

$$o'_2 \leq o_2. \quad (4)$$

Rovnost nastane v tom případě, když všechny vrcholy vnitřního mnohoúhelníku leží na hranici vnějšího.

Spojením (3), (4) dostaneme

$$o_1 \leq o_2,$$

což jsme měli dokázat.

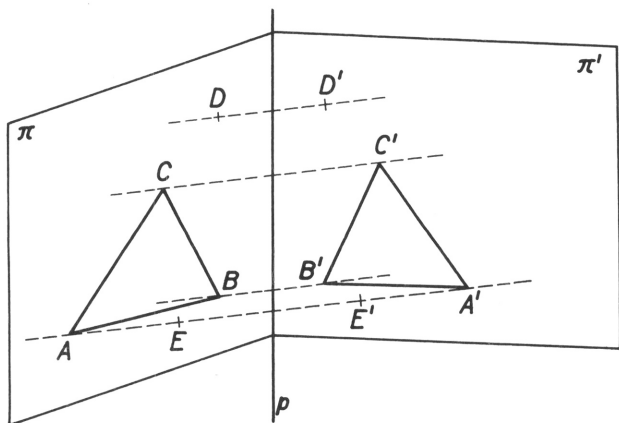
A – III – 6

V prostoru jsou dány poloroviny π a π' se společnou hraniční přímkou p tak, že neleží v jedné rovině. V polorovině π jsou umístěny body A, B, C, D a v polorovině π' body A', B', C', D' tak, že žádný z nich neleží na přímce p , $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$, a přitom body A, B, C a D' jsou vrcholy čtyřštěnu.

Dokažte, že také A', B', C' a D jsou vrcholy čtyřštěnu a že oba tyto čtyřštěny mají stejný objem.

*) Dva sousední z těchto bodů mohou splynout; viz např. $L'_1 = L''_1$ na obr. 29.

Řešení. Body A, B a C neleží v přímce, tedy ani A', B' a C' neleží v přímce. Kdyby body A', B', C' a D ležely v rovině, byla by to rovina poloroviny π' a bod $D \in \pi$ by ležel na přímce p , což odporuje předpokladu. Tvoří tedy body A', B', C' a D opět vrcholy čtyřstěnu (obr. 30).



Obr. 30

Z předpokladu rovnoběžnosti $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ plyne existence bodů E, E' na přímce AA' , pro něž platí:

$$E - A = D' - D ,$$

$$E' - A' = D - D' .$$

Je patrné, že body E a D' (resp. E' a D) jsou stejně vzdáleny od roviny, jež obsahuje polorovinu π (resp. π'), a proto se objemy čtyřstěnu $ABCD'$ a $ABCE$ (resp. $A'B'C'D$ a $A'B'C'E'$)

sobě rovnají. Stačí proto dokázat rovnost objemů čtyřstěnů $ABCE$ a $A'B'C'E'$.

Platí $AE = A'E' = DD'$ a dále bod B má od přímky AE touž vzdálenost jako bod B' od přímky $A'E'$, a proto mají trojúhelníky ABE a $A'B'E'$ týž obsah.

Roviny ABE a $A'B'E'$ splývají a $CC' \parallel ABE$, takže výška čtyřstěnu $ABCE$ obsahující bod C má stejnou velikost jako výška čtyřstěnu $A'B'C'E'$ obsahující bod C' . Proto jsou si rovny objemy čtyřstěnů $ABCE$ a $A'B'C'E'$, a tedy i objemy čtyřstěnů $ABCD'$ a $A'B'C'D$.

Autorem tohoto řešení je *Ilja Turek* ze třídy 2.g gymnázia v Hradci Králové. Získal za ně cenu Matematického ústavu ČSAV, která se uděluje za nejlepší řešení soutěžní úlohy III. kola kategorie A.

VI. Korešpondenčný seminár MO v školskom roku 1975/76

Po dobrých skúsenostiach s korešpondenčným seminárom v školskom roku 1974/75, kedy sa konal po prvý raz, pokračovala táto forma prípravy vybraných riešiteľov MO aj v školskom roku 1975/76. Výber účastníkov seminára urobilo PÚVMO jednak na základe výsledkov celoštátneho kola XXIV. ročníka MO kategórie A a jednak na základe návrhov jednotlivých KVMO. Účastníci korešpondenčného seminára dostávali písomne na riešenie po 6 až 10 úloh postupne z 5 tematických okruhov: *číselná teória, geometria, funkcie a mnohočleny, kombinatorika, rovnice a sústavy rovníc*. Riešenia úloh každého tematického celku poslali do stanoveného termínu na adresu zostavovateľa, ktorý riešenia opravil, vyhodnotil a s prípadným komentárom vrátil riešiteľovi.

Celkom sa 2. korešpondenčného seminára zúčastnilo 43 riešiteľov, a to 9 z Bratislavy, 6 zo Severomoravského kraja, po 5 z Prahy a Východočeského kraja, po 4 zo Severočeského a Stredoslovenského kraja, po 3 zo Stredočeského, Juhomoravského a Západoslovenského kraja a 1 zo Západočeského kraja. Zastúpení medzi riešiteľmi neboli len Juhočeský a Východoslovenský kraj. Počet riešiteľov seminára klesal od témy k téme, pričom riešenia úloh z kom-

binatoriky zaslalo 25 riešiteľov. Medzi najúspešnejších patrili i tohto roku *Jiří Navrátil* z Olomouca, *Jan Kratochvíl* z Pardubic, *Peter Takáč* zo Šafárikova. Pribudli k nim však aj ďalší veľmi úspešní riešitelia, z ktorých spomenieme aspoň *Miroslava Šedivého* z Jevíčka, *Martina Čadeka* z Brna, *Jana Bázlera* z Mladej Boleslavi, *Vladimíra Pastrňáka* z Vratimova a *Ladislava Miklósa* z Komárna. Nebolo iste náhodné, že z osemčlenného družstva pre XVIII. MMO v Rakúsku sa korešpondenčného seminára nezúčastňovali len 2: *Quittner* a *Kolafa*. I s prihliadnutím k výsledkom nášho družstva na XVIII. MMO (*Kratochvíl* 2. cena, *Šedivý*, *Navrátil* a *Takáč* 3. cena) mohlo PÚVMO hodnotiť korešpondenčný seminár ako úspešný s tým, že v ďalšom roku treba usilovať o jeho skvalitnenie hľadaním lepších foriem kontaktov s riešiteľmi.

