

28. ročník matematické olympiády

Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); Jan Vyšín (editor); František Zítek (editor): 28. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404708>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



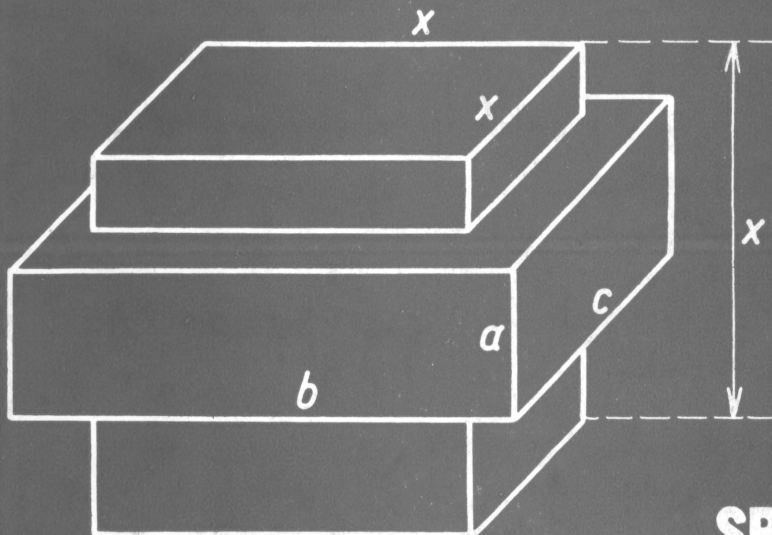
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

115 67 Praha 1, Žitná 25

telefon 22 66 01 - 3

XXVIII. ročník matematické olympiády



SPN

DVACÁTÝ OSMÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ
OLYMPIÁDY

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali
prof. dr. Jozef Moravčík, CSc., dr. Leo Boček, CSc.,
doc. dr. Lev Bukovský, CSc.,
dr. Antonín Vrba, CSc., doc. Jan Vyšín, CSc.,
dr. František Zítek, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1981

Obsah

Předmluva	5
O průběhu XXVIII. ročníku MO	9
Kategorie Z	33
Přípravné úlohy I. kola	33
Soutěžní úlohy I. kola	38
Úlohy II. kola	44
Úlohy III. kola v ČSR	49
Úlohy III. kola v SSR	50
Kategorie C	52
Přípravné úlohy I. kola	52
Soutěžní úlohy I. kola	59
Úlohy II. kola	68
Kategorie B	73
Přípravné úlohy I. kola	73
Soutěžní úlohy I. kola	81
Úlohy II. kola	96
Kategorie A	104
Přípravné úlohy I. kola	104
Soutěžní úlohy I. kola	113
Úlohy II. kola	128
Úlohy III. kola	136
Korespondenční seminář MO	146
Zpráva o XXI. MMO	153

Milí riešitelia a spolupracovníci matematickej olympiády,

otvárate ročenku XXVIII. ročníka matematickej olympiády, ktorý sa konal v školskom roku 1978/79. Nájdete v nej okrem prehľadu o organizácii a výsledkoch súťaže úlohy tohto ročníka s riešeniami a ako obvykle tiež podrobnú správu o XXI. medzinárodnej matematickej olympiáde, ktorá sa uskutočnila v júli 1979 vo Westfield College v Londýne. Po 20 rokoch svojej úspešnej existencie sa po prvý raz toto medzinárodné meranie síl matematických nádejí konalo mimo európskej pevniny a zdá sa, že aj v nasledujúcich dvoch rokoch budú jeho usporiadateľmi zeme mimo kontinentu, na ktorom sa začala písať história medzinárodných matematických olympiád. V osobe austrálskeho pozorovateľa dostal na MMO zastúpenie aj posledný svetadiel. I to je dokladom, že v celom svete vzrastá význam starostlivosti o matematické talenty a pozornosť venovaná hľadaniu najefektívnejších metód ich prípravy a vyučovaniu matematiky vôbec.

Nás môže tešiť skutočnosť, že na XXI. MMO česko-slovenský účastník opäť po jedenástich rokoch získal prvú cenu, keď nestratil v súťaži ani jediný bod. Družstvo ako celok v neoficiálnom hodnotení krajín potvrdilo svoj štandard z posledných rokov. Po prvý raz sa v ňom výraznejšie presadili žiaci matematických gymnázií vytvorených pred piatimi rokmi z podnetu ústredného výboru matematickej olympiády. Úspechy žiakov týchto gymnázií v MO začínajú nadobúdať už také rozmery, že medzi pracovníkmi v olympiáde sa stále nástojčivejšie ozývajú hlasy po ich oddelení od ostatných riešiteľov buď zriadením ďalšej kategórie alebo ich osobitným klasifikovaním vo všetkých jestvujúcich kategóriách. Ukazuje sa, že ÚVMO bude musieť v najbližšom období venovať tejto otázke zvýšenú pozornosť, aby tak predišiel znechuteniu práce v MO žiakom, ale najmä učiteľom nematematických gymnázií a ostatných stredných škôl. Potešiteľné na týchto starostiach je však to, že matematické gymnáziá konečne začínajú plniť úlohu, ktorú dostali do vienka pri svojom vzniku: sústreďovať matematické talenty a ich nadanie v matematike a fyzike pod odborným vedením cielavedome rozvíjať.

Ešte jeden problém súvisiaci s prácou v MO pútal na seba v uplynulom ročníku zvýšenú pozornosť — prípravné úlohy. Ich zaraďovaním chceme v súlade s účelom MO zakotvenom v organizačnom poriadku orientovať záujem riešiteľov na štúdium určitých častí školskej matematiky, viesť ich k osvojovaniu špecifických metód riešenia náročnejších úloh a k prehĺbovaniu matematických znalostí štúdiom vhodných zväzkov edície *Škola mladých matematikov* a ročníkov predchádzajúcich ročníkov MO. To, že úspešné

riešenie prípravných úloh nie je podmienkou pre postup do ďalších kôl súťaže, má však za následok ich podceňovanie nielen zo strany riešiteľov, ale aj od učiteľov, ktorí majú viesť prípravu k MO. Dotazníková anketa na celoštátnom sústreďení riešiteľov MO a FO i medzi ďalšími riešiteľmi olympiády potvrdila, že v prípravnom období sa v značnom počte prípadov na školách pracuje s riešiteľmi málo systematicky, riešenia prípravných úloh sa od nich nevyžadujú a aj tam, kde ich žiaci odovzdajú, len zriedka ich učiteľ zoznámi s ich rozborom a upozorní na chyby. Logickým dôsledkom tohto stavu je relatívne veľký počet neúspešných riešiteľov v krajských kolách, kde si klauzúrna forma súťaže vyžaduje samostatné použitie vedomostí osvojených v prípravnom období.

V tejto súvislosti sa žiada pripomenúť, že naša takmer tridsaťročná súťaž v riešení náročnejších matematických úloh nie náhodou nesie meno blízke názvu športových súťaží pútajúcich na seba každé štyri roky pozornosť svetovej a nielen športovej verejnosti. Iste každý chápe, že nádeje na zisk medailí zo športových olympiád si môže robiť len ten, kto pod vedením odborných trenérov venuje svojej disciplíne desiatky a stovky tréningových hodín. Ťažšie sa však vžíva, že v matematickej olympiáde je situácia podobná, že aj tu vedie k úspechu len samostatné riešenie nielen súťažných úloh, ktorých je pomerne málo, ale aj systematický tréning v celom prípravnom období v rámci ktorého riešenie prípravných úloh je iba nevyhnutným minimom. Na rozdiel od športových súťaží však MO má za cieľ nielen výchovu k vytrvalosti a systematickosti, ale pomáha získať vedomosti veľmi osožné pre ďalšie štúdium

na vysokej škole i úspešné uplatnenie v praktickom živote.

Prajeme preto riešiteľom MO a ich učiteľom, aby si vo vytrvalosti a cieľavedomom tréningu dokázali brať vzor od športovcov pripravujúcich sa v čase, keď píšeme tieto riadky, na moskovskú olympiádu a od ich trénerov. Sme presvedčení, že potom sa určite dostaví zaslúžený úspech nielen v matematickej olympiáde, ale predovšetkým v každodennom praktickom živote, pre ktorý sa terajší olympionici pripravujú svojím štúdiom i súťažou v riešení matematických úloh. Ak väčšina riešiteľov a pracovníkov v MO bude takto pristupovať k našej súťaži, potom MO nielen splní svoje výchovnovzdelávacie poslanie, ale nebude ani treba čakať ďalších jedenásť rokov na výraznejší úspech československého reprezentanta na medzinárodnom fóre.

Ústredný výbor matematickej olympiády

O průběhu XXVIII. ročníku matematické olympiády

1. ORGANIZACE SOUTĚŽE

Pořadateli XXVIII. ročníku matematické olympiády byla stejně jako v minulých letech *ministerstva školství ČSR a SSR, Matematický ústav ČSAV v Praze (MÚ ČSAV), Jednota československých matematiků a fyziků (JČSMF), Jednota slovenských matematiků a fyziků (JSMF) a Socialistický svaz mládeže (SSM)*. Soutěž byla řízena ústředním výborem matematické olympiády (ÚV MO) a dále krajskými a okresními výbory matematické olympiády (KV MO, OV MO).

