

27. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Miroslav Fiedler (editor); Jozef Moravčík (editor): 27. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1977-1978. 20. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404694>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



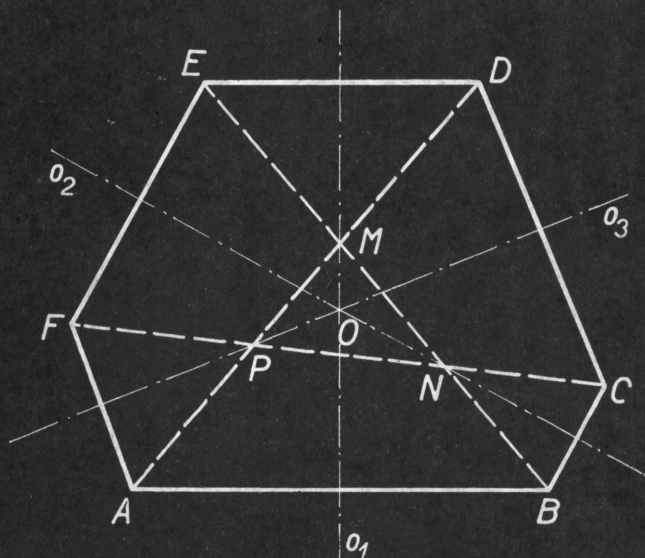
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MČO

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

115 67 Praha 1, Žitná 25
telefon 22 66 01 - 3

XXVII. ročník matematické olympiády



SPN

DVACÁTÝ SEDMÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*Zpráva a řešení úloh ze soutěže
konané ve školním roce 1977—78*

DVACÁTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

**Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
dr. Leo Boček, CSc., doc. dr. Lev Bukovský, CSc., prof. dr.
Miroslav Fiedler, DrSc., doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.
Recenzovali: dr. Jitka Kučerová a dr. Miroslav Šisler, CSc.
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1979**

Predhovor

Milí mladí priatelia,

dostávate do rúk správu o priebehu a výsledkoch už 27. ročníka matematickej olympiády. V knižke nájdete prípravné i súťažné úlohy jednotlivých kategórií i s riešeniami. Po stránke obsahu a náročnosti úloh sme sa usilovali zvlášť v kategórii Z reagovať na skutočnosť, že ťažisko počtu účastníkov tejto kategórie sa postupne presúva do 8. ročníka ZDŠ v súvislosti s uskutočňovaním Projektu ďalšieho rozvoja československej výchovnovzdelávacej sústavy.

Ukončeným 27. ročníkom patrí naša MO k najstarším žiackym súťažiam v riešení matematických úloh na svete. Ak nepočítame súťaže organizované redakciami žiackych časopisov (a aj medzi tými súťaž v Rozhľadoch má úctyhodnú tradíciu), vyjde nám, že staršie než naša MO sú len súťaže v Maďarsku (od r. 1894), matematické olympiády v niektorých oblastiach ZSSR (Moskva, Leningrad — od r. 1934), v Poľsku (od r. 1949), v Bulharsku (od r. 1950) a v určitom zmysle v USA (súťaž Mathematical Association of America sa koná od r. 1949). Matematické olympiády v ostatných kraji-

nách vznikali postupne takto: 1953 — Rumunsko, 1960 — RSFSR, 1961 — NDR, Švédsko, 1962 — Holandsko, Lucembursko, Juhoslávia, Kuba, 1964 — Španielsko, 1965 — Veľká Británia, 1966 — Taliansko, Juhoafrická republika, 1967 — všezväzová MO v ZSSR, 1969 — Kanada, 1970 — Rakúsko, 1971 — NSR, 1972 — USA, 1976 — Belgicko. Francúzska súťaž „Concours général“, ktorá má taktiež mnohoročnú tradíciu, je súťažou odlišného charakteru.

Takmer všetky krajiny, ktoré sme tu spomenuli, vysielajú v posledných rokoch svoje družstvá na medzinárodnú matematickú olympiádu. Jubilejná — dvadsiata — sa konala v júli 1978 v zemi, ktorá sa stala pred 20 rokmi iniciátorom tohto ušľachtilého medzinárodného zápolenia matematických talentov — v Rumunsku. V knižke nájdete okrem podrobnej správy o súťaži XX. MMO a zvlášť o účasti československého družstva zloženého z víťazov 27. ročníka MO aj úlohy tejto súťaže a ich riešenia. Osmička našich reprezentantov patrila tentoraz medzi najúspešnejších nielen v súťaži jednotlivcov, ale 5. miestom veľmi príjemne prekvapila taktiež v neoficiálnej súťaži 17 družstiev. Je to výsledok systematickej práce v riešení úloh v rámci krúžkov MO, sústreďení i korešpondenčného seminára, ktorý za štyri roky svojej existencie aj napriek niektorým nedostatkom preukázal svoju životnosť.

Veríme, že na tento úspech budú nadväzovať naše družstvá aj na budúcich MMO, najmä ak budeme naďalej intenzívne rozvíjať osvedčené formy práce s matematicky nadanými žiakmi a racionálne využívať

zahraničné skúsenosti. Účastníkom nasledujúcich ročníkov MO doporučujeme siahnuť nielen po doteraz vydaných ročenkách a zbierkach riešených úloh MO, po zväzkoch edície Škola mladých matematikov, ale aj po zbierkach úloh z MMO a výberoch najkrajších a najzaujímavejších úloh z národných MO, ktoré začali systematicky vydávať v ZSSR a ktoré sa prostredníctvom Sovietskej knihy dostávajú aj ku nám. Tak sa najlepšie pripraví nielen na úspešnú účasť v MO, poprípade v MMO, ale predovšetkým na úspešné vysokoškolské štúdium matematiky, fyziky a technických vied, v ktorých potreba kvalifikovaných odborníkov v období intenzívneho vedecko-technického rozvoja neustále rastie.

Aby ste mali predstavu o úlohách riešených v zahraničných MO, ponúkame vám na ukážku niekoľko úloh z MO v zemi, ktorá bola organizátorom XX. MMO:

1. Je možné, aby dva pravouhlé trojuholníky, ktoré majú rovnakých 5 prvkov (strany, uhly), neboli zhodné?
2. a) Je daný štvorec so stranou dĺžky 1. Ukážte, že medzi jeho ľubovoľnými 5 vnútornými bodmi existujú aspoň dva také, ktorých vzdialenosť je

menšia než $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- b) Platí analogická vlastnosť pre pravidelný šesťuholník so stranou jednotkovej dĺžky?

3. Sú dané komplexné čísla $z_1 = \frac{1 + im}{1 - im}$, $z_2 = \frac{m + i}{m - i}$,

$m \in \mathbf{R}$.

- a) Ukážte, že obrazy čísel z_1, z_2 ležia na tej istej kružnici so stredom v začiatku súradnicovej sústavy.
- b) Označte $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ čísla komplexne združená k z_1, z_2 .
Dokážte, že pre každé celé n platí:

$$z_1^{2n} + z_2^{2n} = \bar{z}_1^{2n} + \bar{z}_2^{2n}.$$

4. Ukážte, že $x = 3$ je jediným reálnym koreňom rovnice

$$3^x + 4^x + 5^x = 6^x.$$

5. Nech $\mathbf{Q}[x]$ je množina všetkých mnohočlenov s racionálnymi koeficientami a $g \in \mathbf{Q}[x]$. Ukážte, že ak $g(1 + x^2)$ je mnohočlen identicky nulový, potom rovnakú vlastnosť má aj mnohočlen $g(x)$.

Skúste tieto úlohy vyriešiť, a ak sa vám to podarí, pokúste sa aj o úspech pri úlohách korešpondenčného seminára, ktoré sú v knižke publikované a boli vybrané väčšinou taktiež zo zahraničných prameňov.

Budeme radi, ak nám napíšete o svojich úspechoch i nezdaroch pri riešení týchto úloh i o svojich pripomienkach k obsahu a spracovaniu tejto knižky.

Ústredný výbor matematickej olympiády
115 67 Praha 1-Nové Město
Žitná 25

Obsah

Předmluva.	3
I. O průběhu XXVII. ročníku MO	8
II. Přípravné úlohy I. kola	32
Kategorie A	32
Kategorie B	36
Kategorie C	44
Kategorie Z	48
III. Soutěžní úlohy I. kola	53
Kategorie A	53
Kategorie B	64
Kategorie C	74
Kategorie Z	83
IV. Soutěžní úlohy II. kola	91
Kategorie A	91
Kategorie B	97
Kategorie C	103
Kategorie Z	108
V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A	114
VI. Texty soutěžních úloh krajských kol kategorie Z	128
VII. Zpráva o 4. korespondenčním semináři MO	140
VIII. Zpráva o XX. mezinárodní matematické olympiádě	151

I. O průběhu XXVII. ročníku matematické olympiády

1. ORGANIZACE SOUTĚŽE

Pořadateli XXVII. ročníku matematické olympiády byla *ministerstva školství ČSR a SSR, Matematický ústav ČSAV v Praze (MÚ ČSAV), Jednota československých matematiků a fyziků (JČSMF), Jednota slovenských matematiků a fyziků (JSMF) a Socialistický svaz mládeže (SSM)*. Soutěž byla řízena jako v předcházejících letech ústředním výborem matematické olympiády (ÚV MO), krajskými a okresními výbory matematické olympiády (KV MO, OV MO).

Žáci soutěžili ve čtyřech kategoriích: kategorie A je určena pro žáky III. a IV. ročníků středních škol, kategorie B pro žáky II. ročníků a kategorie C pro žáky I. ročníků. V kategorii Z soutěžili žáci 8. a 9. tříd základních devítiletých škol. Se souhlasem KV MO může žák soutěžit i v kategorii určené pro žáky vyšších ročníků.

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

V roce 1977 byl jmenován ministerstvy školství ČSR a SSR na návrh JČSMF a JSMF nový ústřední výbor matematické olympiády, který pracoval od 1. října 1977 v tomto složení:

předseda: *doc. dr. Jozef Moravčík, CSc., VŠD, Žilina*

místopředsedové: *doc. Jan Vyšín, CSc., MÚ ČSAV, Praha*

dr. František Zítek, CSc., MÚ ČSAV, Praha

1. jednatel: *Petr Fabinger, pedagogická fakulta UK, Praha*

2. jednatel: *dr. Jiří Mída, pedagogická fakulta UK, Praha*

zástupce MŠ ČSR: *Václav Šula, Praha*

zástupce MŠ SSR: *dr. Júlia Lukátšová, Bratislava*

zástupce ÚV SSM: *Jana Pomazalová, gymnázium, Brno, tř. kpt. Jaroše*

ostatní členové:

dr. František Běloun, Praha

dr. Ladislav Berger, Žilina

doc. dr. Lev Bukovský, CSc., přírodovědecká fakulta UPJŠ, Košice

Milan Cirjak, KPÚ, Prešov

prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., MÚ ČSAV, Praha

dr. Ivan Korec, CSc., přírodovědecká fakulta UK, Bratislava

dr. Karol Križalkovič, pedagogická fakulta, Nitra

doc. dr. Alois Kufner, CSc., MÚ ČSAV, Praha

Olga Maříková, gymnázium, Praha 7, Nad štolou

Milan Maxian, gymnázium A. Markuša, Bratislava

akademik Josef Novák, MÚ ČSAV, Praha

doc. dr. Aleš Pultr, CSc., MFF UK, Praha

Vítazoslav Repáš, gymnázium J. Hronca, Bratislava

Stanislav Rypáček, gymnázium, Praha 9-Prošek

dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV, Praha

ing. Oldřich Skopal, gymnázium, Brno, tř. kpt. Jaroše

dr. Jiří Šídlo, gymnázium, Praha 3, Sladkovského nám.

Miloslav Šmerda, Brno

Dále jsou členy ÚV MO předsedové krajských výborů
matematické olympiády:

Praha: *prof. dr. Karel Drbohlav, DrSc., MFF UK, Praha*

Středočeský kraj: *Ludmila Tréglová, gymnázium, Říčany*

Jihočeský kraj: *dr. ing. Lada Vaňatová, pedagogická
fakulta, České Budějovice*

Západočeský kraj: *Věra Rádlová, gymnázium J. Fučíka,
Plzeň*

Severočeský kraj: *Jiří Slavík, gymnázium, Teplice*

Východočeský kraj: *dr. Josef Kubát, gymnázium, Par-
dubice*

Severomoravský kraj: *prof. dr. Miloslav Zedek, pří-
rodovědecká fakulta UP, Olomouc*

Jihomoravský kraj: *dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT,
Brno*

Bratislava: *Tomáš Hecht, přírodovědecká fakulta UK,
Bratislava*

Západoslovenský kraj: *doc. dr. Ondrej Šedivý, CSc.,
pedagogická fakulta, Nitra*

Středoslovenský kraj: *dr. Pavel Kršňák, CSc.*, pedagogická fakulta, Banská Bystrica

Východoslovenský kraj: *dr. Martin Gavalec*, přírodovědecká fakulta, UPJŠ, Košice

Pracovní předsednictvo ÚV MO (PÚV MO) tvořili (v abecedním pořadí): doc. dr. Lev Bukovský, CSc., Petr Fabinger, prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., dr. Júlia Lukátšová, dr. Jiří Mída, doc. dr. Jozef Moravčík, CSc., Jana Pomazalová, Vítazoslav Repáš, dr. Jiří Sedláček, CSc., Václav Šula, doc. Jan Vyšín, CSc., dr. František Zítek, CSc.

V průběhu školního roku 1977/78 odstoupil z funkce jednatele Petr Fabinger, od 1. ledna 1978 zastával tuto funkci dr. Leo Boček, CSc., z matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze.

3. SCHŮZE ÚV MO

V průběhu 27. ročníku MO se konala dvě zasedání ÚV MO, ve dnech 5. a 6. prosince v Praze a ve dnech 5. a 6. května v Jihlavě u příležitosti konání celostátního kola MO kategorie A. Hlavními body prvního zasedání bylo hodnocení 26. ročníku MO a zajištění pomocných akcí MO, jako jsou celostátní soustředění, ediční činnost a podobně. Velká pozornost byla věnována přípravě stanoviska ÚV MO pro poradu MŠ o vyučování matematice. Na zasedání v Jihlavě byl zhodnocen dosavadní průběh 27. ročníku MO, projednávaly se otázky administrativního zajištění matematické olympiády a všichni

přítomní již obdrželi rozmnožené texty úloh 28. ročníku MO.

4. PRŮBĚH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

Organizace jednotlivých kol soutěže byla opět stejná jako v předcházejících ročnících. *První kolo* se skládalo ze dvou částí, v první části řešili soutěžící čtyři úlohy přípravné, ve druhé části řešili šest úloh soutěžních v kategoriích A, B, C a čtyři úlohy soutěžní v kategorii Z. Přípravné úlohy odevzdávali soutěžící do 15. listopadu 1977. Na rozdíl od soutěžních úloh se přípravné úlohy neklasifikovaly. O postupu do II. kola soutěže rozhodovala pouze klasifikace soutěžních úloh I. kola. Úspěšným řešitelem I. kola se stal žák, který vyřešil správně nebo v podstatě správně alespoň tři soutěžní úlohy. Soutěžní úlohy I. kola se odevzdávaly v kategorii A do 8. ledna 1978, v kategorii B a C do 15. února 1978. Z úspěšných řešitelů I. kola vybíraly OV MO a KV MO účastníky *II. kola*, které je v kategoriích A, B, C kolem krajským, v kategorii Z kolem okresním. Termíny II. kola byly: pro kategorii A 25. únor 1978, pro kategorie B, C 8. duben 1978 a v kategorii Z 15. únor 1978. *Třetí (krajské) kolo* kategorie Z pořádaly téměř všechny krajské výbory MO, v kategoriích B, C se třetí kolo MO neorganizuje. *Třetí (celostátní) kolo* MO kategorie A se konalo 5. a 6. května 1978 v Jihlavě a byla mu věnována velká pozornost stranických a státních orgánů jihomoravského kraje, jihlavského okresu i města Jihlavy. Slavnostního

zasedání se zúčastnil za KV KSČ v Brně s. *Vladimír Štefl*, vedoucí odboru školství a vědy, za OV KSČ v Jihlavě jeho tajemník pro ideologickou práci s. *Hubert Řiháček*. Oba mají k matematické olympiádě velmi dobrý vztah. Soudruh Štefl byl po několik let předsedou KV MO v Brně, s. Řiháček patřil v době svých školních let mezi soutěžící v matematické olympiádě. O organizaci celostátního kola MO se nesmírně zasloužili členové KV MO v Brně v čele s jeho nynějším předsedou *dr. Jaroslavem Bayerem, CSc.*, a jednatelem *ing. Oldřichem Skopalem* a členové jihlavské pobočky JČSMF soudruzi *prof. J. Svoboda, J. Beneš*, odb. asistentka *Eva Benešová, prof. Miroslav Pavel* a další. Pro účastníky soutěže i členy ÚV MO zajistili organizátoři výlet do Telče a představení brněnského Divadla na provázku. Vlastní soutěž se konala v Domě kultury a techniky ROH, zúčastnilo se jí všech 80 pozvaných soutěžících (mezi nimi dvě dívky), úspěšných bylo 33 a 19 nejlepších z nich bylo prohlášeno za vítěze XXVII. ročníku matematické olympiády.

5. POMOCNÉ AKCE

K úspěšnému umístění našich žáků v některém kole matematické olympiády nebo dokonce v mezinárodní matematické olympiádě (MMO) pomáhá mnoho akcí, pořádaných jak ústředním výborem matematické olympiády, tak okresními a krajskými výbory MO. Z akcí ústředního výboru MO to byl ve školním roce 1977/78

korespondenční seminář, o kterém píšeme podrobně na jiném místě, dále tzv. *pražský seminář*, který se konal na gymnáziu v Praze 2, ul. W. Piecka, a jiné. V průběhu roku se konala též tři celostátní soustředění. *Soustředění úspěšných řešitelů matematické a fyzikální olympiády* I.—III. ročníků středních škol se konalo v České Lípě ve dnech 12.—24. června 1978 a z matematiků na něm přednášeli dr. F. Zítek, CSc., dr. A. Vrba, CSc., a dr. Jaroslav Morávek, CSc., všichni z MÚ ČSAV v Praze, a dr. T. Hecht z přírodovědecké fakulty UK v Bratislavě. Dále se konala *dvě soustředění v rámci přípravy na dvacátý ročník MMO* v Bukurešti. První soustředění se konalo v Šaře ve dnech 3.—8. dubna 1978, druhé v Bratislavě v době od 11. června do 24. června 1978. Přednášejícími byli dr. A. Černý, dr. J. Fuka, CSc., dr. I. Korec, CSc., doc. dr. J. Moravčík, CSc., dr. V. Müller, dr. L. Niepel, dr. Š. Sakáloš, dr. A. Vrba, CSc., dr. F. Zítek, CSc., a další.]

6. STUDIJNÍ LITERATURA

Základní informační literaturou pro účastníky MO jsou *letáky MO*, které vydává Státní pedagogické nakladatelství v Praze a Slovenské pedagogické nakladatelstvo v Bratislavě. Mimo to otiskují úlohy MO též *Rozhledy matematicko-fyzikální*. O každém ročníku MO vychází v SPN Praha *ročenka*, do konce školního roku 1977/78 jich vyšlo již 24. V edici *Škola mladých matematiků* (ŠMM) vydává ÚV MO v nakladatelství Mladá

fronta knížky určené hlavně našim olympionikům.
Z posledních vydaných svazků uvádíme:

svazek 40 — *Antonín Vrba*: Princip matematické indukce

41 — *Bohdan Zelinka*: Rovinné grafy

42 — *Ladislav Beran*: Uspořádané množiny

a již třetí vydání 1. svazku ŠMM — *František Hradecký, Milan Koman, Jan Vyšín*: Několik úloh z geometrie jednoduchých těles.

7. KONKURS ÚLOH MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

JČSMF a JSMF vyhlásily roku 1966 konkurs na úlohy pro MO, který stále probíhá. Podmínky konkursu byly otištěny také v letáku pro 27. ročník MO. Podle těchto podmínek jsou úlohy přijaté v konkursu honorovány, za každou úlohu pro kategorie A, B, C obdrží autor 50,— Kčs, v kategorii Z 30,— Kčs. Úlohy pro mezinárodní matematickou olympiádu jsou odměňovány částkou 80,— Kčs. Z přijatých úloh připravují komise ÚV MO a PÚV MO úlohy pro další ročníky MO. Texty úloh a jejich řešení je třeba zaslat na adresu ÚV MO, 115 67 Praha 1, Žitná 25. Zvláště vítány jsou úlohy z modernizované školské matematiky.

PŘEHLED ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ

II. KOLA V KATEGORIÍCH A, B, C

Praha

Kategorie A

Petr Savický, 3.d, Praha 2, W. Piecka; *Jan Nekovář*, 1.d, Praha 6, Arabská; *Mirko Navara*, 4.d, Praha 2, W. Piecka; *Zdeněk Vavříň*, 4.c, Praha 1, Štěpánská; *Jan Vejvalka*, 3.c, Praha 5, Na Zatlance; *Petr Beránek*, 4.a, Praha 9 - Prosek; *Otto Ritter*, 3.d, Praha 2, W. Piecka; *Vlastimil Smotlacha*, 3.c, Praha 1, Štěpánská; *Robin Thomas*, 2.d, Praha 2, W. Piecka

Kategorie B

Jan Rataj, 2.b, Praha 6, Arabská; *Milan Jirásek*, 2.d, Praha 2, W. Piecka; *Jan Krajíček*, 2.d, Praha 2, W. Piecka; *Šimon Nešvera*, 2.d, Praha 2, W. Piecka; *Václav Ondráček*, 2.e, Praha 5, Na Zatlance; *Hynek Černoch*, 2.f, Praha 8 - Libeň; *Pavel Valach*, 2.a, Praha 10, Voděradská; *Jan Nekovář*, 1.d, Praha 6, Arabská

Kategorie C

Jan Nekovář, 1.d, Praha 6, Arabská; *Jan Němec*, 1.c, Praha 7, Nad štolou; *Miroslav Engliš*, ZDŠ Praha 4, Na planině; *Jiří Matoušek*, 1.a, Praha 10, Voděradská; *Bořivoj Tydlitát*, 1.d, Praha 2, W. Piecka; *Tomáš Flaška*, Z1, SPŠD Praha 1, Masná; *Pavel Kopčil*, 1.d,

Praha 6, Arabská; *Jolana Staňková*, 1.c, Praha 9-Prosek; *Petr Boček*, 8.a, ZDŠ Praha 3, Pražáčka

Středočeský kraj

Kategorie A

Ivo Mrázek, 2.b, Nymburk; *Karel Růžička*, 4.a, Kolín; *Robert Černý*, 4.b, Rakovník; *Pavel Töpfer*, 3.a, Mladá Boleslav; *Petr Hlinomaz*, 3.a, Kladno; *Zdeněk Kočí*, 4.a, Český Brod; *Zdeněk Gášek*, 2.a, Dobříš; *Václav Blažek*, 4.a, Příbram; *Vlastimil Smolka*, 3.e, OU Aero Vodochody; *Jiří Novotný*, 2.b, Poděbrady

Kategorie B

Jiří Novotný, 2.b, Poděbrady; *Zdeněk Gášek*, 2.a, Dobříš; *Jiří Hynek*, 2.c, Kolín; *Iva Matoušková*, 2.a, Vlašim; *Jiří Hrdina*, 2.a, Kladno; *Jaroslav Vávra*, 2.a, Dobříš; *Petr Vašíček*, 2.b, Sedlčany; *Milan Tintěra*, V 2.a, SPŠ Kutná Hora; *Vojtěch Terlecký*, 2.c, SPŠ Mladá Boleslav; *Eva Voslářová*, 2.a, Vlašim

Kategorie C

Olga Kasafírková, S 1., SPŠ Čáslav.

Jihočeský kraj

Kategorie A

Jaroslav Čech, 3., Dačice; *Jaromír Němec*, 3.d, Tábor; *Jaroslav Holý*, 4.a, G K. Šátala, České Budějovice; *Milan Pávek*, 3.c, Tábor

Kategorie B

Jaroslav Drtina, 2.d, G K. Šátala, České Budějovice; *Jiří Hanzal*, 2.c, SPŠ Strakonice; *Miroslav Masojídek*, 2.a, Písek; *Dagmar Hlaváčová*, 2. b, Pelhřimov; *Oldřich Suchánek*, 2.b, Pelhřimov; *Lubomír Přech*, 2.a, G K. Šátala, České Budějovice; *Miroslav Novák*, 2.a, G K. Šátala, České Budějovice; *Petr Knetl*, 2.b, Strakonice; *Květa Marková*, 2.b, Český Krumlov

Kategorie C

Libor Forst, 1.a, České Budějovice, Jírovcova; *Ivo Tomšovic*, 1.c, Strakonice; *Ivo Heřmánek*, 1., Český Krumlov; *Radim Vysoký*, 1.c, České Budějovice, Jírovcova; *Zbyněk Zelinka*, 1.c, České Budějovice, Jírovcova

Západočeský kraj

Kategorie A

Pavel Pyrih, 4.a, Sušice; *Zuzana Princová*, 4.a, Plzeň, nám. Odborářů; *Hana Martínková*, 4.a, Ostrov n. Ohří; *Stanislav Novák*, 3.a, Plzeň, nám. Odborářů; *Blanka Zymáková*, 4.a, Plzeň, nám. Odborářů; *Pavel Mach*, 4.c, Plzeň, ul. Pionýrů; *Jiří Pátek*, 4.a, Plzeň, nám. Odborářů

Kategorie B

Zdeněk Šuma, 2.a, Plasy; *Tomáš Stehlík*, 2.b, Karlovy Vary; *Zbyněk Kozel*, 2.b, Karlovy Vary; *Jana Králová*,

2.b, Cheb; *Vojtěch Sommer*, 2.b, Cheb; *Zora Žáčková*, 2.b, Karlovy Vary; *Jan Mojzeszek*, 2.b, Rokycany; *Milan Durčan*, 2.a, Domažlice; *Pavel Banzet*, 2.c, Ostrov n. Ohří; *Jan Brousek*, 2.b, Klatovy

Kategorie C

Jan Burle, 1.a, Karlovy Vary; *Pavel Pešek*, ST 1, SPŠE Plzeň; *Petr Laciga*, 1.a, Plzeň, nám. Odborářů; *Jaromír Vetengl*, 1.a, Plzeň, nám. Odborářů; *Edita Žampová*, 1.d, Plzeň, nám. Odborářů

Severočeský kraj

Kategorie A

Zdeněk Kalousek, 4.b, Jablonec n. N.; *Vladimír Kučera*, 3.c, Liberec; *Zdeněk Krtouš*, 3.c, Liberec; *Lubomír Štos*, 4.a, Jablonec n. N.; *Luděk Šejc*, 3.a, Ústí n. L., Jateční; *Jiří Tschiesche*, 4.b, Teplice; *Viliam Maťo*, 3.a, Rumburk; *Tomáš Kočí*, 3.a, Rumburk; *Pavel Štrof*, 3.b, Liberec; *Miroslav Koucký*, 4.b, Liberec

Kategorie B

Aleš Nekvinda, 2.b, Liberec; *Tomáš Vlk*, V2, SPŠ Chomutov; *Jiří Kubát*, 2.d, Teplice; *Vladimír Šmelhaus*, 2.d, Teplice; *Martin Konvalinka*, 2.a, Litvínov; *Zdeněk Machala*, 2.c, Děčín; *Zdeněk Dřevěný*, 2.d, Teplice; *Alena Daničková*, 2.d, Liberec; *Jiří Dvořák*, 2.a, Most; *Mirko Louma*, 2.a, Jablonec n. N.

Kategorie C

Jiří Málek, 1.c., Liberec; *Vladimír Martínek*, 1.b, Jablonec n. N.

Východočeský kraj

Kategorie A

Jan Kratochvíl, 4.a, Pardubice; *Vladimír Šverák*, 4., Lanškroun; *Vladimír Pekárek*, 4.a, Pardubice; *Ilja Turek*, 4.g, Hradec Králové; *Vladislav Pištora*, 3.g., Hradec Králové; *Jaromír Matěna*, 4.g., Hradec Králové; *David Brož*, 4., Semily; *Miroslav Golján*, 4.a, Jaroměř; *Vladimír Matěna*, 3.a, Trutnov; *Jan Lang*, 4.a, SPŠS Chrudim

Kategorie B

Petr Seidl, 2.b, Turnov; *Jan Tomsa*, 2.a, Jaroměř; *Jaroslav Flejberk*, 2.c, Pardubice; *Milan Hagan*, 2.b, Semily; *Pavel Kousalík*, 2., Lanškroun; *Miloslav Karafiát*, 2.b, Polička; *Bohuslav Vorel*, 2.b, Přelouč; *Jaroslav Plachý*, 2.c, SPŠE Pardubice; *Hanuš Majer*, 2.a, SPŠE Pardubice

Kategorie C

Jaroslav Vodička, 1.g, Hradec Králové; *Pavel Kalhous*, 1.c, Pardubice; *Ladislav Pecen*, 1.b, Havlíčkův Brod; *Jaroslav Resler*, 1., Lanškroun; *Martin Dubrovský*, 1.g, Hradec Králové; *Jiří Beitl*, 1., Polička; *Petr Bureš*, 1.d, SPŠE Pardubice; *Jan Suntych*, 1.d, SPŠE Pardu-

bice; *Iva Dvořáková*, 1.a, Pardubice; *Vít Trnka*, 1.c, Pardubice

Severomoravský kraj

Kategorie A

Jaroslav Hančl, 3.c, Bílovec; *Jiří Mejzlík*, 2.c, Bílovec; *Josef Tkadlec*, 3.c, Bílovec; *Petr Gurka*, 4.c, Bílovec; *Petr Hiltavský*, 4.d, Karviná; *Karel Štěpka*, 4.c, Bílovec; *Rostislav Urban*, 4.a, Ostrava, dr. Šmerala; *Ondřej Jakl*, 3.c, Bílovec; *Petr Tas*, 4.c, Bílovec; *Pavel Kolařík*, 4.c, Bílovec

Kategorie B

Karol Cwiertka, 2.d, polské G Orlová; *Jiří Mejzlík*, 2.c, Bílovec; *Stanislav Chobot*, 2.d, polské G Orlová; *Jiří Lukašík*, 2.c, Bílovec; *Josef Sedláček*, 2.b, Přerov; *Milan Matoušek*, 2.a, Hlučín; *Marek Kaluža*, 2.d, polské G Orlová; *Lenka Utíkalová*, 2.c, Bílovec; *Janusz Drózd*, 2.a, polské G Český Těšín; *Oleg Pasz*, 2.d, polské G Orlová

Kategorie C

Miroslav Chmelař, 1.c, Bílovec; *Miroslav Brzezina*, 1.c, Bílovec; *Iva Štefánková*, 1.c, Bílovec; *Marie Ptáčnicková*, 1., Ostrava-Poruba; *Martin Sedláček*, 1.a, Havířov; *Jan Stuna*, 1.d, Olomouc-Hejčín; *Radim Brát*, 1.a, Ostrava, dr. Šmerala; *Miroslav Fukan*, 1.c, Olomouc-Hejčín; *Lubomír Šilar*, 1.c, Bílovec

Jihomoravský kraj

Kategorie A

Radan Kučera, 3.a, Brno, Koněvova; *Pavel Popela*, 4.b, Brno, Slovanské nám.; *Jiří Bureš*, 3.a, Brno, tř. kpt. Jaroše; *Petr Kučírek*, 4.b, Brno, Koněvova; *Libor Šplíchal*, 4.b, Brno, tř. kpt. Jaroše; *Petr Švec*, 4.b, Jihlava; *Marko Eliášek*, 4.d, Prostějov; *Ivan Ševčík*, 4.b, Třebíč; *Libor Viktorin*, 3.a, Brno, Koněvova

Kategorie B

Zenon Starčuk, 2.b, Brno, Koněvova; *Ondřej Zindulka*, 2., OU EJP Brno; *Zbyněk Háek*, 2.b, Telč; *Milan Fuchs*, 2.c, Kyjov; *Milan Líbezný*, 2.a, Ivančice; *Jitka Bursíková*, 2.a, Strážnice; *Mojmír Kallus*, 2.d, Uherské Hradiště; *Jindra Pouchlá*, 2.c, Vyškov; *Jaromír Říha*, 2.e, SPŠ stav. Brno

Kategorie C

Tomáš Kovář, 1.a, Gottwaldov; *David Trunec*, 1.b, SPŠ slév. Brno; *Jiří Skřivánek*, 1.c, Jihlava; *Petr Vařejka*, 1.a, Brno, tř. kpt. Jaroše

Bratislava

Kategorie A

Jaroslav Guričan, 3.a, Bratislava, Červenej armády; *Ján Kochman*, 4.a, Bratislava, Červenej armády; *Boris*

Rudolf, 3.b, Bratislava, Novohradská; *Milan Veščičík*, 4.a, Bratislava, Červenej armády; *Pavol Kebis*, 3.a, Bratislava, Červenej armády; *Juraj Bosák*, 3.e, Bratislava, Novohradská; *Juraj Beniak*, 2.a, Bratislava, Červenej armády; *Ivan Priecel*, 4.a, Bratislava, Červenej armády; *Mikuláš Hermann*, 4.a, Bratislava, Tomášikova; *Eubomír Svitek*, 3.a, Bratislava, Červenej armády

Kategorie B

Martin Kochol, 2.a, Bratislava, Červenej armády; *Euba Šedová*, 2.a, Bratislava, Červenej armády; *Táňa Škereňová*, 2.a, Bratislava, Červenej armády; *Danica Kolibiarová*, 2.b, Bratislava, Novohradská; *Juraj Beniak*, 2.a, Bratislava, Červenej armády; *Katarína Koncová*, 2.b, Bratislava, Novohradská; *Andrea Trnovcová*, 2.b, Bratislava, Novohradská; *Martin Oravec*, 2.b, Bratislava, Novohradská; *Zbyněk Kubáček*, 2.c, Bratislava, Vazovova; *Rastislav Prelec*, 2.b, Bratislava, Novohradská

Kategorie C

Jozef Bednárík, 1.a, Bratislava, Červenej armády; *Peter Kodyš*, 1.d, Bratislava, Tomášikova; *Pavel Veis*, 1.e, Bratislava, Novohradská; *Bohumil Čider*, 1.a, Bratislava, Novohradská; *Tomáš Blažek*, 1.e, Bratislava, Tomášikova; *Peter Jamrich*, 1.c, Bratislava, Novohradská; *Tomáš Konc*, 1.e, Bratislava, Novohradská; *Tatiana Murínová*, 1.b, Bratislava, Vazovova; *Hynek Bachratý*, 1.a, Bratislava, Červenej armády; *Zlatko Kusenda*, 1.a, Bratislava, Červenej armády

Západoslovenský kraj

Kategorie A

Rafaël Tománek, 4.a, Bánovce n. B.; *Eugen Šimko*, 4.b, slov. G Komárno

Kategorie B

Benedikt Fronc, 2.d, Nitra, Párovská; *János Tóth*, 2.d, maďarské G Nové Zámky; *Katarína Hatványiová*, 2.b, Šaľa; *Karol Habart*, 2.b, slov. G, Komárno; *Juraj Filín*, 2.e, Trenčín; *Štefan Trnka*, 2.a, Levice; *Peter Drahoš*, 2.b, Skalica; *Peter Novák*, 2.d, Nitra, Párovská; *Miloslav Piňák*, 2.d, Hlohovec; *Miloslav Gocman*, 2.e, Nitra, G E. Gudernu.