Pre informáciu uvádzame texty úloh, ktoré boli predložené riešiteľom 2. korešpondenčného seminára:

Číselná teória (zostavil *M. Kaukič*):

1. Nech a , b sú celé čísla také, že $a^2 + b^2$ je deliteľné číslom 21. Potom $a^2 + b^2$ je deliteľné tiež číslom 441. Dokážte.

2. Súčet piatich celých čísel je rovný nule. Dokážte, že súčet piatich mocnín týchto čísel je deliteľný číslom 15.

3. Nájdite všetky dvojice celých čísel x , y , ktoré vyhovujú rovnici $x^2 - y^3 = 1$.

4. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, z ktorého zámenou jeho niektorej cifry nemôžeme dostať prvočíslo. (Skúste riešiť analogickú úlohu pre dve cifry.)

5. Nájdite všetky prirodzené čísla n tej vlastnosti, že ciferný súčet čísla n^2 je rovný 4.

6. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel tvaru $m^2 + n^2$, kde m, n sú prirodzené čísla. (Návod: Každé prvočíslo tvaru $4k + 1$ možno aspoň jedným spôsobom rozložiť na súčet druhých mocnín dvoch prirodzených čísel.)

7. Je dané $a_1 = 1$, $a_k = \lfloor \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}} \rfloor$; určte a_{1975} . ($\lfloor c \rfloor$ znamená celú časť čísla c .)

8. Nech $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť pozostávajúca zo všetkých prvočísel. Nech $S(k)$ je súčet všetkých súčinov pozostávajúcich z rôznych prvočísel menších najviac rovných p_k , k prirodzené číslo.

Dokážte, že v rozklade čísla $S(k) + 1$ na prvočinitele sa vyskytuje aspoň k prvočísel.

9. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel taká, že prirodzené číslo k je jej členom práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný siedmimi. Nájdite

$$\max_{1 \leq n < \infty} (a_n - a_{n-1}).$$

10. Označme na číselnej osi všetky čísla tvaru $81m + 100n$ (m, n prirodzené čísla) zelenou farbou a ostatné celé čísla červenou farbou. Nájdite na číselnej osi taký bod x , aby ľubovoľné dva celočíselné body symetrické vzhľadom na x boli zafarbené rôznou farbou.

Geometria (zostavili prof. dr. M. Fiedler, DrSc., a J. Zemánek):

1. V priestore je daná množina bodov, ktorej pravouhlými priemetmi do dvoch rovín sú kruhy. Dokážte, že tieto kruhy majú rovnaké polomery.

2. V štvorci je daných deväť bodov, z ktorých žiadne tri

neležia v jednej priamke. Dokážte, že tri z týchto bodov sú vrcholmi trojuholníka, ktorého obsah neprevyšuje $\frac{1}{8}$ obsahu štvorca.

3. V priestore sú dané štyri polpriamky p_1, p_2, p_3, p_4 so spoločným začiatočným bodom, ktoré neležia v žiadnom polpriestore. Dokážte, že platí

$$\sphericalangle p_1 p_2 + \sphericalangle p_2 p_3 + \sphericalangle p_3 p_4 + \sphericalangle p_4 p_1 > 360^\circ.$$

4. V rovine je dané nekonečne mnoho bodov, ktorých všetky vzájomné vzdialenosti sú prirodzené čísla. Dokážte, že všetky tieto body ležia v jednej priamke.

5. V rovine sú dané dve bodové množiny $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$, z ktorých každá má párny počet prvkov a žiadne tri z bodov $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$ neležia v jednej priamke. Dokážte, že v tejto rovine existuje priamka, ktorá neprechádza žiadnym z daných bodov a taká, že po oboch jej stranách leží práve polovica bodov každej z oboch daných množín.

6. Dokážte, že počet hrán mnohostena nemôže byť rovný siedmim.

Funkcie a mnohočleny (vybral doc. dr. J. Moravčík, CSc.):

1. Pre funkciu $f(x) = ax^2 + bx + c$ v intervale $\langle -1; 1 \rangle$ platí: $|f(x)| \leq 1$. Potom pre funkciu $g(x) = cx^2 + bx + a$ v tom istom intervale platí: $|g(x)| \leq 2$. Dokážte.

2. Dokážte, že funkcia $P(x) = x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ má v každom bode $x \in (-\infty, \infty)$ kladnú hodnotu.

3. Nech $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ je mnohočlen s celočíselnými koeficientami. Nech a, b, c, d sú navzájom rôzne celé čísla, pre ktoré platí: $P(a) = P(b) =$

$= P(c) = P(d) = 5$. Dokážte, že neexistuje celé číslo k tak, že $P(k) = 8$.

4. Je daný mnohočlen $P(x)$ s a) prirodzenými koeficientami, b) celými koeficientami. Označme a_n ciferný súčet čísla $P(n)$ v dekadickom zápise pre každé prirodzené číslo n . Dokážte, že existuje číslo, ktoré sa v postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyskytuje nekonečne mnoho ráz.

5. Postupnosť mnohočlenov $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná rekurentne takto: $P_0(x) = 2$, $P_1(x) = x$, $P_{n+1}(x) = x P_n(x) - P_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \dots$. Dokážte, že existujú reálne čísla a , b , c tak, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$(x^2 - 4) [P_n^2(x) - 4] = [a P_{n+1}(x) + b P_n(x) + c P_{n-1}(x)]^2.$$

6. Dokážte, že ak funkcia $f(x) = \sin x + \cos ax$ je periodická, potom a je racionálne číslo.

7. Nájdite najmenšiu kladnú hodnotu súčtu $x + y$, ak $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2$.

8. Je dané číslo $\alpha > 1$. Dokážte, že neexistuje funkcia $f(x) \not\equiv \text{konšt.}$ definovaná pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$ tak, aby pre každé reálne a, b platilo $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|^\alpha$.