Žáci soutěžili ve čtyřech kategoriích: v kategorii A žáci III. a IV. ročníků středních škol, v kategorii B žáci II. ročníků středních škol a v kategorii C žáci I. ročníků. V kategorii Z soutěžili žáci 8. a 9. tříd základních devítiletých škol. Se souhlasem KV MO může žák soutěžit i v kategorii určené pro žáky vyšších ročníků.

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Na závěr minulého ročníku MO odstoupil z funkce jednatele ÚV MO dr. Jiří Mída, který tuto funkci zastával 13 let. Předsednictvo ÚV MO mu poděkovalo za jeho obětavou práci pro úspěšný průběh mnoha ročníků MO a popřálo mu úspěch na pracovišti a ve funkci výkonného redaktora časopisu *Rozhledy matematicko-fyzikální*. Pro práci jednatele ÚV MO se podařilo získat dr. A. Vrbu, CSc., takže ústřední výbor matematické olympiády pracoval v průběhu jejího XXVIII. ročníku ve složení:

předseda: *doc. dr. Jozef Moravčík, CSc., VŠD, Žilina*

místopředsedové: *doc. Jan Vyšín, CSc., MÚ ČSAV, Praha*

dr. František Zítek, CSc., MÚ ČSAV, Praha

jednatelé: *dr. Leo Boček, CSc., MFF UK, Praha*

dr. Antonín Vrba, CSc., MÚ ČSAV, Praha

zástupce MŠ ČSR: *Václav Šůla, Praha*

zástupce MŠ SSR: *dr. Júlia Lukátšová, Bratislava*

zástupce ÚV SSM: *Jana Pomazalová, gymnázium, Brno,*
tř. kpt. Jaroše

ostatní členové:

dr. František Běloun, Praha

dr. Ladislav Berger, Žilina

doc. dr. Lev Bukovský, CSc., přírodovědecká fakulta UPJŠ,
Košice

Milan Cirjak, KPÚ, Prešov

Petr Fabinger, pedagogická fakulta UK, Praha

prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., MÚ ČSAV, Praha

dr. Ivan Korec, CSc., přírodovědecká fakulta UK, Bratislava

dr. Karol Križalkovič, CSc., pedagogická fakulta, Nitra

doc. dr. Alois Kufner, CSc., MÚ ČSAV, Praha

Olga Maříková, gymnázium, Praha 10, Voděradská

Milan Maxian, gymnázium A. Markuša, Bratislava

dr. Jiří Mída, pedagogická fakulta UK, Praha

akademik Josef Novák, MÚ ČSAV, Praha

doc. dr. Aleš Pultr, CSc., MFF UK, Praha

Vítazoslav Repáš, gymnázium J. Hronca, Bratislava

Stanislav Rypáček, gymnázium, Praha 9 - Prosek

dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV, Praha

ing. Oldřich Skopal, gymnázium, Brno, tř. kpt. Jaroše

dr. Jiří Šídlo, gymnázium, Praha 3, Sladkovského nám.

Miloslav Šmerda, Brno

prof. dr. Miloslav Zedek, přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Dále jsou členy ÚV MO předsedové krajských výborů MO:

Praha: prof. dr. Karel Drbohlav, DrSc., MFF UK, Praha

Středočeský kraj: Ludmila Tréglová, gymnázium, Říčany

Jihočeský kraj: dr. ing. Lada Vaňatová, pedagogická fakulta, České Budějovice

Západočeský kraj: Věra Rádlová, gymnázium J. Fučíka, Plzeň

Severočeský kraj: Jiří Slavík, gymnázium, Teplice

Východočeský kraj: dr. Josef Kubát, gymnázium, Pardubice

Severomoravský kraj: dr. Vladimír Vlček, přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Jihomoravský kraj: *dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT, Brno*
Bratislava: *dr. Tomáš Hecht, přírodovědecká fakulta UK,*
Bratislava

Západoslovenský kraj: *doc. dr. Ondrej Šedivý, CSc., pe-*
dagogická fakulta, Nitra

Středoslovenský kraj: *dr. Pavel Kršňák, CSc., pedagogic-*
ká fakulta, Banská Bystrica

Východoslovenský kraj: *dr. Martin Gavalec, přírodově-*
decká fakulta UPJŠ, Košice

Pracovní předsednictvo ÚV MO (PÚV MO) tvořili
(v abecedním pořadí): *dr. Leo Boček, CSc., doc. dr. Lev*
Bukovský, CSc., prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc.,
dr. Júlia Lukátšová, doc. dr. Jozef Moravčík, CSc., Jana
Pomazalová, Vítazoslav Repáš, dr. Jiří Sedláček, CSc.,
Václav Šula, dr. Antonín Vrba, CSc., doc. Jan Vyšín, CSc.,
dr. František Zítek, CSc.

3. SCHŮZE ÚV MO

V průběhu XXVIII. ročníku MO se konala dvě zasedání ÚV MO. *Podzimní* se uskutečnilo 4. a 5. prosince 1978 v Praze a hlavními body programu byly zhodnocení průběhu 27. ročníku MO a spolupráce se Socialistickým svazem mládeže, hlavně v souvislosti s novou soutěží SSM pro středoškoláky — středoškolskou odbornou činností (SOČ). *Ľarní zasedání* ÚV MO se konalo při příležitosti celostátního kola MO kategorie A v Budmericích. Nejzávažnějšími body programu byly diskuse o průběhu XXVIII. ročníku MO, příprava XXIX. ročníku MO a vý-

měna zkušeností a návrhů ke krajským i celostátním soustředěním nejúspěšnějších účastníků MO. Předsednictvo ÚV MO se scházelo pravidelně alespoň jednou měsíčně a kromě organizačního zajištění MO (včetně ediční činnosti) projednávalo hlavně přípravu úloh jednotlivých kol MO.

4. PRŮBĚH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

Organizace jednotlivých kol soutěže byla opět stejná jako v předcházejících letech. V *I. kole* byl termín odevzdání čtyř přípravných úloh pro všechny kategorie stanoven na 15. listopad 1978. O postupu do druhého kola rozhoduje pouze klasifikace úloh soutěžních. Termín jejich odevzdání v kategoriích A a Z byl částečně narušen mimořádnými prázdninami na školách všech stupňů. Z téhož důvodu muselo být také odloženo konání *II. kola* MO kategorie Z na 28. únor 1979. V kategorii A se *II. kolo* konalo 24. února 1979 a v kategoriích B a C 7. dubna 1979. *Třetí — krajské kolo* MO kategorie Z se konalo péčí KV MO v ČSR rovněž 7. dubna 1979, v SSR 26. května 1979. *Třetí — celostátní kolo* MO kategorie A XXVIII. ročníku MO se konalo v Trnavě ve dnech 28.—30. dubna 1979. Slavnostní zahájení proběhlo v aule pedagogické fakulty UK. Zúčastnili se ho místopředseda KNV západoslovenského kraje ing. Andrej Bocko, inspektorka MŠ SSR dr. Júlia Lukátšová, krajský školní inspektor Bohumír Moravčík, okresní školní inspektor Milan Horváth a vedoucí katedry matematiky pedagogické fakulty v Trnavě s. Jozef Bajan. Ti všichni se též nemalou měrou zasloužili o úspěšný průběh

III. kola MO, jehož zajištění bylo značně zkomplikováno nutným přesunutím z Nitry do Trnavy. Z členů KV MO v Nitře a pracovníků pedagogických fakult v Nitře a Trnavě se nejvíce zasloužili o hladkou organizaci III. kola XXVIII. ročníku MO dr. Anton Cuninka, dr. Karol Križalkovič, CSc., doc. dr. Ondrej Šedivý, CSc., dr. Oliver Židek a dr. O. Ralík. Vlastní soutěž se konala též na pedagogické fakultě v Trnavě, soutěžící byli ubytováni v ne-dalekém žákovském domově. Organizátoři pro ně zajistili též návštěvu kulturního programu, na kterém vystoupili bratislavští umělci M. Lasica a J. Satinský. Celostátního kola MO se zúčastnilo všech 80 pozvaných žáků, mezi nimiž bylo 8 dívek.

5. POMOCNÉ AKCE

K úspěšnému umístění našich žáků v domácí i mezinárodní matematické olympiádě napomáhá mnoho akcí pořádaných jak ústředním výborem MO, tak okresními a krajskými výbory MO. Z akcí ÚV MO to byl ve školním roce 1978—79 *korespondenční seminář*, o kterém píšeme podrobně na jiném místě, dále tzv. *pražský seminář*, konaný na gymnáziu v Praze 2, ul. W. Piecka aj. V průběhu roku se konala též *tři celostátní soustředění*: soustředění úspěšných řešitelů matematické a fyzikální olympiády nižších ročníků středních škol v Čáslavi ve dnech 30. 6. až 13. 7. 1979 a dvě soustředění pro přípravu na MMO. První se konalo ve dnech 1.—7. dubna 1979 ve Štíříně, druhé ve dnech 6.—20. června 1979 v Praze.