Kategorie C

Iveta Danešová, 1.c, SPŠE Piešťany.

Středoslovenský kraj

Kategorie A

Peter Filakovszký, 4.h, Banská Štiavnica; *Miroslav Chlebík*, 3.d, Čadca; *Peter Mäsiar*, 3.b, Námestovo; *Danica Hrnčiarová*, 4.a, Banská Bystrica, Tajovského; *Drahomíra Mareková*, 4.c, Banská Štiavnica; *Vladimír Hudec*, 4.c, Banská Štiavnica; *Marek Kolčák*, 4.b, Dolný Kubín; *Miroslav Rusko*, 3.a, Banská Bystrica, Dukelských hrdinů

Kategorie B

Michal Straka, 2.a, Prievidza; *Stanislav Vrábel*, 2.a, SPŠ Kysucké Nové Mesto; *Ľubomír Dubeň*, 2.a, Rajec; *Marián Moravčík*, 2.d, Žilina, Hliny; *Richard Fiala*, 2.a, Banská Bystrica, Dukelských hrdinů; *Viera Sojčeková*, 2.b, Ružomberok; *Štefan Beck*, 2.b, Banská Bystrica, Dukelských hrdinů; *Juraj Dian*, 2.a, SPŠ chem, Banská Štiavnica; *Jaroslav Šuna*, 2.d, Liptovský Mikuláš; *Igor Turek*, 2.a, Žilina, nám. P. Jilemnického

Kategorie C

František Crkoň, 1.a, Púchov; *Miroslav Hagara*, 1.e, SPŠ el., Banská Bystrica; *Bronislav Školník*, 1.c, Banská Bystrica, Tajovského; *František Šimančík*, 1.b, Liptovský Hrádok; *Viktor Witkovský*, 1.a, Prievidza

Východoslovenský kraj

Kategorie A

Miroslav Repický, 4.a, Humenné; *František Matúš*, 3.d, Prešov, Konštantinova; *Jozef Jirásek*, 3.a, Košice, Šmeralova; *Ctírad Klimčík*, 2.c, Prešov, Konštantinova; *Ladislav Kubini*, 2.b, Bardejov; *Vladimír Závadský*, 4.a, Košice, Šmeralova; *Peter Vasiľ*, 3.c, Michalovce; *Katarína Didičová*, 3.c, Prešov, T. Ševčenka; *Karol Bitto*, 4.d, Poprad

Kategorie B

Otírad Klimčík, 2.c, Prešov, Konštantínova; *Ladislav Kubini*, 2.b, Bardejov; *Hana Korytárová*, 2.a, Košice, Šmeralova; *Bibiana Slivková*, 2.d, Prešov, Konštantínova; *Ivan Brovko*, 2.c, Spišská Nová Ves; *Miroslav Ploščica*, 2.a, Stará Ľubovňa; *Peter Wojtovič*, 2.a, Prešov, Konštantínova; *Ondrej Gecelovský*, 2.a, Košice, Šmeralova; *Martin Kovaľ*, 2.a, Košice, Šmeralova; *Stanislav Harčár*, 2.b, SPŠ Prešov

Kategorie C

Albín Dzurňák, 1.a, Košice, Šmeralova; *Jozef Kunca*, 1.d, Bardejov, *Miroslav Hložka*, 1.d, SPŠE Košice; *Milan Schürger*, 1.a, Košice, Šmeralova; *František Sninčák*, 1.a, Košice, Šmeralova

Poznámka: 1. V tomto seznamu uvádíme nejvýše deset nejúspěšnějších řešitelů v každé kategorii z každého kraje. 2. Pokud není uveden druh školy, jde o gymnázium (G).

VÝSLEDKY III. KOLA KATEGORIE A XXVII. ROČNÍKU MO

Vítězové

- 1.—3. *Jan Kratochvíl*, 4.a, Pardubice
Ilja Turek, 4.g, Hradec Králové
Zdeněk Vavřín, 4.c, Praha 2, Štěpánská ul.

4. *Peter Filakovský*, 4.h, Banská Štiavnica
5. *Jan Nekovář*, 1.d, Praha 6, Arabská
6. *František Matúš*, 3.d, Prešov, Konštantinova ul.
7. *Martin Markl*, 3.b, Praha 2, Botičská
- 8.—10. *Mirko Navara*, 4.d, Praha 2, W. Piecka
Rostislav Urban, 4.a, Ostrava, Šmeralova
Milan Veščíček, 4.a, Bratislava, Červenej armády
11. *Petr Savický*, 3.d, Praha 2, W. Piecka
- 12.—13. *Zdeněk Kalousek*, 4.b, Jablonec n. N.
Petr Tas, 4.c, Bílovec
- 14.—15. *Jozef Jirásek*, 3.a, Košice, Šmeralova
Ivan Mizera, 4.b, Bratislava, Novohradská
16. *Josef Tkadlec*, 3.c, Bílovec
- 17.—19. *Juraj Beniak*, 2.a, Bratislava, Červenej armády
Petr Kučírek, 4.b, Brno, Koněvova
Jan Vejvalka, 3.c, Praha 5, Na Zatlance

Ostatní úspěšní řešitelé

- 20.—24. *Jaroslav Guričan*, 3.a, Bratislava, Červenej armády
Jaroslav Hančl, 3.c, Bílovec
Radan Kučera, 3.a, Brno, Koněvova
Pavel Pyrih, 4.a, Sušice
Jaromír Suchánek, 4.a, Bratislava, Červenej armády
25. *Ľubomír Svitek*, 3.a, Bratislava, Červenej armády

- 26.—27. *Jaromír Matěna*, 4.g, Hradec Králové
Vladislav Pištora, 3.g, Hradec Králové
- 28.—30. *Petr Beránek*, 4.a, Praha 9-Prosek
Jiří Mejzlík, 2.c, Bílovec
Vladimír Šverák, 4., Lanškroun
- 31.—33. *David Brož*, 4., Semily
Václav Kotvalt, 4.d, Praha 2, W. Piecka
Eugen Šimko, 4.b, slov. gymn., Komárno

Počty soutěžících v kategorii A

KRAJ	Kolo			
	I.		II.	
	S	Ú	S	Ú
Praha	136	113	102	44
Středočeský	168	160	117	15
Jihočeský	65	57	55	5
Západočeský	55	47	41	7
Severočeský	90	74	60	11
Východočeský	75	69	65	19
Severomoravský	75	63	63	19
Jihomoravský	189	142	128	29
Bratislava	94	82	79	29
Západoslovenský	162	131	130	2
Středoslovenský	94	90	83	12
Východoslovenský	95	83	51	9
Celkem	1298	1111	974	201

S — počet všech soutěžících

Ú — počet úspěšných řešitelů

Počty soutěžících v kategorii B

KRAJ	Kolo			
	I.		II.	
	S	Ú	S	Ú
Praha	141	113	113	50
Středočeský	133	120	115	28
Jihočeský	83	72	68	14
Západočeský	45	39	37	15
Severočeský	130	119	119	16
Východočeský	72	58	56	20
Severomoravský	140	113	110	75
Jihomoravský	168	139	124	31
Bratislava	98	91	89	37
Západoslovenský	161	157	152	11
Středoslovenský	95	94	94	41
Východoslovenský	109	96	60	22
Celkem	1375	1211	1137	360

S — počet všech soutěžících

Ú — počet úspěšných řešitelů

Počty soutěží v kategorii C

KRAJ	Kolo			
	I.		II.	
	S	Ú	S	Ú
Praha	146	100	100	19
Středočeský	117	98	90	1
Jihočeský	97	83	80	5
Západočeský	90	47	46	5
Severočeský	148	133	133	2
Východočeský	132	96	94	11
Severomoravský	131	122	121	9
Jihomoravský	211	181	161	4
Bratislava	157	103	96	12
Západoslovenský	280	260	162	1
Středoslovenský	157	142	131	5
Východoslovenský	189	149	138	11
Celkem	1855	1514	1352	85

S — počet všech soutěží

Ú — počet úspěšných řešitelů

Počty soutěžících v kategorii Z

KRAJ	Kolo			
	I.		II.	
	S	Ú	S	Ú
Praha	1 394	908	788	288
Středočeský	1 114	602	515	147
Jihočeský	1 023	832	357	91
Západočeský	1 096	459	367	84
Severočeský	1 533	608	510	179
Východočeský	1 232	688	562	247
Severomoravský	1 537	832	598	184
Jihomoravský	2 326	1 507	1110	375
Bratislava	584	453	440	133
Západoslovenský	1 814	1 346	1289	285
Středoslovenský	1 698	1 000	935	133
Východoslovenský	2 047	1 224	980	325
Celkem	17 398	10 459	8451	2471

S — počet všech soutěžících

Ú — počet úspěšných řešitelů

II. Přípravné úlohy I. kola

KATEGÓRIA A

A — P — 1

Súčin n po sebe idúcich kladných nepárnych čísel násobený 2^{n-1} je deliteľný číslom $n!$. Dokážte.

Riešenie. Nech k je nepárne kladné číslo a n je prirodzené číslo. Označíme

$$c_{k,n} = \frac{k \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot [k+2(n-1)] \cdot 2^{n-1}}{n!}.$$

Máme dokázať, že $c_{k,n}$ je celé číslo.

Pre $k=1$ ľahkým výpočtom dostávame

$$\begin{aligned} c_{1,n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2^{n-1}}{n!} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \\ &= \binom{2n-1}{n-1}. \end{aligned}$$

Vieme, že číslo $\binom{2n-1}{n-1}$ je celé.

Ďalej dokazujeme matematickou indukciou podľa k . Predpokladáme, že platí indukčný predpoklad $\mathbf{P}_k$: „pre každé prirodzené n , číslo $c_{k,n}$ je celé“. Chceme dokázať $\mathbf{P}_{k+2}$, t.j. že $c_{k+2,n}$ je celé pre ľubovoľné prirodzené číslo n .

Tvrdenie $\mathbf{P}_{k+2}$ dokážeme matematickou indukciou podľa n . Pre $n = 1$ je číslo

$$c_{k+2,1} = \frac{k+2}{1!} \cdot 2^0 = k+2$$

celé.

Predpokladajme, že $c_{k+2,n}$ je celé. Ukážeme, že aj číslo $c_{k+2,n+1}$ je celé. Využijeme k tomu takúto úpravu:

$$\begin{aligned} c_{k+2,n+1} &= \frac{(k+2) \cdot \dots \cdot [k+2+2(n-1)] \cdot (k+2+2n) \cdot 2^n}{(n+1)!} = \\ &= \frac{(k+2) \cdot \dots \cdot [k+2+2(n-1)] \cdot k \cdot 2^n}{(n+1)!} + \\ &\quad + \frac{(k+2) \cdot \dots \cdot [k+2+2(n-1)] \cdot (2+2n) \cdot 2^n}{(n+1)!} = \\ &= c_{k,n+1} + 4 \cdot c_{k+2,n}. \end{aligned}$$

Keďže predpokladáme, že $c_{k+2,n}$ je celé číslo, podľa $\mathbf{P}_k$ je $c_{k,n+1}$ celé, tak aj $c_{k+2,n+1}$ je celé číslo. To sme chceli dokázať.

Iné riešenie. Dokážeme matematickou indukciou podľa $m = n + k$, že číslo $c_{k,n}$ je celé. Pre $m = 1 + 1$ je tvrdenie zrejmé. Predpokladáme, že $c_{k,n}$ je celé pre každú dvojicu čísel k, n takú, že $k + n < m$. Dokážeme,

že $c_{l,p}$ je celé pre l , p také, že $l + p = m$. Pre $p = 1$ je tvrdenie triviálne, lebo

$$c_{l,1} = l.$$

Podobne pre $l = 1$ je tvrdenie triviálne, lebo

$$c_{1,p} = \binom{2p-1}{p-1}.$$

Pre $p > 1$, $l > 1$ rovnakou úpravou ako vyššie dostávame

$$c_{l,p} = c_{l-2,p} + 4c_{l,p-1}.$$

Keďže $l - 2 + p < m$, $l + p - 1 < m$, tak podľa indukčného predpokladu čísla $c_{l-2,p}$ a $c_{l,p-1}$ sú celé.

Odtiaľ vyplýva, že aj číslo $c_{l,p}$ je celé.

A — P — 2

Ak $c_1, c_2, \dots, c_n$ sú reálne čísla, potom

$$n(c_1^2 + \dots + c_n^2) \geq (c_1 + c_2 + \dots + c_n)^2.$$

Dokážte!

Riešenie. Riešenie bezprostredne vyplýva z identity

$$\begin{aligned} (c_1 + \dots + c_n)^2 &= \\ &= n(c_1^2 + \dots + c_n^2) - (c_1 - c_2)^2 - (c_1 - c_3)^2 - \dots \\ &\quad \dots - (c_1 - c_n)^2 - (c_2 - c_3)^2 - \dots - (c_2 - c_n)^2 - \\ &\quad \quad \quad \vdots \\ &\quad \quad \quad - (c_{n-1} - c_n)^2. \end{aligned}$$

Uvedená nerovnosť je špeciálnym prípadom tzv. Čebyševovej nerovnosti, pozri knižku A. Kufner: *Nerovnosti a odhady*, str. 31 (39. zväzok ŠMM).

A — P — 3

Ak p a q sú nezáporné čísla, tak platí

$$p^2q \leq \frac{4}{27}(p+q)^3; \quad (1)$$

rovnosť nastane práve vtedy, keď $p = 2q$. Dokážte.

Riešenie. Pre $q = 0$ tvrdenie platí.

Ak $q > 0$, tak nerovnosť (1) je ekvivalentná nerovnosti

$$x^2 \leq \frac{4}{27}(x+1)^3, \quad (2)$$

kde $x = \frac{p}{q}$. Nerovnosť (2) je zase ekvivalentná nerovnosti

$$27x^2 \leq 4(x+1)^3.$$

Túto možno jednoduchým výpočtom upraviť na tvar

$$0 \leq (x-2)^2 \cdot (4x+1). \quad (3)$$

Táto nerovnosť platí pre každé x nezáporné, a teda (1) platí pre každé p, q nezáporné. Rovnosť v (3) nastáva práve vtedy, keď $x = 2$. Teda v (1) nastáva rovnosť práve vtedy, keď $p = 2q$.

A — P — 4

Trojuholník má obsah 32 cm^2 , súčet veľkostí jeho dvoch strán je 16 cm . Určte veľkosť tretej strany.

Riešenie. Pretože o trojuholníku sú uvedené len dva údaje, nie je zdanlivo veľkosť tretej strany určená jednoznačne. Pokúsme sa určiť aký môže byť obsah P trojuholníka ABC s veľkosťami strán $a = BC$, $c = AB$, ak je $a + c = 16$ cm. Dostaneme

$$P \leq \frac{1}{2}ac,$$

pričom rovnosť nastáva práve keď $AB \perp BC$. Z Cauchyho nerovnosti $\sqrt{ac} \leq \frac{1}{2}(a + c)$ máme ďalej

$$\frac{1}{2}ac \leq \frac{1}{8}(a + c)^2 = \frac{1}{8}(16 \text{ cm})^2 = 32 \text{ cm}^2,$$

pričom rovnosť nastáva práve keď $a = c$. Zistili sme teda, že podmienkám úlohy vyhovuje jediný trojuholník, a to pravouhlý s odvesnami dĺžky 8 cm. Dĺžka jeho prepony je určená jednoznačne, a to $b = 8\sqrt{2}$.

KATEGORIE B

B — P — 1

Funkce $x \rightarrow \text{sign } x$ je definovaná na množině $\mathbf{R}$ všech reálných čísel takto: Je-li $x > 0$, je $\text{sign } x = 1$, je-li $x = 0$, je $\text{sign } x = 0$, je-li $x < 0$, je $\text{sign } x = -1$.

Nalezněte všechny dvojice reálných čísel x, y , pro něž platí:

$$\text{sign } (x + y) \geq \text{sign } x + \text{sign } y.$$

Pro která x, y nastane rovnost?

Řešení. Je-li $x = 0$, je nerovnost zřejmě splněna se znaménkem rovnosti; je-li $y = 0$, rovněž, a je-li $x + y = 0$, také.

V dalším proto budeme předpokládat, že $x \neq 0$, $y \neq 0$ i $x + y \neq 0$. Utvořme tabulku možností (+ znamená kladný, — záporný; $L - P$ je rozdíl levé a pravé strany nerovnosti :

x	y	$x + y$	$L - P$
+	+	+	—
+	—	+	+
+	+	—	nelze
+	—	—	—
—	+	+	+
—	—	+	nelze
—	+	—	—
—	—	—	+

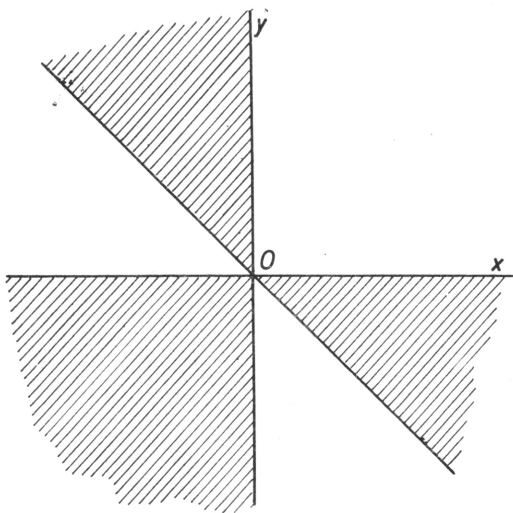
Dostaneme, že řešením je (viz vyšrafované oblasti v obr. 1) sjednocení tří množin $\{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}; x \leq 0 \wedge y \leq 0\} \cup \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}; 0 \leq -x \leq y\} \cup \{[x, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}; -x \leq y \leq 0\}$. Jejich grafem v rovině x, y jsou tři duté úhly se společným vrcholem (počátkem). Rovnost nastane, právě když $x = 0$ nebo $y = 0$ nebo $x + y = 0$, tj. leží-li odpovídající body na některém ramenu úhlů, popř. ve společném vrcholu.

B — P — 2

Plechový kryt má tvar kužela s polomerom základne r a výškou v . Bolo by možné z toho istého množstva rov-

nakého plechu zhotoviť iný kryt kužeľového tvaru s rovnakým objemom? Ak áno, koľko?

Řešení. Plechový kryt uvedený v úloze nechť má



Obr. 1

rozměry $r = a$, $v = b$. Jeho objem je tedy $V = \frac{1}{3}\pi a^2 b$ a obsah jeho pláště je $P = \pi a \sqrt{a^2 + b^2}$. Nechť jiný kryt o objemu V a s obsahem pláště P má rozměry $r = x$, $v = y$. Potom platí

$$\frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi a^2 b,$$

$$\pi x \sqrt{x^2 + y^2} = \pi a \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Po úpravě dostáváme soustavu rovnic pro neznámé x, y :

$$\begin{aligned}x^2y &= a^2b, \\x^4 + x^2y^2 &= a^4 + a^2b^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Dosadíme-li z rovnice (1) do rovnice (2) za y , bude pro neznámou x platit rovnice

$$x^6 - x^2(a^4 + a^2b^2) + a^4b^2 = 0.$$

Levou stranu snadno upravíme na tvar

$$(x^2 - a^2)(x^4 + a^2x^2 - a^2b^2) = 0.$$

Řešení $x = a$ známe, řešení $x = -a$ nemá význam. Řešme tedy rovnici

$$x^4 + a^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Pro x^2 , kterou označíme t , dostáváme kvadratickou rovnici

$$t^2 + a^2t - a^2b^2 = 0$$

Protože záporné ani imaginární kořeny nepřicházejí v úvahu, zbývá jediné řešení

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + 4b^2}}.$$

Z rovnice (1) vypočteme

$$y = \frac{2ab}{-a + \sqrt{a^2 + 4b^2}} = \frac{a}{2b}(a + \sqrt{a^2 + 4b^2}).$$

Zkouškou se přesvědčíme, že pro takto vypočtené hodnoty má kryt objem V a jeho plášť obsah P . Nyní je

třeba ještě zjistit, zda takto vypočtená dvojice x, y je jiná než původní dvojice a, b . Předpokládejme tedy, že

$$a = \sqrt{-\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + 4b^2}}.$$

Odtud však snadno dostaneme, že $b = a\sqrt{2}$, a obráceně z rovnosti $b = a\sqrt{2}$ plyne uvedená rovnost a $a = x$.

Závěr. Má-li zhotovený kryt rozměry, pro něž platí $v = r\sqrt{2}$, pak žádný další kryt o objemu V z téhož množství plechu nelze vyrobit. Neplatí-li $v = r\sqrt{2}$, pak lze zhotovit právě jeden další takový kryt.

B — P — 3

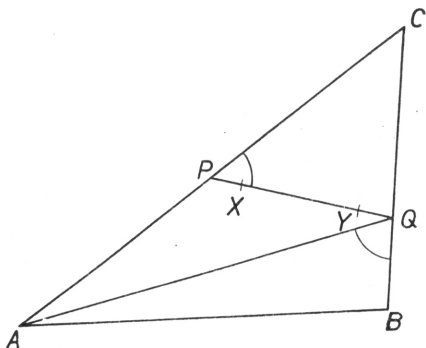
Je-li trojúhelník T_1 celý obsažen v trojúhelníku T_2 , pak platí:

1. délka největší strany trojúhelníka T_1 je menší nebo rovna délce největší strany trojúhelníka T_2 ;
2. délka nejmenší výšky trojúhelníka T_1 je menší nebo rovna délce nejmenší výšky trojúhelníka T_2 .

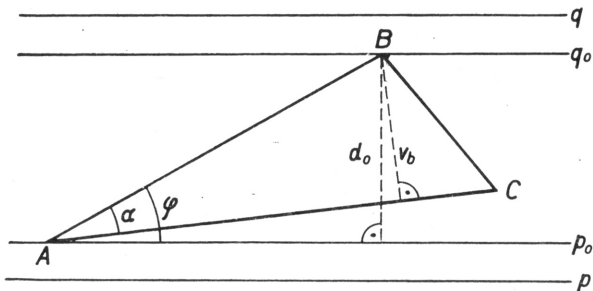
Řešení. 1. Nechť XY je největší strana trojúhelníka T_1 . Leží-li X, Y v jedné straně trojúhelníka T_2 , je $|XY| \leq m$, kde m označuje délku největší strany trojúhelníka T_2 . Nejsou-li body X, Y v jedné straně (obr. 2) trojúhelníka T_2 s vrcholy A, B, C , nechť P, Q jsou body, v nichž přímka XY protíná hranici. Nechť např. P je na straně AC , Q na straně BC . Alespoň jeden z úhlů CPQ, CQP je ostrý; nechť pro určitost $\sphericalangle CPQ < \pi/2$. Pak $|PQ| \leq |AQ|$. Protože platí $\sphericalangle AQC \leq \pi/2$ nebo $\sphericalangle AQB \leq \pi/2$, je v prvním případě $|AQ| \leq |AC|$,

v druhém $|AQ| \leq |AB|$, tedy vždy $|AQ| \leq m$. Celkem proto $|XY| \leq |PQ| \leq |AQ| \leq m$, jak jsme měli dokázat.

2. Nejprve ukážeme, že délka nejmenší výšky trojúhelníka **T** je rovna minimální šířce pásu mezi dvěma rovnoběžkami, který trojúhelník **T** obsahuje. Nechť p, q jsou (obr. 3) rovnoběžné přímky ve vzdálenosti d , nechť trojúhelník $\mathbf{T} = ABC$ s nejmenší výškou velikosti v_0 je celý obsažen v pásu mezi p a q . Označme p_0 rovno-



Obr. 2



Obr. 3

běžku s p tím vrcholem trojúhelníka $\mathbf{T}$, který je k p_0 nejbližší, například bodem A . Obdobně nechť q_0 je rovnoběžka s q_0 tím vrcholem, který je ke q nejbližší (tento vrchol je jiný než A ; proč?). Nechť je to například vrchol B . Označme ještě π^+ (popř. κ^+) poloroviny s hranicí p_0 (popř. q_0) obsahující q_0 (popř. p_0). Vzdálenost d_0 rovnoběžek p_0, q_0 splňuje $d_0 \leq d$. Ta polorovina s hranicí AB , která obsahuje bod C , má jako průnik alespoň s jednou z polorovin π^+, κ^+ dutý úhel, o jehož velikosti Φ platí $\Phi \leq \pi/2$. Je-li vrchol tohoto úhlu bod A , platí o úhlu α trojúhelníka $\mathbf{T}$ při vrcholu A , že $\alpha \leq \Phi$. Je proto $d_0 = |AB| \sin \Phi$, $v_b = |AB| \sin \alpha$, kde v_b je velikost výšky trojúhelníka $\mathbf{T}$ z vrcholu B . Celkem tedy

$$d \geq d_0 = |AB| \sin \Phi \geq |AB| \sin \alpha \geq v_b \geq v_0.$$

Přitom však existuje pás obsahující trojúhelník $\mathbf{T}$, jehož šířka je rovna v_0 . Je-li v_0 velikost výšky z vrcholu C , hraniční přímky pásu jsou přímky AB a rovnoběžka s ní bodem C .

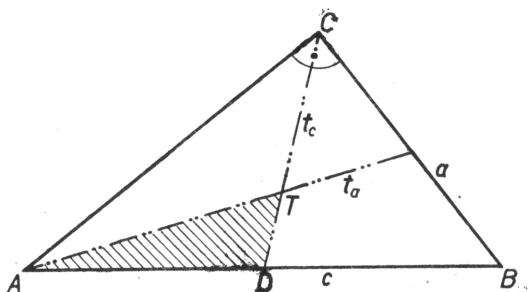
Vlastní řešení. Existuje pás mezi rovnoběžkami, jehož šířka je rovna nejmenší výšce trojúhelníka $\mathbf{T}_2$ a který $\mathbf{T}_2$ obsahuje. Protože tento pás obsahuje i trojúhelník $\mathbf{T}_1$, plyne výsledek z předchozí věty.

B — P — 4

Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána délka přepony a délka těžnice k jedné odvěsně. Uveďte podmínky řešitelnosti.

Řešení. Hledaný trojúhelník označme ABC ; nechť

jsou dány délka c přepony AB a délka t_a těžnice vycházející z vrcholu A . Označme (obr. 4) D střed přepony, T těžiště. Platí $|DC| = \frac{1}{2}c$, a dále $|AT| = \frac{2}{3}t_a$, $|DT| = \frac{1}{6}c$, $|AD| = \frac{1}{2}c$. Z daných délek c a t_a lze tedy sestrojit trojúhelník ADT , pokud ovšem je splněna



Obr. 4

trojúhelníková nerovnost $\frac{1}{2}c - \frac{1}{6}c < \frac{2}{3}t_a < \frac{1}{2}c + \frac{1}{6}c$, což lze upravit na $c < 2t_a < 2c$.

K trojúhelníku ADT pak sestrojíme body C a B . Bude $|DC| = 3|DT| = |AD| = |DB|$, takže podle Thaletovy věty je výsledný trojúhelník skutečně pravoúhlý.

Závěr. Až na shodnost existuje právě jedno řešení, je-li $c < 2t_a < 2c$; jinak řešení neexistuje.

Kolika způsoby je možné číslo 78 rozložit na součet tří přirozených čísel? Přitom dva rozklady lišící se pouze pořadím sčítanců, tedy například rozklady $10 + 10 + 58$, $10 + 58 + 10$, $58 + 10 + 10$, považujeme za stejné.

Řešení. Všechny uspořádané trojice přirozených čísel, jejichž součet je 78, dostaneme tímto způsobem: První číslo p zvolíme libovolně mezi 1 a 76, druhé číslo q můžeme zvolit libovolně mezi 1 a číslem $78 - p - 1$, třetí číslo je pak určeno jednoznačně, rovná se $78 - p - q$. Při pevně zvoleném p dostaneme $78 - p - 1$ takových trojic, a protože p probíhá přirozená čísla 1, 2, ..., 76, máme celkem $76 + 75 + \dots + 1 = (76 + 1) + (75 + 2) + \dots + (39 + 38) = 38 \cdot 77 = 2\,926$ uspořádaných trojic přirozených čísel, jejichž součet je vždy 78. Každý rozklad v tři navzájem různé sčítance se vyskytuje mezi těmito trojicemi šestkrát, například rozklad $7 + 9 + 62$ se vyskytuje jako trojice (7, 9, 62), (7, 62, 9), (9, 7, 62), (9, 62, 7), (62, 7, 9), (62, 9, 7). Rozkladů, ve kterých jsou právě dva sčítance stejné, je celkem 37. Jsou to rozklady $1 + 1 + 76$, $2 + 2 + 74$, ..., $38 + 38 + 2$ s výjimkou rozkladu $26 + 26 + 26$. Každý takový rozklad se vyskytuje mezi našimi trojicemi třikrát, všimněme si třeba příkladu ze zadání úlohy. Pouze v rozkladu $26 + 26 + 26$ jsou všechny tři sčítance stejné. Označíme-li x počet rozkladů čísla 78

v tři navzájem různé sčítance, je $6x + 3.37 + 1 = 2926$, odkud plyne $x = 469$ a hledaný počet rozkladů je $x + 37 + 1 = 507$.

C — P — 2

Je-li přirozené číslo $n > 10$ druhou mocninou lichého čísla, pak je předposlední cifra dekadického zápisu čísla n číslo sudé. Dokažte.

Řešení. Číslo, jehož druhou mocninou je číslo n , napíšeme ve tvaru $10b + c$, kde b je číslo celé a číslo c je liché přirozené číslo menší než 10. Pak je $n = 100b^2 + 10.2bc + c^2$. Předposlední cifru tohoto čísla dostaneme tak, že k počtu desítek čísla c^2 přičteme počet jednotek čísla $2bc$ a z obdrženého součtu vezmeme poslední cifru. Protože číslo c může nabýt pouze hodnot 1, 3, 5, 7, 9, je počet desítek čísla c^2 vždy číslo sudé, číslo $2bc$ je rovněž sudé, a proto je i jejich součet a tím také jeho poslední cifra číslo sudé.

C — P — 3

Je dána kružnice $k = (S; r)$ a přímka p ve vzdálenosti $v = \frac{1}{2}r$ od bodu S . Sestrojte čtverec $ABCD$ opsaný kružnici k , jehož vrchol A leží na přímce p . Dokažte, že úloha má právě dvě řešení.

Řešení. Předpokládejme, že jsme úlohu vyřešili. Potom je $|SA| = r\sqrt{2}$, bod A musí tedy nutně ležet na kružnici $k' = (S; r\sqrt{2})$. Kružnice k' protíná přímku p

právě ve dvou bodech, tím dostáváme dvě řešení. Každý z obdržených průsečíků můžeme totiž doplnit na čtverec opsaný kružnici k . Kdyby tato dvě řešení splynula, měl by čtverec opsaný kružnici k dva vrcholy na přímce p . Ta by tedy musela být buď jeho stranou, nebo jeho úhlopříčkou. Stranou nemůže být, protože se kružnice k nedotýká, a úhlopříčkou také nemůže být, protože neprochází středem kružnice k . Tím je dokázáno, že obdržená řešení jsou různá.

C — P — 4

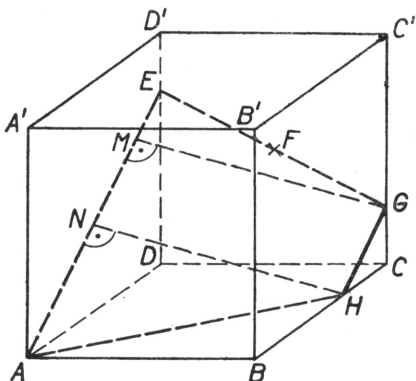
Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$ s hranou délky $a = 3$ a body E a F určené podmínkami:

1. E je bodem úsečky DD' a $|ED'| = \frac{1}{4}|DD'|$,
2. bod F je průsečíkem úhlopříček stěny $DCC' D'$.

Vypočítejte obsah P části roviny AEF ohraničené průnikem této roviny se stěnami krychle.

Řešení. Část roviny, jejíž obsah máme určit, je lichoběžník $EAHG$ (obr. 5), protože přímky HG a AE jsou průsečnice téže roviny s rovnoběžnými stěnami krychle. Ze stejného důvodu jsou trojúhelníky ADE , HCG podobné, přičemž $|GC| = |ED'| = \frac{3}{4}$. Z podobnosti zmíněných trojúhelníků plyne $|HC| = 1$. Pomocí Pythagorovy věty můžeme již vypočíst všechny strany lichoběžníka $EAHG$. Dostaneme $|AH|^2 = 3^2 + 2^2$, $|EG|^2 = 3^2 + (\frac{3}{2})^2 = \frac{45}{4}$, $|EA| = \frac{15}{4}$, $|HG| = \frac{5}{4}$. Vedme body G , H výšky lichoběžníka. Ty protínají základnu AE ve vnitřních bodech M , N , protože úhly AEG , HAE jsou ostré. Označme $|EM| = x$, $|AN| = y$

a výšku lichoběžníka v . Je $x + y + |MN| = x + y + |HG| = |AE|$, tj. $x + y = \frac{5}{2}$. Dále je $x^2 + v^2 = |EG|^2$, $y^2 + v^2 = |AH|^2$. Odečteme-li poslední dvě rovnice, můžeme vypočíst x , y , protože známe jejich



Obr. 5

součet. Dostaneme $x = \frac{9}{10}$, $y = \frac{8}{5}$ a pro výšku lichoběžníka pak $v = \frac{3}{5} \sqrt{29}$. Odtud pak snadno vypočteme obsah lichoběžníka: $P = \frac{3}{2} \sqrt{29}$, protože aritmetický průměr obou základů je $\frac{5}{2}$.