9. Funkcia f definovaná na intervale $\langle 0; 1 \rangle$ má nasledujúce vlastnosti: Pre všetky $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je $f(x) \geq 0$, $f(1) = 1$. Pre každé x_1, x_2 také, že $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 1$ platí $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.

a) Pre každé $x \in \langle 0; 1 \rangle$ platí: $f(x) \leq 2x$. Dokážte.

b) Platí pre každú funkciu f uvedených vlastností tiež $f(x) \leq 1,9x$ v intervale $\langle 0; 1 \rangle$?

10. Nájdite všetky spojité reálne funkcie f definované na

intervale $\langle 1; \infty \rangle$, ktoré vyhovujú rovnici

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y}$$

pre všetky $x, y \in \langle 1; \infty \rangle$.

Kombinatorika (zostavil *dr. M. Koman, CSc.*):

1. Známa hra „národná bitka“ sa hrá na štvorcoch zložených z $N = 10 \times 10$ jednotkových štvorčiek. Lietadlová loď je znázornená ako obdĺžnik zložený zo 4 štvorčiek (obdĺžnik 1×4). Môže byť umiestnená na ľubovoľnom mieste.

Určte najmenší počet „striel“, ktoré zabezpečia a) zasiahnutie, b) potopenie lietadlovej lode. (Predpokladáme, že na hracej ploche je len lietadlová loď.)

Doplňok. Riešte úlohu pre ľubovoľnú štvorcovú hraciu plochu zloženú z $N = k \times k$ štvorčiek ($k \geq 4$).

2. Určte najväčší počet kráľov, ktorých možno rozmiestniť na štvorcovej šachovnici zloženej z N^2 polí tak, aby každý kráľ susedil nanajvýš s jedným ďalším kráľom.

Doplňok. Riešte analogickú úlohu pre iné šachové figúry.

3. Usporiadajte množinu všetkých prirodzených čísel $1, 2, 3, \dots, N$ tak, aby aritmetický priemer žiadnych dvoch čísel sa nerovnal niektorému číslu umiestnenému medzi nimi. Napríklad pre $N = 8$ je prípustné poradie 1, 5, 3, 7, 8, 4, 6, 2 a neprípustné poradie 1, 5, 8, 7, 6, 3, 2, 4 (napr. $6 = (8 + 4) : 2$).

4. Zistite, či existuje taká postupnosť P prirodzených čísel (nemusia to byť všetky prirodzené čísla), že každé prirodzené číslo sa dá vyjadriť ako rozdiel práve dvoch členov postupnosti P .

5. V štvorcovej tabuľke s n^2 poliami je zapísaných n^2 čísel (tieto čísla sú teda usporiadané do tzv. štvorcovej matice), ktorých súčet je kladné číslo. Dokážte, že stĺpce tabuľky možno permutovať tak, aby súčet čísel na uhlopriečke vedúcej z ľavého dolného rohu do pravého horného rohu bol tiež kladný.

6. V každom poli pravouholníkovej tabuľky $m \times n$ je zapísané niektoré prirodzené číslo (tj. celé kladné číslo). Sú dovolené dva druhy operácií:

a) Zdvojenie všetkých čísel niektorého riadku.

b) Odčítanie jedničky od všetkých čísel niektorého stĺpca.

Dokážte, že po konečnom počte operácií možno vždy získať tabuľku, v ktorej všetky čísla sú nuly.

7. V rovine je daných niekoľko červených a niekoľko modrých bodov. Niektoré z nich sú spojené úsečkami. Bod nazveme „labilným“, ak viac než polovica bodov, s ktorými je spojený úsečkami má inú farbu než je farba uvažovaného bodu. Ak existuje aspoň jeden labilný bod, zvolíme niektorý z nich a zmeníme jeho farbu (červenú na modrú alebo obrátene). Dokážte, že po konečnom počte krokov nezostane žiadny labilný bod.

8. V rovine je daných n červených a n modrých bodov, z ktorých žiadne tri neležia v priamke. Dokážte, že je vždy možno zostrojiť n úsečiek, ktoré spájajú dvojice bodov rôznych farieb a sú po dvoch disjunktné.

9. Je daný konvexný mnohoúholník $\mathbf{M}$. a) Pre každú trojicu po sebe idúcich vrcholov mnohoúholníka $\mathbf{M}$ zostrojíme kružnicu prechádzajúcu týmito bodmi. Z nich vyberieme tú, ktorá má najväčší polomer. Dokážte, že mnohoúholník $\mathbf{M}$ je časťou kruhu ohraničeného touto kružnicou.

b) Pre každú trojicu po sebe idúcich strán mnoho uholníka **M** zostrojíme kružnicu, ktorá sa dotýka týchto troch úsečiek. Z nich vyberieme tú, ktorá má najmenší polomer. Dokážte, že celá táto kružnica je časťou mnoho uholníka **M**.

10. Je daný konvexný mnoho uholník, ktorého časťou nie je žiadny trojuholník s obsahom 1. Dokážte, že tento mnoho uholník možno umiestniť do trojuholníka s obsahom 4.

Rovnice a sústavy rovníc (vybral dr. J. Hojdar):

1. Nech a, b, c sú navzájom rôzne reálne čísla. Potom rovnica

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

má vždy reálne riešenie. Dokážte.

2. Rozhodnite, pre ktoré x má zmysel rovnica

$$\log_x 10 + \log_x 100 + \log_x 1\,000 = \frac{\log_{10} x^3}{1 + \log_{10} x}$$

a nájdite všetky jej riešenia.

3. Určte všetky reálne riešenia rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} = x - p,$$

kde p je dané reálne číslo. Urobte diskusiu vzhľadom na číslo p .