6. STUDIJNÍ LITERATURA

Základní informační literaturou pro účastníky MO jsou *letáky* MO, které vydává Státní pedagogické nakladatelství v Praze a Slovenské pedagogické nakladateľstvo v Bratislavě. Mimoto otiskují úlohy MO též *Rozhledy matematicko-fyzikální*. O každém ročníku MO vychází v SPN Praha *ročenka*, zatím vyšel již svazek „XXVI. ročník MO“. V edici *Škola mladých matematiků* (ŠMM) vydává ÚV MO v nakladatelství Mladá fronta knížky, určené hlavně našim olympionikům. Z posledně vydaných svazků uvádíme:

svazek 40 — *Antonín Vrba*: Princip matematické indukce

41 — *Bohdan Zelinka*: Rovinné grafy

42 — *Ladislav Beran*: Uspořádané množiny

43 — *Jiří Jarník*: Posloupnosti a řady

44 — *Bohdan Zelinka*: Matematika hrou i vážně

7. KONKURS ÚLOH MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

JČSMF a JSMF vyhlásily v roce 1966 konkurs na úlohy MO, který stále probíhá. Je zájem hlavně o původní úlohy vhodné pro nižší kategorie, úlohy modernizované matematiky a jednoduché úlohy aplikované matematiky. Návrhy úloh zašlete na adresu ÚV MO ve dvou exemplářích, za přijatou úlohu se vyplácí odměna 50,— Kčs, za zvlášť kvalitní úlohy i více. Přijetím úlohy získává ÚV MO právo úlohu upravit a autor na sebe bere závazek, že úlohu utají.

TABULKA 1

Počty soutěžících v kategorii A

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	100	98	87	30
Středočeský	150	122	104	11
Jihočeský	71	65	54	6
Západočeský	49	39	34	8
Severočeský	118	96	93	12
Východočeský	83	65	59	10
Severomoravský	118	115	111	19
Jihomoravský	102	89	82	8
Bratislava	167	153	142	15
Západoslovenský	193	168	159	6
Středoslovenský	98	83	82	9
Východoslovenský	81	73	73	12
Celkem	1330	1166	1080	146

S ... počet všech soutěžících

Ú ... počet úspěšných řešitelů

TABULKA 2

Počty soutěžících v kategoriích B

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	73	50	47	12
Středočeský	75	66	56	2
Jihočeský	87	59	49	3
Západočeský	37	28	27	2
Severočeský	85	76	70	5
Východočeský	57	45	39	12
Severomoravský	81	72	63	6
Jihomoravský	141	115	110	9
Bratislava	76	29	29	6
Západoslovenský	139	134	124	4
Středoslovenský	81	73	70	9
Východoslovenský	126	111	61	6
Celkem	1058	858	745	76

S ... počet všech soutěžících

Ú ... počet úspěšných řešitelů

TABULKA 3

Počty soutěžících v kategorii C

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	95	86	81	52
Středočeský	127	107	98	18
Jihočeský	125	101	79	10
Západočeský	123	59	48	12
Severočeský	122	104	93	11
Východočeský	198	115	101	15
Severomoravský	121	119	115	32
Jihomoravský	204	162	141	20
Bratislava	115	91	85	36
Západoslovenský	278	220	199	24
Středoslovenský	117	107	104	31
Východoslovenský	260	210	207	46
Celkem	1885	1481	1351	307

S ... počet všech soutěžících

Ú ... počet úspěšných řešitelů

TABULKA 4

Počty soutěžících v kategoriích Z

KRAJ	I. kolo		II. kolo		III. kolo	
	S	Ú	S	Ú	S	Ú
Praha	1231	862	612	148	34	26
Středočeský	1012	488	443	84	27	18
Jihočeský	1150	542	378	47	36	25
Západočeský	1204	468	360	21	13	9
Severočeský	1252	504	359	63	24	16
Východočeský	1169	792	529	86	38	21
Severomoravský	1210	594	492	67	65	30
Jihomoravský	2063	1107	872	103	40	36
Bratislava	754	417	396	36	33	10
Západoslovenský	1715	1162	993	97	40	29
Středoslovenský	1353	825	715	39	18	8
Východoslovenský	1909	1051	769	134	46	17
Celkem	16022	8812	6918	925	414	245

S ... počet všech soutěžících

Ú ... počet úspěšných řešitelů

VÝSLEDKY III. KOLA KATEGORIE A
XXVIII. ROČNÍKU MO

Vítězové

1. *Josef Tkadlec*, 4. c, Bílovec
2. *Jan Nekovář*, 2. d, Praha 2, W. Piecka
- 3.—5. *Jozef Jirásek*, 4. a, Košice, Šmeralova ul.
Ladislav Kubini, 3. b, Bardejov
Otto Ritter, 4. d, Praha 2, W. Piecka
- 6.—7. *Jaroslav Hančl*, 4. c, Bílovec
Radan Kučera, 4. a, Brno, Koněvova
- 8.—10. *Vladimír Burjan*, 4. a, Bratislava, Červenej armády
Miroslav Chlebík, 4. d, Čadca
Ladislav Mečír, 4. b, Prievidza
- 11.—13. *Jiří Kuřina*, 4. g, Hradec Králové
Aleš Nekvinda, 3. b, Liberec
Aleš Toufar, 4. a, Opava
14. *Peter Poláčik*, 4. a, Bratislava, Červenej armády
- 15.—17. *Petr Couf*, 1. d, Praha 2, W. Piecka
Petr Savický, 4. d, Praha 2, W. Piecka
Tomáš Vlasák, 4. a, Pardubice
- 18.—19. *Jiří Pech*, 4. a, Praha 9 - Prosek
Robin Thomas, 3. d, Praha 2, W. Piecka

Ostatní úspěšní řešitelé

- 20.—22. *Miroslav Ploščica*, 3. a, Stará Ľubovňa
Pavel Töpfer, 4. a, Mladá Boleslav
Stanislav Vaněček, 3. d, Praha 2, W. Piecka
- 23.—25. *Jozef Bednárík*, 2. a, Bratislava, Červenej armády
Katarína Dudičová, 4. c, Prešov, T. Ševčenka
Zenon Starčuk, 3. d, Brno, Koněvova
26. *Miroslav Engliš*, 1. d, Praha, W. Piecka
- 27.—30. *Jan Brousek*, 3. b, Klatovy
Ľaroslav Guričan, 4. a, Bratislava, Červenej armády
Ľan Hajič, 4. d, Praha 2, W. Piecka
Peter Vasil, 4. c, Michalovce
- 31.—32. *Miroslav Holeček*, 4. d, Frýdek-Místek
Tomáš Souček, 4. c, Praha 2, W. Piecka
33. *Hynek Černoch*, 3. f, Praha 8, Náhorní
- 34.—37. *Ľuraj Beniak*, 3. a, Bratislava, Červenej armády
Ľaromír Kulhánek, 4. a, Rumburk
Ľiří Mejzlík, 3. c, Bílovec
Vladimír Smotlacha, 4. c, Praha 6, Na okraji
- 38.—40. *Michal Fečkan*, 3. c, Nové Zámky
Ľaroslava Soukupová, 4. d, Praha 2, W. Piecka
Ľindřich Znamenáček, 4. c, Praha 6, Na okraji
- (Všichni jsou žáky gymnázií.)

SEZNAM NEJÚSPĚŠNĚJŠÍCH ŘEŠITELŮ

II. KOLA MO KATEGORIÍ A, B, C

Praha

Kategorie A

Jan Nekovář, 2. d, *Petr Savický*, 4. d, *Otto Ritter*, 4. d, *Stanislav Vaněček*, 3. d, *Robin Thomas*, 3. d, všichni Praha 2, W. Piecka; *Tomáš Halenka*, 4. d, Praha 3, Sladkovského nám.; *Jindřich Znamenáček*, 4. c, Praha 6, Na okraji; *Jan Placht*, 4. d, *Petr Couf*, 1. d, oba Praha 2, W. Piecka; *Zdenko Procházka*, 3. c, Praha 7, Nad štolou

Kategorie B

Jan Nekovář, *Roman Kamarýt*, *jiří Kopal*, *Michal Tvrдый*, všichni 2. d, Praha 2, W. Piecka; *Jan Němec*, 2. c, Praha 7, Nad štolou; *Anna Dusová*, 2. a, SPŠE Praha 1, Příkopy; *jiří Matoušek*, 2. a, Praha 10, Voděradská; *jiří Cendelín*, 2. a, Praha 4, Na Vítězné pláni; *Bořivoj Tydlitát*, 2. d, Praha 2, W. Piecka; *Jan Urban*, 2. a, Praha 10, Voděradská; *Ivan Wiesner*, 2. d, Praha 2, W. Piecka

Kategorie C

Jindřich Jindřich, 1. b, Praha 10, Voděradská; *Petr Boček*, 1. a, Praha 7, Nad štolou; *Štěpán Kvapilík*, *Luboš Kouba*, *Miroslav Engliš*, *Vladimír Lieberzeit*, *Pavel Freimann*, vši-

chni 1. d, Praha 2, W. Piecka; *Luděk Novotný*, 1. a, Praha 6, Parlérova; *Jan Sýkora*, 1. d, Praha 2, W. Piecka; *Martin Vopěnka*, *Tomáš Propeld*, oba 1. d, Praha 3, Sladkovského

Středočeský kraj

Kategorie A

Zdeněk Gášek, 3. a, Dobříš; *Pavel Töpfer*, 4. a, Mladá Boleslav; *Jiří Novotný*, 3. b, Poděbrady; *Vladimír Blažek*, 4. b, Mnichovo Hradiště; *František Hodys*, 4. b, Sedlčany; *Zdeněk Skalák*, 4. a, Benešov; *Stanislav Martínek*, 4. a, Slaný; *Zdeněk Somr*, 4. b, Sedlčany; *Šárka Zágorová*, 4. b, Benešov