KATEGORIE Z

Z — P — 1

Napište za sebou bez mezer všechna sudá přirozená čísla. Dostanete tak sled číslic

24681012

Která číslice stojí v tomto sledu na 1977. místě?

Řešení. Rozdělíme čísla daného sledu na skupiny čísel jednociferných, dvojciferných atd. Jednociferná sudá čísla jsou čtyři: 2, 4, 6, 8. Dvojciferná sudá čísla jsou z intervalu $\langle 10, 99 \rangle$. V tomto intervalu je $99 - 9 = 90$ čísel, z toho je polovina, tj. 45, sudých. Dále přikročíme k intervalu $\langle 100, 999 \rangle$, který obsahuje $\frac{1}{2}(999 - 99) = 450$ sudých trojciferných čísel. Dosavadní výsledek se dá stručně a přehledně zapsat tabulkou:

Celkem	Interval	Počet sudých čísel	Zaujmou míst
	$\langle 2, 9 \rangle$	4	4
	$\langle 10, 99 \rangle$	45	$2 \cdot 45 = 90$
	$\langle 100, 999 \rangle$	450	$3 \cdot 450 = 1350$
	$\langle 2, 999 \rangle$	499	1444

Do počtu 1977 zbývá ještě $1977 - 1444 = 533$ míst, tj. 133 úplných čtyřciferných sudých čísel, která počí-

nají číslem 1000 a končí číslem 1264. Tato čísla obsadí celkem $1444 + 532 = 1976$ míst. Na následujícím místě, v pořadí 1977. začíná sudé číslo 1266, a to cifrou 1.

Z — P — 2

Aritmetický průměr dvou kladných čísel je jejich poloviční součet. Harmonický průměr dvou kladných čísel je převrácené číslo k aritmetickému průměru převrácených čísel k oběma daným číslům.

a) Zvolte kladná čísla x, y (např. $x = 80, y = 20$), vypočtěte jejich aritmetický průměr a , harmonický průměr h a ověřte si, že platí

$$ah = xy.$$

b) Pokuste se dokázat tento vzorec obecně.

c) Nákladní vůz projel dvakrát tutéž trasu: poprvé rychlostí 40 km/h, po druhé rychlostí 60 km/h. Jaká je průměrná rychlost obou jízd: aritmetický průměr obou rychlostí, nebo jejich harmonický průměr?

Řešení. Slovní definice aritmetického průměru a a harmonického průměru h dvou kladných čísel x, y zapíšeme nejprve vzorci

$$a = \frac{1}{2}(x + y), \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right). \quad (1)$$

Výpočet se zlomky dá postupně tyto vztahy:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y + x}{xy} = \frac{x + y}{2xy}$$

a tedy

$$h = \frac{2xy}{x + y}. \quad (2)$$

Znásobením obou vzorců pro a , h dostaneme

$$ah = xy.$$

Numerické řešení předchází algebraickému výpočtu; je třeba dosadit též $x = y$.

c) Za *průměrnou rychlost* pokládáme tu stálou rychlost, kterou by řidič musel jet tam i zpět, aby celou cestu vykonal za stejnou dobu, jako ji vykonal při různých rychlostech.

Označí-li se rychlosti jízdy v km/h x (tam) a y (zpět), d délka trati v km, p průměrná rychlost, je

$$\frac{2d}{p} = \frac{d}{x} + \frac{d}{y}$$

čili

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

Průměrná rychlost je tedy *harmonický* průměr obou rychlostí x , y . V numerickém příkladě

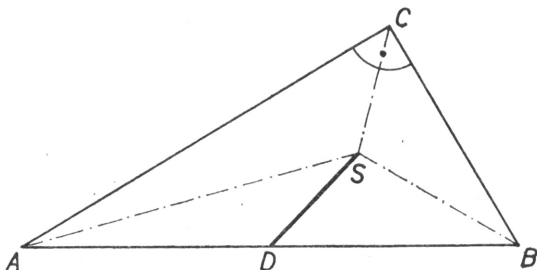
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{60} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{120} = \frac{1}{48},$$

$p = 48$ (km/h). Aritmetický průměr obou rychlostí je

$$a = \frac{1}{2}(40 + 60) = 50 \text{ (km/h)}.$$

Z — P — 3

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC . Bod D je středem jeho přepony AB a bod S je středem jemu vepsané kružnice.



Obr. 6

Dokažte: Jestliže $\sphericalangle BAC = 30^\circ$, potom platí $|CS| = |DS|$.

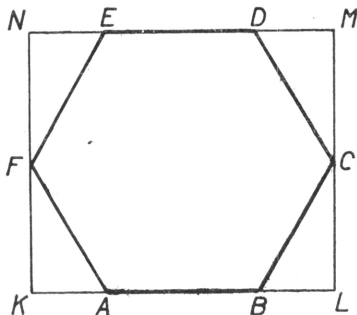
Řešení (obr. 6). Protože je $|AB| = 2|BC|$ je $|BD| = |BC|$, a protože $\sphericalangle CBD = 60^\circ$, je $\triangle BCD$ rovnostranný. Osa o úhlu $\sphericalangle CBD$ je také osou úsečky CD . Proto pro každý bod X osy o platí $|CX| = |DX|$. Jedním z těchto bodů X je i střed S kružnice vepsané $\triangle ABC$.

Z — P — 4

Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Sestrojte obdélník $KLMN$ tak, že úsečka AB je částí úsečky KL , úsečka ED je částí úsečky MN a body C, F leží po řadě

uvnitř úseček LM a KN . Vypočtete poměr obsahů obdélníka $KLMN$ a daného šestiúhelníka.

Řešení (obr. 7). Šestiúhelník se skládá ze šesti shodných rovnostranných trojúhelníků, z nichž žádné dva se nepřekrývají; jeden z nich je $\triangle CDS$ (S je střed



Obr. 7

kružnice opsané šestiúhelníku $ABCDEF$). Obdélník $KLMN$ vznikne ze šestiúhelníka připojením čtyř pravoúhlých trojúhelníků AFK , BCL , CDM a EFN ; z nich vždy dva skládají rovnostranný trojúhelník shodný s $\triangle CDS$. Shodnost čtyř připojených trojúhelníků se dokáže pomocí osových symetrií (není třeba vět o shodnosti trojúhelníků).

Šestiúhelník $ABCDEF$ se skládá z $2 \cdot 6 = 12$ pravoúhlých trojúhelníků shodných s $\triangle CDM$, obdélník $KLMN$ se skládá z $12 + 4 = 16$ takových trojúhelníků. Poměr obsahů je tedy $16 : 12 = 4 : 3$.

III. Súťažné úlohy I. kola

KATEGÓRIA A

A — I — 1

Nech a, b , $a < b$ sú dané reálne čísla a $I_1, I_2, \dots, I_n$ také otvorené intervaly, že $\langle a, b \rangle \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$. Potom možno spomedzi intervalov I_j , $j = 1, 2, \dots, n$ vybrať $k \leq n$ takých, že žiadne tri z nich nemajú spoločný bod a $\langle a, b \rangle$ je podmnožinou ich zjednotenia. Dokážte.

Riešenie. Najprv dokážeme jednoduché pomocné tvrdenie: ak tri otvorené intervaly majú spoločný bod, potom ich zjednotenie je rovné zjednoteniu niektorých dvoch z nich.

Skutočne, nech (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , (a_3, b_3) sú také intervaly, že $\alpha \in (a_1, b_1)$, $\alpha \in (a_2, b_2)$, $\alpha \in (a_3, b_3)$. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a_3 \leq a_2$, $a_3 \leq a_1$. Ak $b_3 \geq b_2$, $b_3 \geq b_1$, tak zrejme

$$(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3) = (a_3, b_3).$$

Potom tiež

$$(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3) = (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3),$$

a teda platí pomocné tvrdenie.

Ak b_3 nie je najväčšie z čísel b_1, b_2, b_3 , tak bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $b_2 \geq b_1, b_2 \geq b_3$.

Keďže

$$(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3) \supseteq (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3),$$

stačí dokázať, že platí

$$(a_1, b_1) \subseteq (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3).$$

Nech $x \in (a_1, b_1)$, t.j. $a_1 < x < b_1$. Rozlíšime dva prípady.

a) $x \leq \alpha$. Keďže $\alpha \in (a_3, b_3)$, $a_3 \leq a_1$, tak potom musí byť $x \in (a_3, b_3)$.

b) $x > \alpha$. Keďže $\alpha \in (a_2, b_2)$, $b_2 \geq b_1$, tak zase $x \in (a_2, b_2)$. Teda v oboch prípadoch $x \in (a_2, b_2) \cup (a_3, b_3)$.

Tým je pomocné tvrdenie dokázané.

Dokážeme teraz tvrdenie úlohy matematickou indukciou podľa n .

Pre $n = 1, 2$ je tvrdenie úlohy triviálne pravdivé. Pre $n = 3$ tvrdenie úlohy vyplýva z pomocného tvrdenia: buď intervaly I_1, I_2, I_3 nemajú spoločný bod a potom tvoria požadované pokrytie, alebo majú spoločný bod a potom jeden z nich možno vynechať.

Predpokladajme, že tvrdenie úlohy platí pre $n - 1$. Nech

$$\langle a, b \rangle \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_n.$$

Ak žiadne tri z intervalov $I_1, \dots, I_n$ nemajú spoločný bod, stačí zvoliť $k = n$.

Nech niektoré tri z nich majú spoločný bod, napr. I_1, I_2, I_3 . Potom podľa pomocného tvrdenia

$$I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I_2 \cup I_3$$

(alebo zjednoteniu iných dvoch). Potom

$$\langle a, b \rangle \subseteq I_2 \cup I_3 \cup \dots \cup I_n.$$

Podľa indukčného predpokladu z $n - 1$ intervalov $I_2, \dots, I_n$ možno vybrať k takých, že žiadne tri z nich nemajú spoločný bod a $\langle a, b \rangle$ je podmnožinou ich zjednotenia.

A — 1 — 2

Ak $c_1, c_2, \dots, c_n$ ($n \geq 2$) sú také reálne čísla, že

$$(n - 1)(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2) = (c_1 + c_2 + \dots + c_n)^2, \quad (1)$$

tak nastane aspoň jeden z týchto prípadov:

1. všetky čísla c_i sú nezáporné,
2. všetky čísla c_i sú nekladné.

Dokážte.

Riešenie.

Podľa úlohy A — P — 2 platí

$$\begin{aligned} (n - 1)(c_1^2 + \dots + c_{k-1}^2 + c_{k+1}^2 + \dots + c_n^2) &\geq \\ &\geq (c_1 + \dots + c_{k-1} + c_{k+1} + \dots + c_n)^2. \end{aligned}$$

Teda

$$\begin{aligned} (n - 1)(c_1^2 + \dots + c_n^2) &\geq \\ &\geq (c_1 + \dots + c_{k-1} + c_{k+1} + \dots + c_n)^2 + (n - 1)c_k^2. \end{aligned}$$

Podľa rovnosti (1) teda máme

$$(c_1 + \dots + c_n)^2 \geq (c_1 + \dots + c_{k-1} + c_{k+1} + \dots + c_n)^2 + (n-1)c_k^2. \quad (2)$$

Z druhej strany platí

$$(c_1 + \dots + c_n)^2 = (c_1 + \dots + c_{k-1} + c_{k+1} + \dots + c_n)^2 + c_k^2 + 2(c_1 + \dots + c_{k-1} + c_{k+1} + \dots + c_n)c_k.$$

Dosadíme do nerovnosti (2) a odčítame

$$(c_1 + \dots + c_{k-1} + c_{k+1} + \dots + c_n)^2:$$

$$c_k^2 + 2(c_1 + \dots + c_{k-1} + c_{k+1} + \dots + c_n)c_k \geq (n-1)c_k^2.$$

Ak pripočítame k tejto nerovnosti c_k^2 , dostaneme nerovnosť

$$2(c_1 + \dots + c_n) \cdot c_k \geq nc_k^2. \quad (3)$$

Ak niektoré c_i je kladné, tak podľa nerovnosti (3) pre $k=i$ je $c_1 + \dots + c_n > 0$. Potom podľa tej istej nerovnosti je $c_k \geq 0$ pre každé $k = 1, 2, \dots, n$.

Ak niektoré c_i je záporné, tak podľa nerovnosti (3) pre $k=i$ je $c_1 + \dots + c_n < 0$. Zase podľa nerovnosti (3) potom je aj $c_k \leq 0$ pre každé $k = 1, 2, \dots, n$.

A — I — 3

Pre prirodzené číslo $n \geq 2$ označíme L_n súčin všetkých $n-1$ nepárnych čísel od $2n+3$ do $4n-1$. Potom číslo $L_n \cdot 2^{n-1}$ je deliteľné číslom $n!$ Dokážte.

Riešenie. Označíme

$$s_n = \frac{L_n \cdot 2^{n-1}}{n!} = \frac{(2n+3) \cdot (2n+5) \cdot \dots \cdot (4n-1) \cdot 2^{n-1}}{n!}.$$

Potom $(2n+1) \cdot s_n$ je číslo $c_{2n+1, n}$ z úlohy A — P — 1.
Číslo

$$2ns_n = \frac{(2n+3) \cdot (2n+5) \cdot \dots \cdot (4n-1) \cdot 2^n}{(n-1)!}$$

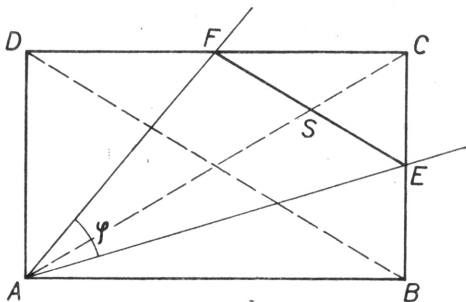
je číslo $4 \cdot c_{2n+3, n-1}$.

Podľa úlohy A — P — 1 obidve čísla $c_{2n+1, n}$ a $4 \cdot c_{2n+3, n-1}$ sú celé. Tvrdenie úlohy vyplýva z rovnosti

$$s_n = (2n+1)s_n - 2ns_n = c_{2n+1, n} - 4c_{2n+3, n-1}.$$

A — I — 4

Zostrojte obdĺžnik $ABCD$, ak je daná dĺžka jeho strany $d = |AB|$ a veľkosť φ uhla EAF , kde E je stred strany BC a F stred strany CD . Nájdite podmienky riešiteľnosti.



Obr. 8

Riešenie. Označme S stred úsečky EF (pozri obr. 8). Bod S leží na uhlopriečke AC a zrejme platí

$$|EF| = \frac{1}{2} |DB| = \frac{1}{2} |AC| ,$$

$$|AS| = \frac{3}{4} |AC| ,$$

$$|AS| = \frac{3}{2} |EF| .$$

Dĺžka úsečky AS nesmie byť väčšia ako výška rovnoramenného trojuholníka so základňou EF a uhlom oproti základni veľkosti φ (obr. 9).

Teda

$$|AS| \leq \frac{|ES|}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} .$$

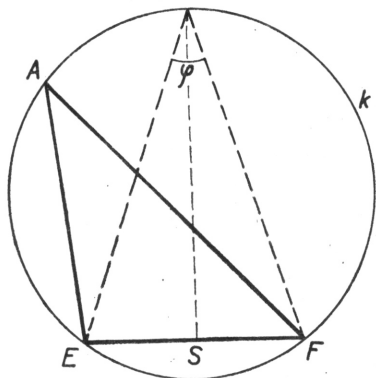
Keďže $|AS| = \frac{3}{4} |AC|$, $|ES| = \frac{1}{4} |AC|$, tak odtiaľ vyplýva , že

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \leq \frac{1}{3} . \quad (4)$$

Z uvedeného rozboru už vyplýva návod na konštrukciu.

Zostrojíme ľubovoľný rovnoramenný trojuholník $E'F'X$ s uhlom $E'XF' = \varphi$. Zostrojíme kružnicu $k \equiv (S, r)$ opísanú trojuholníku $E'F'X$. Zo stredu S' strany $E'F'$ opíšeme kružnicu k' o polomere $\frac{3}{2} |E'F'|$. Označíme A' jeden z priesečníkov kružníc k a k' . Trojuholník $A'E'F'$ je podobný trojuholníku AEF zostrojaného obdĺžnika. Zostrojíme bod C' tak, aby $E'F'$ bola prepona pravouhlého trojuholníka $E'F'C'$ a C' ležal na

polopriamke opačnej k polopriamke $S'A'$. Zostrojíme body B' a D' tak, aby E' , F' boli stredy strán $B'C'$ a $C'D'$ obdĺžnika $A'B'C'D'$. Rovnolahlosťou so stredom A' a koeficientom $d : |A'B'|$ dostaneme hľadaný obdĺžnik $ABCD$.



Obr. 9

Z konštrukcie vyplýva, že obdĺžnik $ABCD$ je možné takto zostrojiť, ak existuje priesečník kružníc k a k' . Ak výška $S'X$ trojuholníka $E'F'X$ nie je menšia ako polomer kružnice k' , tak k a k' majú spoločný bod. Teda úloha je riešiteľná, ak

$$|S'X| = \frac{|E'F'|}{2} : \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \geq \frac{3}{2} |E'F'|,$$

t.j. ak je splnená podmienka (3).

Záver. Nerovnosť (4) je nutná a postačujúca podmienka pre existenciu obdĺžnika požadovanej vlastnosti.

Štvorsten $ABCD$ má objem 36 cm^3 , súčet dĺžok jeho hrán AB , BC a CD je rovný 18 cm . Určete dĺžku hrany AD .

Riešenie. Ľahko vidieť, že pre objem V štvorstena $ABCD$ platí nerovnosť

$$V \leq \frac{1}{3} |CD| \cdot \frac{1}{2} |AB| \cdot |BC|.$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď CD je kolmá na rovinu ABC a AB je kolmá na BC . Pomocou Cauchyho nerovnosti $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$ a nerovnosti z úlohy A — P — 3 postupne dostávame

$$\begin{aligned} V &\leq \frac{1}{3} |CD| \cdot \frac{1}{2} |AB| \cdot |BC| \leq \\ &\leq \frac{1}{6} |CD| \cdot \frac{1}{4} (|AB| + |BC|)^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{27} (|AB| + |BC| + |CD|)^3 = \\ &= \frac{1}{6 \cdot 27} (|AB| + |BC| + |CD|)^3. \end{aligned}$$

Rovnosti nastávajú v prípadoch $|AB| = |BC|$ a $|AB| + |BC| = 2|CD|$.

Keďže $|AB| + |BC| + |CD| = 18$, tak máme vždy

$$V \leq \frac{1}{6 \cdot 27} \cdot 18^3 = 36.$$

Chceme, aby $V = 36$, čo je možné len v prípade, že vo všetkých nerovnostiach nastanú rovnosti.

Záver. Hľadaný štvorsten je určený jednoznačne, dĺžky jeho hrán sú $|AB| = |BC| = |CD| = 6$, hrana AB je kolmá na hranu BC a hrana CD je kolmá na rovinu ABC .

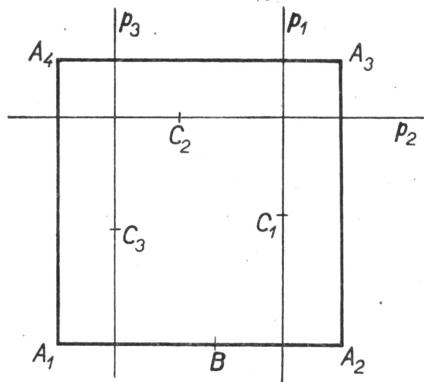
A — I — 6

V štvorci $\mathbf{Q}$ je daná konečná množina bodov $\mathbf{M}$. Každý z nich zafarbíme práve jednou zo štyroch farieb, a to tak, že každá farba je použitá aspoň pre jeden bod. Dokážte, že existuje taký štvorec $\mathbf{Q}'$ so stranami rovnobežnými so stranami štvorca $\mathbf{Q}$, ktorý obsahuje body všetkých štyroch farieb a pritom tie body množiny $\mathbf{M}$, ktoré sú vnútornými bodmi štvorca $\mathbf{Q}'$, sú najviac dvoch farieb.

Riešenie. Dokážeme pomocné tvrdenie: nech $\mathbf{Q}$ je štvorec, ktorý vo svojom vnútri obsahuje aspoň tri body z množiny $\mathbf{M}$. Nech B je bod z množiny $\mathbf{M}$ ležiaci na strane štvorca $\mathbf{Q}$. Označíme $\mathbf{M}'$ množinu tých bodov z množiny $\mathbf{M}$, ktoré ležia vnútri štvorca $\mathbf{Q}$. Potom existuje štvorec $\mathbf{Q}'$ so stranou menšou ako strana štvorca $\mathbf{Q}$ a rovnobežnou so stranou štvorca $\mathbf{Q}$ s týmito vlastnosťami:

1. bod B leží na strane štvorca $\mathbf{Q}'$,
2. na troch stranách štvorca $\mathbf{Q}'$ ležia body z množiny $\mathbf{M}' \cup \{B\}$,
3. všetky body z množiny $\mathbf{M}'$ ležia v štvorci $\mathbf{Q}'$ (vnútri alebo na jeho stranách).

Nech $Q = A_1A_2A_3A_4$, bod B leží na strane A_1A_2 . Označíme postupne C_1, C_2, C_3 body z množiny M' , ktoré sú najbližšie k stranám A_2A_3, A_3A_4, A_1A_4 . Nech p_1, p_2, p_3 sú priamky idúce cez body C_1, C_2, C_3 a rovnobežné so stranami A_2A_3, A_3A_4, A_1A_4 (pozri obr. 10).



Obr. 10

Označíme d vzdialenosť p_1 a p_3 , f vzdialenosť p_2 od strany A_1A_2 .

Predpokladajme najprv, že bod B leží „medzi“ priamkami p_1 a p_3 . Ak $d \geq f$, tak štvorec Q' so stranami ležiacimi na p_1, p_3 a A_1A_2 je hľadaný štvorec. Ak $d < f$, tak hľadaným štvorcom Q' je štvorec so stranami ležiacimi na p_2, p_3, A_1A_2 .

Ak B neleží medzi priamkami p_1 a p_3 , tak stačí zvoliť štvorec Q' tak, aby B bol jeho vrchol a najvzdialenejšia z priamok p_1, p_2, p_3 obsahovala jeho stranu.

Prejdeme teraz k dôkazu tvrdenia úlohy. Nech **S** je množina všetkých štvorcov **T** s týmito vlastnosťami:

- a) strany **T** sú rovnobežné so stranami štvorca **P**,
- b) aspoň na troch stranách štvorca **T** ležia body z množiny **M**,
- c) **T** obsahuje body z množiny **M** všetkých štyroch farieb.

Množina **S** je konečná, lebo každá trojica bodov z množiny **M** určuje najviac jeden štvorec s vlastnosťami a, b, c. Množina **S** je neprázdna, lebo aspoň jeden taký štvorec sa dá ľahko zostrojiť pomocou pomocného tvrdenia.

Nech **P'** je štvorec z množiny **S**, ktorý má najkratšiu stranu. Tvrdíme, že štvorec **P'** má vnútri len body dvoch farieb. Predpokladajme, že nie. Teda vnútri **P'** existujú body troch farieb. Nech **B** je bod na strane štvorca **P'** takej farby, aby doplňoval farby vnútorných bodov. Podľa pomocného tvrdenia existuje štvorec **P''** so stranou kratšou ako strana štvorca **P'**. Z vlastností 1—3 vyplýva, že **P''** $\in$ **S**, čo je spor.

Úloha patrí k typu „evidentných úloh“. Riešiteľ si veľmi rýchlo myslí, že úlohu vyriešil, ale nevie riešenie vysvetliť alebo napísať. Podobného typu boli napr. aj úlohy P — B — 3 a I — B — 6 z 26. ročníka MO.

B — I — 1

Dokážte, že medzi prirodzenými číslami, ktorých dekadický zápis končí skupinou číslic 1978, existuje číslo deliteľné číslom 1977.

Řešení. Zkusme najít takové přirozené číslo X , že dekadický zápis čísla $X.1977$ končí skupinou číslic 1978. Nechť dekadický zápis čísla X končí skupinou číslic $\dots b_3 b_2 b_1 b_0$, takže

$$X = b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 10^2 + b_3 \cdot 10^3 + B \cdot 10^4,$$

kde B je nějaké přirozené číslo (a platí $0 \leq b_i \leq 9$). Číslo $b_0.1977$ končí číslicí 8. Proto $b_0 = 4$. Číslo $(X - b_0).1977$ je dělitelné deseti a přitom končí na stejné čtyřčíslí jako $Z1978 - 4.1977 = Z1978 - 7908$, tj. 4070. (Z je symbol pro zápis libovolného přirozeného čísla.) Proto $X_1 = b_1 + 10b_2 + 10^2b_3 + B \cdot 10^3$ má vlastnost, že $X_1.1977$ končí skupinou číslic 407; tedy $b_1.1977$ končí číslicí 7, tj. $b_1 = 1$. Číslo $X_1 - b_1$ je dělitelné desíti, a přitom končí na stejné trojčíslí jako

$$Z407 - 1.1977, \text{ tj. } 430.$$

Proto $X_2 = b_2 + 10b_3 + B \cdot 10^2$ má vlastnost, že $X_2.1977$ končí dvojčíslím 43; tedy $b_2.1077$ končí číslicí 3, tj. $b_2 = 9$. Číslo $X_2 - b_2$ je dělitelné desíti a přitom končí na stejné dvojčíslí jako

$$Z43 - 9.1977 = Z43 - 17793, \text{ tj. } 50.$$

Proto $X_3 = b_3 + B \cdot 10$ má vlastnost, že $X_3 \cdot 1977$ končí číslicí 5, tj. $b_3 = 5$. Zkouškou se ověří, že číslo $5914 \cdot 1977$ končí čtyřčíslem 1978.

Jiné řešení. Označme pro $n = 1, 2, \dots$ symbolem a_n $4n$ -ciferné číslo $a_n = 19781978 \dots 1978$. Ukážeme, že mezi prvními 1977 členy posloupnosti $\{a_n\}$ je číslo dělitelné 1977.

Předpokládejme, že takové číslo dělitelné 1977 mezi čísly $a_1, \dots, a_{1977}$ není. Pak mezi těmito čísly existují dvě různá čísla, která mají stejné zbytky po dělení číslem 1977 (možných zbytků je totiž jen 1976). Nechť jsou to čísla $a_i, a_k, i < k$. Označme $k - i = m$. Zřejmě platí, že číslo

$$a_k - a_i = 19781978 \dots 1978 \cdot 10^{4(k-i)} = a_m \cdot 10^{4m}$$

je dělitelné 1977. Avšak 10^{4m} je nesoudělné s číslem 1977; proto a_m je dělitelné 1977 a přitom $1 \leq m < 1977$, což je spor. Tvzení je tím dokázáno.

B — I — 2

Nech $\mathbf{A} = \{a, b\}$ je dvojprvková množina a f, g zobrazení množiny $\mathbf{A}$ na $\mathbf{A}$ definované predpismi:

$$f(a) = a, \quad f(b) = b; \quad g(a) = b, \quad g(b) = a.$$

Na množině $\mathbf{R}$ všech relací $\mathcal{R} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ je definována relace S takto: $\mathcal{R}_1 S \mathcal{R}_2$, kde $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subset \mathbf{A} \times \mathbf{A}$, ak $\mathcal{R}_2$ je obrazem $\mathcal{R}_1$ při zobrazení f alebo g .

1. Dokážte, že S je ekvivalencia.

2. Určte, kolko rôznych tried ekvivalentných relácií vzhľadom na S existuje na množine R .

Řešení. 1. Relace S je ekvivalence, neboť je zároveň

I. reflexivní: Každá relace $R \in R$ je svým obrazem v (identickém) zobrazení f , takže $R S R$.

II. symetrická: Každé ze zobrazení f a g je inverzní samo k sobě, takže je-li R_2 obrazem R_1 v zobrazení f (popř. g), je také R_1 obrazem R_2 v tomtéž zobrazení. Platí tedy: je-li $R_1 S R_2$, pak $R_2 S R_1$, pro každé $R_1 \in R$, $R_2 \in R_2$.

III. transitivní. Ukažme nejprve, že složením zobrazení f a g v různých pořadích dostaneme opět jedno z těchto zobrazení: je totiž $f \circ f = f$, $f \circ g = g \circ f = g$, $g \circ g = f$. Platí-li nyní $R_1 S R_2$ a $R_2 S R_3$, platí také $R_1 S R_3$, a to pro libovolná $R_1, R_2, R_3 \in R_3$.

2. Všech prvků množiny R_3 je zřejmě $2^4 = 16$. Tuto část úlohy vyřešíme nejjednodušeji tím, že vypíšeme jednotlivé třídy rozkladu do tohoto schématu (v každém řádku je jedna třída):

$\emptyset$,

$\{[a, a]\}, \quad \{[b, b]\},$

$\{[a, b]\}, \quad \{[b, a]\},$

$\{[a, a], \quad [b, b]\},$

$\{[a, b], \quad [b, a]\},$

$\{[a, a], \quad [a, b]\}, \quad \{[b, a], \quad [b, b]\},$

$\{[a, a], \quad [b, a]\}, \quad \{[a, b], \quad [b, b]\},$

$\{[a, a], \quad [a, b], \quad [b, a]\}, \quad \{[a, b], \quad [b, a], \quad [b, b]\},$

$\{[a, a], \quad [a, b], \quad [b, b]\}, \quad \{[a, a], \quad [b, a], \quad [b, b]\},$

$\{[a, a], \quad [a, b], \quad [b, a], \quad [b, b]\}.$

Závěr. Na množině $\mathbf{R}$ je celkem 10 tříd navzájem ekvivalentních prvků.

B — I — 3

Určete parametr a tak, aby rovnice

$$a \cdot \text{sign}(x - 1) - 2x = \text{sign}(x^2 + 2x - 3) \quad (1)$$

měla pro neznámou x právě čtyři řešení.

(Poznámka: Funkce $x \mapsto \text{sign } x$ je definována v textu

1. přípravné úlohy I. kola kategorie B.)

Řešení. Úpravou (1) dostaneme

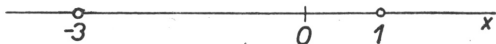
$$a \text{sign}(x - 1) - 2x = \text{sign}(x - 1)(x + 3). \quad (2)$$

Body (viz obr. 11) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ rozloží množinu reálných čísel na pět disjunktních podmnožin $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_4$, $\mathbf{M}_5$. V každé z nich budeme hledat kořeny (1):

1. $\mathbf{M}_1 = \{x \in \mathbf{R}; x < -3\}$; pro tato x má (2) tvar $-a - 2x = 1$, odkud $x = -\frac{1}{2}(a + 1)$. Číslo x bude kořenem, bude-li $-\frac{1}{2}(a + 1) < -3$, tj. $a > 5$.

2. $\mathbf{M}_2 = \{-3\}$; pak v $\mathbf{M}_2$ je kořen pro $-a + 6 = 0$, tj. $a = 6$.

3. $\mathbf{M}_3 = \{x \in \mathbf{R}; -3 < x < 1\}$; pak (2) má tvar $-a - 2x = -1$, tj. $x = -\frac{1}{2}(a - 1)$. V $\mathbf{M}_3$ tedy bude (a to jediný) kořen, právě když $-3 < -\frac{1}{2}(a - 1) < 1$, tj. pro $-1 < a < 7$.



Obr. 11

4. $\mathbf{M}_4 = \{1\}$; (2) přejde v $a \cdot 0 - 2 = 0$, což nelze splnit.

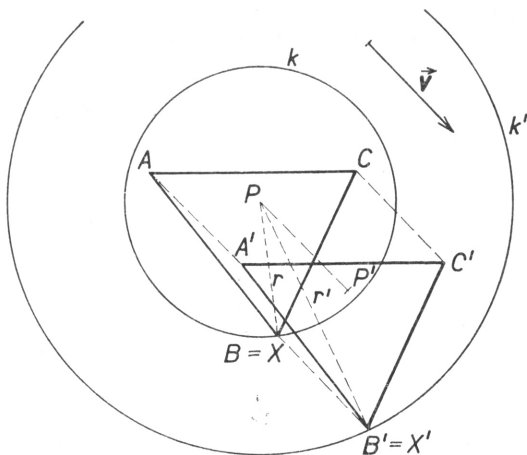
V $\mathbf{M}_4$ proto není nikdy kořen.

5. $\mathbf{M}_5 = \{x \in \mathbf{R}; x > 1\}$; (2) má pak tvar $a - 2x = 1$, tj. $x = \frac{1}{2}(a - 1)$. V $\mathbf{M}_5$ je tedy (jediný) kořen, právě když $\frac{1}{2}(a - 1) > 1$, tj. $a > 3$.

Má proto daná rovnice pro parametr a čtyři kořeny tehdy a jen tehdy, je-li zároveň splněno $a > 5$, $a = 6$, $-1 < a < 7$, $a > 3$. To nastane v jediném případě $a = 6$. Kořeny jsou pak čísla $-3,5$; -3 ; $-2,5$; $2,5$.

B — I — 4

V trojúhelníku $\mathbf{T}$ je dán bod P . Nechť $\mathbf{T}'$ je trojúhelník vzniklý z $\mathbf{T}$ posunutím o vektor $\mathbf{v}$, nechť r , popř. r'



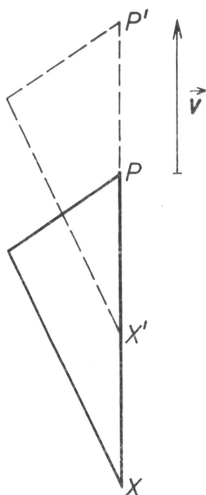
Obr. 12

je poloměr nejmenšího kruhu se středem v P , v němž je obsažen trojúhelník $\mathbf{T}$, popř. $\mathbf{T}'$.

Dokažte, že platí

$$r \leq 2r',$$

a najděte příklad, kdy nastane rovnost.



Obr. 13

Řešení (obr. 12). Nechť $\mathbf{T} = ABC$, $\mathbf{T}' = A'B'C'$. Označme P' obraz bodu P v uvedeném posunutí. Protože $P \in \mathbf{T}$, je $P' \in \mathbf{T}'$, takže $|\mathbf{v}| = |PP'| \leq r'$. Podle definice r existuje v $\mathbf{T}$ bod X takový, že $|PX| = r$. Proto platí, je-li X' obraz bodu X , $r - |\mathbf{v}| = |PX| - |XX'| \leq |PX'| \leq r'$.