4. Riešte rovnicu

$$x^2 - 6(k-1)x + 9(k^2 - 2) = 0$$

s neznámou x , ak k je dané reálne číslo.

5. Sú dané rovnice

$$x^2 + px + 1 = 0,$$

$$x^2 + x + p = 0,$$

kde p je dané reálne číslo. Určte všetky čísla p také, pre ktoré obe rovnice majú spoločný reálny koreň.

6. Sú dané dve kvadratické rovnice

$$x^2 + ax + b = 0,$$

$$x^2 + cx + d = 0$$

s reálnymi koeficientami. Nájdite nutné a postačujúce podmienky medzi koeficientami daných rovníc pre to, aby obe rovnice mali jeden spoločný kladný koreň a aby zostávajúci koreň prvej rovnice bol väčší než zostávajúci koreň druhej rovnice.

7. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 2x - 1} = p,$$

kde p je dané reálne číslo. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na číslo p .

8. Je daná sústava rovníc $|1 - x| = a$, $|x - y| = b$, $|y - 1| = c$, kde a , b , c sú dané prirodzené čísla. Dokážte, že sústava má buď dve riešenia alebo je neriešiteľná. Určte podmienku riešiteľnosti.

VII. Zpráva o XVIII. mezinárodní matematické olympiádě

XVIII. mezinárodní matematická olympiáda se konala ve dnech 7.–21. července 1976 v Rakousku. Zúčastnily se jí delegace z 19 zemí: Bulharska (BG), Československa (CS), Finska (SF), Francie (F), Holandska (NL), Jugoslávie (YU), Kuby (C), Maďarska (H), NDR (DDR), NSR (D), Polska (PL), Rakouska (A), Rumunska (R), Řecka (GR), SSSR (SU), Švédska (S), USA, Velké Británie (GB) a Vietnamu (VN). Z tradičních účastníků tedy tentokrát chybělo Mongolsko; nově se zúčastnila NSR — ovšem jen mimo soutěž. Některé další pozvané země (např. Švýcarsko, Itálie, Turecko) delegaci nevyslaly.

V celkových rysech sledovala organizace XVIII. MMO tradiční zavedené schéma, její provedení však bylo takřka perfektní. Rakouští pořadatelé nešetřili úsilím ani finančními prostředky k zajištění hladkého průběhu všech akcí, jež tvořily součást XVIII. MMO. Je vidět, že mezinárodním matematickým olympiádám je přikládán stále větší význam, který jasně přesahuje rámec odborné soutěže.

Soutěž MMO řídila jako obvykle mezinárodní jury složená z vedoucích jednotlivých delegací a jejich zástupců; v jejím čele stál předseda jury *prof. G. Baron* z vídeňské technické univerzity. Vedle něho působil ještě také presi-

dent XVIII. MMO *prof. E. Hlawka*, jehož funkce byla spíše reprezentativní.

Přípravné práce s výběrem a formulací úloh pro soutěž probíhaly ve dnech 8.—10. července ve městě Eisenstadt, kde měla jury k dispozici místnosti i velmi dobré technické vybavení tamějšího gymnázia. Přípravy pokračovaly poměrně rychle. Pro XVIII. MMO vybrala jury šest úloh — jak se později ukázalo — spíše obtížných. Z československého návrhu byla vybrána jedna snazší geometrická úloha, kterou jury zařadila jako první na začátek soutěže.

Výsledný výběr úloh nelze označit za ideální; to je ovšem v poslední době dost obvyklý důsledek nutných kompromisů, neboť úlohy musí být přijatelné pro všechny zúčastněné delegace.

Přípravné práce skončily 10. července překladem textů úloh do jazyků soutěžících žáků, pro žáky z ČSR do češtiny, pro žáky ze SSR do slovenštiny. Mezitím se už do Vídně sjížděla žakovská družstva se zástupci vedoucích delegací. Žáci ihned pokračovali v cestě autokary do východotyrolského města Lienz, kdežto jury přesídlila do korutanského turistického střediska Heiligenblut, vzdáleného asi 40 km od Lienzu.

Vlastní soutěž XVIII. MMO se konala ve dnech 12. a 13. července 1976 v Lienzu. Žáci řešili ve dvou soutěžních půldnech po třech úlohách; v dalších dnech pak již měli volno zpestřené výlety do okolních hor. Jury zatím v Heiligenblutu opravovala předložená řešení, klasifikovala a koordinovala. Díky dobré organizaci probíhaly opravy i koordinace rychle, takže již v pátek 16. července se jury mohla sejít k závěrečné schůzi, na níž stanovila rozdělení cen.

Oprava žákovských řešení ukázala, že některé úlohy, zvláště pátá, byly obtížné, resp. nezvyklé, takže celkové bodové hodnocení je v průměru slabší. Proto bylo přijato rozhodnutí udělovat ceny žákům, kteří získali alespoň 15 bodů ze 40 možných. Ceny byly tedy uděleny 82 žákům z celkového počtu 139 soutěžících.

Program olympiády pokračoval v neděli 18. července přesunem všech účastníků do Vídně. Cesta vedla přes Zell am See, Hallein a Solnohrad, kde byla delší přestávka spojená s prohlídkou města.

Ve Vídni již byli všichni účastníci ubytováni na jednom místě, v moderním studentském domově v Döblingu. Na programu dne 19. července byla prohlídka Vídně a výlet do Kloster Neuburg, v úterý 20. července odpoledne pak slavnostní zakončení XVIII. MMO ve vídeňském Hofburgu s rozdělením cen a večer závěrečná večere ve sklipku vídeňské radnice.

Středa 21. července byla dnem loučení a odjezdů. Československá delegace odjížděla ve dvou skupinách: slovenská část do Bratislavy, česká část přes Břeclav do Prahy.

Při zakončení XVIII. MMO pozval vedoucí jugoslávské delegace všechny zúčastněné delegace na příští, XIX. MMO začátkem července 1977 v Bělehradě.