Kategorie B

Milan Karban, V 2., SPŠ Kutná Hora; *Miroslav Sýkora*, 2. a, Příbram

Kategorie C

Karel Vacek, 1. a, Kolín; *Olga Plešingrová*, 1. a, Říčany; *Jana Semrádová*, 1. d, Kladno; *Bohumil Bednář*, 1. a, SPŠ Mladá Boleslav; *Petr Hovorka*, 1. a, Kolín; *Jana Doušová*, 1. b, Mělník; *Václav Červený*, 1. a, Vlašim; *Jiří Šimůnek*, 1. b, Kutná Hora; *Jana Mikulová*, 1. b, Slaný

Jihočeský kraj

Kategorie A

Libor Forst, 2. a, České Budějovice, Jírovcova; *Jaroslav Čech*, 4., Dačice; *Miroslav Šejna*, 4. BS, SPŠ Volyně; *Jaromír Němec*, 4. d, Tábor; *Lubomír Přech*, 3. a, České Budějovice, F. Šrámka; *Josef Němec*, 4. b, Tábor

Kategorie B

Jaroslav Hadrava, 2. b, Jindřichův Hradec; *Libor Forst*, 2. a, České Budějovice, Jírovcova; *Helena Průchová*, 2. c, Strakonice

Kategorie C

Miroslav Hucek, 1. b, SPŠS Strakonice; *Jan Holý*, 1. b, Pelhřimov; *Petr Husar*, 1. d, Strakonice; *Miroslav Doležal*, 1. b, Strakonice; *Milan Kondziolka*, E1 a, SPŠ Písek; *Ivo Straka*, 1. c, Jindřichův Hradec; *Robert Otruba*, 1. c, Strakonice; *Miroslav Chum*, 1. b, SPŠ Strakonice; *Jan Kratochvíl*, 1. c, Strakonice; *Miroslav Šmejkal*, E1 a, SPŠ Písek

Západočeský kraj

Kategorie A

Zdeněk Kůs, 4. a, Sušice; *Petr Kožina*, 4. b, Tachov; *Václav Friedrich*, 4. b, Cheb; *Jan Brousek*, 3. b, Klatovy;

Zbyněk Kozel, 3. b, Karlovy Vary; *Petr Veselka*, 4. b, Karlovy Vary; *Milan Vitek*, 4. a, *Ľudovík Weiss*, 4. e, oba G J. Fučíka, Plzeň

Kategorie B

Pavel Pokorný, *Petr Laciga*, oba 2. a G J. Fučíka, Plzeň

Kategorie C

Ľitka Hosnedlová, 1. a, Sušice; *Pavel Blovský*, 1. d, SPŠ stav. Plzeň; *Ľan Ľuza*, 1. a, G J. Fučíka, Plzeň; *Václav Pillmaier*, 1. a, Domažlice; *David Mundil*, 1. c, Karlovy Vary; *Pavel Strejc*, *Petr Wessely*, oba 1., Ostrov; *Božena Šmrhová*, 1. f, *Martina Vaněčková*, 1. a, obě G J. Fučíka, Plzeň

Severočeský kraj

Kategorie A

Aleš Nekvinda, 3. b, *Radomír Kuc*, 4. c, *Zdeněk Krtouš*, 4. c, všichni Liberec; *Ľaromír Kulhánek*, 4. a, Rumburk; *Ľuděk Šefc*, 4. a, Ústí n. L., Jateční; *Pavel Štrof*, 4. b, Liberec; *Ľiří Kubát*, 3. d, Teplice; *Karel Salavec*, *Miroslav Přibáň*, oba 4. d, Liberec; *Viliam Maťo*, 4. a, Rumburk

Kategorie B

Jiří Málek, 2. c, Liberec; *Vladimír Martínek*, 2. b, Jablonec; *Pavel Tošovský*, Z 2, SPŠ stroj. Děčín; *Karel Pacholík*, 2. a, Ústí n. L.; *Pavel Červený*, 2. b, Litoměřice

Kategorie C

Martin Huml, 1. b, Most; *Dominik Dvořák*, 1. d, Teplice; *Lubomír Ježek*, 1. a, Rumburk; *Jaroslav Šindelář*, 1. b, Teplice; *Jan Vacek*, 1. d, Ústí n. L.; *Jaromír Šubčík*, 1. b, Jablonec; *Michael Dománek*, 1. a, Liberec; *Milan Kolář*, M1, SPŠ stroj. Liberec

Východočeský kraj

Kategorie A

Pavel Motloch, 4., Jevíčko; *Vladislav Pištora*, 4. g, Hradec Králové; *Tomáš Vlasák*, 4. a, Pardubice; *Jiří Kuřina*, 4. g, Hradec Králové; *Jan Tomsa*, 3. a, Jaroměř; *Miloslav Kothera*, 4. a, Jičín; *Jaroslav Resler*, 2., Lanškroun; *Ivan Brychta*, 4. a, Hlinsko v Č.; *Martin Makeš*, 3. a, Přelouč; *Ladislav Pecen*, 2. b, Havlíčkův Brod

Kategorie B

Martin Dubrovský, 2. g, Hradec Králové; *Jaroslav Resler*, 2., Lanškroun; *Radovan Průša*, 2. g, Hradec Králové; *Pavel Kalhous*, 2. c, Pardubice; *Ladislav Pecen*, 2. b, Hav-

líčkův Brod; *Jelana Prostředníková*, 2. g, Hradec Králové; *Vít Trnka*, 2. c, Pardubice; *Petr Vorel*, 2. a, Přelouč; *Jaroslav Vodička*, 2. g, Hradec Králové; *Petr Bureš*, 2. d, SPŠE Pardubice

Kategorie C

Michal Štembera, *Viktor Chrobok*, oba 1. d, Pardubice; *Petr Eisler*, 1. c, Havlíčkův Brod; *Sylva Klátilová*, 1. e, Pardubice; *Mirka Macháčová*, 1. a, Rychnov nad Kněžnou; *Pavel Stratil*, *Milan Sourada*, *Richard Scholle*, všichni 1. d, Pardubice; *Jana Albrechtová*, 1. a, Havlíčkův Brod; *Václav Šimůnek*, 1. b, Semily

Severomoravský kraj

Kategorie A

Ondřej Ják, *Josef Tkadlec*, *Miroslav Těžký*, *Jaroslav Hančl*, všichni 4. c, Bílovec; *Aleš Toufar*, 4. a, Opava; *Oskar Křenek*, 4. c, Bílovec; *Miroslav Holeček*, 4. d, Frýdek-Místek; *Petr Strossa*, *Jiří Lukaščík*, *Jiří Číhal*, všichni 3. c, Bílovec

Kategorie B

Pavel Hruška, *Miroslav Brzezina*, *Vladimír Vymětal*, všichni 2. c, Bílovec; *Marie Ptáčníková*, 2. b, Ostrava, Thälmannova; *Richard Halfar*, 2. c, SPŠ stroj., Karviná 6; *Vladimír Wimmer*, 2. c, Bílovec

Kategorie C

Petr Tichavský, Miroslav Šmatera, Martin Zemek, Vladimír Horský, všichni 1. c, Bílovec; *Petr Lisoněk*, 1. d, Olomouc-Hejčín; *Petr Ondřej, Robert Krajča, Marta Lopraisová, Ivo Barvůr, Tibor Slažanský*, všichni 1. c, Bílovec

Jihomoravský kraj

Kategorie A

Zenon Starčuk, 3. d, *Radan Kučera*, 4. a, *Aleš Šiller*, 4. a, všichni Brno, Koněvova ul.; *Ľirí Bureš*, 4. a, Brno, tř. kpt. Jaroše; *Hana Daňková*, 4. a, Brno, Elgartova ul.; *Libor Veselý*, 4. b, Jihlava; *Libor Viktorin*, 4. a, Brno, Koněvova; *Ondřej Zindulka*, 3. b, OU EJF, Brno; *Pavel Vařejka, Marek Orel*, oba 4. a, Brno, tř. kpt. Jaroše

Kategorie B

Petr Kadourek, 2. b, Brno, Křenová; *Tomáš Kovář*, 2. a, Gottwaldov; *Petr Sojka, Libor Škarvada*, oba 2. a, Brno, Koněvova; *Petr Veselý*, 2. d, Brno, Koněvova; *Miroslav Hruška*, 2. e, Brno, Slov. nám.; *Josef Málek*, 2. a, Jihlava; *Hynek Maňák*, 2. a, Brno, Koněvova; *Pavel Sochor*, 2. c, Jihlava

Kategorie C

Ľirí Mrázek, 1. b, Žďár n. S.; *Petr Havelka*, 1. a, Znojmo;

Jan Mrázek, 1. b, Brno, tř. kpt. Jaroše; *Miroslav Partl*, 1. b, Třebíč; *Jiří Buček*, 1. b, Brno, tř. kpt. Jaroše; *Jitka Kadlecová*, 1. a, Boskovice; *Eva Plháková*, 1. a, Třebíč; *Radim Bystřický*, 1. a, Strážnice; *Martin Juráš*, 1. e, Brno; *Koněvova*; *Ivana Šurá*, 1. d, Uherský Brod

Bratislava

Kategorie A

Vladimír Burjan, 4. a, *Jozef Bednárík*, 2. a, *Jaroslav Guříčan*, 4. a, *Juraj Beniák*, 3. a, *Lubica Šedová*, 3. a, *Peter Poláčik*, 4. a, všichni Červenej armády; *Martin Oravec*, 3. c, Novohradská