Z obou nerovností $|\mathbf{v}| \leq r'$ a $r - |\mathbf{v}| \leq r'$ plyne

$$r = (r - |\mathbf{v}|) + |\mathbf{v}| \leq r' + r' = 2r',$$

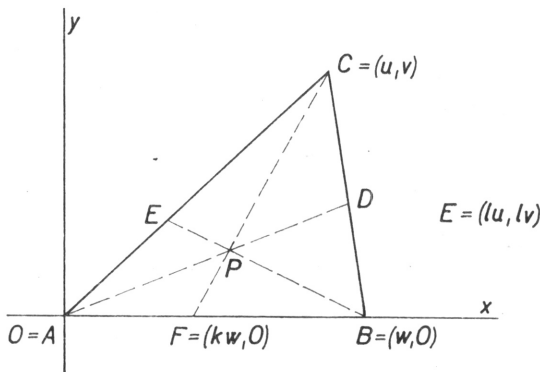
jak jsme měli dokázat.

Příklad, kdy platí $r = 2r'$, je na obr. 13.

B — I — 5

Na stranách rovnostranného trojúhelníka ABC jsou dány body C_1, C_2 na AB , A_1, A_2 na BC a B_1, B_2 na AC tak, že strany jsou jimi rozděleny na tři shodné úsečky. Příčky AA_i, BB_i, CC_i ($i = 1, 2$) rozdělují trojúhelník na mnohoúhelníky. Vypočtete, jakou částí obsahu trojúhelníka je obsah toho šestiúhelníka rozkladu, ve kterém leží střed trojúhelníka.

Řešení. Nejprve dokážeme pomocnou větu: Necht ABC (obr. 14) je trojúhelník, E vnitřní bod jeho strany



Obr. 14

AC , F vnitřní bod jeho strany AB , P průsečík přímek BE a CF . Je-li $k = \frac{|AF|}{|AB|}$, $e = \frac{|AF|}{|AC|}$, pak platí

$$|PF| = \frac{e(1-k)}{1-ke} |FC|, \quad (1)$$

$$|AP| = \frac{k+e-2ke}{1-ke} |AD|, \quad (2)$$

kde D je průsečík přímky AP s přímkou BC .

Důkaz lze provést např. užitím analytické geometrie. V rovině trojúhelníka zvolíme ortonormální soustavu tak, že počátek je v bodě A , kladná osa x je v polopřímce AB a bod C má kladnou druhou souřadnici: $A = (0, 0)$, $B = (w, 0)$, $C = (u, v)$, $w > 0$, $v > 0$. Pak $E = (eu, ev)$, $F = (kw, 0)$. Po snadném výpočtu najdeme souřadnice bodů P a D :

$$P = \left(\frac{eu + kw - ke(u + w)}{1 - ke}, \frac{e(1-k)}{1 - ke} v \right),$$

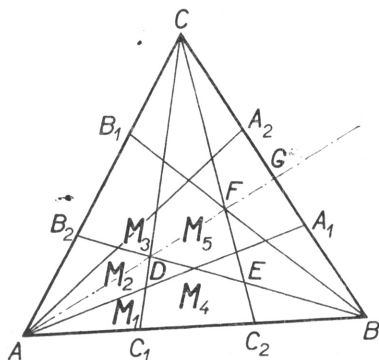
$$D = \left(\frac{eu + kw - ke(u + w)}{k + e - 2ke}, \frac{e(1-k)}{k + e - 2ke} v \right).$$

(Protože $k + e - 2ke = e(1-k) + k(1-e)$, je jmenovatel kladný. Porovnáním druhých souřadnic bodů P a C dostaneme (1), porovnáním druhých souřadnic bodů P a D dostaneme (2).

Vlastní řešení provedeme v označení z obr. 15. Úsečky AA_i , BB_i , CC_i , $i = 1, 2$ rozdělí daný rovnostranný trojúhelník na mnohoúhelníky pěti druhů: $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$,

M₄, M₅. Poměry obsahů **M_i** a obsahu *P* trojúhelníka *ABC* označíme *x_i*, *i* = 1, 2, 3, 4, 5, takže hledaný obsah šestiúhelníka bude *x₅P*. O číslech *x₁*, ..., *x₅* platí vztahy:

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{3} \quad (3)$$



Obr. 15

(z obsahu $\triangle ACC_1$);

$$x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = \frac{1}{3} \quad (4)$$

(z obsahu $\triangle CC_1C_2$);

$$2x_1 + x_2 = \frac{1}{6} \quad (5)$$

(z obsahu čtyřúhelníka AC_1DB_1 ,

neboť $|AD| = \frac{1}{2}|AG|$ podle (2) pro $k = e = \frac{1}{3}$,

$$|B_1C_1| = \frac{1}{3}|BC| \text{ a } AD \perp B_1C_1);$$

$$x_1 = \frac{1}{21} \quad (6)$$

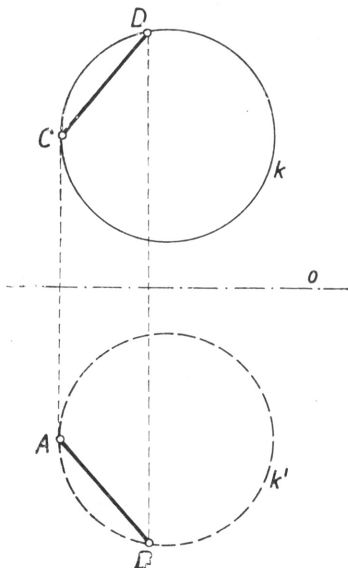
(neboť $|EC_2| = \frac{1}{7} |CC_2|$ podle (1) pro $k = \frac{2}{3}$, $e = \frac{1}{3}$, takže obsah $\triangle EBC_2$ je sedmina obsahu $\triangle C_2BC$);

$$2x_1 + x_4 = \frac{1}{5} \quad (7)$$

(z $\triangle BFC$, neboť $|FG| = \frac{1}{5} |AG|$ podle (2) pro $k = e = \frac{2}{3}$).

Z rovnic (3)—(7) plyne postupně $x_1 = \frac{1}{21}$, $x_2 = \frac{1}{14}$, $x_4 = \frac{11}{105}$, $x_3 = \frac{1}{70}$, $x_5 = \frac{1}{10}$.

Závěr. Obsah šestiúhelníka je desetina obsahu trojúhelníka.



Obr. 16

V rovině jsou dány dva body A, B a kružnice k . Sestrojte na kružnici k body C a D tak, aby body A, B, C, D byly vrcholy rovnoramenného lichoběžníka s rameny AB a CD .

Řešení (obr. 16). Nechť C, D jsou body splňující podmínky, nechť o je osa souměrnosti příslušného lichoběžníka. Kružnice k' souměrná ke k podle osy o prochází body A a B a je shodná s k .

Z tohoto rozboru vyplývá konstrukce. Sestrojíme kružnici k' shodnou s k a procházející body A a B . Každá osová souměrnost, která převádí k' v k , převede body A a B v body C a D vyhovující podmínkám úlohy, pokud úsečky AB a CD nejsou rovnoběžné a nemají společný bod. Podmínkou řešitelnosti ovšem je, aby průměr kružnice k byl větší nebo roven vzdálenosti bodů A a B . Je-li větší, jsou dvě kružnice k' procházející body A a B . Úloha může mít nekonečně mnoho řešení (je-li k shodná s některou z kružnic k'), nebo dvě řešení, jedno nebo žádné řešení.

KATEGORIE C

C — I — 1

Pro každé reálné číslo $a > 1$ platí

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1} < 2\sqrt{a}.$$

Dokažte.

Řešení: Protože pro kladná čísla c, d platí $c < d$ právě tehdy, když je $c^2 < d^2$, je dokazovaná nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$(\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1})^2 < 4a,$$

kterou můžeme upravit na ekvivalentní nerovnost

$$\sqrt{a^2-1} < a.$$

Tato nerovnost je zřejmě splněna pro všechna $a > 1$, protože $0 < a^2 - 1 < a^2$, a proto $\sqrt{a^2-1} < \sqrt{a^2} = a$.

C - 1 - 2

Určete všechna reálná čísla a , pro která se zlomek

$$\frac{a+2}{a^2+1}$$

rovná přirozenému číslu.

Řešení. Předpokládejme, že pro reálné číslo a se daný zlomek rovná přirozenému číslu n . Pak je $na^2 - a + n - 2 = 0$, číslo a je proto řešením kvadratické rovnice

$$nx^2 - x + n - 2 = 0,$$

která musí mít tudíž nezáporný diskriminant, tj. pro n musí platit $1 - 4n(n - 2) \geq 0$. Tuto nerovnost upravíme na tvar

$$(2n - 2)^2 \leq 5,$$

odkud plyne, že $2n - 2$ se může rovnat pouze 0 nebo 2, protože je to číslo sudé. Číslo n se proto rovná buď jedné,

nebo dvěma. Je-li $n = 1$, musí a splňovat rovnici

$$a^2 - a - 1 = 0,$$

$$\text{tedy } a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{nebo} \quad a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

je-li $n = 2$, musí a splňovat rovnici $2a^2 - a = 0$, tedy $a = 0$ nebo $a = \frac{1}{2}$. Obráceně se snadno ověří, že daný zlomek se rovná jedné nebo dvěma, jestliže za a dosadíme

jednu z čtyř vypočtených hodnot $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, 0 , $\frac{1}{2}$.

C — I — 3

Z cifer „nula, jedna“ je utvořena posloupnost

$$10100100010000 \dots;$$

za n -tou jedničkou stojí n nul ($n = 1, 2, 3, \dots$). Kolik jedniček stojí na prvním miliónu míst této posloupnosti? Na kolikátém místě stojí poslední z nich?

Řešení. Uvažujme začátek dané posloupnosti až po n -tou jedničku a za ní stojící nuly, kterých je právě n . Označme a_n počet cifer v tomto konečném úseku dané posloupnosti, ve kterém je n jedniček a $1 + 2 + 3 + \dots + n$ nul. Platí proto

$$a_n = n + \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{1}{2}n(n + 3),$$

tj. $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 9$, atd. Položme ještě $a_0 = 0$. Je-li p počet jedniček stojících na prvních k místech

dané posloupnosti, pak je k -tá cifra buď p -tou jedničkou, nebo je některou z p nul, stojících za p -tou jedničkou. Musí tedy platit

$$a_{p-1} < k \leq a_p$$

a číslo p je těmito nerovnostmi jednoznačně určeno číslem k . V našem případě je $k = 10^6$, hledaný počet p jedniček dostaneme z nerovností

$$\frac{1}{2}(p-1)(p+2) < 10^6 \leq \frac{1}{2}p(p+3),$$

které upravíme na tvar

$$(p + \frac{1}{2})^2 < 2\,000\,002,25 \leq (p + \frac{3}{2})^2.$$

Pomocí tabulek nebo kapesního kalkulátoru určíme druhou odmocninu r z čísla $2\,000\,002,25$. Stačí zjistit, že leží mezi hodnotami $1414,2$ a $1414,3$. Pro p máme pak nerovnosti

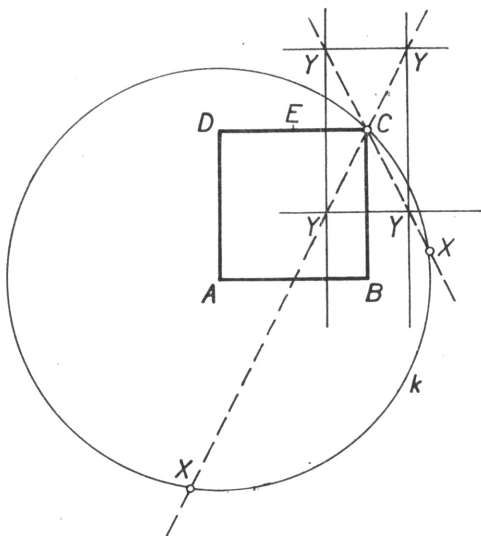
$p + 0,5 < r < 1414,3$, $1414,2 < r \leq p + 1,5$,
tedy $1412,7 < p < 1413,8$, a protože p je číslo přirozené, je $p = 1413$. To je počet jedniček, stojících v dané posloupnosti nejvýše na milióntém místě. Poslední z nich stojí na místě s pořadovým číslem $a_{p-1} + 1 = 998\,991$.

C — I — 4

Je dán čtverec $ABCD$. Označme E střed strany CD a k kružnici o středu A a poloměru AC . Určete všechny body $X \in k$ takové, že trojúhelníky XDE a XBC mají obsahy sobě rovné.

Řešení. Trojúhelníky XDE a XBC mají právě tehdy rovné obsahy, když vzdálenost bodu X od přímky DE je nenulová a dvakrát větší než vzdálenost bodu X od přímky BC .

Dále platí: Má-li bod X popsanou vlastnost, má tuto vlastnost každý bod přímky CX různý od bodu C . To plyne z podobnosti trojúhelníků. Stejně tak je vidět, že na přímce CX lze zvolit bod Y tak, že jeho vzdálenost od přímky BC je rovna jedné a jeho vzdálenost od přímky CD je rovna dvěma (obr. 17.) Takové body Y jsou čtyři, dostaneme je jako průsečíky dvou rovnoběžek s přímkou BC ve vzdálenosti jedna od přímky BC



Obr. 17

s dvěma rovnoběžkami s přímkou CD , vedených ve vzdálenosti dvě od této přímky. Spojíme-li tyto čtyři body s bodem C , dostaneme dvě různoběžky a právě všechny body X těchto dvou různoběžek (kromě bodu C) mají výše popsanou vlastnost.

K vyřešení naší úlohy stačí určit průsečíky obdržených dvou různoběžek s kružnicí k . Žádná z těchto přímek není tečnou kružnice k v bodě C , protože každý bod této tečny má od přímek BC , CD stejné vzdálenosti. Protíná proto každá z uvažovaných různoběžek kružnici k v bodě C a v jednom dalším bodě. Úloha má tedy dvě řešení.

C — I — 5

Určete množinu středů všech čtverců, jejichž všechny strany leží na stěnách dané krychle.

Řešení. Nechť všechny strany čtverce $ABCD$ leží na stěnách dané krychle. Leží-li celý čtverec v jedné stěně krychle, leží v ní i střed čtverce. Ten je pak nutně vnitřním bodem stěny, neleží na žádné hraně krychle. Obráceně je každý vnitřní bod každé stěny krychle středem nějakého čtverce ležícího v té stěně. V dalším vyloučíme tento výjimečný případ. Nechť tedy čtverec $ABCD$ neleží v žádné stěně krychle. Pak leží všechny jeho vrcholy na hranách krychle — kdyby byl například bod A vnitřním bodem některé stěny, musely by v ní ležet strany AB i AD čtverce, a tudíž celý čtverec. Mohou nastat tyto dva případy:

1. Strana AB je rovnoběžná s některou hranou krychle.

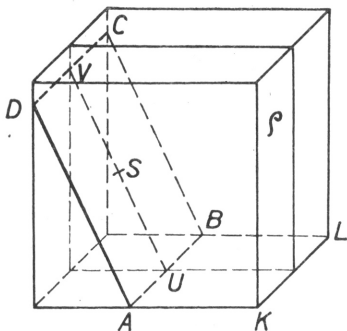
Strana čtverce je pak rovna délce hrany krychle, strana CD leží buď v protější stěně k stěně, ve které leží strana AB , nebo ve stěně sousední podle toho, je-li rovina čtverce rovnoběžná s některou stěnou krychle či nikoli.

2. strana AB není rovnoběžná se žádnou hranou krychle, pak musí strana BC čtverce ležet ve stěně sousední k stěně, v níž leží strana AB , a protože jsou strany AB , BC kolmé, musí být strana BC rovnoběžná s hranou krychle, a sice s tou hranou, která je kolmá k stěně, v níž leží strana AB . Tím je tento případ převeden na případ předcházející. Vždy je některá strana čtverce rovnoběžná s některou hranou krychle. Strana čtverce je rovna v každém případě délce hrany krychle.

Je-li rovina čtverce $ABCD$ rovnoběžná s některou stěnou krychle, leží střed čtverce na spojnici středů těch stěn krychle, se kterými je rovina čtverce rovnoběžná. Obráceně je každý bod úsečky spojující středy protilehlých rovnoběžných stěn krychle středem čtverce, ve kterém protíná krychli rovina rovnoběžná se stěnami krychle, jejichž středy tvoří zvolenou spojnici.

Není-li rovina čtverce rovnoběžná s žádnou stěnou krychle, nýbrž je pouze rovnoběžná s některou hranou KL dané krychle, leží střed S čtverce $ABCD$ v rovině ϱ souměrnosti hrany KL (obr. 18). Rovina ϱ protne krychli ve čtverci $\mathbf{Q}$. Označme ještě U , V průsečíky čtverce $\mathbf{Q}$ s obvodem čtverce $ABCD$ a R ten vrchol čtverce $\mathbf{Q}$, pro který je trojúhelník URV pravoúhlý. Je pak $|SU| = |SV| = \frac{1}{2}a$, kde a je délka hrany krychle. Protože je trojúhelník pravoúhlý a bod S středem jeho přepony, je také $|RS| = \frac{1}{2}a$. Bod S leží tedy nutně

na té čtvrtkružnici v rovině ϱ o středu R a poloměru $\frac{1}{2}a$, která je částí krychle. Obráceně lze ke každému bodu S této čtvrtkružnice sestrojít body U, V tak, aby ležely v rovině ϱ a současně na stěnách krychle a aby bod S byl středem úsečky UV a $|SU| = |SV| = \frac{1}{2}a$. K bodům



Obr. 18

U, V se pak snadno sestrojí čtverec $ABCD$, jehož strany leží na stěnách krychle a jehož středem je bod S .

Množina středů všech čtverců, jejichž všechny strany leží ve stěnách dané krychle, je tudíž sjednocením těchto tří množin:

- množiny všech vnitřních bodů všech stěn krychle,
- množiny všech bodů na třech úsečkách spojujících středy protilehlých stěn krychle,
- množiny všech bodů dvanácti čtvrtkružnic se středy v středech hran dané krychle, jejichž přesný popis je uveden výše.

Jsou dány tři různé body A, B, C , které neleží v přímce. V rovině ABC určete všechny takové body M , pro které kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CAM$ jsou shodné.

Řešení. Označme středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABM , BCM , CAM postupně S_1, S_2, S_3 . Pak platí $|S_1A| = |S_1B| = |S_1M| = |S_2B| = |S_2C| = |S_2M| = |S_3C| = |S_3A| = |S_3M|$. Bod M musí být různý od bodů A, B, C a z rovností $|S_1M| = |S_2M| = |S_1B| = |S_2B|$ plyne, že buď $S_1 = S_2$, nebo že S_1MS_2B je kosočtverec. Je-li $S_1 = S_2$, splývají kružnice opsané trojúhelníkům ABM , BCM s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC a bod M je jejím bodem. Ve druhém případě je nejen S_1MS_2B , ale též S_2MS_3C a S_3MS_1A kosočtverec. První dva mají společnou stranu MS_2 , a proto tvoří zbývající vrcholy obou kosočtverců rovnoběžník, v našem případě je to rovnoběžník S_1BCS_3 . Odtud plyne, že přímky S_1S_3 a BC jsou rovnoběžné, a protože přímky AM , S_1S_3 jsou kolmé (úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé), jsou kolmé i přímky AM a BC . Leží tedy bod M na výšce trojúhelníka ABC , která prochází bodem A . Stejně bychom dokázali, že bod M leží též na zbývajících výškách trojúhelníka ABC , neboli že je průsečíkem výšek trojúhelníka ABC . Tím jsme dokázali: jsou-li poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům ABM , BCM , CAM stejné, pak je bod M buď průsečíkem výšek v trojúhelníku ABC , nebo je bod M libovolný bod kružnice opsané trojúhelníku ABC , různý od bodů A, B, C .

Obráceně, nechť je M libovolný bod kružnice opsané trojúhelníku ABC , různý od bodů A, B, C . Pak kružnice opsané trojúhelníkům ABM, BCM, CAM splývají všechny s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC , a mají tudíž stejný poloměr. Nechť je teď bod M průsečíkem výšek trojúhelníka ABC , který nemůže být pravoúhlý, protože podle předpokladu jeho průsečík výšek M nesplývá s žádným jeho vrcholem. Kružnice k_2 a k_3 opsané trojúhelníkům BCM a CAM mají společnou tětivu CM , které přísluší v kružnici k_2 obvodový úhel $\sphericalangle CBM$ a v kružnici k_3 obvodový úhel $\sphericalangle CAM$. Přitom je $CA \perp BM, AM \perp CB$ a proto jsou úhly $\sphericalangle CBM, \sphericalangle CAM$ stejné. Odpovídají tedy společné tětivě CM kružnic k_2, k_3 stejně velké obvodové úhly a proto mají kružnice k_2, k_3 stejně velké poloměry. K témuž výsledku bychom došli i v případě kružnic k_3 a k_1 , kde k_1 je kružnice opsaná trojúhelníku ABM . Můžeme tedy shrnout: množinou všech bodů M , pro které mají kružnice opsané trojúhelníkům ABM, BCM, CAM stejné poloměry, je množina bodů kružnice opsané trojúhelníku ABC a průsečík výšek trojúhelníku ABC s výjimkou bodů A, B, C .

KATEGORIE Z

Z — 1 — 1

Zjistěte, zda mezi čísla

10001, 100001, 1000001, ...

(první a poslední číslice je 1, ostatní jsou vesměs nuly) jsou násobky čísla 1001. Jsou-li taková čísla, najděte nejmenší z nich.

Řešení. Uvědomíme si rozklad čísla 1001 v prvočinitele.

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \quad (1)$$

Dále sestavíme tabulku zbytků při dělení mocnin deseti čísel 7, 11 a 13; označíme z_7 , z_{11} , z_{13} zbytek při dělení čísla 10^n číslem 7, 11, 13:

exponent n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
z_7	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5	1	3	...
z_{11}		1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	...
z_{13}		9	12	3	4	1	10	9	12	3	4	1	10	...

Číslo $10^n + 1$ má zbytek o 1 větší než číslo 10^n . Hledáme *první* takový případ, kdy zbytky budou 0, 0, 0 neboli 7, 11, 13, neboť v tomto případě dostaneme první číslo tvaru $10^n + 1$ ($n > 3$), dělitelné číslem 1001. Tento první případ je v zarámovaném sloupci, kdy číslo $10^n + 1$ dává zbytky $6 + 1 = 7$, $10 + 1 = 11$, $12 + 1 = 13$. Příslušné n je 9, hledané číslo 1 000 000 001.

Z — I — 2

Z místa A vyjely současně po téže trase dva nákladní vozy: první jel průměrnou rychlostí 40 km/h, druhý 50 km/h. Po jisté době vyrazilo za nimi osobní auto

jedoucí průměrnou rychlostí 70 km/h. Nejprve předjelo pomalejší vůz, půl hodiny potom předjelo rychlejší vůz. Oč později vyjelo z místa A osobní auto než oba nákladní vozy?

Řešení. Označíme 0 hod. okamžik, kdy vyrazí na cestu oba nákladní vozy N_1 , N_2 , x (v hod.) okamžik, kdy vyrazí osobní vůz V , y (v hod.) okamžik, kdy V předjíždí pomalejší vůz N_1 , $y + \frac{1}{2}$ (v hod.) okamžik, kdy V předjíždí rychlejší nákladní vůz N_2 . Tabulka udává v km vzdálenosti od výchozího místa A , které každý z vozů urazil v daném okamžiku.

Čas	N_1	N_2	V
0	0	0	0
x	$40 x$	$50 x$	0
y	$40 y$	$50 y$	$70(y - x)$
$y + \frac{1}{2}$	$40\left(y + \frac{1}{2}\right)$	$50\left(y + \frac{1}{2}\right)$	$70\left(y - x + \frac{1}{2}\right)$

Podle podmínek úlohy (předjíždění) jsou si rovny údaje v orámovaných polích téhož řádku, tj.

$$\begin{aligned} 40 y &= 70(y - x) \\ 50\left(y + \frac{1}{2}\right) &= 70\left(y - x + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Po jednoduchých úpravách přejde soustava (1) v soustavu

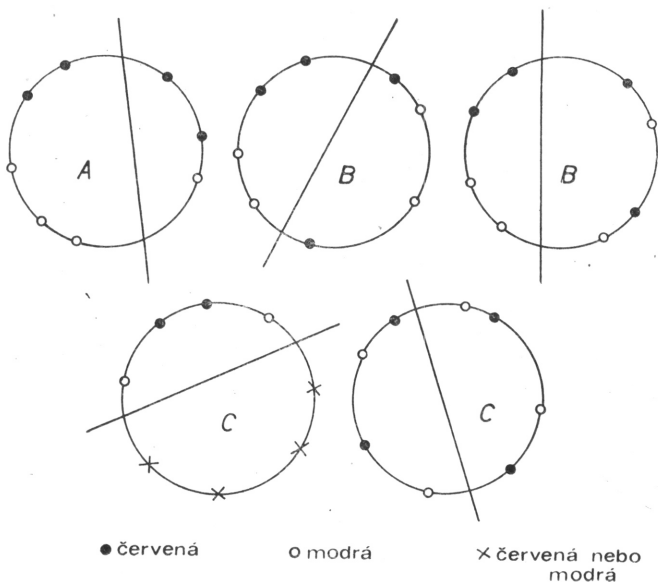
$$3y = 7x, \quad 2y = 7x - 1. \quad (2)$$

Z (2) vyloučíme neznámou y (text úlohy žádá výpočet x); vyjde $x = \frac{3}{7}$ (hod.), tj. $x \doteq 26$ minut. Z (2) dostaneme $y = 1$ (hod.).

Algebraicky „jednodušší“ by byla soustava, kdybychom zvolili neznámé y , $y - x = z$ (doba jízdy vozů V až do předjíždění N_1). Příslušná soustava by zněla

$$4y = 7z, \quad 5y = 7z + 1.$$

Odtud dostaneme $y = 1$, $z = \frac{4}{7}$ a $x = y - z = \frac{3}{7}$ jako dříve.

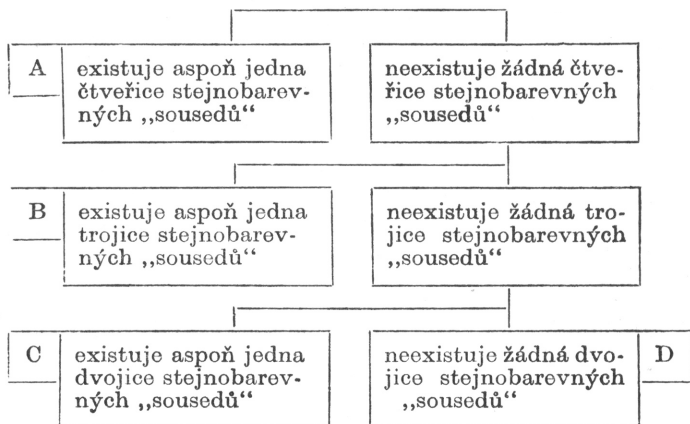


Obr. 19

Na kružnici k leží 8 různých bodů, z nichž jsou 4 červené a 4 modré. Zjistěte, zda lze vždy sestavit takovou přímku p , že uvnitř opačných polorovin s hraniční přímkou p leží po 2 červených a po 2 modrých bodech.

Řešení. Úloha vyžaduje systematický výčet všech možností (dichotomické třídění) a experimentální zjištění existence přímky p v každém případě.

Třídění můžeme zaznamenat do schématu zvaného *strom*:



Zakreslíme koncové případy A , B , C , D ; (obr. 19
 • značí červené body, $\circ$ modré).

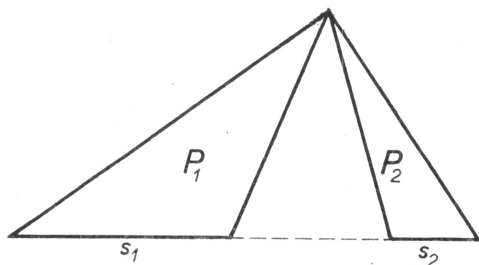
V případě B jsou dvě možnosti, naznačené na obr. 19

V případě C musí být sousedi dvou červených dva modré; na uspořádání zbývajících čtyř nezáleží.

Na obr. 19 jsou už také naznačeny polohy přímky p .

Z — I — 4

V trojúhelníku ABC sestrojte těžnici t_c procházející vrcholem C , její střed označte D . Přímka AD a těžnice



Obr. 20

t_c rozdělí trojúhelník na tři trojúhelníky a čtyřúhelník. Vyjádřete obsahy těchto čtyř obrazců pomocí obsahu daného trojúhelníka.

Řešení. Řešení úlohy Z-I-4 se opírá v podstatě o větu **V**, že poměr obsahů P_1 , P_2 dvou trojúhelníků se společným vrcholem, jejichž protější strany s_1 , s_2 leží v téže přímce, je $\frac{s_1}{s_2}$ (obr. 20). Platí tedy $\frac{s_1}{s_2} = \frac{P_1}{P_2}$.

Úlohu rozřešíme za pomoci obr. 21. Podle textu úlohy máme vyjádřit pomocí obsahu P trojúhelníku ABC tyto obsahy:

$$P_1, P_2, P_3 \text{ a } P_4 + P_5.$$

Podle věty **V** je $P(\triangle AEC) + P(\triangle BEC) = P$,
 $P(\triangle AEC) = P(\triangle BEC) = \frac{P}{2}$. Podle téže věty **V** je

$$P(\triangle ADE) + P(\triangle ACD) = \frac{P}{2},$$

$$P(\triangle ADE) = P(\triangle ACD) = \frac{P}{4}.$$

Je tedy

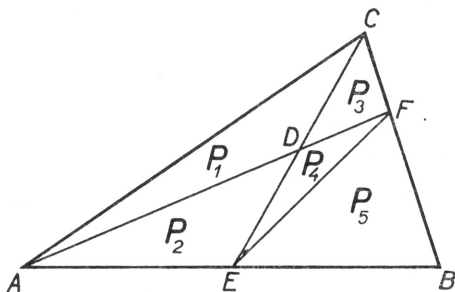
$$P_1 = P_2 = \frac{1}{4}P \text{ a zároveň } P_1 + P_2 = P_3 + P_4 + P_5 \quad (1)$$

Použijeme-li věty **V** na $\triangle ABF$, dostaneme

$$P_2 + P_4 = P_5; \quad (2)$$

Použijeme-li věty **V** na $\triangle CEF$, dostaneme

$$P_3 = P_4. \quad (3)$$



Obr. 21

Z (1), (2), (3) vyjde

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{4}P, \quad P_3 = P_4 = \frac{1}{12}P, \quad P_5 = \frac{1}{3}P.$$

Specielně obsah čtyřúhelníka $BEDF$ je $\frac{P}{12} + \frac{P}{3} = \frac{5}{12}P$.

IV. Soutěžní úlohy II. kola

KATEGÓRIA A

A — II — 1

Nájdite všetky n -tice reálnych čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$, ktoré vyhovujú rovniciam

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1, \quad (1)$$

$$x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = 1. \quad (2)$$

Riešenie. Čísla x_i^2 sú zrejmé nezáporné. Z rovnosti (1) potom vyplýva

$$0 \leq x_i^2 \leq 1.$$

Keby pre niektoré $j = 1, 2, \dots, n$ platilo

$$0 < x_j^2 < 1,$$

tak potom $x_j^4 < x_j^2$. Keďže pre každé $i = 1, \dots, n$ platí $0 \leq x_i^4 \leq x_i^2$, tak

$$x_1^4 + \dots + x_n^4 < x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1,$$

čo je spor s rovnosťou (2).

Teda pre každé $i = 1, \dots, n$ musí platiť $x_i^2 = 0$ alebo $x_i^2 = 1$, t.j. $x_i = 0, 1, -1$. Z rovnosti (1) bezprostredne

vyplýva, že práve jedno z čísel x_i musí byť rovné 1 alebo -1 a ostatné musia byť rovné 0.

Záver. Riešením rovníc (1) a (2) sú n -tice

$$[1, 0, \dots, 0], [0, 1, \dots, 0], \dots, [0, \dots, 0, 1],$$

$$[-1, 0, \dots, 0], [0, -1, \dots, 0], \dots, [0, \dots, 0, -1].$$

Iné riešenie. Rovnicu (1) umocníme

$$x_1^4 + \dots + x_n^4 + 2x_1^2x_2^2 + \dots + 2x_{n-1}^2x_n^2 = 1.$$

Keď odpočítame rovnosť (2) a delíme 2, dostaneme

$$x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + \dots + x_{n-1}^2x_n^2 = 0.$$

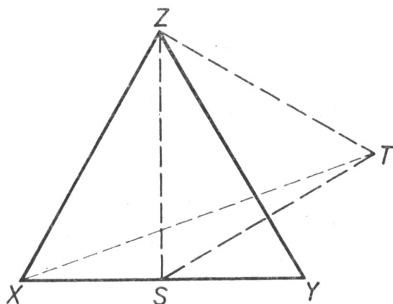
To je možné len vtedy, keď sú všetky čísla x_i rovné nule, alebo všetky čísla x_i okrem jedného sú rovné nule. Podľa (1) prvý prípad nemôže nastať a v druhom prípade číslo rôzne od nuly musí byť rovné $+1$ alebo -1 .

A — II — 2

V rovine je daná konvexná množina $\mathbf{M}$, ktorá obsahuje aspoň 2 body a ktorá má túto vlastnosť: ak A, B sú dva body z $\mathbf{M}$, tak v $\mathbf{M}$ existuje taký bod C , že A, B, C sú vrcholy rovnostranného trojuholníka. Dokážte, že $\mathbf{M}$ nie je ohraničená, t.j. že ku každému kladnému číslu K existujú v $\mathbf{M}$ dva body, ktorých vzájomná vzdialenosť je väčšia ako K .

Riešenie. Dokážeme najprv pomocné tvrdenie: ak X, Y sú dva body v $\mathbf{M}$, tak existujú v $\mathbf{M}$ dva body, ktorých vzdialenosť je $\frac{\sqrt{7}}{2} XY$.