Úlohy XVIII. MMO

1. V konvexním rovinném čtyřúhelníku o obsahu 32 cm^2 je součet délek dvou protilehlých stran a jedné úhlopříčky roven 16 cm . Určete všechny možné délky druhé úhlopříčky.

Řešení. Vrcholy čtyřúhelníku označme A, B, C, D tak,

že je

$$AB + BD + CD = 16.$$

Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ lze vyjádřit jako součet obsahů trojúhelníků ABD a BCD . Avšak obsah trojúhelníku ABD nemůže být větší než $\frac{1}{2}AB \cdot BD$ a obdobně obsah trojúhelníku BCD není větší než $\frac{1}{2}BD \cdot CD$. Celkem je tedy obsah čtyřúhelníku $ABCD$ nanejvýš roven

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}AB \cdot BD + \frac{1}{2}BD \cdot CD &= \frac{1}{2}BD(AB + CD) = \\ &= \frac{1}{2}BD(16 - BD).\end{aligned}$$

Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je však 32, musí tedy platit

$$32 \leq \frac{1}{2}BD(16 - BD)$$

neboli

$$BD^2 - 16 \cdot BD + 64 \leq 0.$$

Tuto nerovnost můžeme napsat jako

$$(BD - 8)^2 \leq 0.$$

To je ovšem možné jen tehdy, je-li $BD = 8$; potom ovšem také $AB + CD = 8$. Navíc musí zřejmě platit rovnost

$$32 = \frac{1}{2}AB \cdot BD + \frac{1}{2}BD \cdot CD,$$

tzn. že musí být $AB \perp BD$ a zároveň $CD \perp BD$.

Nyní na přímkě CD sestrojme bod E tak, aby bod D ležel mezi C a E a aby $DE = AB$. Čtyřúhelník $ABDE$ je tedy obdélník. Délku úhlopříčky AC vypočteme podle Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku AEC . Je totiž

$$AE = BD = 8,$$

$$EC = ED + DC = AB + CD = 8,$$

takže $AC = 8\sqrt{2}$. Žádné jiné hodnoty nemůže délka úhlopříčky AC nabýt.

2. Necht

$$P_1(x) = x^2 - 2$$

a pro $j = 2, 3, 4, \dots$

$$P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x)).$$

Dokažte, že pro každé přirozené n jsou všechny kořeny rovnice

$$P_n(x) = x$$

reálné a vesměs různé.

Řešení. Z tvaru rovnice $P_n(x) = x$ plyne, že je vhodné provést do ní substituci

$$x = 2 \cos y.$$

Budeme přitom předpokládat, že $y \in \langle 0, \pi \rangle$. Tím se ovšem omezujeme jen na hledání kořenů $x \in \langle -2, 2 \rangle$.

Nejprve dokážeme indukcí, že pro mnohočleny $P_n(x)$ platí rovnosti

$$P_n(2 \cos y) = 2 \cos(2^n y) \quad (1)$$

pro $n = 1, 2, 3, \dots; -\infty < y < \infty$.

Skutečně, pro $n = 1$ je $P_1(x) = x^2 - 2$, a tedy

$$P_1(2 \cos y) = 4 \cos^2 y - 2 = 2(2 \cos^2 y - 1) = 2 \cos(2y).$$

Předpokládejme nyní platnost vztahu (1) pro některé přirozené $n \geq 1$, potom

$$\begin{aligned} P_{n+1}(2 \cos y) &= P_1(P_n(2 \cos y)) = \\ &= P_n^2(2 \cos y) - 2 = 4 \cos^2(2^n y) - 2 = \\ &= 2(2 \cos^2(2^n y) - 1) = 2 \cos(2^{n+1} y). \end{aligned}$$

Rovnost (1) tedy platí pro všechna přirozená $n \geq 1$.

Vezměme nyní rovnici

$$P_n(2 \cos y) = 2 \cos y ;$$

podle (1) je to

$$2 \cos (2^n y) = 2 \cos y ,$$

tj.

$$\cos (2^n y) = \cos y . \quad (2)$$

Řešením rovnice (2) je pak buď

$$y = \frac{2k\pi}{2^n - 1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1, \quad (3a)$$

anebo

$$y = \frac{2k\pi}{2^n + 1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} ; \quad (3b)$$

pro $k = 0$ dostaneme ovšem v obou případech touž hodnotu, totiž $y = 0$. Celkem tedy máme $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ hodnot y vyhovujících rovnici (2). Snadno se přesvědčíme, že tyto hodnoty jsou vesměs různé, jakmile je $n > 1$. Pro přirozená čísla k, l totiž platí

$$\frac{2k\pi}{2^n - 1} = \frac{2l\pi}{2^n + 1},$$

právě když

$$k + l = 2^n(l - k),$$

což pro $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1$ a $l = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ neplatí, neboť $0 < k + l \leq 2^n - 1$.

Rovnice $P_n(x) = x$ má tedy alespoň 2^n vesměs různých

reálných kořenů daných vztahy

$$x_k = 2 \cos \frac{2k\pi}{2^n - 1}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1,$$

$$x_{2^{n-1}+k-1} = 2 \cos \frac{2k\pi}{2^n + 1}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}.$$

Poněvadž však zřejmě je $P_n(x)$ polynom stupně 2^n , jsou tyto hodnoty právě všechny kořeny rovnice $P_n(x) = x$, a to pro libovolné $n \geq 2$. Pro $n = 1$ je $P_1(x) = x^2 - 2$ a rovnice $P_1(x) = x$, tj.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

má právě dva reálné kořeny: 2 a -1 .

Dokazované tvrzení tedy platí pro všechna přirozená $n \geq 1$.