Kategorie B

Jozef Bednárík, 2. a, Červenej armády; *Bohumil Čider*, 2. a, Novohradská; *Tomáš Blažek*, 2. e, Tomášikova; *Tatiana Murínová*, 2. a, Vazovova; *Jozef Bielik*, 2. c, Novohradská; *Ivan Hyánek*, 2. a, Červenej armády

Kategorie C

Pavol Ralbovský, 1. a, Metodova; *Jozef Bachníček*, 1. e, Novohradská; *Dušan Horička*, *Pavel Horváth*, oba 1. a, Červenej armády; *Igor Habán*, 1. e, Novohradská; *Peter Papánek*, 1. e, I. Horvátha; *Richard Hlubina*, 1. e, Vazovova; *Martin Šoltys*, 1. e, I. Horvátha; *Lívia Šúňová*, *Robert Fajcay*, oba 1. a, Červenej armády

Západoslovenský kraj

Kategorie A

Yveta Danešová, 2. c, SPŠ elektro, Piešťany; *Michal Fečkan*, 3. c, Nové Zámky; *Pavol Gärtner*, 4. c, G E. Guderu, Nitra; *Jozef Méhes*, 4. c, G maď. Dunajská Streda; *Ladislav Kasáš*, 4. b, Nové Zámky; *František Kundracik*, 4. b, Nitra-Párovce

Kategorie B

František Marko, 2. f, Trnava; *Yveta Danešová*, 2. c, SPŠE Piešťany; *Zora Kúdelková*, 2. c, Levice; *Vojtech Liskay*, 2. d, SPŠS Komárno

Kategorie C

Jozef Bukor, 1. e, SPŠS Komárno; *Štefan Nemeth*, 1. b, G maď. Šamorín; *Zoltán Kartai*, 1. g, SPŠS Komárno; *Peter Tarina*, 1. a, Topolčany; *Aba Teleki*, 1. b, G E. Guderu, Nitra; *Jana Riedlová*, 1. a, Levice; *Vladimír Mužík*, 1. a, Nitra, Párovská; *Klára Ružičková*, 1. c, G maď. Komárno; *Ján Kňážek*, 1. a, Trenčín

Středoslovenský kraj

Kategorie A

Peter Mäsiar, 4. d, Banská Štiavnica; *Ladislav Mečír*, 4. b, Prievidza; *Miroslav Chlebitk*, 4. d, Čadca; *Ladislav Ratu-*

lovský, 4. b, Liptovský Mikuláš; *Marián Moravčík*, 3. d, Žilina, Hliny VI; *Marta Poliaková*, 3. b, Ružomberok; *Anna Hudecová*, 4. a, Vrútky; *Peter Goga*, 4. d, Banská Štiavnica; *Pavol Škrivánek*, 4. c, Čadca

Kategorie B

František Crkoň, 2. b, Púchov; *Ondrej Virdzek*, 2. a, Žilina, Jilemnického nám.; *Eduard Grešák*, 2. a, Kysucké Nové Mesto; *Zdeno Repoň*, 2. d, SPŠ Tvrdošín; *Ladislav Kovács*, 2. c, Rimavská Sobota; *Ivan Lisko*, 2. b, Kysucké Nové Mesto; *Peter Obertík*, 2. e, Prievidza; *Martin Szabó*, 2. d, Brezno; *Miroslav Šmehýl*, 2. d, Žilina, Jilemnického nám.

Kategorie C

Peter Dzurenda, 1. f, Prievidza; *Pavel Skočovský*, 1. b, Banská Bystrica; *Eduard Gromus*, 1. a, Martin; *Jana Valentová*, 1. c, Banská Bystrica; *Róbert Mendris*, 1. b, Považská Bystrica; *Lýdia Krátka*, 1., Žiar n. H.; *Ivan Brozman*, 1. a, Martin; *Ivan Gašpar*, 1. a, Banská Bystrica, Tajovského; *Jozef Ďurech*, 1. a, Dubnica; *Kata Šutovská*, 1., Rimavská Sobota

Východoslovenský kraj

Kategorie A

Ladislav Kubini, 3. b, Bardejov; *Jozef Jirásek*, 4. a, Košice, Šmeralova; *Peter Vasiľ*, 4. c, Michalovce; *Janka Borošová*,

František Matúš, oba 4. d, Prešov, Konštantinova; *Ivan Brovko*, 3. c, Spišská Nová Ves; *Katarína Dudičová*, 4. c, Prešov, T. Ševčenka; *Miroslav Ploščica*, 3. a, Ľubovňa; *Ivan Žezula*, *František Bereta*, oba 4. a, Košice, Šmeralova; *Ctirad Klimčík*, 3. c, Prešov, Konštantinova

Kategorie B

Štefan Klembara, 2. a, Košice, Šmeralova; *Jaroslav Lapšanský*, 2. d, Humenné; *František Sninčák*, *Albín Dzurnák*, *Vladimír Hudec*, *Milan Schürger*, všichni 2. a, Košice Šmeralova

Kategorie C

Anton Sedlák, *Anna Hapáková*, *Dalibor Čudek*, všichni Prešov, Konštantinova; *Miroslav Barnovský*, *Peter Spišiak*, oba Košice, Šmeralova; *Tatiana Martonová*, Poprad; *Lubomír Souček*, *Miroslav Okruhlanský*, *Daniela Mátová*, *Peter Förchgott*, všichni Prešov, Konštantinova (vesměs 1. ročník)

Poznámky: Není-li uvedena škola, rozumí se gymnázium (G). Z každého kraje a v každé kategorii je uvedeno nejvýše prvních deset nejúspěšnějších řešitelů.

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

Z - P - 1

Nejmenší přirozené číslo x , pro které je $1260x$ třetí mocninou přirozeného čísla, je

- a) 1470 , b) 1260^2 , c) 7350 .

Rozhodněte, která z odpovědí a), b), c) je správná.

Řešení: Použijeme vyjádření přirozeného čísla jako součinu prvočinitelů. Platí:

$$1260x = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x$$

Nejmenší přirozené číslo tvaru $1260x$, které je třetí mocninou přirozeného čísla, je $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3$. Nejmenší takové x je tedy

$$x = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 7350 .$$

Správná je odpověď c).

Na desce, na níž je narysován pravidelný desetiúhelník, jehož vrchol je označen 0, hrají dva hráči tuto hru:

Na vrchol 0 si nejprve postaví společnou jednu figurku a pak ji střídavě přemísťují podle vlastní volby buď o 3, nebo o 4, nebo o 5 vrcholů ve směru otáčení hodinových ručiček. Vyhraje hráč, který první opět umístí figurku na vrchol 0.

Popište, jak má postupovat hráč, který začíná, aby vyhrál nejpozději svým třetím tahem.

Řešení: Vrcholy desetiúhelníku označme 0, 1, 2, ..., 9 ve směru otáčení hodinových ručiček. Táhne-li v průběhu hry některý hráč na některé z polí 5, 6, 7, protihráč může z každého z těchto polí dalším tahem dosáhnout 0 a vyhrává. Táhne-li v průběhu hry hráč na pole 2, vyhraje svým následujícím tahem, neboť protihráč se odtud nutně dostane na některé z polí 5, 6, 7. Táhne-li hráč na jiné pole (různé od 0) než 2, při vhodné odpovědi protihráče nevyhraje svým následujícím tahem.

Hráče označme A , B . A začíná a svým prvním tahem se může dostat na pole 3, 4 nebo 5.

I. Zahájí-li A tahem na 3, dostane se B dalším tahem na 6, 7 nebo 8. V prvních dvou případech A vyhrává svým druhým tahem. V třetím případě se A svým druhým tahem může dostat na 2 a vyhrát svým třetím tahem.

II. Zahájí-li A tahem na 4, dostane se B dalším tahem na 7, 8 nebo 9. V prvním případě A vyhrává svým druhým tahem. V druhém i třetím případě se A svým druhým tahem může dostat na 2 a vyhrát svým třetím tahem.

III. Zahájí-li A tahem na 5, umožní hráči B vyhrát jeho prvním tahem.

Existují tedy právě dva postupy, které hráči A zaručují výhru nejpozději jeho třetím tahem. Jsou popsány v I. a II. Pravidla, jimiž se hráč A řídí, můžeme jednoduše vyjádřit tabulkou doporučující mu, jak táhnout:

z pole	0	5	6	7	8	9
na pole	3, 4	0	0	0	2	2

(Řídí-li se A těmito pravidly, nedostane se při žádném postupu protihráče do situace, kdy by měl táhnout z některého z polí 1, 2, 3, 4.)

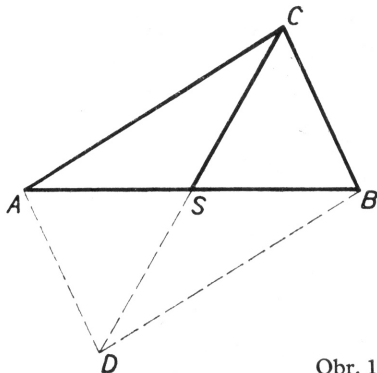
Z - P - 3

Je dán trojúhelník ABC . Označme S střed strany AB . Dokažte, že

$$|CS| < \frac{1}{2}(|AC| + |BC|).$$

Řešení: Trojúhelník doplníme souměrností podle středu S na rovnoběžník $ADBC$ (obr. 1). Pro $\triangle ADC$ platí trojúhelníková nerovnost

$$|CD| < |AC| + |AD|.$$



Obr. 1

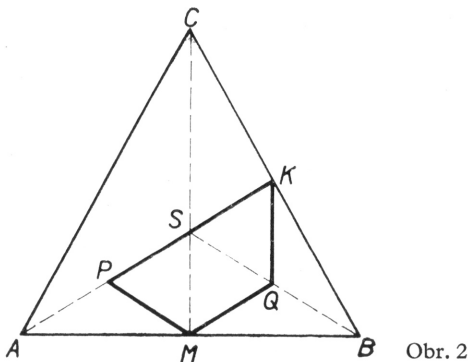
Dosadíme-li do této nerovnosti $|CD| = 2|CS|$ a $|AD| = |BC|$, dostaneme dokazovanou nerovnost.