Nech X, Y sú dva body v $\mathbf{M}$. Označíme S stred úsečky XY . Keďže $\mathbf{M}$ je konvexná, tak $S \in \mathbf{M}$. Nech Z je taký bod z $\mathbf{M}$, že trojuholník XYZ je rovnostranný. Nech ďalej T je taký bod z $\mathbf{M}$, že trojuholník SZT je rovnostranný. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že body X a T sú v opačných polrovinách určenej



Obr. 22

ných priamkou ZY (pozri obr. 22). Trojuholník XZT je pravouhlý s preponou XT . Teda

$$|XT|^2 = |XZ|^2 + |ZT|^2 = |XY|^2 + \frac{3}{4}|XY|^2 = \frac{7}{4}|XY|^2.$$

Odtiaľ už vyplýva pomocné tvrdenie.

Množina $\mathbf{M}$ obsahuje aspoň dva body X, Y .

[Nech d je ich vzdialenosť. n -násobným použitím pomocného tvrdenia vyplýva, že v $\mathbf{M}$ existujú dva body X_n, Y_n také, že ich vzdialenosť je

$$|X_n Y_n| = \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \right)^n \cdot d.$$

Podľa binomickej vety platí

$$\left(1 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2} - 1\right)\right)^n \geq 1 + n \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{2} - 1\right).$$

Ak K je dané kladné číslo, tak existuje prirodzené číslo n také, že

$$1 + n \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{2} - 1\right) > K.$$

Potom vzdialenosť bodov X_n a Y_n je väčšia ako K .

A — II — 3a

Súčin $2k - 1$ po sebe idúcich nepárnych prirodzených čísel je deliteľný číslom $1.3.\dots(2k - 1)$; dokážte.

Riešenie. Máme dokázať, že pre každé prirodzené číslo k a pre každé nepárne prirodzené číslo n je číslo

$$c_{k,n} = \frac{n(n+2) \cdot \dots \cdot (n+4k-4)}{1.3.\dots(2k-1)}$$

celé. Najprv si všimnime tento vzťah:

$$\begin{aligned} & \frac{n(n+2) \cdot \dots \cdot (n+4k-6) \cdot (n+4k-4)}{1.3.\dots(2k-1)} = \\ & = \frac{n(n+2) \cdot \dots \cdot (n+4k-6)}{1.3.\dots(2k-1)} \cdot (n-2) + \\ & + \frac{n(n+2) \cdot \dots \cdot (n+4k-6)}{1.3.\dots(2k-1)} \cdot 2(2k-1) \end{aligned}$$

$$= \frac{(n-2)n \dots (n+4k-6)}{1 \cdot 3 \dots (2k-1)} + \\ + 2(n+4k-6) \cdot \frac{n(n+2) \dots (n+4k-8)}{1 \cdot 3 \dots (2k-3)}.$$

Teda

$$c_{k,n} = c_{k,n-2} + 2(n+4k-6) \cdot c_{k-1,n}. \quad (3)$$

Tvrdenie úlohy dokážeme matematickou indukciou podľa súčtu $k+n$.

Pre $k=n=1$ je

$$c_{1,1} = \frac{1}{1} = 1$$

číslo celé.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre každé prirodzené číslo p a nepárne prirodzené číslo q také, že $p+q < m$. Ukážeme, že platí aj pre čísla k, n (n nepárne) také, že $k+n = m$.

Keďže $k+n-2 = m-2 < m$, $k-1+n = m-1 < m$, tak podľa indukčného predpokladu čísla $c_{k,n-2}$, $c_{k-1,n}$ sú celé. Podľa rovnosti (3) aj číslo $c_{k,n}$ je celé.

A — II — 3b

Zostrojte štvoruholník $ABCD$, ktorého obsah je väčší ako $20,5 \text{ cm}^2$, pričom súčet veľkosti strán AB , BC , CD je 12 cm .

Riešenie. Zostrojíme štvoruholník so stranami

$$|AB| = |BC| = |CD| = 4 \text{ cm},$$

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ADC = 60^\circ,$$

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = 120^\circ.$$

Potom $|AB| + |BC| + |CD| = 12$ cm. Ľahko vidieť, že $|AD| = 8$ cm. Pre jeho obsah platí

$$P = \frac{8 + 4}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 12\sqrt{3} > 12 \cdot 1,73 = \\ = 20,76 > 20,5 \text{ cm}^3.$$

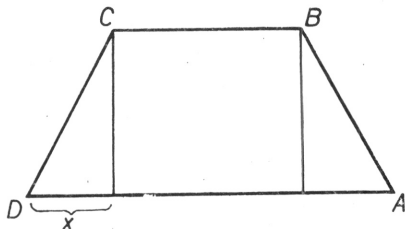
Je to štvoruholník požadovaných vlastností.

V úlohe sa požadovalo zostrojiť takýto štvoruholník a my sme ho zostrojili. Vzniká prirodzená otázka, ako sme vymysleli uvedenú konštrukciu. Na to sa úloha nepýta.

Jedna z možných (nepresných) úvah, ako takúto konštrukciu nájsť, je táto.

Z dôvodov symetrie sa zdá, že štvoruholníkom s najväčším obsahom, pre ktorý $|AB| + |BC| + |CD| = 12$ cm, by mal byť rovnoramenný lichobežník so stranami $|AB| = |BC| = |CD| = 4$ cm. Strana AD bude mať dĺžku $4 + 2x$ (pozri obr. 23). Jeho obsah P bude rovný

$$P(x) = \frac{4 + (4 + 2x)}{2} \cdot \sqrt{16 - x^2}.$$



Obr. 23

Chceme nájsť hodnotu x , pre ktorú má P maximum. Jednoduchšie bude hľadať maximum funkcie

$$f(x) = (P(x))^2.$$

Totíž

$$f'(x) = ((4 + x)^2 \cdot (16 - x^2))' = 128 - 24x^2 - 4x^3$$

a zrejme $f'(2) = 0$.

Teda štvrtá strana hľadaného štvoruholníka by mala mať veľkosť $|AD| = 8$ cm.

Skúškou zistíme, že tento štvoruholník má skutočne obsah $12\sqrt{3} > 20,5$.

Všimnime si, že sme nedokázali, že je to štvoruholník s maximálnym plošným obsahom.

KATEGORIE B

B — II — 1

Dané sú reálne čísla a , b . Nájdite všetky riešenia rovnice

$$2x^2 - (a^2 - b^2) \operatorname{sign} x = a^2 + b^2. \quad (1)$$

(Funkcia $x \rightarrow \operatorname{sign} x$ je definovaná na množine $\mathbf{R}$ všetkých reálnych čísel takto: ak $x > 0$, $\operatorname{sign} x = 1$; ak $x = 0$, $\operatorname{sign} x = 0$; ak $x < 0$, $\operatorname{sign} x = -1$.)

Řešení. 1. Nechť $a^2 + b^2 = 0$, tj. $a = b = 0$. Potom rovnice (1) má tvar

$$2x^2 = 0,$$

a tedy jediné řešení $x = 0$.

2. Nechť $a^2 + b^2 > 0$. Řešením pak zřejmě není $x = 0$.

a) Hledejme řešení v oboru $(-\infty, 0)$. Pak rovnice (1) nabývá tvaru

$$2x^2 = 2b^2.$$

V oboru $(-\infty, 0)$ má tato rovnice řešení, právě když $b \neq 0$. Tímto řešením je

$$x = -|b|.$$

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že $-|b|$ je pro $b \neq 0$ řešením rovnice (1).

b) Hledejme řešení v oboru $(0, \infty)$. Pak rovnice (1) nabývá tvaru

$$2x^2 = 2a^2.$$

V oboru $(0, \infty)$ má tato rovnice řešení, právě když $a \neq 0$. Tímto řešením je

$$x = |a|.$$

Zkouškou se lze přesvědčit, že pro $a \neq 0$ je $|a|$ řešením rovnice (1).

Řešení rovnice (1) je zachyceno tabulkou:

a	b	x
0	0	0
0	$\neq 0$	$- b $
$\neq 0$	0	$ a $
$\neq 0$	$\neq 0$	$ a , - b $

Nechť trojúhelník $\mathbf{T}_1$ s nejmenší výškou délky v_1 a obsahem P_1 je obsažen v trojúhelníku $\mathbf{T}_2$ s nejmenší výškou délky v_2 a obsahem P_2 . Potom platí

$$P_1 \leq \frac{v_1}{v_2} P_2.$$

Dokažte.

Řešení. Označme d_1 nejdelší stranu trojúhelníka $\mathbf{T}_1$, d_2 nejdelší stranu trojúhelníka $\mathbf{T}_2$. Protože $\mathbf{T}_1$ je obsažen v $\mathbf{T}_2$, platí podle výsledku úlohy **B — P — 3**, že $d_1 \leq d_2$. Avšak

$$d_1 = \frac{2P_1}{v_1}, \quad d_2 = \frac{2P_2}{v_2}.$$

Proto

$$\frac{2P_1}{v_1} \leq \frac{2P_2}{v_2}$$

neboli

$$P_1 \leq \frac{v_1}{v_2} P_2.$$

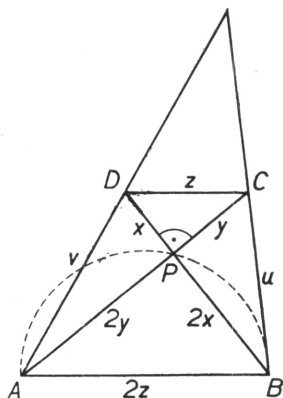
Lichoběžník $ABCD$ má tyto vlastnosti:

1. Pro jeho základny platí $|AB| = 2 |CD|$;
2. Jeho úhlopříčky jsou navzájem kolmé.

Vypočtěte délky základů lichoběžníka pomocí délek

ramen $u = |BC|$, $v = |AD|$. Dále dokažte, že platí $2u > v > u/2$.

Řešení. Délky označíme podle obr. 24. Protože $|AB| = 2|CD| = 2z$, je také $|BP| = 2|DP| = 2x$, $|AP| =$



Obr. 24

$= 2|CP| = 2y$ (průsečík úhlopříček AC , BD je označen P). Podle Pythagorovy věty je

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

$$4x^2 + y^2 = u^2,$$

$$x^2 + 4y^2 = v^2. \quad (1)$$

Sečtením druhých dvou rovnic v (1) dostaneme vzhledem k první rovnici v (1)

$$5z^2 = u^2 + v^2. \quad (2)$$

Pro délky základů tedy platí

$$|AB| = 2 \cdot |CD| = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}(u^2 + v^2)}.$$

Vedme bodem C přímkou rovnoběžnou s AD , její průsečík s AB označme E . V trojúhelníku EBC je $|EB| = z$, $|BC| = u$, $|CE| = v$, a je proto $v < u + z$. Z pravouhlých trojúhelníků PCD a PCB je vidět, že $z < u$, což také plyne z rovnic $x^2 + y^2 = z^2$, $4x^2 + y^2 = u^2$ a nerovnosti $x \neq 0$. Sečtením nerovností $v < u + z$, $z < u$ dostaneme $v < 2u$; obdobně se dokáže, že $u < 2v$.

B — II — 3b

Nech $p > q > 0$ sú dané reálne čísla. Potom existuje trojuholník ABC , ktorého strany majú dĺžky

$$a = \sqrt{pq}, \quad b = \frac{1}{2}(p - q), \quad c = \frac{1}{2}(p + q);$$

dokážte. Vyšetrite, pri ktorých hodnotách p, q bude $\triangle ABC$

- a) pravouhlý;
- b) rovnoramenný.

Řešení. Existence $\triangle ABC$ bude dokázána v časti a).

a) Pro každá dvě reálná čísla p, q , jež splňují podmínky $p > q > 0$, platí

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0$$

a dále

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= pq + \frac{1}{4}(p - q)^2 = \\ &= \frac{1}{4}(p^2 + 2pq + q^2) = c^2. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $a + c > b$, $b + c > a$ a $a + b > c$. Trojúhelník ABC tedy pro každá dvě čísla $p > q > 0$ existuje a je vždy pravoúhlý.

b) Z toho, co jsme dokázali v a, vyplývá, že $\triangle ABC$ může být rovnoramenný tehdy a jen tehdy, platí-li $a = b$ neboli

$$\sqrt{pq} = \frac{1}{2}(p - q) ;$$

odtud postupně dostaneme

$$4pq = p^2 - 2pq + q^2,$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 6\frac{p}{q} + 1 = 0 ,$$

takže pro $r = p/q$ je $r_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Podmínce $p/q > 1$ vyhovuje však jen kořen $p/q = 3 + 2\sqrt{2}$ neboli

$$p = (3 + 2\sqrt{2})q. \quad (1)$$

Nechť pro čísla $p, q > 0$ platí (1). Potom

$$a = \sqrt{(3 + 2\sqrt{2})q^2} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 \cdot q} = (1 + \sqrt{2}) \cdot q ,$$

$$b = \frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2} - 1) \cdot q = (1 + \sqrt{2})q$$

a trojúhelník ABC se stranami a, b, c je rovnoramenný.

C — II — 1

Kolika způsoby je možné vyjádřit číslo 1978 jako součet nejméně dvou za sebou následujících přirozených čísel? Najděte všechny takové rozklady. Návod: Při řešení můžete použít vzorce

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k + 1).$$

Řešení. Nechť je možné číslo 1978 psát jako součet

$$(m + 1) + (m + 2) + \dots + (m + k),$$

kde $m \geq 0$, $k \geq 2$ jsou celá čísla. Pak je

$$1978 = \frac{1}{2}(2m + k + 1) \cdot k,$$

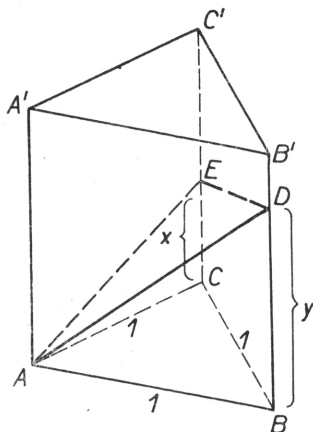
odkud

$$(2m + k + 1) \cdot k = 2^2 \cdot 23 \cdot 43.$$

Zřejmě platí $k < k + 1 < 2m + k + 1$. Je-li k sudé, je zřejmě číslo $2m + k + 1$ liché a obráceně. Číslo $k \geq 2$ může proto nabýt jen některou z hodnot 4, 23, 43. Číslo 1978 je tedy možné vyjádřit jako součet nejméně dvou za sebou následujících přirozených čísel právě těmito třemi způsoby:

1. $k = 4$, $m = 492$, $1978 = 493 + 494 + 495 + 496$;
2. $k = 23$, $m = 74$, $1978 = 75 + 76 + \dots + 97$;
3. $k = 43$, $m = 24$, $1978 = 25 + 26 + \dots + 67$.

Podstavou trojbokého kolmého hranolu je rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky 1. Vrcholem A prochází rovina, která protíná plášť hranolu v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku. Vypočtete obsah řezu.



Obr. 25

Řešení: Vrcholy trojúhelníka řezu, které leží na bočních hranách procházejících vrcholy B a C , označme D a E (obr. 25). Velikosti úseček BD a CE označme x a y . Potom podle Pythagorovy věty platí

$$|AE|^2 = 1 + x^2, \quad |AD|^2 = 1 + y^2,$$

$$|DE|^2 = 1 + (x - y)^2.$$

Pomocí těchto rovností lze dokázat, že úhel $\sphericalangle DAE$ není pravý. Kdyby byl totiž pravý, pak by podle Pythagorovy věty pro trojúhelník AED muselo platit

$$|AE|^2 + |AD|^2 = |DE|^2,$$

tj.

$$2 + x^2 + y^2 = 1 + (x - y)^2,$$

odkud by plynulo $1 = -2xy$, což by byl spor s tím, že x, y jsou nezáporná čísla. V trojúhelníku AED je tedy pravý buď úhel $\sphericalangle AED$, nebo $\sphericalangle ADE$.

Předpokládejme, že úhel $\sphericalangle AED$ je pravý, v opačném případě bychom jen zaměnili označení vrcholů hranolu. Podle předpokladu je trojúhelník ADE rovnoramenný, tj. $|AE| = |DE|$. Je tudíž $1 + x^2 = 1 + (x - y)^2$, tedy $y(y - 2x) = 0$, odkud plyne $y = 0$ nebo $y = 2x$. Trojúhelník AED je pravoúhlý a rovnoramenný, musí tedy platit

$$2 \cdot |AE|^2 = |AD|^2,$$

tj. $2 + 2x^2 = 1 + y^2$ neboli $1 + 2x^2 = y^2$. Odtud plyne, že je y nenulové. Musí proto platit $y = 2x$. Dosazením do předcházející rovnice dostaneme $2x^2 = 1$. Nyní již můžeme vypočítat obsah P trojúhelníka AED . Je $P = \frac{1}{2}|AE| \cdot |DE| = \frac{1}{2}|AE|^2 = \frac{1}{2}(1 + x^2) = \frac{3}{4}$.

C — II — 3a

Určete poslední dvojčíslí součtu

$$s = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + 1000^4.$$

Řešení: Je zřejmé, že poslední dvojčíslí součtu s

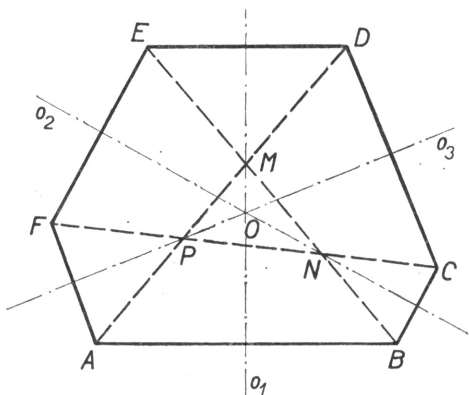
závisí jen na posledních dvojčíslích čísel $1^4, 2^4, \dots, 1000^4$. Poslední dvojčíslí každého čísla tvaru n^4 , kde n je přirozené číslo, závisí jen na posledním dvojčíslí čísla n . Označme $s_1 = 1^4 + 2^4 + \dots + 100^4$. Z výše uvedeného plyne, že číslo s má stejné poslední dvojčíslí jako číslo $10s_1$. Poslední číslice čísla s je tudíž 0 a předposlední číslice čísla s je rovna poslední číslici čísla s_1 . Tato číslice ale závisí pouze na posledních číslicích sčítanců $1^4, 2^4, \dots, 100^4$, a protože poslední číslice čísla n^4 závisí jen na poslední číslici čísla n , dostaneme analogicky jako výše, že poslední číslice čísla s_1 je rovna poslední číslici v čísle $10s_2$, kde $s_2 = 1^4 + 2^4 + \dots + 10^4$. Je tedy poslední dvojčíslí čísla s rovno 00, číslo s je dělitelné stem.

C — II — 3b

Je dán konvexní šestiúhelník $ABCDEF$, jehož úhlopříčky AD, BE, CF jsou stejně dlouhé a jehož každé dvě protější strany jsou rovnoběžné a nestejně dlouhé. Potom tomuto šestiúhelníku lze opsat kružnici. Dokažte.

Řešení. Danému šestiúhelníku (obr. 26) bude možno opsat kružnici, právě když osy všech jeho stran budou mít společný bod. Osy protějších stran splývají. Toto tvrzení dokážeme například pro strany AB a DE . Podle předpokladu je $AB \parallel DE$, $AB \neq DE$, takže čtyřúhelník $ABDE$ je lichoběžník. Protože $|AD| = |BE|$, je $ABDE$ rovnoramenný lichoběžník. Odtud již plyne, že osa o_1 strany AB je zároveň osou strany ED . Obdobně je osa o_2 strany BC zároveň osou strany EF

a osa o_3 strany CD zároveň osou strany FA . Čtyřúhelník $ABDE$ je rovnoramenný lichoběžník a proto je osa o_1 zároveň osou úhlu $\sphericalangle AMB$, kde M je průsečík úhlopříček AD a BE . Obdobně se dokáže, že o_2 je osou úhlu $\sphericalangle ENF$, kde N je průsečík úhlopříček BE a CF a že o_3



Obr. 26

je osou úhlu $\sphericalangle CPD$, kde P je průsečík úhlopříček AD a CF . Body M , N , P jsou navzájem různé. Kdyby například splývaly body M a N , pak by s nimi splýnul i bod P a tímto bodem by procházely všechny tři osy o_1 , o_2 , o_3 a platilo by $|AM| = |BM| = |CM| = |DM| = |EM|$. Pak by rovnoramenné trojúhelníky ABM , DEM byly shodné, bylo by tudíž $|AB| = |DE|$, což by bylo ve sporu s předpokladem. Je tedy $M \neq N \neq P \neq M$. Body M , N , P jsou proto vrcholy trojúhelníka a přímky o_1 , o_2 , o_3 jsou osy úhlů tohoto

trojúhelníka a procházejí proto společným bodem O . Danému šestiúhelníku lze opsat kružnici. Tato kružnice má střed v bodě O a poloměr $|OA|$.

KATEGORIE Z

Z — II — 1

Nákladní vlak dlouhý 150 m jede průměrnou rychlostí 30 km/h. Předjíždí jej rychlík dlouhý 50 m, který jede průměrnou rychlostí 75 km/h. V okamžiku, kdy lokomotiva rychlíku míjí lokomotivu nákladního vlaku, sníží náhle rychlík svou rychlost. Nakonec rychlík předjede nákladní vlak, a to za 1 minutu. Jaká byla snížená průměrná rychlost rychlíku?

Poznámka. Dobou předjíždění se rozumí čas od okamžiku, kdy lokomotiva rychlíku dostihne poslední vagón nákladního vlaku, do okamžiku, kdy poslední vagón rychlíku mine lokomotivu nákladního vlaku.

Řešení. Nejprve vyjádříme dané rychlosti v m/min. Rychlost nákladního vlaku je $\frac{30 \cdot 1000}{60} = 500$ (m/min). Původní rychlost rychlíku je $\frac{75 \cdot 1000}{60} = 1250$ (m/min).

Představíme si, že předjíždění sleduje pozorovatel, který jede v nákladním vlaku. Rychlík vzhledem k němu jede nejdříve průměrnou rychlostí 1250 — 500 = 750 (m/min). Doba předjíždění se skládá ze dvou složek:

z doby t_1 , po kterou míjí lokomotiva rychlíku nákladní vlak;

z doby t_2 , po kterou rychlík míjí lokomotivu nákladního vlaku.

Zřejmě je podle textu úlohy:

$$t_1 + t_2 = 1. \quad (1)$$

Dále je (t_1, t_2 v minutách)

$$t_1 = \frac{150}{750} = \frac{1}{5}. \quad (2)$$

Označíme x sníženou průměrnou rychlost rychlíku v m/min; pak je

$$t_2 = \frac{50}{x - 500}. \quad (3)$$

Spojením (1), (2), (3) je

$$\frac{50}{x - 500} = \frac{4}{5}.$$

Odtud

$$x - 500 = \frac{250}{4} = 62,5,$$

$$x = 562,5 \text{ (m/min)}.$$

Zmenšená průměrná rychlost rychlíku je v km/h 33,75, neboť

$$60x = 33\,750 \text{ (m/h)}.$$

Zkouška. Při snížené průměrné rychlosti míjel rychlík lokomotivu nákladního vlaku. K tomu byla třeba doba $\frac{50}{562,5 - 500} = \frac{50}{62,5} = \frac{4}{5}$ minuty. Celé předjíždění trvalo 1 minutu, tj. lokomotiva rychlíku míjela nákladní vlak $\frac{1}{5}$ minuty.

Odtud plyne, že délka nákladního vlaku je

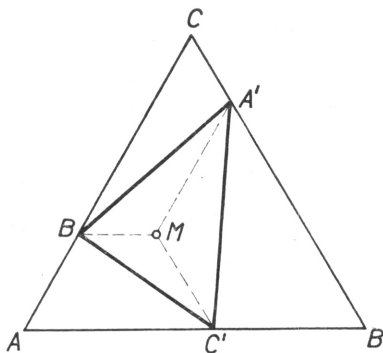
$$\frac{1}{5} \cdot (1250 - 500) = \frac{1}{5} \cdot 750 = 150 \text{ metrů,}$$

což odpovídá textu úlohy.

Z — II — 2

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a bod M jeho vnitřku. Na stranách AB , BC , CA sestrojíme po řadě body C' , A' , B' tak, aby bylo $MC' \parallel BC$, $MA' \parallel AC$ a $MB' \parallel AB$. Dokažte, že obvod trojúhelníka $A'B'C'$ je roven $|MA| + |MB| + |MC|$.

Řešení. Na obr. 27 jsou sestrojeny body A' , B' , C' . Protože je $\sphericalangle MB'C = \sphericalangle B'CA' = 60^\circ$, vyměňuje souměrnost podle osy o úsečky $B'C$ polopřímku $B'M$ s polopřímku CA' . Protože je $A'M \parallel B'C \perp o$, vyměňuje souměrnost body A' , M , a tedy i úsečky $A'B'$,



Obr. 27

CM ; proto je $|A'B'| = |CM|$. Sečtením tří takových rovností dostaneme dokazovaný vztah:

$$|A'B'| + |B'C'| + |C'A'| = |AM| + |BM| + |CM|.$$

Z — II — 3

Napíšeme za sebou bez mezer druhé mocniny všech přirozených čísel od 1 do 1000. Dostaneme tak číslo 14 916 Kolik cifer má toto číslo?

Řešení. Výpočtem nebo v tabulkách druhých mocnin zjistíme, že druhá mocnina přirozených čísel

1 až 3	je číslo jednociferné,
4 až 9	je číslo dvojciferné,
10 až 31	trojciferné,
32 až 99	čtyřciferné,
100 až 316	pěticiferné,
317 až 999	šesticiferné

a že číslo 1000^2 je sedmiciferné. Odtud plyne, že počet všech číslic čísla 14916... je

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 22 \cdot 3 + 68 \cdot 4 + 217 \cdot 5 + 683 \cdot 6 + 7 &= \\ = 3 + 12 + 66 + 272 + 1085 + 4098 + 7, & \\ \text{tj. } 5543. & \end{aligned}$$

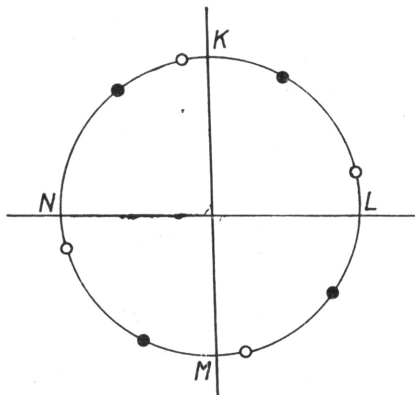
Z — II — 4

Osmiúhelník vepsaný dané kružnici má čtyři vrcholy červené a čtyři modré; přitom žádné tři sousední vrcholy

nejsou téže barvy. Zjistěte, zda lze vždy sestavit takové dvě různoběžné přímky, aby uvnitř každého úhlu jimi určeného ležel jeden červený a jeden modrý vrchol.

Řešení. Rozlišíme dva případy.

a) Žádné dva sousední vrcholy nemají tutéž barvu;



Obr. 28

b) lze najít aspoň jednu dvojici sousedních vrcholů téže barvy.

V případě a) se barvy vrcholů střídají. Na kružnici zvolíme čtyři body K, L, M, N tak, aby každý z nich odděloval dvě dvojice červená—modrá, a spojíme je přímkami ob jeden (obr. 28).

V případě b) necht' jsou např. body A, B červené; pak jsou vrcholy C, H modré. Přehled barvy vrcholů si zapíšeme „tabulkou“

V. Soutěžní úlohy III. kola kategorie A

A — III — 1

Nech n je prirodzené číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ kladné reálné čísla. Dokážte, že platí

$$\begin{aligned} \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)} &\geq \\ &\geq \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \dots + \sqrt{a_n b_n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ďalej dokážte, že rovnosť nastane vtedy a len vtedy, keď

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Riešenie. Dôkaz urobíme matematickou indukciou. Pre $n = 1$ tvrdenie triviálne platí.

Pre $n = 2$ z nerovnosti

$$(\sqrt{a_1 b_2} - \sqrt{a_2 b_1})^2 \geq 0 \quad (2)$$

vyplýva

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 \geq 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2}$$

a tiež

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 &\geq \\ &\geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2}, \end{aligned}$$

t.j.

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \geq (\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2})^2.$$

Odtiaľ už vyplýva nerovnosť

$$\sqrt{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)} \geq \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2}. \quad (3)$$

Naviac, v nerovnosti (2) nastane rovnosť jedine v prípade $\sqrt{a_1 b_2} = \sqrt{a_2 b_1}$, t.j. keď

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Predpokladajme teraz, že nerovnosť (1) platí pre n . Potom na základe už dokázanej nerovnosti (3) dostaneme

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a_1 + \dots + a_{n+1})(b_1 + \dots + b_{n+1})} = \\ &= \sqrt{[(a_1 + \dots + a_n) + a_{n+1}] \cdot [(b_1 + \dots + b_n) + b_{n+1}]} \geq \\ & \geq \sqrt{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)} + \sqrt{a_{n+1} b_{n+1}}. \end{aligned}$$

Ak využijeme nerovnosť (1) pre n , tak odtiaľ máme

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a_1 + \dots + a_{n+1})(b_1 + \dots + b_{n+1})} \geq \\ & \geq \sqrt{a_1 b_1} + \dots + \sqrt{a_{n+1} b_{n+1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Rovnosť nastane vtedy a len vtedy, keď

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n},$$

a súčasne (podľa indukčného predpokladu)

$$\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Najděte (alespoň jednu) dvojici čísel k a q tak, aby pro všechna x z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ platilo

$$|\sqrt{1-x^2} - kx - q| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1). \quad (5)$$

Řešení: Má-li nerovnost (5) platit pro všechna x z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, musí platit i pro $x = 0$ a $x = 1$:

$$|1 - q| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1), \quad (6)$$

$$|k + q| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1). \quad (7)$$

Dále pak

$$|k + 1| \leq |1 - q| + |k + q| \leq \sqrt{2} - 1 < 1,$$

a tedy nutně $k < 0$.

Pro

$$x = \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$$

z (5) dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{1 - \frac{k^2}{1+k^2}} - \frac{k \cdot |k|}{\sqrt{1+k^2}} - q \right| &= \\ &= |\sqrt{1+k^2} - q| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Podle (6) musí platit

$$|\sqrt{1+k^2} - 1| \leq |\sqrt{1+k^2} - q| + |q - 1| \leq \sqrt{2} - 1$$

a tedy

$$\sqrt{1+k^2} \leq \sqrt{2},$$

$$1 + k^2 \leq 2,$$

$$|k| \leq 1.$$

Podle (7) a (8) dostaneme

$$|\sqrt{1+k^2} - |k|| \leq \sqrt{2} - 1.$$

Umocněním pak

$$k^2 + 1 \leq k^2 + 2|k|(\sqrt{2} - 1) + 2 + 1 - 2\sqrt{2},$$

a tedy

$$|k| \geq 1.$$

Tedy nutně musí být $k = -1$.

Po dosažení za $k = -1$ do (6) a (8) dostaneme

$$|1 - q| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1),$$

$$|\sqrt{2} - q| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

Odtud vyplývá, že

$$q = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

Dokážeme, že $k = -1$, $q = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$ skutečně vyhovuje úloze, tj. že platí (5).

Pro každé x z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ platí

$$0 \leq \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}(2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1),$$

dále

$$1 - x^2 \leq x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$$

$$\sqrt{1 - x^2} \leq \sqrt{2} - x$$

$$\sqrt{1 - x^2} + x - 1 \leq \sqrt{2} - 1,$$

a tedy

$$\sqrt{1-x^2} + x - 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1). \quad (9)$$

Zároveň

$$\sqrt{1-x} \leq \sqrt{1+x},$$

$$1-x \leq \sqrt{1-x^2},$$

$$0 \leq \sqrt{1-x^2} + x - 1,$$

a tedy

$$\sqrt{1-x^2} + x - 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \geq -\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1). \quad (10)$$

Z nerovností (9) a (10) vyplývá (1), jak jsme měli dokázat.

Řešil *Jan Kratochvíl*, 4.a, gymnázium Pardubice.

A — III — 3

Nech α, β, γ sú uhly trojuholníka. Skúmame sústavu rovníc

$$x \cos \beta + \frac{1}{z} \cos \alpha = 1,$$

$$y \cos \gamma + \frac{1}{x} \cos \beta = 1, \quad (11)$$

$$z \cos \alpha + \frac{1}{y} \cos \gamma = 1.$$

a) Ukážte, že $x = \sin \alpha / \sin \gamma$, $y = \sin \beta / \sin \alpha$, $z = \sin \gamma / \sin \beta$ je riešením sústavy (11).

b) Nájdite všetky riešenia sústavy (11).

Riešenie.

a) Platí

$$\begin{aligned}\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \cos \alpha &= \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \gamma} = \\ &= \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (180^\circ - \alpha - \beta)} = 1.\end{aligned}$$

Podobne sa ukáže, že dané hodnoty x , y , z vyhovujú aj druhej a tretej rovnici sústavy.

b) Rozlíšime dva prípady:

1. Daný trojuholník je pravouhlý. Môžeme predpokladať $\gamma = 90^\circ$ (prípady $\alpha = 90^\circ$ a $\beta = 90^\circ$ sú rovnaké). Sústava (11) má potom tvar

$$x \cos \beta + \frac{1}{z} \cos \alpha = 1$$

$$\frac{1}{x} \cos \beta = 1$$

$$z \cos \alpha = 1$$

a má riešenie

$$x = \cos \beta = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad y \text{ ľubovoľné}$$

a

$$z = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

2. Trojuholník nie je pravouhlý, t. j.

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \neq 0.$$

Pretože musí platiť $zxy \neq 0$, musí byť tiež $z \neq \cos \alpha$,

$z \neq \frac{1}{\cos \alpha}$. Z prvej rovnice potom vyplýva

$$x = \frac{z - \cos \alpha}{z \cos \beta}$$

a z tretej rovnice

$$y = \frac{\cos \gamma}{1 - z \cos \alpha}.$$

Dosadením do druhej rovnice dostaneme rovnicu pre z :

$$\frac{\cos^2 \gamma}{1 - z \cos \alpha} + \frac{z \cos^2 \beta}{z - \cos \alpha} = 1.$$

Po úprave máme kvadratickú rovnicu

$$\begin{aligned} z^2 \cos \alpha \sin^2 \beta + z (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - \\ - \cos^2 \alpha - 1) + \cos \alpha \sin^2 \gamma = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

s diskriminantom

$$\begin{aligned} D = (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha - 1)^2 - \\ - 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma. \end{aligned}$$

Pretože je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, výpočtom zistíme, že platí

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha - 1 = \\ = \cos^2 \beta + \cos^2 (\alpha + \beta) - \cos^2 \alpha - 1 = \\ = -2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že $D = 0$.