3. Krabice ve tvaru kváдру je taková, že ji lze zcela vyplnit krychlemi o objemu 1. Vložíme-li do ní co nejvíce krychlí o objemu 2 tak, aby hrany krychlí byly rovnoběžné s hranami krabice, vyplníme právě 40 % prostoru krabice. Určete vnitřní rozměry všech krabic s touto vlastností. (Použijte $\sqrt[3]{2} = 1,2599\dots$)

Řešení. Označme a, b, c délky (vnitřních) hran krabice; jsou to zřejmě přirozená čísla. Přitom můžeme předpokládat, že je $a \leq b \leq c$. Krychle o objemu 2 má hranu délky $\sqrt[3]{2}$, takže za podmínek úlohy je maximální počet těchto krychlí, které lze do krabice vložit, dán číslem

$$\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}} \right] \cdot \left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}} \right] \cdot \left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right],$$

přičemž symbol $[x]$ znamená celou část reálného čísla x , tj. celé číslo, pro které platí $[x] \leq x < [x] + 1$.

Každá z těchto krychlí má objem 2 a všechny dohromady zaplní 40 %, tj. $\frac{2}{5}$ objemu krabice. Je tedy

$$\frac{2}{5}abc = 2 \cdot \left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}} \right] \cdot \left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}} \right] \cdot \left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right]$$

neboli

$$abc = 5 \cdot \left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}} \right] \cdot \left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}} \right] \cdot \left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right].$$

Vyšetříme, jak se mění hodnoty

$$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right] \quad \text{a} \quad \frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right]}$$

s rostoucím n . Pro $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ dostaneme tuto tabulku:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right]$	0	1	2	3	3	4	5	6	7	7
$\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right]}$	—	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$

Přímo z tabulky můžeme již snadno najít dvě řešení úlohy tak, že hledáme ve třetím řádku tabulky tři čísla, jejichž součin je 5. Poněvadž $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} = 5$, vidíme, že řešením je

jednak trojice $a = 2, b = 3, c = 5$, jednak trojice $a = 2, b = 5, c = 6$.

Nyní si ukážeme, že jiná řešení úloha již nemá. Snadným výpočtem zjistíme, že pro $n \geq 8$ je vždy

$$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right] < \frac{3}{2}.$$

Skutečně, je-li

$$n \geq 8 > \frac{63}{8} = \frac{126}{100 - 84} = \frac{1,26}{1 - \frac{2}{3} \cdot 1,26} > \frac{\sqrt[3]{2}}{1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{2}},$$

pak ovšem

$$n(1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{2}) > \sqrt[3]{2},$$

tj.

$$2n < 3 \left(\frac{n}{\sqrt[3]{2}} - 1 \right) < 3 \left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right],$$

takže

$$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right] < \frac{3}{2}.$$

Odtud a z tabulky navíc plyne platnost nerovnosti

$$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right] \geq 2$$

pro všechna $n \geq 2$.

Kdyby pro dvě z čísel a, b, c byly odpovídající hodnoty

$$\left\lceil \frac{a}{\sqrt[3]{2}} \right\rceil, \text{ resp. } \left\lceil \frac{b}{\sqrt[3]{2}} \right\rceil, \text{ resp. } \left\lceil \frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right\rceil$$

menší nebo rovné $\frac{3}{2}$, musela by třetí hodnota být větší než 2, což není možné. Dvě z čísel a, b, c tedy musí být rovna 2 anebo 5. Přitom není možné, aby $a = b = 2$, neboť pro žádné přirozené n není

$$\left\lceil \frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right\rceil = \frac{5}{4},$$

bylo by pak totiž $\sqrt[3]{2} \leq \frac{5}{4} = 1,25$, což neplatí.

Z toho je vidět, že uvedené dvě trojice $a = 2, b = 3, c = 5$ a $a = 2, b = 5, c = 6$ jsou jediná řešení úlohy.

Kterou
4. Určete největší hodnotu, jíž může nabýt součin několika přirozených čísel, jejichž součet je 1976.

Řešení. Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou přirozená čísla, jejichž součet je 1976 a jejichž součin je maximální. Dokážeme si dvě pomocná tvrzení:

1. Mezi čísla x_j jsou nejvýše dvě dvojky.

Kdyby totiž tři z čísel x_j byly dvojky, nahradili bychom je dvěma trojkami; součet by se tím nezměnil, neboť $3 + 3 = 2 + 2 + 2$, avšak součin by vzrostl, protože $3 \cdot 3 = 9 > 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$.

2. Žádné z čísel x_j není větší než 3.

Kdyby existovalo číslo $x_j \geq 5$, nahradili bychom je dvěma čísly $x_j - 2$ a 2 ; součet by se nezměnil, protože $x_j - 2 + 2 = x_j$, avšak součin by vzrostl, poněvadž

$$2(x_i - 2) = x_i + (x_i - 4) > x_i.$$

Kdyby některé z čísel x_j bylo rovno 4, nahradili bychom je dvěma dvojkami. Tím se sice nezmění ani součet, ani součin, $2 + 2 = 4 = 2 \cdot 2$, avšak vzroste počet dvojek, což může event. umožnit zvýšení součinu operací popsanou v bodě 1.

Z uvedených tvrzení plyne závěr: Maximálního součinu dosáhneme, volíme-li za čísla x_j pouze dvojky a trojky, přitom dvojky smějí být nejvýše dvě. Poněvadž však

$$1976 = 3 \cdot 658 + 2.$$

vidíme, že řešení úlohy jsou čísla $x_1 = x_2 = \dots = x_{658} = 3$, $x_{659} = 2$. Odpovídající (maximální) hodnota součinu je

3658 . 2.

5. Je dána soustava p rovnic o $q = 2p$ neznámých

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1q}x_q = 0, \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2q}x_q = 0,$$

.....

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pq}x_q = 0$$

s koeficienty $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, q$. Dokažte, že existuje řešení $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ soustavy (1) s těmito vlastnostmi:

- a) všechna čísla $x_1, x_2, \dots, x_q$ jsou celá,
- b) $x_j \neq 0$ pro alespoň jedno $j = 1, 2, \dots, q$,
- c) $|x_j| \leq q$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, q$.