Z - P - 4

V rovnostranném trojúhelníku ABC označíme S průsečík přímek AK a CM , kde M je střed strany AB a K střed strany BC . Dále označíme P střed úsečky AS a Q střed úsečky BS .

- Dokažte, že čtyřúhelník $PKQM$ je rovnoramenný lichoběžník.
- Vypočítejte, jakou část obsahu $\triangle ABC$ je obsah lichoběžníku $PKQM$.

Řešení: Čtyřúhelník $PKQM$ (obr. 2) se skládá ze tří shodných rovnostranných trojúhelníků SPM , SMQ , SQK ,



Obr. 2

jejichž strany mají délku $\frac{1}{3}v$, kde v je výška a zároveň těžnice $\triangle ABC$. Je totiž zřejmé, že $|SP| = |SM| = |SQ| = |SK| = \frac{1}{3}v$ a $\sphericalangle PSM = \sphericalangle MSQ = \sphericalangle QSK = 60^\circ$, tj. také $|PM| = |MQ| = |QK| = \frac{1}{3}v$. Trojúhelníky APM , PSM mají shodné strany $|AP| = |PS|$ a společnou výšku z vrcholu M . Proto platí pro jejich obsahy

$$\triangle APM = \triangle PSM.$$

Z obdobných důvodů platí

$$\triangle MBQ = \triangle SMQ, \quad \triangle BQK = \triangle SQK.$$

Trojúhelník ABK se tedy skládá ze 6 trojúhelníků téhož obsahu; každý z nich má za obsah $\frac{1}{12}$ obsahu $\triangle ABC$. Lichoběžník $PKQM$ se skládá ze tří těchto trojúhelníků, je tedy

$$PKQM = \frac{1}{4} \triangle ABC.$$

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

Z - I - 1

Najděte přirozená čísla x, y tak, aby platilo

$$28x^4 = 75y^3$$

a aby číslo x bylo nejmenší možné.

Řešení: Použijeme vyjádření přirozeného čísla jako součinu prvočinitelů. Pravá i levá strana dané rovnice je dělitelna prvočísly 2, 3, 5, 7; má-li být číslo x co nejmenší, nesmí se ve vyjádření čísel x, y vyskytovat jako činitel žádné jiné prvočíslo. Každé z prvočísel 2, 3, 5, 7 je prvočinitelem čísel x, y , je tedy

$$x = 2^a 3^b 5^c 7^d, \quad y = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta.$$

Tento zápis říká, že např. číslo x má a prvočinitelů 2, b prvočinitelů 3 atd. Z dané rovnice plyne podle známých vzorců pro počítání s mocninami

$$2^2 \cdot 7 \cdot 2^{4a} 3^{4b} 5^{4c} 7^{4d} = 3 \cdot 5^2 \cdot 2^{3\alpha} 3^{3\beta} 5^{3\gamma} 7^{3\delta}$$

neboli

$$2^{4a+2} \cdot 3^{4b} \cdot 5^{4c} \cdot 7^{4d+1} = 2^{3\alpha} \cdot 3^{3\beta+1} \cdot 5^{3\gamma+2} \cdot 7^{3\delta}.$$

Protože vyjádření je jednoznačné, dostaneme porovnáním exponentů

$$4a + 2 = 3\alpha, \quad 4b = 3\beta + 1, \quad 4c = 3\gamma + 2, \quad 4d + 1 = 3\delta$$

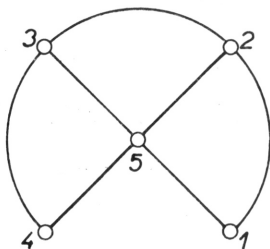
Rozřešme první z těchto rovnic. Číslo a musí být co nejmenší kladné číslo. Zkusme $a = 1$; $4a + 2 = 6$, $\alpha = 2$. Podobně zkusíme $b = 1$, vyjde $\beta = 1$; $c = 1$ nevyhovuje, ale pro $c = 2$ dostaneme $\gamma = 2$. Nevyhovuje ani $d = 1$, pro $d = 2$ dostaneme $\delta = 3$. Máme tedy řešení:

a	b	c	d	α	β	γ	δ
1	1	2	2	2	1	2	3

Hledaná čísla jsou $x = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 7350$, $y = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 = 102\,900$. Zkouška potvrdí správnost řešení.

Z - 1 - 2

Na obr. 3 je znázorněn hrací plán „podkovy“, hry francouzských dětí. Obsahuje pět polí označených čísly 1 až 5.



Obr. 3

Sousední pole se nazývají dvě pole spojená úsečkou nebo obloukem. Hru hrají dva hráči, červený (Č) a modrý (M), z nichž každý má dva kameny své barvy.

Počáteční postavení zaujmou tak, že střídavě kladou po jednom kameni své barvy na pole 1 až 5; jedno zůstane volné. Při samotné hře táhnou hráči střídavě vždy jedním kamenem své barvy na sousední volné pole. Vyhrává hráč, který znemožní protivníkovi další tah.

- Kolik počátečních postavení má hra „podkova“?
- Najděte všechna postavení, z nichž modrý nemůže dále táhnout.
- Je dáno postavení Č 1,4; M 3,5, červený táhne. Zapište další průběh hry, jestliže červený vyhrál svým třetím tahem.

Řešení:

a) Nejdříve obsadíme dvě z polí 1 až 5 červenými kameny. To je možné 10 způsoby: 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 2,3; 2,4; 2,5; 3,4; 3,5; 4,5. Ke každé z uvedených 10 dvojic lze přidat na zbylá tři pole dvojici modrých kamenů třemi způsoby.

Počátečních postavení je tedy $10 \cdot 3 = 30$.

b) Probereme-li všech 10 možností rozestavení modrých kamenů, podaří se nám červené kameny umístit tak, aby zablokovaly modré, jen ve dvou případech. Budou to postavení Č 3,5, M 1,2 a Č 2,5, M 3,4.

c) Zápis průběhu hry je třeba tento:

červený	modrý
1,4	3,5
táhne Č	(nutný tah)
2,4	3,5
táhne M	(nutný tah)

2,4	1,3
táhne Č	(2,5, 1,3 nevede k cíli)
4,5	1,3
táhne M	(udělal chybu)
4,5	1,2
táhne Č	
3,5	1,2

Modrý nemůže pokračovat, červený vyhrává.

Z - I - 3

V rovině je dána úsečka AB . Vyšetřete množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC , pro jejichž vnitřní úhly platí

$$\alpha \geq \beta > \gamma.$$

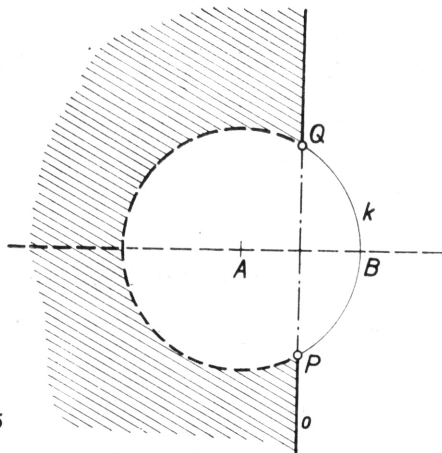
Řešení: Porovnání vnitřních úhlů trojúhelníku lze převést na porovnání jeho stran a obráceně. Přitom používáme dvě věty:

Pro vnitřní úhly α, β trojúhelníku ABC platí rovnost $\alpha = \beta$, právě když platí pro protější strany rovnost $|BC| = |AC|$ a $\alpha > \beta \Leftrightarrow |BC| > |AC|$.

V naší úloze jsou dané podmínky pro úhly ekvivalentní s podmínkami pro strany

$$|BC| \geq |AC| > |AB|.$$

Sestrojíme tedy osu úsečky AB a kružnici k se středem A a poloměrem $|AB|$ (obr. 4). Hledaná množina je vyšrafovaná část roviny; patří k ní silně vytažená část přímky o , nepatří k ní čárkovaný oblouk kružnice k , ani body P, Q , ani body přímky AB .

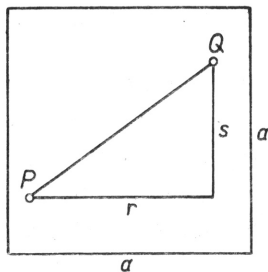


Obr. 5

Z - 1 - 4

Jsou dány dva různé body P , Q . Sestrojte čtverec K , který obsahuje body P , Q a má nejmenší možný obsah.