Teda kvadratická rovnice (12) má jediný koreň.

Dosadením zistíme, že je to $z = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$.

Podľa časti a) má sústava rovníc (11) v tomto prípade jediné riešenie.

A — III — 4

Existuje čtyřstěn $ABCD$, u něhož součet délek hran AB , BC , CD a AD je 12 cm a jehož objem je větší nebo roven $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$?

Řešení. Nejprve dokážeme pomocné tvrzení: má-li čtyřstěn $ABCD$ součet délek hran $|AB| + |BC| + |CD| + |AD|$ roven 12 a zároveň největší možný objem, potom $|AB| = |BC| = |CD| = |AD|$. Důkaz provedeme sporem.

a) Nechť existují dvě různé sousední hrany z dané čtveřice hran. Díky symetrii můžeme předpokládat $|AD| \neq |DC|$.

Všimněme si bodů D' , D'' v rovině ACD , které mají stejnou vzdálenost od bodů A , C a pro něž platí

$$\begin{aligned} |AD'| + |CD'| &= |AD''| + |CD''| = \\ &= |AD| + |CD| = 12 - |AB| - |BC|. \end{aligned}$$

Body D' , D'' mají největší možnou vzdálenost od roviny ABC , a tedy čtyřstěn daných vlastností s různými sousedními hranami nemá maximální objem, což je spor.

b) Nechť existují dvě různé protější hrany z dané čtveřice, např. $|AB| \neq |CD|$. Podle a) platí $|AD| = |CD|$.

a odtud vyplývá $|AB| \neq |AD|$, což je opět spor s a).

Tím je pomocné tvrzení dokázáno.

Pokud roviny ABC a ACD nejsou na sebe kolmé, tak otočením jedné z nich okolo přímky AC do polohy vzájemně kolmé získáme čtyřstěn daných vlastností s větším objemem. Tedy čtyřstěn s maximálním objemem má roviny ABC a ACD na sebe kolmé.

Nechť S je střed hrany AC , $\alpha = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CAB$. Potom pro objem V čtyřstěnu platí

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{|AC| \cdot |BS|}{2} \cdot |DS| = \frac{1}{6} |AC| \cdot |BS| \cdot |DS| = \\ &= \frac{1}{6} (2 \cos \alpha \cdot |AB|) \cdot (\sin \alpha \cdot |AB|) \cdot (\sin \alpha \cdot |AB|) = \\ &= \frac{1}{3} \cos \alpha \sin^2 \alpha \cdot |AB|^3. \end{aligned}$$

Protože $|AB| = 3$, hledejme maximum funkce

$$f(\alpha) = 9 \cos \alpha \sin^2 \alpha = 9 (\cos \alpha - \cos^3 \alpha)$$

na intervalu $(0, \pi/2)$.

Derivace

$$f'(\alpha) = 9 \sin \alpha (3 \cos^2 \alpha - 1)$$

je rovna nule pro $\alpha_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Objem je roven

$$V = 9 (\cos \alpha_0 - \cos^3 \alpha_0) = 9 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) = 2\sqrt{3}.$$

Závěr. Požadovaný čtyřstěn skutečně existuje. Jedním z nich je i čtyřstěn $ABCD$, kde $|AB| = |BC| =$

$= |CD| = |AD| = 12 \text{ cm}$, roviny ABC a ADC jsou na sebe kolmé a $\sphericalangle CAD = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

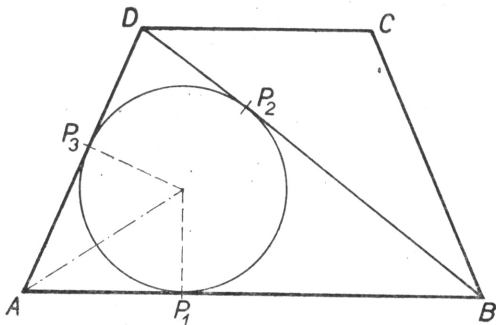
Řešil *Otto Ritter*, 3.d, gymnázium W. Piecka, Praha.

A — III — 5

Daný je rovnoramenný lichobežník $ABCD$. Nech A' , B' , C' , D' sú postupne stredy kružníc vpísaných trojuholníkom BCD , CAD , ABD , ABC . Dokážte, že A' , B' , C' , D' sú vrcholy pravouhlého rovnobežníka.

Riešenie. Zo shodnosti trojuholníkov ABC a ABD vyplýva, že polomery vpísaných kružníc sú rovnaké a teda priamka $C'D'$ je rovnobežná so základňou AB . Podobne je aj $A'B'$ rovnobežná so základňou.

Označíme postupne P_1 , P_2 , P_3 body dotyku vpísanej kružnice so stranami AB , BD , AD trojuholníku ABD . Potom platí (pozri obr. 29)



Obr. 29

$$|BD| = |BP_2| + |P_2D| = |BP_1| + |DP_3| = \\ = |AB| - |AP_1| + |AD| - |AP_3|.$$

Keďže $|AP_1| = |AP_3|$, tak odtiaľ vyplýva

$$|AP_1| = \frac{1}{2} (|AB| + |AD| - |BD|).$$

Ak Q je bod dotyku kružnice vpísanej do trojuholníka ACD so stranou DC , tak rovnakým postupom zistíme, že

$$|DQ| = \frac{1}{2} (|CD| + |AD| - |AC|).$$

Keďže lichobežník je rovnoramenný, tak $|AC| = |BD|$. Odtiaľ vyplýva, že priamka $P_1Q = B'C'$ je kolmá na základňu lichobežníka.

Podobne sa ukáže, že aj $A'D'$ je kolmá na základňu. Z dokázaného už vyplýva tvrdenie úlohy.

A — III — 6

Dokažte, že číslo

$$p_n = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 2$$

je prirodzené pro každé $n = 1, 2, 3, \dots$. Dále dokažte, že pro každé liché n je $p_n = r^2$ a pro každé sudé n je $p_n = 5s^2$, kde r, s jsou vhodná přirozená čísla.

Řešení. Uvažujme o posloupnosti

$$q_1, q_2, q_3, q_4, \dots,$$

kde

$$q_n = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^n - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n.$$

Členy posloupnosti jsou kladná čísla, přičemž

$$q_1 = 1, \quad q_2 = \sqrt{5}.$$

Snadno se dosazením přesvědčíme, že pro každé přirozené číslo n platí

$$q_{n+2} = q_{n+1} \sqrt{5} - q_n.$$

Užitím tohoto vztahu dokážeme, že pro $k = 1, 2, 3, \dots$ je q_{2k-1} celé číslo a rovněž $\frac{1}{\sqrt{5}} q_{2k}$ je celé. Důkaz podáme matematickou indukcí.

Pro $k = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť tedy

$$\frac{1}{\sqrt{5}} q_{2k}, \quad q_{2k-1}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} q_{2k-2}, \quad q_{2k-3}, \quad \dots, \quad q_1$$

jsou celá čísla. Pak

$$q_{2k+1} = q_{2k} \sqrt{5} - q_{2k-1} = 5 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} q_{2k} \right) - q_{2k-1}$$

je číslo celé a

$$\frac{1}{\sqrt{5}} q_{2k+2} = q_{2k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} q_{2k}$$

je číslo celé. Tím je důkaz matematickou indukcí hotov.

Pro $k = 1, 2, 3, \dots$ tedy máme

$$q_{2k-1} = r, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} q_{2k} = s,$$

kde r, s jsou čísla celá kladná. Odtud plyne

$$q_{2k-1}^2 = r^2, \quad q_{2k}^2 = 5s^2$$

pro každé $k = 1, 2, 3, \dots$. Protože dále platí

$$\begin{aligned} q_n^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} + \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - 2 = \\ &= \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 2 = p_n \end{aligned}$$

pro každé $n = 1, 2, 3, \dots$, je tím celé tvrzení dokázáno.

Řešil *Ilja Turek*, student 4.c gymnázia v Hradci Králové.

Poznámka: Mnozí řešitelé si všimli, že v řešení úlohy A — III — 6 lze využít tzv. Fibonacciho čísel. Tato čísla F_n jsou definována předpisem

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1$$

a rekurentním vztahem

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

platným pro každé přirozené číslo n . Fibonacciho čísla tvoří tedy posloupnost

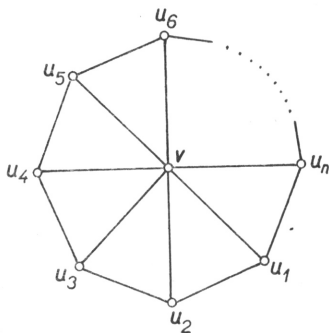
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Dá se odvodit vzorec pro n -tý člen

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

jak se o tom může čtenář poučit např. v knížce F. Zítka

Autoři této brožury poznamenávají ještě k úloze A — III — 6, že číslo p_n má pro $n \geq 3$ poměrně jednoduchý kombinatorický význam. V teorii grafů se často



Obr. 30

vyskytuje útvar zvaný kolo (obr. 30). Ukazuje se, že počet koster tohoto kola je vyjádřen právě číslem p_n (viz o tom podrobněji v publikaci J. Sedláčka *Úvod do teorie grafů***).

*) Škola mladých matematiků, sv. 29, Mladá fronta, Praha 1972.

**) Cesta k vědění, sv. 25, nakladatelství Academia, Praha 1977, cvičení II. 7,6

VI. Texty soutěžních úloh krajských kol kategorie Z

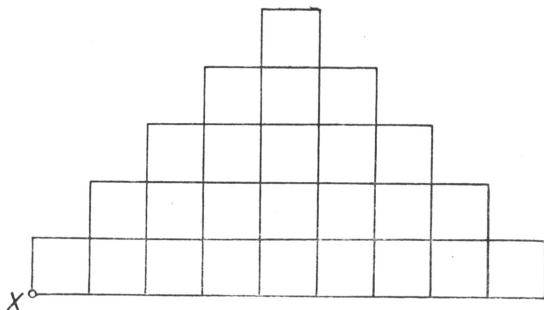
Téměř všechny krajské výbory MO pořádají ve svých krajích třetí kola soutěže pro vybrané účastníky kategorie Z. ÚV MO nemá úplnou evidenci těchto akcí, zejména pokud jde o soutěžní úlohy, jejich hodnocení a výsledky. Uveřejňujeme proto texty úloh z některých krajů, které mají jednak dokumentární cenu, jednak jsou přínosem k úlohovému materiálu vhodnému pro kroužky olympioniků, mladých matematiků apod. *) Statistické přehledy, které jsou neúplné, do ročníkové brožury nezařadujeme.

Středočeský kraj

1. Mnohoúhelník, který se skládá ze 25 čtverců o straně 7 mm, rozdělte přímkou procházející bodem X na dva obrazce o stejném obsahu (obr. 31).

*) Texty úloh jsou originální, bez úprav, tak jak nám je zaslaly KV MO.

2. Ve dvou nádobách (označme je A a B) máme dva lihové roztoky. V nádobě A jsou dva litry lihu 60procentního, v nádobě B 3 litry lihu 80procentního. Z nádoby B do A přelijeme 1 litr tekutiny, důkladně promícháme a pak přelijeme 1 litr tekutiny z nádoby A do B .



Obr. 31

Vypočtěte, kolikaprocentní líc je v nádobách A a B po obou přelitích.

3. Tři manželské páry váží dohromady 438 kg. Každý z mužů, Karel, Jiří a Pavel, má manželku vždy o 6 kg lehčí, než je sám. Jména manželek jsou Blanka, Olga a Věra. Určete manželské páry a váhu všech šesti osob, víme-li, že Blanka váží o 9 kg méně než Jiří, který s Olgou dohromady váží 153 kg. Olga a Karel váží dohromady 150 kg. Váha každého je vyjádřena celým číslem.

4. Na přímce p leží body A, B, C, D tak, že pro velikosti úseček jimi určených platí: $|AB| = 1$ cm, $|AD| =$

$= 4$ cm, $|CD| = 2$ cm. Vypočtete délku úsečky BC .

5. V rovině je dána přímka p a body A, B , které leží uvnitř opačných polorovin vyřazených přímkou p . Na přímce p sestrojte body X, Y , tak, aby trojúhelník AXY byl rovnoramenný s rameny XA, XY a aby přímka BX půlila úhel AXY .

Jihočeský kraj

1. A. Oddělení závodu odevzdávalo 1716 výrobků. Na základě stanoveného plánu výroby má být výroba zvýšena o 30 %. Zlepšovacími návrhy byl výrobní čas zkrácen z 25 minut na 16,5 min., ale bylo nutno zmenšit počet pracovníků ze 16 na 14. Podaří se takto splnit plánované zvýšení výroby?

1. B. V prodejně prodávali známky 60, 40 a 30 haléřové. Celkem prodali 500 známek za 218 Kčs, přičemž počet známek za 60 hal. je k počtu známek za 40 hal. v poměru 3 : 8. Kolik kterých známek bylo prodáno? Proveďte zkoušku.

2. A. Čtverec $ABCD$ kotálejte po polopřímce AB , až vrchol A znovu padne na uvedenou polopřímku.

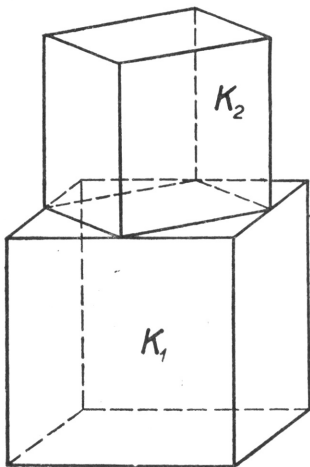
a) Narýsujte a popište.

b) Narýsujte dráhu, kterou při kotálení vykoná vrchol A .

c) Vypočtete obsah P útvaru, který je vymezen dráhou vrcholu A a příslušnou částí polopřímky AB , je-li strana čtverce $|AB| = a$.

d) Vypočtete délku dráhy vrcholu A , je-li strana čtverce $|AB| = 10$ cm.

2. B. Narysuj trojúhelník ABC , jsou-li dány: $b = 54$ mm, $c = 96$ mm, součet vnitřních úhlů beta a gama je $112,5^\circ$. Rýsuj bez použití úhloměru, aniž bys počítal úhel alfa.



Obr. 32

3. A. Je dán kvádr $ABCDEFGH$, jehož rozměry $|AB| : |AD| : |AE|$ jsou v postupném poměru $4 : 3 : 8$. Kvádr je rozříznut rovinou, která prochází hranami AE a CG . Plocha řezu má obsah $P = 1440$ cm². Urči objem kvádrů.

3. B. Na krychli o hraně a cm je postavena druhá menší krychle, jak ukazuje obrázek (obr. 32).

- a) Urči objem vzniklého tělesa.
- b) Urči povrch vzniklého tělesa.
- c) Narýsuj síť tělesa pro $a = 4$ cm.

Západočeský kraj

1. Automobilový silniční okruh měří 21 km a automobilista jej projíždí čtyřikrát průměrnou rychlostí 60 km/h. Od místa startu S současně s ním vyjede v téže směru cyklista, který jede rychlostí 15 km/h.

a) Určete místo a dobu, kdy dojde k 1., 2. a 3. setkání.

b) Po 18 km měl cyklista defekt a zdržel se opravou 2 minuty. Dále pak jel zvýšenou rychlostí a s automobilistou se setkal v místě původně předpokládaného 3. setkání. Jakou zvýšenou rychlostí musel cyklista jet?

2. Napište za sebou bez mezer trojnásobky všech přirozených čísel od 1 do 1000. Dostanete tak číslo 3691215....

a) Kolik cifer má toto číslo?

b) Která cifra stojí na tisícím místě sledu (počítáno od počáteční cifry)?

3. a) Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB , je-li dána délka jeho těžnice $t_c = 4$ cm a velikost úhlu $\omega = 15^\circ$, který svírá těžnice t_c s osou úhlu $\sphericalangle ACB$.

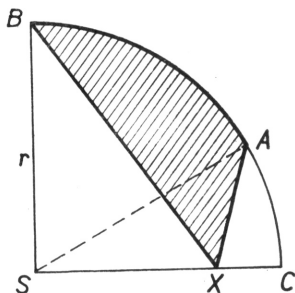
b) Předpokládejte, že velikost úhlu ω je proměnná, a určete, pro které hodnoty ω má úloha řešení.

4. Je dán čtvrtkruh BSC o poloměru $r = |SB| = |SC|$. Bod A je takový bod oblouku BC , pro který platí

✧ $ASB = 60^\circ$; X je libovolný bod úsečky SC (viz obr. 33).

a) Vyjádřete obsah P plochy omezené úsečkami BX , AX a obloukem AB pomocí délky $x = |SX|$.

b) Zjistěte, pro kterou hodnotu x je obsah P roven polovině obsahu čtvrtkruhu BSC , porovnejte tuto hodnotu x s délkou oblouku BC .



Obr. 33

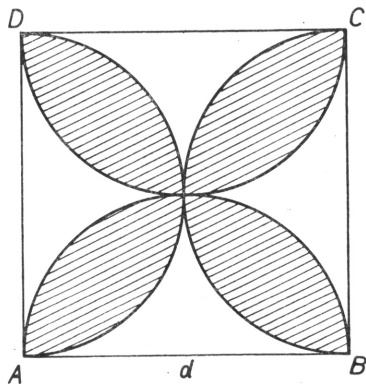
Severočeský kraj

1. Podél přímé železniční trati vede silnice, po níž jel cyklista rychlostí 18 km/h. Cyklistu dostihl po trati jedoucí vlak a předjel jej. Cyklista odhadl, že od okamžiku, kdy jej míjela lokomotiva, do okamžiku, kdy kolem něho projel konec vlaku, uplynulo asi 5,5 vteřiny. Potom však musel vlak na trati zastavit; cyklista jej dostihl a podél celého stojícího vlaku přešel za 19 vteřin. Vypočtěte přibližnou rychlost jedoucího vlaku.

2. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou

AB , když jsou dané velikosti těžnic t_a, t_c . Provedte diskusi řešitelnosti.

3. Písařka píše na psacím stroji těsně za sebou přirozená čísla 123456789101112 atd. bez mezer a čárek;



Obr. 34

celkem takto napsala 1000 číslic. Vypočítejte, kolik při tom napsala sedmiček.

4. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky d . Kolem středu každé jeho strany opište polokružnici, která prochází středem čtverce $ABCD$ (obr. 34). Kolik procent z obsahu čtverce tvoří obsah vyčárkovaného obrazce?

Severomoravský kraj

1. Najděte tři lichá čísla od 1 do 20, z nichž součet prvních dvou je o jedničku větší než číslo třetí a přitom

když přičteme k prvnímu z nich dvojnásobek druhého a trojnásobek třetího, dostaneme číslo 70. Která jsou to čísla ?

2. Určete všechny hodnoty parametru t , pro které jsou čísla

$$a = 4t + 3$$

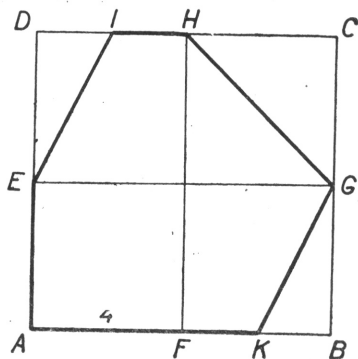
$$b = 3(1 - t)$$

$$c = 5t + 4$$

kladná. Ukažte pak, že existuje právě jedna hodnota parametru t taková, že lze ze tří úseček a , b , c sestavit pravoúhlý trojúhelník s přeponou c .

Nakonec určete délky stran tohoto trojúhelníka, zvolíte-li za jednotku délky 17 mm, a proveďte jeho konstrukci!

3. Ve čtvercové síti (o straně 4 cm) katastrální mapy je zakreslen pozemek ve tvaru šestiúhelníka $AKGHIE$,



Obr. 35

kde K je střed úsečky FB a I je střed úsečky DH (obr. 35). Sestrojte obdélník se stranou o délce 4 cm tak, aby měl týž obsah jako daný šestiúhelník $AKGHIE$. Určete druhý rozměr obdélníka!

4. Dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně a . Vedte rovinu procházející hranou BC tak, aby rozdělila krychli na dvě části, jejichž poměr objemů je $2 : 5$. Kolika způsoby je to možné?

Vypočítejte velikost objemu každé z obou vzniklých částí! Jaký tvar a jakou velikost má vzniklý řez krychle, jejíž hrana a měří 9 cm? Provedte též konstrukci.

Jihomoravský kraj

1. Sečtěte všechna přirozená čísla od 1 do 1 000 000, tj. vypočítejte součet

$$a = 1 + 2 + 3 + \dots + 999\,998 + 999\,999 + 1\,000\,000.$$

Sestavte vzorec pro součet n členů řady přirozených čísel. Ověřte platnost vzorce na zvoleném příkladě.

2. Vepište kružnici křivočarému útvaru, omezenému základnou AB obdélníka $ABCD$ ($|AB| = 12$ cm, $|BC| = 6$ cm) a dvěma navzájem se dotýkajícími shodnými čtvrtkružnicemi k_1 a k_2 o středech C a D .

Poznámka: Vypočítejte nejdříve poloměr kružnice křivočarému útvaru vepsané. Potom proveďte konstrukci.

3. Zpočátku jel parník rychlostí $v_1 = 23$ km/h. Když kapitán lodi zjistil, že parník urazil o $d = 24$ km méně

proti plánu, dal rozkaz zvýšiť rýchlosť na $v_2 = 35$ km/h. Parník tak dojel do cieľa včas. Vypočítajte dobu plavby a vzdálenosť medzi oboma prístavmi, jestliže stredná rýchlosť plavby je $v_s = 27$ km/h.

4. V ľubovoľnom trojuholníku ABC sestrojte osy o_1 a o_2 jeho vnútorných uhlov $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$. Průsečík těchto polopřímek označte P . Bodem P vedte přímku p rovnoběžnou s přímkou BC . Průsečík přímky p se stranou AB trojúhelníka ABC označte M , průsečík přímky p se stranou AC trojúhelníka ABC označte N . Dokažte, že pro velikosti úseček MN , MB a NC platí:

$$|MN| = |MB| + |NC|.$$

Bratislava

1. Do vrcholov pravidelného dvanásťuholníka sú vpísané celé čísla tak, že súčet ľubovoľných piatich vedľa seba stojacích čísel je rovnaký. Dokážte, že potom všetkých 12 čísel je rovných.

2. Číslo 9^{100} je 96ciferné.

a) Ukážte, že existuje prirodzené číslo $n < 100$ tak, že čísla 9^n a 9^{n+1} majú rovnaký počet cifier.

b) Existuje prirodzené číslo $n < 50$ tak, že čísla 9^n a 9^{n+1} majú rovnaký počet cifier.

3. Narysujte štvorec $ABCD$ o strane 10 cm a 4 kružnice k_1 , k_2 , k_3 , k_4 po rade so stredmi A , B , C , D (Stačí rysovať štvrtkružnice vo vnútri štvorca.) Označme po rade X , Y , Z , T tie priesečníky kružníc k_4 a k_3 , k_4 a k_1 , k_2 a k_1 , k_2 a k_3 , ktoré ležia vo vnútri štvorca.

a) Určte obsah štvoruholníka $XYZT$!

b) Určte obsah trojuholníka AXT !

4. V rovine sú dané dve rôzne priamky p , q a tri rôzne kružnice k_1 , k_2 , k_3 tak, že každá priamka sa dotýka všetkých troch kružníc. Pritom všetky tri kružnice ležia v tej istej polrovine určenej priamkou p i v tej istej polrovine určenej priamkou q . Potom stredy kružníc k_1 , k_2 , k_3 ležia na priamke. Dokážte.

Západoslovenský kraj

1. Autobusy miestnej dopravy premávajú po obojsmerovej trati medzi konečnými stanicami S a T vzdialenými 5 km. Po každom príchode na konečnú stanicu autobus tam stojí 5 minút. Autobus A začal premávať ráno o 5.00 hod, autobus B o 5.29 hod, obidva zo stanice S . Autobus B sa prvýkrát stretol s A , ktorý išiel (prvýkrát) z T do S , o 5.32 hod. (A a B majú rovnakú rýchlosť).

a) Vypočítajte priemernú rýchlosť autobusu na trati medzi S a T .

b) Koľkokrát sa autobusy A , B stretnú do 12.00 hod a v akých vzdialenostiach od stanice S ?

2. Nech $p \parallel q$ a $p \neq q$. Označme $v(X; Y)$ vzdialenosť objektov X , Y a $s(X)$ súčet vzdialeností bodu X od priamok p , q , teda $s(X) = v(X, p) + v(X, q)$.

Nájdite množinu $\mathbf{M}$ všetkých bodov M priestoru takých, že pre každý bod X priestoru platí $s(X) \geq s(M)$.

3. Vo vnútri ostrouhlého trojuholníka ABC zvolte

ľubovoľný bod X . Označte $A_1; B_1; C_1$ stredy úsečiek $AX; BX; CX$ a $A_2; B_2; C_2$ päty kolmíc zostrojených bodom X na strany $AB; BC$ a CA .

a) Dokážte, že obvod šesťuholníka $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ je $|BX| + |AX| + |CX|$.)

b) Vyjadrite obsah tohto šesťuholníka pomocou obsahu trojuholníka ABC .

4. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Označme $c_1 = |AC_0|; c_2 = |BC_0|$, kde C_0 je päta výšky zostrojenej bodom C . Na kolmiciach v polrovine ABC zostrojte body P, Q tak, aby $|AP| = |BQ| = u$, kde $0 < u < |CC_0|$. Označme $P_1(Q_1)$ priesečník priamky AB s priamkou $p(q)$ idúcou bodom $P(Q)$ tak, že $p \parallel AC$ ($q \parallel BC$) a $P_2; Q_2$ sú priesečníky priamky PQ so stranami $AC; BC$. Dokážte, že

$$\frac{S_{AP,PP_1}}{S_{BQ,QQ_1}} = \frac{c_1}{c_2}.$$

VII. Správa o 4. korešpondenčnom seminári MO

Na základe pozitívnych skúseností s korešpondenčným seminárom v predchádzajúcich rokoch sa konal korešpondenčný seminár aj v školskom roku 1977/78 v rámci XXVII. ročníka MO. Návrh účastníkov seminára predložil *doc. dr. J. Moravčík, CSc.*, na základe výsledkov XXVI. ročníka MO. Návrh vychádzal z toho, že v Prahe sa bude konať celomestský seminár vybraných riešiteľov MO, ktorého účastníci budú riešiť úlohy korešpondenčného seminára ako domáce cvičenia. Do seminára boli preto vybraní riešitelia z jednotlivých krajov takto: Severočeský 2, Západočeský 1, Juhočeský 2, Východočeský 6, Severomoravský 5, Juhomoravský 2, Bratislava 3, Západoslovenský 2, Stredoslovenský 6, Východoslovenský 2. Z 31 vybraných riešiteľov sa práce v seminári nezúčastnil 1 zo Severočeského a 1 zo Stredoslovenského kraja.

Pre seminár boli vybrané nasledujúce tematické okruhy:

Nerovnosti v algebre a geometrii — výber 8 úloh zostavil *Michal Kaučič* z VŠD Žilina. Hodnotenie 195 riešení

od 27 riešiteľov uskutočnil a s komentárom riešiteľom rozoslal *Peter Ivan* z VŠD Žilina.

Množiny bodov v priestore — výber pozostávajúci z 11 úloh formulovaných v 6 celkoch zostavil *doc. Vyšín, CSc.*, ktorý tiež hodnotil a komentoval 183 riešení od 21 riešiteľov.

Matematická analýza — výber 8 úloh zostavil *dr. Jiří Jarník, CSc.*, ktorý zhodnotil a komentoval celkom 148 riešení od 22 riešiteľov.

Kombinatorika — výber 8 úloh zostavil *dr. František Zítek, CSc.*, ktorý dostal na hodnotenie a komentovanie celkom 62 riešení od 15 riešiteľov.

Školská teória čísel — výber 8 úloh zostavil *dr. Štefan Sakáloš* z PFUK v Bratislave, ktorý komentoval a hodnotil 91 riešení od 15 riešiteľov.

Za vedenie seminára (výber autorov tematických celkov, súborné hodnotenie riešiteľov) zodpovedal *doc. dr. J. Moravčík, CSc.*

Po zhodnotení riešení všetkých tematických celkov možno za najúspešnejších účastníkov seminára považovať týchto: *Vladimír Matěna*, G Trutnov 37 úspešných riešení (zo 43 možných), *Jaroslav Hančl*, G Bílovec, 36, *Josef Tkadlec*, G Bílovec, 36, *Milan Veščíčík*, G Bratislava, ul. ČA, 33, *Zdeněk Kalousek*, G Jablonec n. N., 31, *Ilja Turek*, G Hradec Králové, 31, *Rostislav Urban*, G Ostrava, 30.

Z vyššie menovaných žiakov 3 (Veščíčík, Turek, Kalousek) a 2 ďalší účastníci korešpondenčného seminára (Kratochvíl, Filakovszky), ktorí zaslali len riešenia 3, resp. 2 tematických celkov, boli členmi družstva ČSSR

na XX. MMO v Rumunsku, ktoré v neoficiálnom hodnotení družstiev obsadilo 5. miesto medzi 17 krajinami. Pravidelné riešenie úloh korešpondenčného seminára má na tomto úspechu nesporne tiež svoj nemalý podiel. Vyplynulo to aj z ankety uskutočnenej v Bukurešti medzi našimi reprezentantmi, ktorá však poukázala zároveň na možnosti ďalšieho skvalitnenia organizácie korešpondenčného seminára v budúcnosti. Preto predsedníctvo ÚV MO na svojom zasadnutí v septembri 1978 rozhodlo o poriadaní korešpondenčného seminára aj v školskom roku 1978/79, ale s niektorými organizačnými zmenami.

Pre informáciu čitateľov o obsahu korešpondenčného seminára, ktorý sa konal v školskom roku 1977/78 prinášame na ďalších stránkach prehľad všetkých úloh, ktoré jeho účastníci dostali na riešenie. Tým im zároveň poskytujeme možnosť vyskúšať svoje schopnosti úspešne riešiť náročnejšie matematické úlohy.

Nerovnosti v algebre a geometrii (zostavil *M. Kaukič*, VŠD Žilina):

1. Ak $abc > 0$, potom

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3};$$

dokážte.

2. Dokážte, že nerovnosť $pa^2 + (1-p)(b^2 - pc^2) > 0$, kde p je reálne číslo, a, b, c sú kladné reálne čísla, je správna práve vtedy, keď súčasne platia nerovnosti $a + b - c > 0$, $a + c - b > 0$, $b + c - a > 0$.

3. Dané sú dve kružnice rovnakej dĺžky 1977. Na jednej z nich je daných 1977 bodov a na druhej niekoľko oblúkov, ktorých súčet dĺžok je menší než 1. Dokážte, že tieto kružnice možno tak „položiť na seba“, že žiadny z daných bodov nebude ležať na niektorom z daných oblúkov.

4. Ak m, n sú kladné racionálne čísla a $x > 0$, potom platí

$$mx^n + \frac{n}{x^m} \geq m + n.$$

Dokážte.

5. Dokážte, že pre $y = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ a všetky reálne čísla x platí

$$\frac{a+c}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2} \leq y \leq \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2},$$

kde $D = b^2 + (a-c)^2$.

6. Ak a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka, x, y, z reálne čísla a platí $ax + by + cz = 0$, potom $ayz + bzx + cxy < 0$; dokážte.

7. Daná je konečná postupnosť celých kladných čísel, ktorej žiadny člen nie je menší než dané číslo M . Okrem toho každý člen tejto postupnosti začínajúc tretím je rovný absolútnej hodnote rozdielu dvoch predchádzajúcich členov. Aký najväčší počet členov môže mať taká postupnosť?

8. Čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú také, že $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 2a_1$; $a_2 \leq a_3 \leq 2a_2, \dots, a_{n-1} \leq a_n \leq 2a_{n-1}$. Dokážte, že

v súčte $S = a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_n$ možno vždy vybrať znamienka tak, že $0 \leq S \leq a_1$.

Množiny bodov v priestore (zostavil doc. J. Vyšín, CSc.):

1. V priestore sú dané dva útvary U_1, U_2 a priamka s . Označíme X_1, X_2 dva body týchto vlastností: $X_1 \in U_1 \wedge X_2 \in U_2, X_1 \neq X_2, X_1 X_2 \parallel s$.

Vyšetríte množinu všetkých stredov všetkých takých úsečiek $X_1 X_2$ v týchto prípadoch:

- U_1, U_2 sú dve mimobežky,
- U_1 je priamka rôznobežná s rovinou U_2 ,
- U_1, U_2 sú dve rôznobežné roviny.

2. V priestore je daný trojuholník ABC a útvar U .

Vyšetríte množinu všetkých stredov guľových plôch opísaných všetkým štvorstenom $ABCX$, kde $X \in U$, a to v prípadoch:

- U je priamka rôznobežná s rovinou ABC ,
- U je rovina rôznobežná s rovinou ABC a prechádza bodom A .

3. V priestore je daný útvar U , rovina ϱ a trojuholník ABC .

Vyšetríte množinu všetkých vrcholov Z všetkých trojuholníkov XYZ , kde $X \in U \wedge Y \in \varrho \wedge XY \parallel AB \wedge YZ \parallel BC \wedge ZX \parallel CA$, a to v prípadoch:

- U je priamka rôznobežná s rovinou ϱ ,
- U je rovina rôznobežná s rovinou ϱ .

4a. V priestore sú dané dve rôzne roviny ϱ, σ a bod A , ktorý neleží v žiadnej z nich. Vyšetrite množinu všetkých bodov všetkých priamok, z ktorých každá prechádza

za bodom A a má rovnakú odchýlku od roviny ϱ i roviny σ .

4b. V priestore sú dané dva rôzne body A, B a rovina ϱ , ktorá neobsahuje žiadny z nich. Vyšetrite množinu všetkých bodov X roviny ϱ , pre ktoré majú priamky AX, BX rovnakú odchýlku od roviny ϱ .

5. V priestore je daný bod A , priamka q a útvar U . Ďalej je dané kladné číslo k . Vyšetrite množinu všetkých bodov X týchto vlastností: $X \in q$, podiel vzdialeností bodu X od útvaru U a od bodu A je rovný k , a to v týchto prípadoch:

- a) U je priamka mimobežná s q ,
- b) U je rovina rôznobežná s q .