Řešení. Označme **M** množinu všech q -tic celých čísel $x_1, x_2, \dots, x_q$ takových, že $|x_j| \leq p$ pro každé $j = 1, 2, \dots, q$. Množina **M** má zřejmě $(2p + 1)^q$ prvků. Každé q -tici z **M** přiřadíme p -tici celých čísel $y_1, y_2, \dots, y_p$ tak, že položíme

$$y_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jq}x_q, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

kde a_{jk} jsou koeficienty soustavy (1). Vzhledem k podmínce $a_{jk} \in \{0, 1, -1\}$ bude zřejmě vždy $|y_j| \leq pq$. Množina **N** všech takových p -tic má $(2pq + 1)^p$ prvků. Avšak

$$\begin{aligned} (2p + 1)^q &= (2p + 1)^{2p} = (4p^2 + 4p + 1)^p > (4p^2 + 1)^p = \\ &= (2pq + 1)^p, \end{aligned}$$

tedy množina **M** má více prvků nežli množina **N**. Existují tedy nutně v **M** dvě různé q -tice

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_q) \quad \text{a} \quad (x''_1, x''_2, \dots, x''_q),$$

jimž je přiřazena též p -tice čísel y_j . Položíme-li

$$x_j = x'_j - x''_j, \quad j = 1, 2, \dots, q,$$

budou mít čísla x_j vlastnosti a), b) i c) a zároveň budou též řešením soustavy (1).

6. Posloupnost $\{u_n\}$ je definována vztahy

$$u_0 = 2, \quad u_1 = \frac{5}{2},$$

$$u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 \quad \text{přo } n = 1, 2, 3, \dots$$

(1)

Dokažte, že pro $n = 1, 2, 3, \dots$ platí

$$[u_n] = \sqrt[3]{2^{2^n} - (-1)^n} \quad (2)$$

Řešení. Pro $n = 1, 2, 3, \dots$ položme

$$f(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3}. \quad (3)$$

Je $f(1) = 1$, $f(n)$ je vždy přirozené číslo, neboť rozdíl n -tých mocnin $2^n - (-1)^n$ je dělitelný rozdílem $2 - (-1) = 3$. Dále platí pro všechna přirozená n

$$f(n+1) = f(n) + 2f(n-1) \quad (4)$$

a

$$f(n) - 2f(n-1) = (-1)^{n+1}, \quad (5)$$

jak se snadno ověří přímým výpočtem.

Nyní si dokážeme, že pro $n = 1, 2, 3, \dots$ platí

$$u_n = 2^{f(n)} + 2^{-f(n)}. \quad (6)$$

Rovnost (6) dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ je skutečně

$$u_1 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2^1 + 2^{-1} = 2^{f(1)} + 2^{-f(1)}.$$

Obdobně pro $n = 2$ je podle (1) $u_2 = \frac{5}{2}$ a podle (3) $f(2) = 1$, takže (6) platí.

Předpokládejme nyní, že jsme rovnost (6) dokázali pro všechna $n \leq N$, kde $N \geq 2$, a dokážeme si platnost (6) i pro $n = N + 1$. Podle (1) je

$$u_{N+1} = u_N(u_{N-1}^2 - 2) - u_1.$$

*) Symbol $[u_n]$ znamená celou část čísla u_n , viz str. 142.

Dosadíme do pravé strany podle (6) a dostaneme

$$\begin{aligned} & (2^{f(N)} + 2^{-f(N)}) [(2^{f(N-1)} + 2^{-f(N-1)})^2 - 2] - \frac{5}{2} = \\ & = (2^{f(N)} + 2^{-f(N)}) (2^{2f(N-1)} + 2^{-2f(N-1)}) - \frac{5}{2} = \\ & = 2^{f(N)+2f(N-1)} + 2^{-f(N)-2f(N-1)} + 2^{f(N)-2f(N-1)} + \\ & + 2^{-f(N)+2f(N-1)} - 2 - 2^{-1}. \end{aligned}$$

Nyní použijeme vztahů (4) a (5) a dostaneme

$$\begin{aligned} & 2^{f(N+1)} + 2^{-f(N+1)} + 2 + 2^{-1} - 2 - 2^{-1} = \\ & = 2^{f(N+1)} + 2^{-f(N+1)}, \end{aligned}$$

takže rovnost (6) platí i pro $n = N + 1$, a tedy pro všechna přirozená n .

Výše bylo dokázáno, že $f(n)$ je vždy přirozené číslo. Tedy $0 < 2^{-f(n)} < 1$. Z toho podle (6) pak plyne rovnost (2) pro $n = 1, 2, 3, \dots$.

Čs. účast na XVIII. MMO

Ve shodě s propozicemi XVIII. MMO zaslal ústřední výbor MO rakouským organizátorům návrh čtyř úloh pro soutěž; šlo vesměs o hodnotné originální úlohy. Jedna z nich pak byla skutečně vybrána — shodou okolností to nakonec byla jediná soutěžní úloha vybraná z návrhů socialistických zemí, poněvadž dvě pěkné bulharské úlohy byly zamítnuty, když se ukázalo, že příbuzné úlohy byly řešeny v sovětské matematické olympiádě.

Do soutěže na XVIII. MMO vyslala ČSSR osm žáků gymnázií z různých míst (viz připojený seznam). Žáci byli jako obvykle vybíráni podle výsledků v domácí MO i podle

výkonů, které podávali v přípravných soustředěních, seminářích a podobných akcích. Přestože byla v tomto roce věnována přípravě žáků zvýšená pozornost, neprojevalo se to výrazným růstem výkonu na MMO. Zvláště od obou vítězů domácí MO se očekával přece jen trochu lepší výsledek. V připojené tabulce jsou uvedeny počty bodů, jež naši žáci získali za řešení jednotlivých úloh.

Z úloh XVIII. MMO činily našim žákům velké potíže úlohy č. 2, 3 a 5: každý žák měl aspoň za jednu z nich nulové ohodnocení, přitom úlohu č. 3 nikdo z nich nevyřešil ani z poloviny. To jsou jistě varovné signály, na něž bude třeba reagovat. I když v případě úlohy č. 5 lze na omluvu uvádět překvapivost řešení a poukázat na ještě slabší výsledky žáků z některých jiných zemí, není jasné, proč velmi názorná úloha č. 3 dopadla takřka katastrofálně. Zde totiž nešlo o konkrétní znalost vzorce či věty, ale především o schopnost obecné orientace v problému a o nalezení podstatných momentů řešení.