Matematická analýza (zostavil *dr. J. Jarník, CSc.*, MÚ ČSAV Praha):

1. Nech $0 < a < b$ sú reálne čísla, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$, $n = 2, 3, \dots$.

Nájdite číslo c také, že platí $x_{2n} > c > x_{2n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, a dokážte, že platí:

Ak je $d \neq c$, potom existuje prirodzené číslo p také, že

$$|x_p - c| < |d - c|.$$

2. Nech postupnosť $\{x_n\}$ kladných čísel je rastúca a nie je ohraničená. Označme $s_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, $n = 1, 2, \dots$.

Dokážte, že postupnosť $\{s_n\}$ je taktiež rastúca a nie je ohraničená. Zostane toto tvrdenie správne aj v prípade, keď vynecháme predpoklad, že čísla x_n sú kladné?

3. Nech $a_0 > 1$, $a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \right)$, $n = 1, 2, \dots$.

Dokážte: Postupnosť $\{a_n\}$ je klesajúca a pre všetky prirodzené n platí $a_n > 1$. Ak je $c > 1$, potom existuje také prirodzené číslo p , že platí $a_p < c$ (a teda $a_n < c$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq p$).

Vyšetríte tiež prípad $0 < a_0 \leq 1$.

4. Nech $\{a_n\}$ je klesajúca postupnosť nezáporných čísel. Označme $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $t_n = 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2n}$, $n = 1, 2, \dots$.

Dokážte, že postupnosť $\{s_n\}$ je ohraničená práve vtedy, keď je ohraničená postupnosť $\{t_n\}$. Nájdite príklad, ktorý ukáže, že tvrdenie vo všeobecnosti neplatí, ak vynecháme predpoklad, že postupnosť $\{a_n\}$ je klesajúca.

5. Určte všetky funkcie f , g definované pre všetky reálne čísla x a vyhovujúce pre všetky reálne čísla x , y rovnosti

$$f(x - y) = f(x)g(y) + f(y)g(x).$$

6. Nech n je prirodzené číslo, a , b reálne čísla. Určte všetky funkcie f definované pre všetky reálne čísla x a vyhovujúce pre všetky reálne čísla x rovnici

$$af(x^n) + f(-x^n) = bx.$$

7. Nech f je zobrazenie eukleidovského priestoru do seba.

Dokážte: Ak je f izometria, ktorá nemá pevný bod, potom ani zložené zobrazenie $f \circ f$ (t.j. zobrazenie g , ktoré priraduje každému bodu A bod $g(A) = f(f(A))$), nemá pevný bod.

Poznámka: Zobrazenie F eukleidovského priestoru do seba sa volá izometriou, ak zachováva vzdialenosť bodov, t.j. ak A, B sú ľubovoľné dva body priestoru, je vzdialenosť bodov $F(A), F(B)$ rovná vzdialenosti bodov A, B .

Nech F je zobrazenie množiny $\mathbf{M}$ do množiny $\mathbf{M}$. Prvok $x \in \mathbf{M}$ sa nazýva pevným bodom zobrazenia F , ak platí $F(x) = x$.

8. Nech $\mathbf{M}$ je neprázdna množina funkcií f tvaru $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, ktorá má tieto vlastnosti:

a) Ak $f \in \mathbf{M}$, $g \in \mathbf{M}$, potom $g \circ f \in \mathbf{M}$ kde $h = g \circ f$ je funkcia definovaná vzťahom $h(x) = g(f(x))$.

b) Ak $f \in \mathbf{M}$, potom $f_{-1} \in \mathbf{M}$, kde f_{-1} je funkcia definovaná vzťahom $f_{-1}(x) = y$, kde $x = f(y)$.

c) Ak $f \in \mathbf{M}$, potom existuje pevný bod zobrazenia f , t.j. reálne číslo x_f také, že platí $f(x_f) = x_f$.

Dokážte, že existuje také reálne číslo t , že platí $f(t) = t$ pre všetky funkcie $f \in \mathbf{M}$.

Udajte príklady množiny $\mathbf{M}$ obsahujúcej: a) konečne mnoho, b) nekonečne mnoho prvkov.

Kombinatorika (zostavil RNDr. F. Zítek, CSc., MÚ ČSAV Praha):

O konečnej postupnosti celých čísel tvaru

$$c_0 = 0, c_1, c_2, \dots, c_n = c \quad (1)$$

budeme hovoriť, že má dĺžku n a končí číslom c .

Hovoríme, že postupnosť (1) je málo rastúca, ak pre $j = 1, 2, \dots, n$ platí $0 \leq c_j - c_{j-1} \leq 1$. Postupnosť (1) nazveme alternatívnou, ak pre $j = 1, 2, \dots, n$ platí

$|c_j - c_{j-1}| = 1$. Ktoré postupnosti sú zároveň málo rastúce aj alternatívne?

1. Odvodte vzorec pre počet $p_n(y)$ (n prirodzené, y celé) všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y . Vyšetrite vlastnosti funkcií p_n , $n = 1, 2, 3, \dots$.

2. Odvodte vzorec pre počet $\pi_n(y)$ všetkých rôznych málo rastúcich postupností dĺžky n končiacich číslom y . Vyšetrite vlastnosti funkcií π_n , $n = 1, 2, 3, \dots$.

3. Odvodte vzorec pre počet $p_n(y, b)$ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \dots, n$ je $c_j \leq b$ (b celé).

4. Odvodte vzorec pre počet $\pi_n(y, k)$ všetkých rôznych málo rastúcich postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \dots, n$ platí $c_j \leq kj$ ($k \geq 0$ reálne).

5. Odvodte vzorec pre počet $\pi_n^*(y, k)$ všetkých rôznych málo rastúcich postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 1, 2, 3, \dots, n$ platí $c_j < kj$ ($k > 0$ reálne).

6. Odvodte vzorec pre počet $p_n(y, a, b)$ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \dots, n$ platí $a \leq c_j \leq b$ (a, b celé).

7. Odvodte vzorec pre počet $p_n^*(y, k)$ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \dots, n$ platí $c_j \leq kj$ ($k > 0$ reálne).

8. Pri pokladni kina s jednotným vstupným 5 Kčs

stojí N záujemcov, z ktorých p platí päťkorunou, ostatných $d = N - p$ desaťkorunou.

Koľkými rôznymi spôsobmi možno usporiadať frontu N kupujúcich tak, aby pokladník, ktorý na začiatku predaja nemá v pokladni žiadne peniaze, mohol každému kupujúcemu s desaťkorunou ihneď vydať naspäť?

Ako sa tento počet zmení, ak pokladník má na začiatku v pokladni k päťkorún? (Predpokladáme samozrejme, že nikto nekupuje viac než jeden lístok.)

Školská teória čísel (zostavil *dr. Š. Sakáloš*, PFUK Bratislava):

1. Napíšte za sebou všetky čísla od 100 do 999. Vznikne tak dekadický zápis nejakého čísla N .

a) Dokážte, že N nie je štvorcom žiadneho prirodzeného čísla.

b) Dokážte, že N nie je prvočíslo.

c) Určte najväčšieho spoločného deliteľa čísel N a 27 000.

d) Určte najväčšieho spoločného deliteľa čísel N a 27 027 000.

e) Dokážte, že N nie je (vyššou než prvou) mocninou žiadneho prirodzeného čísla.

2. Nájdite najväčšie prirodzené číslo x , také, že

$$x^{x^x} < 4^{4^4}.$$

3. Akým najväčším číslom možno krátiť zlomok

$$\frac{7^{3000} - 3^{3000}}{5^{3000}}?$$

4. Dokážte, že existuje $3 \cdot 10^9$ za sebou nasledujúcich zložených prirodzených čísel menších než $10^{10^{10}}$.

5. Dokážte, že číslo

$$1001^{4000} + 4 \cdot 1000^{1000}$$

je zložené.

6. Dokážte, že kvadratická rovnica

$$8^8 x^2 + 10^{10} x + 9^9 = 0$$

má dva reálne rôzne korene, ktoré sú iracionálne.

7.a) Dokážte, že exponent čísla 2 v rozklade čísla $n!$ na súčin prvočísel je $n - k$, kde k je počet jednotiek v dvojkovom zápise čísla n .

b) Dokážte, že exponent prvočísla p v rozklade čísla $n!$ na súčin prvočísel je $\frac{n - k}{p - 1}$, kde k je ciferný súčet v p -adickom zápise čísla n .

VIII. Správa

o XX. medzinárodnej matematickej olympiáde

1. ORGANIZÁCIA A PRIEBEH SÚŤAŽE

Jubilejná — XX. — medzinárodná matematická olympiáda (MMO) sa konala v dňoch 1.—13. 7. 1978 v Rumunsku — v krajine, ktorá pred takmer 20 rokmi prišla s iniciatívou konať tieto veľmi užitočné medzinárodné merania síl matematických nádejí. Doteraz Rumunská socialistická republika (RSR) usporiadala nielen I. (1959), ale aj II. (1960) a XI. (1969) MMO. Poriadateľom tohoročnej MMO bolo ministerstvo školstva RSR, ktoré na čele s ministerkou s. *prof. Ing. Suzanou Gideaovou, DrSc.*, venovalo organizácii tohto sviatku školskej matematiky značnú pozornosť. Pri príprave odbornej časti súťaže a rámcového programu úzko spolupracovali predstavitelia a členovia rumunskej matematickej spoločnosti *Societates de stiinte matematice din RSR*. Predsedom organizačného výboru XX. MMO bol *prof. dr. Gheorghe Mihoc*, člen Akadémie vied RSR.

Poslaním pozvánok do takmer 30 krajín sa hostitelia usilovali získať na jubilejnej MMO rekordnú účasť družstiev i jednotlivcov, no nepodarilo sa im prekonať nielen vlaňajší rekord, ale ani účasť na predchádzajúcich

3 ročníkoch. Súťaže XX. MMO sa zúčastnili kompletne osemčlenné družstvá 16 krajín: Rakúska (A), Bulharska (BG), ČSSR (CS), NSR (D), Francúzska (F), Veľkej Británie (GB), Mongolska (M), Holandska (NL), Poľska (PL), Rumunska (R), Švédsko (S), Fínsko (SF), Turecko (TR), USA, Vietnamskej socialistickej republiky (VN), Juhoslávie (YU) a štvorčlenné družstvo Kuby (C). Vedúci delegácií uvedených 17 zemí tvorili medzinárodnú jury súťaže, ktorej predsedom bol *prof. dr. Ioan Cuculescu*, učiteľ bukureštskej univerzity.

Väčšina vedúcich delegácií pricestovala do Bukurešti v sobotu 1. 7. 1978. Organizátori ich po skupinkách odviezli do mestečka Bușteni ležiaceho cca 140 km od hlavného mesta v údolí rieky Prahovy neďaleko Predealu. Toto turistické stredisko na úpätí legendárneho Caraimanu (2384 m) v pohorí Bucegi vyhládli za bydlisko a miesto práce jury. Jej členovia a rumunskí organizátori boli tam ubytovaní v hoteli Biroul de turism pentru tineret (rumunská CKM).

Prvé oficiálne stretnutie členov jury sa uskutočnilo v nedeľu 2. 7. predpoludním v miestnej strednej škole, kde členovia jury nachádzali po celý čas pobytu v Bușteni veľmi dobré podmienky pre svoju prácu. Zasadnutie viedol *akad. Mihoc*, ktorý v úvodnom slove pripomenul podiel RSR na vzniku a organizovaní MMO, predstavil členov organizačného výboru a predstaviteľov jednotlivých komisií XX. MMO, ospravedlnil predsedu jury *prof. dr. Cuculescu* pre rekonvalescenciu po predchádzajúcom onemocnení a predstavil vedúcich delegácií zúčastnených krajín, z ktorých chýbal už len vedúci

delegácie USA pro komplikácie s dopravou. Ďalej pripomenul hlavné zásady organizačného poriadku XX. MMO a informoval o programe práce jury i žiakov, ktorých príchod do Bukurešti očakávali rumunskí hostitelia v pondelok 3. 7. V zastúpení rezortu školstva privítal vedúcich zahraničných delegácií i ostatných účastníkov MMO s. *Bošovej*, inšpektor kraja Prahova. Na záver prvej časti zasadnutia jury informoval akad. Mihoc, že organizátori dostali z 12 krajín celkom 54 návrhov úloh, z ktorých rumunská úlohová komisia vybrala 17. Texty a stručné riešenia týchto 17 úloh vo všetkých 4 roko-
vaciach jazykoch (angličtina, francúzština, nemčina, ruština) dostali vedúci delegácií v zapečatených obáľkach na záver zasadnutia.

Po krátkej prestávke nasledovala panelová diskusia (beseda za okrúhlym stolom) na tému *Podiel národných a medzinárodných matematických olympiád na rozvoji vyučovania matematiky*. Žiaľ, vedúcim zahraničných delegácií nebola téma diskusie vopred známa a preto sa z nich na vystúpenie v nej nik vopred nepripravil. Táto skutočnosť poznamenala nepriaznivo celý priebeh diskusie, v ktorej jediný rozsiahlejší vopred pripravený referát predniesol vedúci delegácie RSR *prof. Draghicescu*. Zdôraznil v ňom, že vedeckotechnický rozvoj si vyžaduje revolúciu aj v matematike, a to nielen vo vnútri — pri rozvoji matematických vedných disciplín, ale aj navonok — pri odovzdávaní matematických poznatkov na všetkých stupňoch vzdelávania. S narastajúcim množstvom matematických informácií, ktoré si majú žiaci spoľahlivo osvojiť, narastá význam stimulov

získavajúcich žiakov pre systematickú samostatnú prácu v matematike. Jedným z takých účinných stimulov je aj matematická olympiáda, a to ako národná, tak aj medzinárodná, čo je overené mnohoročnými skúsenosťami. Podrobne sa zaoberal poznatkami z matematickej olympiády v Rumunsku, konanej každoročne od roku 1954 v priamej nadväznosti na matematickú súťaž v riešení úloh v časopise *Gazeta matematica*, uskutočňovanej každoročne od roku 1902. MO sa v RSR zúčastňujú každoročne tisíce žiakov stredných škôl a úspech v súťaži je pre väčšinu z nich impulzom pre ďalšie seba-vzdelávanie v matematike. Víťazi jednotlivých ročníkov MO sa uplatňujú ako odborníci v matematike i v ostatných oblastiach vedy a techniky. V rumunskej škole hodnotia profesionálnu schopnosť učiteľov matematiky podľa výsledkov ich žiakov v MO. Tento ukazovateľ je jedným z hlavných kritérií hodnotenia kvality učiteľskej práce. Stredná generácia rumunských matematikov robila prvé kroky k tvorivej práci vo svojom odbore na pôde MO a MMO a obe súťaže prispeli značne k vzniku a formovaniu matematickej školy, ktorou sa RSR hrdí. Nesporný je aj ich vplyv na orientáciu obsahu vyučovania matematiky v strednej škole nielen po stránke formatívnej, ale aj informatívnej. V RSR niet stredoškolskej učebnice matematiky, ktorá by nasledovala aj úspech žiakov v MO. V závere svojho príspevku prof. Draghicesu konštatoval, že MMO sa stali veľmi dobrým prostriedkom pre spoznávanie a výmenu skúseností mladých matematikov i ich učiteľov. V tom treba vidieť i príspevok matematiky a matematikov k vytváraniu

ovzdušia mierovej spolupráce a dorozumenia medzi národmi celého sveta.

Referát prof. Draghicesu doplnil akad. Mihoc podrobnou informáciou o organizačnej štruktúre MO v RSR a opätovne zdôraznil, že výsledky v súťaži sú veľmi dobrým prostriedkom pre overenie kvality školského učovania.

Prof. Lyness (GB) v krátkej poznámke konštatoval, že vo Veľkej Británii neuplatňujú systém súťaženia pre mládež do 16 rokov. MO organizujú len pre najlepších žiakov najvyšších ročníkov strednej školy. Podľa neho nie je MO prínosom pre priemerných žiakov, ale u najschopnejších zvyšuje záujem o matematiku. Výsledky žiakov v MO sú však stimulom pre učiteľov a zvyšujú ich záujem o problematiku riešenia úloh.

Prof. Stanešila (R) konštatoval, že každý štát potrebuje ľudí, ktorí poznajú matematiku a vedia ju používať. MO je jedným z prostriedkov k výchove takýchto ľudí. Vyslovil otázku existencie ďalších vhodných prostriedkov a metód ich využívania. Konštatoval, že RSR rozšírili MO aj pre 10—12ročné deti, a to s veľkým úspechom. Vyslovil presvedčenie, že pravidelné riešenie matematických úloh má pre rozvoj matematického talentu prinajmenšom taký význam, ako pravidelné cvičenie na nástroji pre rozvoj umeleckého nadania hudobníka. Nadhodil myšlienku vypisovať témy na samostatnú prácu (nie úlohy) medzi dvoma MMO, ktorých spracovanie by sa zvlášť hodnotilo.

Prof. Le Hai Chau (VN) sa v krátkom príspevku zamerail na niektoré otázky súvisiace s organizáciou MMO.

Navrhoval, aby niektoré krajiny, ktoré majú s MO bohaté skúsenosti, spracovali akýsi minimálny program pre účastníka MMO. Nepovažuje za správne, aby sa žiak mohol zúčastniť MMO viac než raz a rovnako sa mu nezdá, aby pre súťaž boli vybrané dve úlohy z návrhu jednej krajiny.

Jeho vystúpením sa panelová diskusia prakticky skončila a celé nedeľné popoludnie rezervované na jej pokračovanie využili členovia jury na štúdium predloženého návrhu širšieho výberu úloh. Výdatná búrka prinútila k tomu aj tých, ktorí by snád boli dali prednosť prvej dlhšej prechádzke ulicami mestečka pod Caraimanom.

V pondelok 3. 7. predpoludním sa uskutočnilo prvé pracovné zasadnutie jury už pod vedením predsedu prof. dr. Cuculescu. Tento v úvode informoval o zložení komisie pre výber úloh a uviedol, že komisia pri svojej práci nepredpokladala, že by bolo treba rešpektovať zásadu, aby vo výbere šestice úloh pre súťaž nebola z návrhu žiadnej krajiny viac než jedna úloha. Preto v predloženom súbore 17 úloh boli jednotlivé krajiny zastúpené takto: BG 2, C 1, CS 1, D 1, F 3, GB 2, NL 1, S 1, USA 2, VN 1, YU 2. Iba z návrhu SF nevybrali žiadnu úlohu, ostatné zúčastnené krajiny úlohy pre XX. MMO nenavrhli. Komisia usilovala predovšetkým o to, aby v súbore boli rovnomerne zastúpené jednotlivé oblasti školskej matematiky. Tento zámer sa jej však celkom splniť nepodarilo, pretože v zaslaných návrhoch prevládali úlohy s tematikou školskej teórie čísel a kombinatoriky a veľmi slabo bola zastúpená geometria, a to rovnako rovinná ako priestorová.

Už pri prvej rozprave o úlohách sa jury rozhodla vyradiť tri z nich buď preto, že ich riešenie bolo založené na všeobecne známom princípe a námet nebol originálny (československá a jedna francúzska) alebo preto, že sa javili ako príliš náročné pre klauzúrnú súťaž (švéd-ska). Na záver rozpravy bolo zostávajúcich 14 úloh orientačne rozdelených do tabuľky jednak podľa temati-ky: číselná teória (5), algebra (3), teória množín a kombinatorika (3), planimetria (2), stereometria (1) a jednak podľa obťažnosti, ktorú im jury prisúdila: nenáročné (3), stredne obťažné (5), obťažné (2), značne náročné (4). Potom sa prišlo k výberu šiestice metódou, ktorá sa osvedčila vlni v Juhoslávii: Každý člen jury predložil svoj návrh šiestich úloh pre súťaž, pri ktorom mal rešpektovať zásadu, aby boli zastúpené všetky tematické oblasti a aby súbor obsahoval dve ľahké a dve veľmi náročné úlohy. Úlohy s najnižším počtom hlasov vypa-dávali a tí, ktorí ich navrhovali, rozdelili svoje hlasy zostávajúcim úlohám.

Hoci už po prvom sčítaní hlasov, ktorým začalo po-poludňajšie zasadnutie jury, vypadli 4 úlohy, bolo po-trebných ešte šesť skrutínií pretkaných občas zaujíma-vou, ale prevažne rozvláchnou diskusiou, kým sa výber redukoval na potrebných 6 úloh. Pri hlasovaní o jeho prijatí bolo 12 hlasov za, nik proti pri 5 abstenciách. (Predseda jury okrem jednej či dvoch výnimiek vôbec nehlasoval.)

Na záver pondelňajšieho rokovania rozhodla jury ešte o rozdelení vybranej šiestice súťažných úloh na dve troji-ce pre jednotlivé súťažné dni.

V utorok 4. 7. predpoludním pokračovala jury vo svojej práci už za účasti zástupcov vedúcich delegácií, ktorí 3. 7. priviedli svoje družstvá do Bukurešti a krátko pred polnocou pricestovali do Bušteni. Jej rokovanie sa začalo prečítaním listu *dr. I. Tomescu*, člena komisie pre výber úloh, v ktorom oznamuje, že princíp riešenia holandskej úlohy (bola vybratá do súboru súťažných úloh ako úloha č. 6) sa v určitej podobe nachádza v knihe *W. D. Wallisa* vydanej r. 1972 v nakladateľstve Springer. Táto informácia vyvolala rozsiahlu diskusiu so značne rozdielnymi stanoviskami. Nakoniec však jury väčšinou hlasov (11 za, 6 abstencií) rozhodla nemeniť súbor 6 úloh prijatých na predchádzajúcom zasadnutí. Po tomto rozhodnutí sa členovia jury rozdelili do 3 skupín, z ktorých každá sformulovala texty 2 z vybraných úloh vo všetkých 4 rokovacích rečiach. Schvaľovanie oficiálnych textov bolo v jury sprevádzané, ako obvykle, siahodlou diskusiou jazykovo-terminologickej povahy.

Po poludňajšej prestávke nasledovalo rozhodovanie o stanovení maximálneho počtu bodov za úplné riešenie úloh, pri ktorom sa opäť použila metóda individuálnych návrhov jednotlivých delegácií. Jury sa relatívne rýchlo podarilo vyriešiť túto otázku, čím sa prvá etapa jej práce skončila.

Vedenia jednotlivých delegácií mohli preto začať s prekladom textov úloh do materčiny súťažiacich žiakov a ich prípravou pre rozmnoženie v dostatočnom počte exemplárov.

Vo večerných hodinách sa v kultúrnom dome uskutočnilo prijatie členov jury mešťanostom Bušteni, ktorý im

v krátkom príhovore priblížil históriu, prítomnosť i budúcnosť mesta. Od roku 1840 z osady 12 drevorubačských rodín narástlo do dnešných 12 tisíc obyvateľov s perspektívou moderného centra s rozsiahlou výstavbou hotelov a turistických ubytovní v údolí Prahovy i v horách nad ním.

Klepanie textov úloh v materčine žiakov pokračovalo i v stredu (5. 7.) predpoludním a po ich rozmnožení mohli popoludní vedúci delegácií a ich zástupcovia po opätovnej kontrole správnosti vložiť po jednom exemplári do pripravených obálok s kódmi jednotlivých žiakov.

Je len pochopiteľné, že krátke voľno, ktoré potom nasledovalo, využila väčšina z členov jury na zaslúžený oddych a prechádzky po Bušteni a jeho okolí.

Vo štvrtok 6. 7. v skorých ranných hodinách cestovali členovia jury autobusom do Bukurešti, kde sa v aule Agronomického inštitútu Nicolae Balcescu uskutočnilo slávnostné otvorenie XX. MMO. Po krátkom príhovore akad. Mihoca prečítal nám. min. školstva RSR pozdravný list ministerky školstva, ktorá sa ospravedlnila pre účasť na plenárnom zasadnutí ÚV KSR, vyslovil pranie, aby mladí ľudia z rôznych krajín súťažili vždy len na mierovom poli a zaželel všetkým účastníkom plný úspech v súťaži. Potom sa 132 súťažiacich na XX. MMO rozišlo do 8 posluchárni inštitútu, aby sa pustili do riešenia prvej trojice nasledujúceho súboru úloh, ktorý pre nich jury vybrala:

Prvý deň súťaže — 6. júla 1978

1. Nech $m, n, 1 \leq m < n$ sú prirodzené čísla také, že dekadické zápisy čísel 1978^m a 1978^n končia rovnakým trojčíslím.

Určte čísla m, n s touto vlastnosťou tak, aby súčet $m + n$ bol minimálny. (Kuba, 6 bodov.)

2. Je daná guľa a vo vnútri nej pevný bod P . Nech A, B, C sú ľubovoľné body ležiace na povrchu gule také, že úsečky PA, PB, PC sú po dvoch na seba kolmé a PQ je telesová uhlopriečka kvádra s hranami PA, PB, PC .

Určte množinu všetkých takých bodov Q . (USA, 7 bodov)

3. Množina všetkých celých kladných čísel je zjednotením dvoch disjunktných podmnožín

$$\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}, \{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\},$$

pričom

$$f(1) < f(2) < \dots < f(n) < \dots,$$

$$g(1) < g(2) < \dots < g(n) < \dots$$

a

$$g(n) = f(f(n)) + 1$$

pre všetky $n \geq 1$.

Určte $f(240)$. (Veľká Británia, 8 bodov).

Druhý deň súťaže — 7. júla 1978

4. V trojuholníku ABC je $\angle ABF = \angle ACF$. Kružnica, ktorá sa dotýka zvnútra kružnice opísanej trojuholníku

ABC , sa dotýka úsečiek AB , AC v uvedenom poradí v bodoch P , Q .

Dokážte, že stred úsečky PQ je stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC . (USA, 5 bodov.)

5. Nech $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$ je postupnosť navzájom rôznych celých kladných čísel. Potom pre každé celé $n \geq 1$ platí *prírožených* *prírožených*

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k};$$

dokážte. (Francúzsko, 6 bodov.)

6. Členovia medzinárodnej spoločnosti sú príslušníkmi 6 rôznych zemí. Zoznam členov tejto spoločnosti obsahuje 1978 mien očíslovaných 1, 2, ..., 1978. —————>

jehož Dokážte, že existuje aspoň jeden taký člen spoločnosti, ktorého poradové číslo v tomto zozname sa rovná buď súčtu poradových čísel dvoch iných členov z jeho krajin
země ny, alebo dvojnásobku poradového čísla jedného z členov spoločnosti z jeho krajiny. (Holandsko, 8 bodov.)

V zátvorke za textom úlohy je meno krajiny, ktorá predložila návrh úlohy a maximálny počet bodov, ktorý mohol riešiteľ získať za jej úplné riešenie. Pri súťaži však žiaci tieto údaje nepoznali. Vedeli iba, že na riešenie každej trojice súťažných úloh majú 4 hodiny čistého času. Pre zodpovedanie otázok na prípadné nejasnosti v texte se opäť použila osvedčená písomná forma, pri ktorej žiak má možnosť poslať otázku na lístku k tomu určenom najneskoršie pol hodiny po obdržaní textov. Otázka sa prečíta a preloží v jury, ktorá taktiež schvaľuje plný text odpovede.

Treba povedať, že tohto roku ako v prvý, tak aj v druhý súťažný deň bolo žiackych otázok výnimočne málo. V prvý deň (6. 7.) po splnení tejto úlohy odišli členovia jury do budovy ministerstva školstva RSR, kde ich prijala ministerka školstva *prof. Ing. S. Gideaová, DrSc.*, člen korešpondent AVRSR. Vo svojom privítacom prejave o.i. vyzdvihla význam matematiky pre vedecko-technický rozvoj i formovanie osobnosti mladých ľudí a podrobne informovala o organizácii školstva v RSR. Po prijatí na MŠ RSR čakal členov jury únavný návrat do Bušteni, kde zasadli k obedu v čase obvyklom pre olovrant.

V piatok 7. 7. sa história s cestovaním do Bukurešti a späť zopakovala, ale s tým rozdielom, že po zodpovedaní otázok k textom nasledovala malá autokarová prehliadka hlavného mesta RSR so zastávkou v budove rektorátu bukureštskej univerzity, kde členov jury prijal jej rektor *prof. dr. Gheorghe Ciuciu*, ktorý je profesorom matematiky. Od neho sa dozvedeli najdôležitejšie údaje o štruktúre univerzity s 8 fakultami. O cieľoch a organizačnej štruktúre rumunskej matematickej spoločnosti informoval v krátkom prejave jej podpredseda *akad. Caius Jacob*. Nasledovala prehliadka nových štvrtí takmer dvojmiliónovej rumunskej metropoly, kde sa prítomní mali možnosť presvedčiť, že tvrdenie o 10 kvetočoch vysadených v „Paríži východu“ na každého obyvateľa nie je nadnesené. Táto malá exkurzia sa skončila expresnou prehliadkou známeho bukureštského skanzenu „*Museul satului*“.

Po návrate z Bušteni a fázovo posunutom obedu na-

sledovala schôdzka jury s koordinátormi, ktorých bolo 18 — trojica pre každú úlohu. Na nej boli stanovené niektoré zásady pre hodnotenie riešení. Spoločné rokovanie jury s koordinátormi pokračovalo ešte v sobotu ráno. V jeho závere predseda jury prof. Cuculescu vyslovil zásadu, že žiak, ktorý vyriešil úlohu, hoci aj s chybami, mal by dostať za ňu aspoň polovicu možných bodov. Naopak ten, ktorý úlohu nevyriešil, by v žiadnom prípade nemal dostať viac než polovicu možných bodov.

Potom už nasledovala náročná a zodpovedná práca spojená s hodnotením a koordináciou, ktorá si vyžiadala zvyšok soboty (8. 7.) a celú nedeľu (9. 7.).

V pondelok 10. 7. predpoludním sa jury zišla na svoje záverečné zasadnutie. Pri jeho otvorení predseda jury prof. Cuculescu blahoželal akad. Mihocovi k 72. narodeninám, ktoré oslávil počas XX. MMO. Na programe rokovania bolo — ako je to na MMO obvyklé — najskôr schválenie hodnotení v tých prípadoch, keď nedošlo k dohode medzi koordinátormi a vedením delegácie. Tentoraz boli iba 3 také prípady a boli vyriešené pomerne rýchle. Potom nasledovali návrhy na udelenie špeciálnych cien za originálne riešenia úloh a po prestávke slúžiacej k tomu, aby sa členovia jury s riešeniami pred hlasovaním mohli podrobnejšie zoznámiť, sa rozhodovalo o ich udelení. Za riešenie 1., 4. a 5. úlohy neboli predložené žiadne návrhy, zo 4 návrhov na špeciálnu cenu za 2. úlohu neschválila jury ani jeden. Zo 6 návrhov za 3. úlohu prešli dva: fínskemu žiakovi Markkanenovi Markku a Holandanovi Marc Leeuwenovi a boli schvále-

né oba návrhy na špeciálnu cenu za riešenie 6. úlohy: Angličanovi Richardovi Ewen Borcherdsovi a vyššie menovanému holandskému žiakovi, ktorý takto získal dve špeciálne ceny aj napriek tomu, že na základe ďalšieho rozhodnutia jury dostal za celkový výsledok na XX. MMO len druhú cenu. Rozhodnutie o bodových hraniciach pre udelenie cien padlo tentoraz totiž až príliš rýchle a patrilo k najmenej presvedčivým rozhodnutiam jury XX. MMO. Priveľmi bolo poznamenané extrémom, do ktorého zašiel predseda jury prof. Cuculescu v snahe vyvarovať sa rezolútneho vedenia jury, ktoré mal v čerstvej pamäti z XIX. MMO. Rozhodovalo sa totiž prakticky len medzi dvoma predloženými návrhmi: juhoslovanským (I. cena od 40 do 32 bodov, II. 31—26, III. 25—22) a švédskym (I. 40—35, II. 34—27, III. 26—22) a pomerom hlasov 9 : 8 prešiel švédsky návrh, keď predseda jury sa nevyjadril, ale iba lakonicky konštatoval, že zaň hlasovali A, BG, GB, M, S, SF, TR, USA a VN. Stalo sa teda v dôsledku tohto rozhodnutia, že aj napriek čl. 14 org. poriadku XX. MMO, podľa ktorého počet udelených I., II. a III. cien má byť približne v pomere 1 : 2 : 3, bol prijatý návrh, kde tento pomer je 5 : 20 : 38 a jedným hlasom prepadol návrh s pomerom 11 : 20 : 32. Posledná časť rokovania jury bola venovaná rozprave o otázkach organizovania budúcich MMO, ktorú predseda zaradil do programu pod vplyvom vystúpenia vietnamského delegáta pri panelovej diskusii v prvý deň olympiády. Najviac diskutovanými otázkami boli viacnásobná účasť jedného žiaka na MMO a potreba akéhosi minimálneho tematického programu

MMO. Okrem toho československá delegácia doporučovala znížiť počet členov družstva vzhľadom na organizačné ťažkosti súvisiace s rastúcim počtom krajín zúčastňujúcich sa MMO a poľský delegát navrhoval, aby za miesta práce jury boli, pokiaľ možno, volené univerzitné centrá, v ktorých je k dispozícii knižnica s dostatkom matematickej literatúry. Šlo však, ako tomu ani inak nemohlo byť, len o akademickú debatu, bez prijímania záverov.

Chýbalo tentoraz tradičné vystúpenie delegáta krajiny, ktorá sa chystá usporiadať budúcu MMO. V kuloároch sa totiž hovorilo len o tom, že MMO v roku 1980 môže usporiadať Mongolsko i Veľká Británia a v roku 1981 USA, ale o MMO v roku 1979 sa nikto neuchádzal.

Večer v spoločenskej miestnosti hotela pre členov jury predviedol tance a piesne z rôznych oblastí Rumunska folklórny súbor v ľudových krojoch a potom nasledovala rozlúčková večera na záver spoločnej práce v Bušteni. Na nej akad. Mihoc poďakoval za aktivitu počas práce jury všetkým delegáciám, zvlášť Turecku, ktoré sa MMO zúčastnilo po prvý raz a vyslovil poľutovanie nad tým, že niektoré delegácie — pravidelní účastníci MMO — sa tejto jubilejnej olympiády nezúčastnili. Mal tým na mysli Maďarsko, NDR a ZSSR, ktoré na doterajších MMO patrili tradične k najúspešnejším. Z Budapešti na XX. MMO pricestoval redaktor *L. Csirmaz*, ktorý sa vydával za maďarského pozorovateľa a na slávnostnom otvorení i zakončení olympiády zaujal miesto za predsedníckym stolom. Podľa jeho informácií sa Maďarsko na XX. MMO starostlivo pripravilo, ale údaj-

ne nedostalo pozvánku. Podľa informácií usporiadateľov ministerstvá školstva NDR a ZSSR vysvetlili neúčast svojich delegácií krátkosťou času na ich prípravu pre oneskorené obdržanie pozvania. Každopádne však neúčast spomínaných delegácií bola pre XX. MMO ochudobnením.