Vedle nedostatků v odborné přípravě se v průběhu XVIII. MMO opět projevily určité nedostatky taktické. Mnoha chyb se žáci dopustili zcela zbytečně, neboť nebyly zaviněny neznalostmi, ale nepozorností, nedostatečnou sebekontrolou, zbytečně rozvláčnými formulacemi nepodstatných detailů řešení. Bude zapotřebí posílit psychologickou přípravu žáků, aby lépe snášeli atmosféru velké a náročné soutěže.

Čs. delegace na XVIII. MMO

vedoucí: *dr. František Zítek, CSc.*

Matematický ústav ČSAV, Praha

zástupce: *doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.*

Vysoká škola dopravní, Žilina

družstvo:

<i>Jan Bázler</i>	3. r. gymnázia	Mladá Boleslav
<i>Jiří Kolafa</i>	3. r. gymnázia	Praha 2
<i>Jan Kratochvíl</i>	2. r. gymnázia	Pardubice
<i>Jiří Navrátil</i>	3. r. gymnázia	Olomouc-Hejčín
<i>Pavol Quittner</i>	3. r. gymnázia	Prievidza
<i>Miroslav Šedivý</i>	4. r. gymnázia	Jevíčko
<i>Peter Takáč</i>	3. r. gymnázia	Šafárikovo
<i>Vladimír Technovský</i>	4. r. gymnázia	Banská Bystrica

Vedoucí a sekretáři na XVIII. MMO

Země	Vedoucí	Sekretář
A	T. Mühlgassner	W. Ratzinger
BG	P. Kedorov	D. Serafimov-Angelov
C	N. del Prado	—
CS	F. Zítek	J. Moravčík
D	W. Frasch	H. Sewerin
DDR	H. Bausch	M. Noacková
F	G. Glaeser	D. Gerll
GB	R. C. Lyness	C. C. Goldsmith
GR	I. Merminghis	P. Sabatakos
H	E. Hódi	I. Reiman
NL	J. van de Craats	M. A. J. G. van der Vlugt

PL	A. Mąkowski	T. Iwaniec
R	I. Cuculescu	F. Haicaovă
S	Å. Samuelsson	L.-Å. Lindahl
SF	M. Lehtinen	H. Valkama
SU	A. P. Savin	S. I. Mojsejevová
USA	S. L. Greitzer	M. S. Klamkin
VN	Le Hai Chau	Phan Duc Chinh
YU	Z. Kadelburg	L. Milin

Výsledky čs. družstva na XVIII. MMO

Jméno žáka	Počet bodů za úlohu č.						Součet bodů	Cena
	1	2	3	4	5	6		
<i>J. Bázler</i>	1	0	0	3	0	1	5	—
<i>J. Kolafa</i>	0	1	3	3	0	7	14	—
<i>J. Kratochvíl</i>	5	3	3	6	0	7	24	II.
<i>J. Navrátil</i>	5	0	2	5	0	7	19	III.
<i>P. Quittner</i>	1	0	1	6	0	0	8	—
<i>M. Šedivý</i>	5	0	2	1	7	7	22	III.
<i>P. Takáč</i>	0	6	1	6	0	4	17	III.
<i>V. Technovský</i>	5	1	1	0	0	0	7	—
Celkem	22	11	13	30	7	33	116	
Maximum	5	7	8	6	7	7	40	

Celkové výsledky XVIII. MMO

Země	Počet cen			Celkový počet bodů
	prvních	druhých	třetích	
A	1	2	5	167
BG	0	2	6	174
C	0	0	0	16*)
CS	0	1	3	116
D	—	—	—	**)
DDR	0	2	3	142
F	1	3	1	165
GB	2	4	1***)	214
GR	0	0	0	50
H	0	3	4	160
NL	0	0	1	78
PL	0	0	6	138
R	0	1	3	118
S	0	1	3	120
SF	0	0	1	52
SU	4	3	1	250
USA	1	4	1	188
VN	0	1	3	112
YU	0	1	3	116

*) V družstvu Kuby byli jen 3 žáci.

**) Dva žáci z NSR řešili úlohy jen mimo soutěž.

***) Jeden z britských žáků dostal navíc (jediný na XVIII. MMO) zvláštní cenu (za zobecnění úlohy č. 4).

Obsah

Předmluva	3
I. Průběh XXV. ročníku MO	6
II. Přípravné úlohy I. kola	35
Kategorie A, B, C	35
Kategorie Z	40
III. Soutěžní úlohy I. kola	44
Kategorie A	44
Kategorie B	52
Kategorie C	60
Kategorie Z	75
IV. Úlohy II. kola	84
Kategorie A	84
Kategorie B	95
Kategorie C	103
Kategorie Z	109
V. Úlohy III. kola kategorie A	115
VI. Korešpondenčný seminár MO v školskom roku 1975/76	126
VII. Zpráva o XVIII. mezinárodní matematické olympiádě	135

POZNÁMKY

POZNÁMKY

POZNÁMKY

POZNÁMKY

Edice Pomocné knihy pro žáky

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
Petr Fabinger, dr. Jiří Mida, doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.
a dr. František Zítek, CSc.

DVACÁTÝ PÁTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. – Praha 1979 – Počet stran 156
Odpovědný redaktor: Stanislav Horák
Výtvarný redaktor: Václav Hanuš
Technická redaktorka: Marie Fišáková

Vytiskla Polygrafia, n. p., Praha 2, Svobodova 1
AA 4,89 (4,46 AA textu, 0,43 AA grafiky) – VA 5,27

Náklad 3550 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/2
Cena brožovaného výtisku Kčs 7,00

505/21, 825

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 5-42-11/1

14 – 316 – 79 Kčs 7,00

**matematická
olympiáda**



SPN 5 - 42 - 11/1

14 - 316 - 79
03/2 Kčs 7,00