Jednotlivé súťažné družstvá po svojom príchode do Bukurešti (prevažne v pondelok 3. 7.) boli ubytované v internáte Agronomického inštitútu Nicolae Balcescu. V utorok (4. 7.) predpoludním si vypočuli zasvätené informácie o histórii RSR a jej hlavného mesta, po ktorých nasledovala okružná jazda autokarom po Bukurešti zakončená prehliadkou národnej galérie RSR. Večer sa v klube mládeže stretli s predstaviteľmi stredoškolského oddelenia ÚV Zväzu komunistickej mládeže Rumunska a pozreli si kultúrny program, po ktorom nasledovalo spoločenské posedenie s hudbou a tancom.

V stredu (5. 7.) predpoludním si mohli pozrieť Museul satului a Múzeum prírodných vied G. Antipu a popoludní oddychovali, aby nazbierali dostatok fyzických i psychických síl pre náročnú súťaž, ktorá na nich v nasledujúcich dvoch dňoch čakala. V sobotu 8. 7. ich autobusy odviezli k Čiernemu moru, kde boli ubytovaní v Navodari pri Konstanci. Okrem kúpania v mori a pobytu na pláži si pozreli kultúrny program, ktorý pre nich pripravili pionieri v najväčšom pionierskom tábore v Európe v Navodari (8. 7. večer), akvárium s morskou faunou a flórou a archeologické múzeum (9. 7. predpoludním). V pondelok 10. 7. večer sa vrátili naspäť do Bukurešti, kde ich v utorok predpoludním čakalo

v aule agronomického inštitútu malé sympóziu, počas ktorého predviedli svoje riešenia účastníci MMO odmenení špeciálnymi cenami a tí, ktorí boli na špeciálne ceny navrhovaní. Na druhú polovicu sympózia sa dostali už aj členovia jury, ktorí sa ráno definitívne rozlúčili s Bušteni a na zvyšok rumunského pobytu boli ubytovaní v budove internátu bukureštského agronomického inštitútu. Už počas sympózia, ale najmä po jeho skončení dostávali súťažiaci od vedení svojich delegácií prvé informácie o výsledkoch, ktoré na XX. MMO dosiahli.

V utorok popoludní sa uskutočnila návšteva Múzea histórie RSR a večer slávnostné vyhlásenie výsledkov XX. MMO pôvodne plánované na nasledujúci deň. Po úvodnom slove akad. Mihoca nasledovalo odovzdanie diplomov a vecných cien, ktoré odmenení žiaci prevzali z rúk ministerky školstva RSR. Potom prehovoril vedúci delegácie Veľkej Británie prof. Lyness, ktorý za zahraničných účastníkov XX. MMO poďakoval hostiteľom za veľmi dobré podmienky, ktoré vytvorili pre žiakov i členov jury a na záver pozval delegácie všetkých zúčastnených krajín na XXI. MMO v roku 1979 do svojej vlasti. Za odmenených žiakov hovorili *Mark Kleiman* z USA (najúspešnejší účastník XX. MMO, keď jediný získal plný počet 40 bodov), Angličan *Alan John Dix* (vyslovil potešenie nad tým, že budúca MMO bude v jeho krajine) a najlepší z rumunských žiakov *Victor Nistor*. Ministerka školstva RSR prof. S. Gideaová vo svojom záverečnom slove opätovne zdôraznila význam matematiky pre rozvoj ostatných vied, najmä

prírodných a technických a zapriala všetkým účastníkom XX. MMO ďalšie úspechy v matematike i v osobnom živote. Za zmienku stojí, že okrem iných hostí sa slávnostného záveru XX. MMO zúčastnila tiež dcéra prezidenta RSR Zoja Ceaușescu, ktorá ako vedúca oddelenia aplikovanej matematiky v Ústave pre rozvoj vedy AV RSR bola členkou organizačného výboru olympiády.

Krátko po slávnosti v aule agronomického inštitútu sa všetci účastníci XX. MMO v bukureštskej „Sala Majestic“ zúčastnili na kultúrnom programe, v ktorom účinkoval Ústredný súbor pionierov RSR.

V stredu 12. 7. predpoludním sa v zasadačke MŠ RSR uskutočnilo stretnutie vedúcich delegácií a žiakov, ktorí na XX. MMO získali ceny s predstaviteľmi ÚV Zväzu komunistickej mládeže RSR, ktorému predsedala ministerka školstva s. prof. Gidea. Najskôr predseda jury prof. Cuculescu stručne zhodnotil výsledky XX. MMO, kde o. i. vyzdvihol najmladšieho čs. účastníka J. Nekovářa a Juhoslovana M. Bestvinu, ktorí by si boli zaslúžili 1. cenu, ale nedostali ju pre vyššie spomínané problematické rozhodnutie jury. Potom predseda ÚV ZKM odovzdal diplomy a vecné ceny niekoľkým účastníkom XX. MMO. Okrem najúspešnejšieho *Marka Kleimana* z USA a vyššie spomenutých dvoch, pre ktorých to mala byť zrejme satisfakcia, šlo ešte o 13ročného Švéda *J. Rodo*, ktorý bol najmladším účastníkom olympiády (v súťaži získal 16 bodov), najlepšieho z domácich *V. Nistora*, Bulharku *N. Ribarsku*, ktorá bola najúspešnejšou zo 4 dievčat súťažiacich na XX. MMO

(2 z BG, 1 z M, 1 z YU) a vedúceho delegácie VSR, ktorá mala najvyrovnanejšie družstvo, keď všetci jeho členovia získali v súťaži cenu. Za zahraničných účastníkov olympiády na stretnutí prehovoril vedúci delegácie USA prof. *S. L. Greitzer* a na záver odoslali účastníci stretnutia pozdravný telegram prezidentovi RSR N. Ceaușescuovi.

Večer po koncerte orchestra inžinierov bukureštskej polytechniky, ktorý sa pre účastníkov XX. MMO uskutočnil v rumunskom Atheneu a nahrávala ho aj rumunská televízia, sa v jedálni komplexu Agronomického inštitútu Nicolae Balcescu konala záverečná večera za účasti ministerky školstva a ďalších hostí. Vzhľadom na oneskorený začiatok (22.30) skončila až po polnoci vzájomnou rozlúčkou jednotlivých delegácií, ktoré od štvrtku rána (13. 7.) postupne opúšťali pohostinnú pôdu hlavného mesta Rumunska.

Delegácia ČSSR — jedna z najúspešnejších na MMO nielen za posledné roky, ale snáď v celej ich dvadsaťročnej histórii — odchádzala popoludní 13. 7. s takmer dvojhodinovým meškaním z bukureštského letiska Otopeni do hlavného mesta svojej vlasti. Jubilejná medzinárodná matematická olympiáda sa vyznačovala maximálnou snahou hostiteľov o vytvorenie optimálnych podmienok, čo sa im vo veľkej miere podarilo. Značnú pozornosť XX. MMO venovali rumunská tlač, rozhlas i televízia, ktorá pohotovo informovala o otvorení i slávnostnom závere súťaže.

2. VÝSLEDKY XX. MMO

Aj napriek tomu, že jury výberu šestice súťažných úloh venovala až neobvykle veľkú pozornosť, celkom sa jej nevydaril. Vybraný súbor pozostával totiž z trojice pomerne ľahkých (1., 4., 5.) a z trojice relatívne náročných úloh, z ktorých najmä 6. sa ukázala byť nad sily prevažnej väčšiny súťažiacich. Chýbali úlohy strednej obťažnosti, ako to v ankete po súťaži konštatovali všetci členovia nášho družstva a ako to nakoniec objektívne ukazuje tabuľka s prehľadom o počte účastníkov olympiády, ktorí získali ten-ktorý počet bodov za riešenie jednotlivých úloh.

Počet získaných bodov	ú. č. 1	ú. č. 2	ú. č. 3	ú. č. 4	ú. č. 5	ú. č. 6
8	—	—	20	—	—	8
7	—	10	2	—	—	0
6	72	14	3	—	98	0
5	13	9	12	96	8	1
4	5	24	16	3	2	4
3	12	5	13	4	5	5
2	11	10	15	7	3	9
1	12	16	20	8	10	42
0	7	44	31	14	6	63

Relatívna úspešnosť účastníkov XX. MMO pri riešení jednotlivých súťažných úloh je vyjadrená takto: 1. 74,1 %, 2. 37,4 %, 3. 38,4 %, 4. 79,7 %, 5. 84,2 % a 6. 15,2 %. V protiklade s názorom jury vyjadreným počtom bodov za úplné riešenie úloh sa ukázala byť najľahšou 5. úloha, zatiaľ čo 2. úloha bola pre súťažiacich

rovnako obťažná ako za náročnejšiu považovaná 3. úloha, najmä keď pri prijatej formulácii 3. úlohy bolo možné za ňu získať plný počet bodov mechanickým výpočtom funkčných hodnôt krok za krokom. Plne sa však potvrdilo, že 6. úloha je najnáročnejšia z celého súboru.

S jednotlivými úlohami si najlepšie poradili tieto družstvá: 1. Rumunsko, ktoré stratilo len 2 body, 2. ČSSR a VSR, ktoré získali po 37 bodov z 56 možných, 3. USA ziskom 47 bodov zo 64 možných, 4. ČSSR, Rumunsko, VSR a Juhoslávia s plným bodovým ziskom, 5. Bulharsko, Poľsko, Rumunsko, USA, VSR s plným bodovým ziskom a 6. Rumunsko so ziskom 36 bodov zo 64 možných.

Celkové výsledky XX. MMO sú uvedené v nasledujúcej prehľadnej tabuľke.

Veľký skok v porovnaní s XIX. MMO zaznamenalo družstvo hostiteľskej krajiny (v Belehrade skončilo so 122 bodmi na 15. mieste), ktoré plne využilo domáce prostredie po perfektnej príprave. Rumunská osmička bola totiž vybraná z 36 žiakov, ktorí sa po dva mesiace pripravovali po 6 hodín denne a absolvovali niekoľko výberových testov. Prijemne prekvapili tiež družstvá VSR a Kuby. Kubánski žiaci po prvý raz získali dve tretie ceny a hoci boli len 4, v bodovom súčte predstihli kompletne družstvá nováčka na MMO — Turecka i tradičného účastníka — Mongolska. V porovnaní s vlaňajškom sa zlepšili ČSSR i Francúzsko, slabší bol výsledok Holandska, Poľska i Bulharska. Ostatné družstvá si v podstate udržali predchádzajúce pozície.

Krajina	Počet získaných cien				Špec. cien	Súčet bodov	Neoficiál. poradie	Pozn.
	I.	II.	III.	Spolu				
A	—	3	2	5	—	174	9.	4 žiaci
BG	—	1	3	4	—	182	7.	
C	—	—	2	2	—	68		
CS	—	2	3	5	—	195	5.	
D	1	—	3	4	—	184	6.	
F	—	2	4	6	—	179	8.	
GB	1	2	2	5	1	201	3.	
M	—	—	—	—	—	61	16.	
NL	—	1	1	2	2	157	11.	
PL	—	—	2	2	—	156	12.	
R	2	3	2	7	—	237	1.	
S	—	—	1	1	—	117	14.	
SF	—	—	2	2	1	118	13.	
TR	—	—	—	—	—	66	15.	
USA	1	3	3	7	—	225	2.	
VN	—	2	6	8	—	200	4.	
YU	—	1	2	3	—	171	10.	

Z jednotlivcov dosiahol plný bodový zisk len Američan *N. Kleiman* a jediný bod stratil Angličan *R. E. Borchersds*. Bodové straty ostatných boli viac než dvojbodové.

Práca jury neprevýšila priemer a ako už z predchádzajúceho vyplýva, niektoré jej rozhodnutia boli poznamenané prílišnou opatrníckosťou po odbornej i jazykovej stránke pozoruhodne zdatného predsedu prof. Cuculescu. Jeho nespornou prednosťou boli tiež viacročné skúsenosti z práce jury MMO vo funkcii vedúceho rumunskej delegácie. Celkove nedošlo v zložení jury k podstatnejším zmenám, čo najlepšie vidno z nasledujúceho prehľadu:

Krajina	Vedúci delegácie — člen jury	Jeho zástupca
A	<i>Thomas Mühlgassner,</i> Pädagogische Akademie Eisenstadt	<i>Wolfgang Ratzinger,</i> Pädagogische Akademie Linz
BG	<i>Jordan Borisov Tabov</i> Matematický ústav AV, Sofia	<i>Dimo Serafimov Angelov</i> Centr. ústav ďalšieho vzdelávania učiteľov, Sofia
C	<i>Felix Recio Pacheco</i> Instituto de Super- ación Educacional Havana	—
CS	<i>Dr. Jozef Moravčík,</i> CSc., docent VŠD Žilina	<i>Dr. František Zítek,</i> CSc. MÚ ČSAV Praha
D	<i>Prof. dr. Arthur Engel,</i> Universität Frankfurt	<i>Horst Sewerin,</i> profesor Leibniz- Schule Frankfurt
F	<i>Claude Deschamps,</i> profesor Lycée Louis le Grande Paris	<i>Denis Gerll,</i> profesor Lycée Louis le Grande Paris
GB	<i>Robert Cranston</i> <i>Lyness,</i> inšpektor, Blackpool	<i>John William Hersee</i> School Mathematics Project, Bristol
M	<i>Uršincerengin</i> <i>Sanžmjatav</i> Univerzita Ulan Bator	<i>Saravin Miagmar</i> Ústav pedagogických vied Ulan Bator
NL	<i>Dr. Jan van de Craats</i> Mathematisch Instituut Rijksuniver- siteit Leiden	<i>Albert Willem Boon,</i> profesor gymnázia „Sorghvliet“, Leidschendam

Krajina	Vedúci delegácie — člen jury	Jeho zástupca
PL	<i>Andrzej Mąkowski,</i> Univerzita Varšava	<i>Maciej Bryński,</i> Univerzita Varšava
R	<i>Dimitrie</i> <i>Draghicescu,</i> Universitatea din Craiova	<i>Constantin Ottescu,</i> profesor Liceul de Ma- tematica si fizica nr. 6 Bucuresti
S	<i>Dr. Lars-Oke Lindahl,</i> Univerzita Uppsala	<i>Dr. Rune Gustavsson,</i> Univerzita Uppsala
SF	<i>Dr. Matti Lehtinen,</i> Univerzita Helsinki	<i>Dr. Erkki Pehkonen,</i> Univerzita Helsinki
TR	<i>Prof. Berki Yurtsever,</i> Univerzita Ankara	<i>Dilaver Cetin,</i> Matematický ústav Ankara
USA	<i>Prof. dr. Samuel</i> <i>L. Greitzer</i> Rutgers University, New Brunswick	<i>Prof. Murray</i> <i>S. Klamkin,</i> University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada
VN	<i>Le Hai Chau,</i> Ministerstvo školstva Hanoi	<i>Nguyen - Dang - Phat,</i> Pedagogický ústav č. 1, Hanoi
YU	<i>Mgr. Zoran Kadelburg</i> Univerzita Belehrad	<i>Dragoslav Ljubić,</i> profesor matemat. gymnázia „Veliko Vlahovič“, Belehrad

3. ČESKOSLOVENSKÁ ÚČASŤ NA XX. MMO

Družstvo pre jubilejnú MMO vybralo predsedníctvo ÚV MO z 12 účastníkov sústredenia v Bratislave (12. až 24. 6. 1978) hlavne na základe výsledkov samostatného riešenia úloh v tomto sústreďení, i keď prihliadalo k výsledkom II. a III. kola MO a korešpondenčného seminára, na základe ktorých boli účastníci sústredenia vybraní. Už pri nominácii družstva v PÚV MO sa konštatovalo, že je to jeden z najvyrovnanjších kolektívov, ktoré ČSSR na MMO reprezentovali, čo dosiahnuté výsledky jednoznačne potvrdili.

Príjemným prekvapením bol výkon najmladšieho člena družstva *J. Nekovářa*, ktorý počas pobytu v Bukurešti oslávil ešte len 15. narodeniny. Právom by si bol zaslúžil I. cenu, o ktorú ho pripravilo len vyššie komentované rozhodnutie jury. Veľmi blízko k I. cene mal aj *J. Kratochvíl*, čo by jeho štvrtej účasti na MMO bolo iste zodpovedalo. Potešiteľné je, že tohoročné družstvo nemalo v svojom strede vyloženého outsidera a všetci jeho členovia sa usilovali podať maximálny výkon. Možno povedať, že urobili všetko, čo bolo v ich silách, i keď by sa snáď od Z. Kalouska a I. Tureka, ktorí získali na XIX. MMO II., resp. III. cenu, pri druhom účinkovaní na MMO bolo dalo očakávať viac. I. Turek sa o III. cenu pripravil len zbytočnou stratou 3 bodov za riešenie 5. úlohy, keď sa odvolal na výsledok, ktorého správnosť nedokázal, bez citovania prameňa. Naši žiaci najviac stratili pri 6. a 3. úlohe, ktoré boli pre nich netradičné a v príprave družstva sa úlohám

Por. čís.	Meno a priezvisko trieda, škola	Počet bodov získaný za riešenie							Celkové poradie cena
		úl. č. 1	úl. č. 2	úl. č. 3	úl. č. 4	úl. č. 5	úl. č. 6	spolu	
1.	<i>Peter Filakovszky</i> 4. tr. G Ban. Štiavnica	3	6	2	5	6	0	22	56.—63. III. cena
2.	<i>Zdeněk Kalousek,</i> 4. tr. G Jablonec n. N.	6	0	4	5	6	0	21	64.—77.
3.	<i>Jan Kratochvíl,</i> 4. tr. G Pardubice	6	7	7	5	6	1	32	10.—11. II. cena
4.	<i>Mirko Navara,</i> 4. tr. G Praha, W. Piecka 2	2	5	1	5	6	1	20	78.—80.
5.	<i>Jan Nekovář,</i> 1. tr. G Praha, Arabská 14	6	5	8	5	6	4	34	6.—7. II. cena
6.	<i>Ilja Turek,</i> 4. tr. G Hradec Králové	6	4	0	5	3	1	19	81.—84.
7.	<i>Zdeněk Vavřín,</i> 4. tr. G Praha, Štěpánská 22	6	6	0	5	6	1	24	35.—46. III. cena
8.	<i>Milan Veščíček,</i> 4. tr. G Brati- slava, ul. ČA	6	4	2	5	6	0	23	47.—55. III. cena
Súčet družstva		41	37	24	40	45	8	195	

podobného druhu nevenovala dostatočná pozornosť. Ako družstvo bodovým ziskom za jednotlivé úlohy obsadili v 1. úlohe 7.—8., v 2. 1.—2., v 3. 9.—10, v 4. 1.—4., v 5. 6.—8. a v 6. 9.—10. miesto.

Znovu sa potvrdilo, že dve sústredenia (týždenné v apríli a dvojtyždenné v júni) a korešpondenčný seminár prinášajú na MMO svoje ovocie. Napriek niektorým kritickým pripomienkam to svorne konštatovali všetci členovia nášho družstva v bukureštskej ankete. Cesta k ďalšiemu zlepšeniu vedie cez odstránenie nedostatkov a zvýšenie cielavedomej systematičnosti v práci s talentami. Vplyv korešpondenčného seminára možno badať aj na zlepšení písomného prejavu našich žiakov, o ktorom sa pochvalne vyjadrovali tiež rumunskí koordinátori.

Družstvo tvorilo opravdu veľmi dobrý kolektív a úspešne reprezentovalo aj po spoločenskej stránke.

Čs. delegácia aktívne prispela aj k práci jury niekoľkými konštruktívnymi návrhmi, ktoré boli akceptované.

Možno preto účasť ČSSR na jubilejnej MMO celkove hodnotiť ako veľmi úspešnú a želať si, aby si i v budúcich rokoch udržala naša reprezentácia na MMO nastúpený pozitívny trend, ako to zodpovedá tradíciám a úrovni našej výchovnovzdelávacej sústavy.

4. RIEŠENIE SÚŤAŽNÝCH ÚLOH

Riešenie 1. úlohy: Z textu úlohy je zrejmé, že rozdiel

$$1978^n - 1978^m = 1978^m (1978^{n-m} - 1)$$

je deliteľný číslom $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Keďže 1978^m je zrejme párne číslo a $1978^{n-m} - 1$ číslo nepárne, musí platiť: $2^3/1978^m$, $5^3/1978^{n-m} - 1$. Pretože $1978 = 2 \cdot 989$, musí byť $m \geq 3$. Ďalej musí byť $1978^{n-m} \equiv 1 \pmod{5}$ čiže $(-2)^{n-m} \equiv 1 \pmod{5}$. Pretože $(-2)^2 = 4 \equiv -1 \pmod{5}$ a teda $(-2)^4 \equiv 1 \pmod{5}$, musí byť $n - m = 4k$, kde $k \geq 1$ je prirodzené číslo. Zostáva nám nájsť také najmenšie prír. číslo k , pre ktoré $125/1978^{4k} - 1$. Keďže $1978^4 \equiv (-22)^4 = (-11 \cdot 2)^4 = (121 \cdot 4)^2 \equiv (-4 \cdot 4)^2 = 256 \equiv 6 \pmod{125}$, platí kongruencia $1978^{4k} \equiv 1 \pmod{125}$ vtedy a len vtedy, keď $6^k \equiv 1 \pmod{125}$.

$$\text{Z toho, že } 6^k = (1 + 5)^k \equiv 1 + k \cdot 5 + \frac{k(k-1)}{2} \cdot 5^2$$

$\pmod{125}$ vyplýva, že číslo $5k [2 + 5(k-1)] \cdot \frac{1}{2}$ má byť deliteľné číslom 125. Číslo v hranatej zátvorke však pri žiadnom k nie je deliteľné číslom 5 a tak najmenšie $k = 25$ a $n - m = 100$. Pre minimálne $m = 3$ je teda $n = 103$ a súčet $m + n = 106$ je minimálnym súčtom požadovaných vlastností.

Riešenie 2. úlohy: Označme O stred danej gule $\mathbf{G}$ a R jej polomer, takže platí: $OA^2 = OB^2 = OC^2 = R^2$. Keďže $\vec{OQ} = \vec{OP} + \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}$ a podľa podmienok úlohy $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PA} \cdot \vec{PC} = \vec{PB} \cdot \vec{PC} = 0$, bude $|\vec{OQ}|^2 = |\vec{OP}|^2 + |\vec{PA}|^2 + |\vec{PB}|^2 + |\vec{PC}|^2 + 2(\vec{OP} \cdot \vec{PA} + \vec{OP} \cdot \vec{PB} +$

+ $\vec{PO} \cdot \vec{PC}$). Ak dosadíme do tejto rovnosti $\vec{PA} = \vec{OA} - \vec{OP}$, $\vec{PB} = \vec{OB} - \vec{OP}$, $\vec{PC} = \vec{OC} - \vec{OP}$, po jednoduchej úprave dostaneme $|OQ|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 - 2|OP|^2$ čiže $|OQ|^2 = 3R^2 - 2|OP|^2$, čo je pri pevnom P veličina konštantná. Z toho vyplýva, že skúmaná množina bodov leží na guľovej ploche so stredom O a polomerom $\sqrt{3R^2 - 2|OP|^2} > R$, pretože $|OP|^2 < R^2$.

Ukážeme teraz, že každý z bodov tejto guľovej plochy patrí vyšetrovanej množine bodov. Nech Q je ľubovoľný bod, pre ktorý platí: $|OQ| = \sqrt{3R^2 - 2OP^2}$. Guľová plocha s priemerom $|PQ|$ pretína povrch gule $\mathbf{G}$, pretože $|OP| < R < |OQ|$. Nech C je ľubovoľný pevný bod rezovej krivky a N k nemu protíľahlý vrchol pravouhlého rovnobežníka $PCQN$. Jednoduchým výpočtom sa ľahko dokáže, že pre polohové vektory vrcholov pravouhlého rovnobežníka platí: $|OP|^2 + |OQ|^2 = |OC|^2 + |ON|^2$, z čoho vyplýva: $|ON|^2 = |OP|^2 + (3R^2 - 2|OP|^2) - R^2 = 2R^2 - |OP|^2 > R^2$. Bod N leží teda mimo gule $\mathbf{G}$. Nech ϱ je rovina idúca bodom P kolmo na PC . Táto pretína guľu $\mathbf{G}$ v kružnici k . Bod N leží zrejme v rovine ϱ mimo kružnice k , kým bod P leží vo vnútri tejto kružnice. Z toho vyplýva, že kružnica s priemerom $|PN|$ zostrojená v rovine ϱ pretína kružnicu k . Jeden z priesečníkov označme B a nech A je vrchol pravouhlého rovnobežníka $PBNA$ protíľahlý bodu B . Zrejme platí: $|OA|^2 = |OP|^2 + |ON|^2 - |OB|^2 = |OP|^2 + 2R^2 - |OP|^2 - R^2 = R^2$, čo znamená, že aj bod A

leží na guli **G** a PQ je telesová uhlopriečka kvádra s hranami PA, PB, PC .

Riešenie 3. úlohy: Pretože postupnosti $\{f(n)\}, \{g(n)\}$ sú obe rastúce a množiny ich členov sú disjunktné, vzhľadom na rovnosť

$$g(n) = f(f(n)) + 1$$

platí zrejme pre každé prir. číslo n : $f(f(n)) = f(n) + n - 1$. (Od čísla $f(f(n))$ okrem menších hodnôt funkcie f je menších práve $n - 1$ hodnôt funkcie g .) Z toho vyplýva, že pre každé prir. číslo n je

$$g(n) = f(n) + n. \quad (1)$$

Z (1) máme, že $g(1) > 1$, preto $f(1) = 1$ a $g(1) = f(f(2)) + 1 = f(1) + 1 = 2$. Ďalej je zrejmé, že pre každé prir. číslo n platí: $g(n+1) - g(n) = f(n+1) - f(n) + 1 \geq \geq 2$. Preto $f(2) = 3$ a vzhľadom na (1) $g(2) = 3 + 2 = 5$. Postupným aplikovaním odvodených vzťahov dostávame: $f(3) = 4, f(4) = 4 + 2 = 6, f(6) = 6 + 3 = 9, f(9) = 9 + 5 = 14, f(14) = 14 + 8 = 22, f(22) = 22 + 13 = 35, f(35) = 35 + 21 = 56, f(56) = 56 + 34 = 90, f(90) = 90 + 55 = 145, f(145) = 145 + 89 = 234, f(234) = 234 + 144 = 378$.

Podľa definície je $g(35) = f(f(35)) + 1 = f(56) + 1 = 91$. Preto $f(57) = 92$ a ďalej $f(92) = 92 + 56 = 148, f(148) = 148 + 91 = 239, f(239) = 239 + 147 = 386$. Zrejme je $g(148) = f(f(148)) + 1 = f(239) + 1 = 387$. Preto $f(240) = 388$.

Iné riešenie (náčrt): Nech $\tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Dá sa

dokázať, že pre všetky prir. čísla n platí: $f(n) = [\tau n]$, kde $[c]$ znamená celú časť čísla c ; $f(1) = [\tau] = 1$ a vzhľadom na (1) je $g(n) = [\tau n] + n = [(\tau + 1)n]$. Ukážeme, že takto definované postupnosti $\{f(n)\}$, $\{g(n)\}$ sú disjunktné a pokrývajú celú množinu prirodzených čísel. Ak označíme $F(m)$ počet prvkov (kardinálne číslo) množiny $\{n | n \geq 1, [\tau n] \leq m\}$ a $G(m)$ počet prvkov množiny $\{n | n \geq 1, [(\tau + 1)n] \leq m\}$, kde m je ľubovoľné pevné prir. číslo, ľahko sa ukáže, že

$$\begin{aligned} \frac{m+1}{\tau} - 1 < F(m) < \frac{m+1}{\tau}, \\ \frac{m+1}{\tau+1} - 1 < G(m) < \frac{m+1}{\tau+1} \end{aligned} \quad (2)$$

a keďže $\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau+1} = 1$, sčítaním nerovností (2) dostaneme

$$m - 1 < F(m) + G(m) < m + 1,$$

z čoho vyplýva $F(m) + G(m) = m$, čím je naše tvrdenie dokázané. Z toho, že $\tau \cdot 240 = 120(\sqrt{5} + 1) = 388,3$ hneď máme $f(240) = 388$.

Pozn.: Úlohu bolo možné riešiť aj zostavením tabuľky funkčných hodnôt funkcií f a g pre argumenty od 1 do 240, ako to o. i. urobili aj naši žiaci J. Nekovář (bez chyby) a J. Kratochvíl (s prepisom pri číslovaní argumentov).

Riešenie 4. úlohy (podľa riešenia Z. Kalouska). Označme D dotykový bod kružnice opísanej trojuholníku

ABC a kružnice prechádzajúcej bodmi P, Q so stredom M na osi uhla BAC . Keďže D leží na osi uhla BAC a teda aj na priamke prechádzajúcej stredom kružnice opísanej $\triangle ABC$, je $\sphericalangle ABD = 90^\circ$. Z toho vyplývajú nasledujúce relácie

$$\triangle AKS \sim \triangle APM \sim \triangle ABD, \quad \triangle APS \sim \triangle ABL.$$

Je preto

$$|KS| : |PM| = |AS| : |AM|,$$

$$\text{z čoho } |KS| = |PM| \cdot \frac{|AS|}{|AM|};$$

$$\begin{aligned} \text{rovnako z toho, že } |SL| : |AS| &= (|AB| - |AP|) : |AP| = \\ &= |MD| : |AM| \text{ máme hneď, že } |SL| = |MD| \cdot \frac{|AS|}{|AM|} \end{aligned}$$

Keďže $|MP| = |MD|$, dostávame z posledných dvoch rovností: $|KS| = |SL|$. Pretože však uhly AKS a SLB sú pravé, môžu byť body K, L dotykovými bodmi kružnice so stredom v bode S a priamok AB , resp. BC a vzhľadom na uvedenú rovnosť oboch úsečiek je to kružnica vpísaná trojuholníku ABC , ako sme mali dokázať.

Riešenie 5. úlohy: Nech $a_{k+1} \geq a_k$ pre nejaké prir. číslo k . Jednoduchým výpočtom sa dostane, že potom

$$\begin{aligned} \frac{a_k}{k^2} + \frac{a_{k+1}}{(k+1)^2} - \left(\frac{a_{k+1}}{k^2} + \frac{a_k}{(k+1)^2} \right) &= \\ &= \frac{(a_{k+1} - a_k)[k^2 - (k+1)^2]}{k^2(k+1)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že súčet $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2}$ bude minimálny, ak postupnosť $\{a_k\}$ bude rastúca. V takom prípade však pre každé prír. číslo k zrejme platí: $a_k \geq k$. Preto

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n k \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

čo sme mali dokázať.

Riešenie 6. úlohy: Predpokladajme, že tvrdenie úlohy nie je pravdivé. Rozdeleniu členov spoločnosti podľa jednotlivých krajín zodpovedá rozklad množiny 1, 2, 3, ..., 1978 na 6 disjunktných podmnožín. Vzhľadom na to, že

$$\frac{1978}{6} = 329 + \frac{2}{3},$$

aspoň jedna z týchto podmnožín — označme ju A , obsahuje aspoň 330 prvkov: $a_1 < a_2 < \dots < a_{330}$. Utvorme rozdiely $a_{330} - a_i$, $i = 1, 2, \dots, 329$. Vzhľadom na náš predpoklad nepatrí z nich žiaden do A a pretože $\frac{329}{5} = 65 + \frac{4}{5}$, aspoň 66 z nich patrí do nejakej podmnožiny z nášho rozkladu, ktorú označíme B . Ak sú to rozdiely $a_{330} - a_{i_1} < a_{330} - a_{i_2} < \dots < a_{330} - a_{i_{66}} < \dots$, potom rozdiely $a_{i_j} - a_{i_{66}} = (a_{330} - a_{i_{66}}) - (a_{330} - a_{i_j})$, $j = 1, 2, \dots, 65$ nepatria do A ani do B . Z toho, že $65 : 4 = 16 + \frac{1}{4}$ vyplýva, že aspoň 17 z nich patrí do podmnožiny C . Ak z prvkov množiny C utvoríme rozdiely podľa vyššie popísaného algoritmu, bude z nich aspoň 16 takých, ktoré nepatria do žiadnej

z množín A, B, C . No, $16 : 3 = 5 + \frac{1}{3}$, teda aspoň 6 z nich bude patriť do podmnožiny z rozkladu, ktorú označíme D . Z rozdielov prvkov tejto množiny bude aspoň 5 takých, ktoré nepatria do žiadnej z podmnožín A, B, C, D a keďže $5 : 2 = 2 + \frac{1}{2}$, budú aspoň 3 z nich v nejakej podmnožine E . Ich dva rozdiely budú patriť podmnožine F . Rozdiel prvkov množiny F však nebude patriť do žiadnej z podmnožín A, B, C, D, E, F , čo je spor s predpokladom, že tvoria úplný rozklad množiny $1, 2, \dots, 1978$. Z toho vyplýva správnosť tvrdenia úlohy, ktoré bolo treba dokázať.

POZNÁMKY

POZNÁMKY

POZNÁMKY

Edice Pomocné knihy pro žáky

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
dr. Leo Boček, CSc., doc. dr. Lev Bukovský, CSc.,
prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.
a doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.

DVACÁTÝ SEDMÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1980 — Počet stran 188

Odpovědný redaktor: Stanislav Horák

Výtvarný redaktor: Václav Hanuš

Technická redaktorka: Hana Kubšová

Vytiskl MÍR, nov. závody, n. p., závod 1,
Václavské nám. 15, Praha 1

AA 6,09 (5,64 AA textu, 0,45 AA grafiky) — VA 6,53

Náklad 3600 výtisků

Tematická skupina a podskupina 03/2

Cena brožovaného výtisku 8,00 Kčs

505/21, 825

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 5—42—14/27

14—686—80

Kčs 8,00

**matematická
olympiáda**



SPN

5 - 42 - 14/27

14 - 686 - 80

03/2

Kčs 8,00