Řešení: Čtverec K je čtverec, který má úsečku PQ za svou úhlopříčku. Obsah čtverce s úhlopříčkou PQ je roven $\frac{1}{2}|PQ|^2$. Uvažujme čtverec, který obsahuje body P , Q a přitom PQ není jeho úhlopříčka. Dokážeme-li, že délka jeho úhlopříčky u je pak větší než $|PQ|$, budeme hotovi, neboť jeho obsah $\frac{1}{2}u^2$ bude pak větší než $\frac{1}{2}|PQ|^2$. Necht' je tedy u délka úhlopříčky a a délka strany čtverce, který obsahuje body P , Q , a necht' úsečka PQ není jeho úhlopříčkou. Je-li úsečka PQ rovnoběžná s některou stranou čtverce, je $|PQ| \leq a < a\sqrt{2} = u$. Není-li úsečka PQ



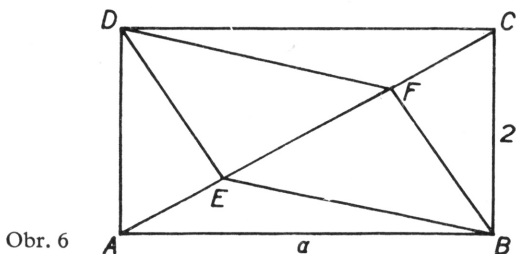
Obr. 5

rovnoběžná se stranou čtverce, doplníme ji na pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami rovnoběžnými se stranami čtverce (obr. 5). Pro délky odvěsen r, s platí $r \leq a, s \leq a$, přičemž alespoň jedna nerovnost je ostrá (pokud by $r = a = s$, byla by úsečka PQ úhlopříčkou čtverce). Je tedy $|PQ| = \sqrt{r^2 + s^2} < \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = u$. V obou případech tedy platí $|PQ| < u$, což jsme potřebovali dokázat.

ÚLOHY II. KOLA

Z - II - 1

V obdélníku $ABCD$ je $|AB| = a > 2$, $|BC| = 2$. Kolmice vedené na úhlopříčku AC vrcholy B, D protínají tuto úhlopříčku v bodech E, F (obr. 6).



Obr. 6

- a) Vyjádřete obsah rovnoběžníku $EBFD$ pomocí čísla a .
- b) Určete všechna čísla a , pro něž se obsah rovnoběžníku $EBFD$ rovná polovině obsahu obdélníku $ABCD$.

Řešení: Označíme-li hledaný obsah P , bude

$$P = |DE| (|AC| - 2 |AE|) .$$

Vyjádříme-li dvojím způsobem obsah obdélníku $ABCD$ a jeho strany označíme $|AB| = a$, $|BC| = b$, dostaneme

$$|AC| \cdot |DE| = ab , \tag{1}$$

a tedy

$$P = ab - 2 |AE| \cdot |DE| .$$

Podle Pythagorovy věty je $|AE| = \sqrt{b^2 - |DE|^2}$, a tedy

$$P = ab - 2|DE|\sqrt{b^2 - |DE|^2}. \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že podle Pythagorovy věty je $|AC| = \sqrt{a^2 + b^2}$, dostaneme z (1)

$$|DE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dosadíme-li to do (2) a upravíme, vyjde

$$P = ab \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

V našem případě bylo dáno $b = 2$ a tedy

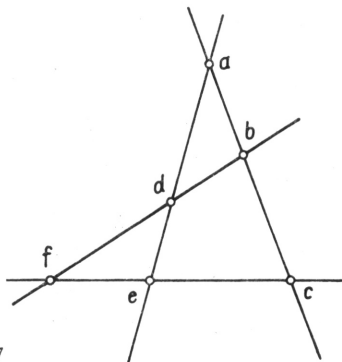
$$P = \frac{2a(a^2 - 4)}{a^2 + 4}.$$

Obsah P je roven polovině obsahu obdélníku $ABCD$ právě pro $a = 2\sqrt{3}$.

Z - II - 2

Dokažte, že k šesti bodům vyznačeným na obr. 7 nelze připsat šest navzájem různých přirozených čísel tak, aby součet čísel připsaných k třem bodům přímky byl pro všechny čtyři vyznačené přímky stejný.

Řešení: Označme a, b, c, d, e, f čísla připsaná k vyzna-



Obr. 7

čeným bodům podle obr. 7. Kdyby čísla splňovala uvedené podmínky, platilo by pro ně:

$$a + b + c = a + d + e$$

$$f + d + b = f + e + c$$

Sečtením dostaneme

$$2b = 2e,$$

a to je spor s předpokladem, že čísla jsou navzájem různá, a tím je proveden nepřímý důkaz. (Předpokladu, že čísla jsou přirozená, jsme ani nevyužili.)

Z - II - 3

Určete přirozená čísla x, y, z tak, aby platilo

$$45xy^2 = 8z^3$$

a aby součin xyz byl menší než 1000.

Řešení: Necht' x, y, z je řešením úlohy.

Z dané rovnice plyne, že z je dělitelné patnácti, tj.

$$(1) \quad z = 15t.$$

Znásobíme-li danou rovnici číslem xz^2 , dostaneme

$$45 x^2 y^2 z^2 = 8 x z^5$$

a po dosazení z (1) do pravé strany a úpravě

$$x^2 y^2 z^2 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4 x t^5.$$

Vzhledem k tomu, že $xyz < 10^3$, je

$$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4 x t^5 < 10^6,$$

a tedy

$$27 x t^5 < 200.$$

Odtud vidíme, jednak že $t = 1$, a tedy $z = 15$, jednak že

$$(2) \quad x \leq 7.$$

Dosadíme-li za z do dané rovnice, redukuje se na

$$xy^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^5.$$

Z toho vidíme, že x je násobek šesti, a podle (2) je tedy $x = 6$; $y = 10$.

Existuje-li tedy řešení splňující dané podmínky, je to nutně

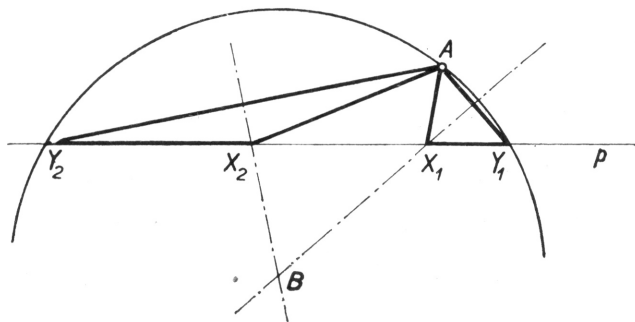
$$x = 6, y = 10, z = 15.$$

Zkouška ukáže, že to řešení je.

V rovině jsou dány body A , B a přímka p , která je odděluje. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky AXY s těmito vlastnostmi.

- (1) AY je základna;
- (2) body X , Y leží na přímce p ;
- (3) přímka BX obsahuje osu úhlu AXY .

Řešení: Necht' $\triangle AXY$ má požadované vlastnosti (obr. 8). Protože bod B leží na ose základny AY , je bod



Obr. 8

Y průsečíkem přímky p a kružnice se středem v bodě B a poloměrem $|AB|$. Osa úsečky AY protíná pak přímku p v bodě X . Vzhledem k tomu, že přímka p odděluje body A , B , dostaneme naznačenou konstrukcí dva různé průsečíky Y_1 , Y_2 a k nim po jednom bodu X_1 , X_2 . Oba trojúhelníky AX_1Y_1 , AX_2Y_2 jsou řešením úlohy.

Z - III - 1

Určete, které z čísel 156 200, 40 960, 46 656 je zároveň druhou i třetí mocninou jistých přirozených čísel. Určete tato čísla.

Z - III - 2

JZD sklízelo obilí na výměře 945 hektarů třemi kombajny 1. typu s výkonem 20 ha (na den a kombajn) a třemi kombajny 2. typu s výkonem 15 ha (na den a kombajn). Po 4 dnech se jeden kombajn 1. typu porouchal a byl vyřazen. Kombajnéri zbývajících pěti kombajnů uzavřeli závazek, že zvýší denní normu úměrně k denním výkonům kombajnů a ukončí žně v původním termínu s tím, že JZD sklídí bez kombajnů obilí ze 3 ha každý den do konce žní. Určete, kolik ha denně sklízely kombajny 1. a 2. typu ve zbývajících dnech, jestliže kombajnéri splnili závazek, který uzavřeli.

Z - III - 3

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC ($|AC| = |BC|$), jehož obsah je S . Střed strany AC je bod E , střed strany BC je bod F , průsečík úseček AF a BE je bod M . Lomená čára $AFEB$ rozdělí trojúhelník ABC na pět trojúhelníků (trojúhelníky ABM , EFM , AME , BMF

a EFC). Vypočítejte obsahy všech těchto trojúhelníků pomocí obsahu S trojúhelníku ABC .

Z - III - 4

Úsečka AB je stranou trojúhelníku ABC . Pro délky jeho stran platí nerovnosti: $|AC| > |BC|$, $|AC| \geq \geq |AB|$. Vyšetřete množinu všech vrcholů trojúhelníka ABC .

ÚLOHY III. KOLA V SSR

Z - III - 1

Nájdite všetky dvojice x, y celých čísel, pre ktoré platí

$$y = \frac{3x + 2}{x - 2}.$$

Z - III - 2

Dané sú priamky p, q , ktoré sú navzájom kolmé, a bod T . Zostrojte $\triangle ABC$ tak, aby T bol jeho ťažiskom, priamka p osou strany AB , priamka q osou strany BC .

Z - III - 3

Nájdite úhrnný ciferný súčet všetkých prirodzených čísel najviac trojciferných.

Vypočítajte obsah rovnoramenného lichobežníka $ABCD$, ak jeho uhlopriečka má veľkosť n a zvierá s väčšou základňou uhol 45° .

PRÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

C - P - 1

a) Vypíšte všetky usporiadané trojice x, y, z prirodzených čísel, pre ktoré platí:

$$xyz = 50. \quad (1)$$

(Trojice, ktoré sa líšia poradím hodnôt, považujeme za rôzne.)

b) To isté vykonajte pre rovnicu $xyz = 12$.

c) Vysvetlite, prečo počet riešení je v oboch prípadoch rovnaký.

Riešenie: a) Čísla x, y, z musia byť deliteľmi čísla 50. Môžu to byť preto len niektoré z čísel 1, 2, 5, 10, 25, 50. Všetky riešenia rovnice (1) vypíšeme postupne tak, že najskôr zvolíme pevnú hodnotu x od $x = 1$ až po $x = 50$ a ku každej hodnote x analogicky postupne určíme usporiadané dvojice y, z z rovnice $yz = \frac{50}{x}$. Takto dostaneme všetky riešenia: (1, 1, 50), (1, 2, 25), (1, 5, 10), (1, 10, 5),

(1, 25, 2), (1, 50, 1), (2, 1, 25), (2, 5, 5), (2, 25, 1), (5, 1, 10), (5, 2, 5), (5, 5, 2), (5, 10, 1), (10, 1, 5), (10, 5, 1), (25, 1, 2), (25, 2, 1), (50, 1, 1). Všetkých riešení rovnice (1) v obore prirodzených čísel je teda 18.

b) Analogickým spôsobom nájdeme všetky riešenia rovnice $xyz = 12$, ak si uvedomíme, že deliteľmi čísla 12 sú čísla: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Sú to tieto usporiadané trojice prirodzených čísel: (1, 1, 12), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 4, 3), (1, 6, 2), (1, 12, 1), (2, 1, 6), (2, 2, 3), (2, 3, 2), (2, 6, 1), (3, 1, 4), (3, 2, 2), (3, 4, 1), (4, 1, 3), (4, 3, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1), (12, 1, 1). Je ich teda taktiež 18.

c) Všimnime si, že $50 = 2^1 \cdot 5^2$, $12 = 3^1 \cdot 2^2$. Z toho vyplýva, že ak usporiadaná trojica čísel

$$2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}, 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}, 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}; \alpha_i = 0, 1; \beta_i = 0, 1, 2; \\ i = 1, 2, 3;$$

je riešením rovnice (1), potom usporiadaná trojica čísel

$$3^{\alpha_1} \cdot 2^{\beta_1}, 3^{\alpha_2} \cdot 2^{\beta_2}, 3^{\alpha_3} \cdot 2^{\beta_3}$$

je riešením rovnice $xyz = 12$. Rovnaký počet riešení oboch rovníc je priamym dôsledkom toho, že medzi riešeniami existuje navzájom jednoznačné priradenie.

C - P - 2

Je daný výraz

$$\frac{(a-1)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b-1)^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c-1)^2}{(c-a)(c-b)}.$$

Dokážte, že je kladný vždy, keď je definovaný. Čo musí platiť o číslach a, b, c , aby daný výraz mal zmysel?

Riešenie: Najskôr zistíme, pre ktoré čísla a, b, c stráca daný výraz zmysel. Je to zrejmé v tých prípadoch, keď sa menovateľ niektorého zo zlomkov daného výrazu rovná nule, tj. keď platí aspoň jedna z rovností

$$\begin{aligned}(a - b)(a - c) &= 0, \\(b - a)(b - c) &= 0, \\(c - a)(c - b) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Z (1) vyplýva, že daný výraz stráca zmysel, ak platí aspoň jedna z rovností

$$a - b = 0, \quad b - c = 0, \quad c - a = 0$$

čiže

$$a = b, \quad b = c, \quad c = a.\tag{2}$$

K tomu, aby daný výraz mal zmysel, musí pre čísla a, b, c súčasne platiť:

$$a \neq b, \quad b \neq c, \quad c \neq a.\tag{3}$$

Označme hodnotu daného výrazu V a predpokladajme, že platí (3). Ľahko sa vidí, že spoločným menovateľom všetkých troch zlomkov je výraz

$$m = (a - b)(b - c)(c - a).\tag{4}$$

K tomu, aby sme zlomky výrazu V uviedli na spoločného menovateľa, musíme ich v danom poradí rozšíriť výrazmi

$$-(b - c), \quad -(c - a), \quad -(a - b).$$

Potom dostaneme

$$V = -\frac{1}{m} [(b-c)(a^2-2a+1) + (c-a)(b^2-2b+1) + (a-b)(c^2-2c+1)] .$$

Označme H hodnotu výrazu v hranatej zátvorke. Po vynásobení a zlúčení postupne dostaneme

$$\begin{aligned} H &= a^2b - 2ab + b - a^2c + 2ac - c + b^2c - 2bc + \\ &\quad + c - ab^2 + 2ab - a + ac^2 - 2ac + a - \\ &\quad - bc^2 + 2bc - b = \\ &= a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - a^2c . \end{aligned}$$

Ak vynásobíme faktory na pravej strane (4), postupne dostaneme

$$\begin{aligned} m &= (ab - ac - b^2 + bc)(c - a) = abc - ac^2 - \\ &\quad - b^2c + bc^2 - a^2b + a^2c + ab^2 - abc = \\ &= -(a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2) = -H . \end{aligned}$$

Z vyššie uvedeného vyplýva, že pre všetky a, b, c vyhovujúce (3) je

$$V = -\frac{1}{m}H = -\frac{1}{-H}H = 1 ,$$

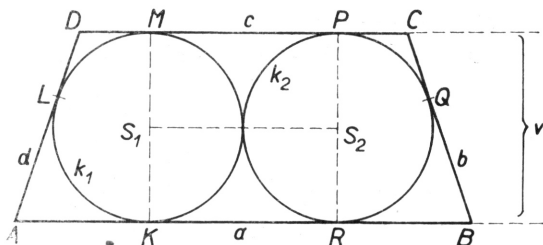
čo znamená, že daný výraz je kladný, ako sme mali dokázať.

C - P - 3

Do lichobežníka $ABCD$ sú vpísané kružnice k_1, k_2 , ktoré sa v uvedenom poradí dotýkajú strán a, c, d , resp. a, c, b . Pre dĺžky strán lichobežníka platí $a + c > b + d$.

Ak má výška lichobežníka dĺžku $\frac{1}{2}(a + c - b - d)$, potom majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk. Dokážte.

Riešenie: Stredy kružníc k_1, k_2 označme S_1, S_2 , dotykové body kružnice k_1 so stranami a, d, c v uvedenom poradí označme K, L, M a analogicky dotykové body kružnice k_2 so stranami c, b, a označme P, Q, R (pozri obr. 9). Výšku lichobežníka $ABCD$ označíme v . Zrejme



Obr. 9

platí: $|AK| = |AL|$, $|BR| = |BQ|$, $|CP| = |CQ|$, $|DL| = |DM|$. Z toho vyplýva, že

$$|AK| + |RB| + |BQ| + |QC| + |CP| + |MD| + |DL| + |LA| = 2(b + d). \quad (1)$$

Z predpokladu $a + c > b + d$ dostávame

$$2(b + d) < a + b + c + d. \quad (2)$$

Zo vzťahov (1) a (2) vyplýva, že bod K leží medzi bodmi A a R a bod M medzi bodmi P a D . Kružnice k_1, k_2 majú vonkajší dotyk práve vtedy, keď vzdialenosť ich stredov sa

rovná výške v lichobežníka $ABCD$. Platí však $|S_1 S_2| = |MP| = |KR|$. Ďalej platí

$$\begin{aligned} & |AK| + |KR| + |RB| + |BQ| + |QC| + \\ & + |CP| + |PM| + |MD| + |DL| + |LA| = \\ & = a + b + c + d \end{aligned}$$

čiže

$$2(b + d) + 2S_1 S_2 = a + b + c + d,$$

z čoho dostaneme

$$S_1 S_2 = \frac{1}{2}(a + c - b - d). \quad (3)$$

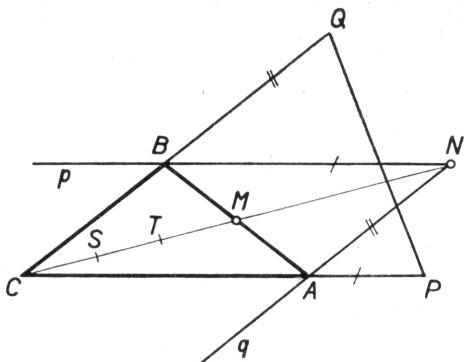
Ak teda $v = \frac{1}{2}(a + c - b - d)$, vzhľadom na (3) platí

$|S_1 S_2| = v$ a obe kružnice majú vonkajší dotyk, ako sme mali dokázať.

C - P - 4

V rovine je daný trojuholník PCQ a vo vnútri tohto trojuholníka bod T . Zostrojte trojuholník ABC tak, aby bod T bol jeho ťažiskom, bod A ležal na polpriamke CP a bod B na polpriamke CQ .

Riešenie: Ak ABC je hľadaný trojuholník (obr. 10) s ťažiskom T , potom polpriamka CT prechádza stredom M strany AB a zo známej vlastnosti ťažiska trojuholníka vyplýva, že $|TM| = \frac{1}{2}|CT| = |CS|$, kde S je stred úsečky



Obr. 10

CT. Ak teraz trojuholník *ABC* doplníme na rovnobežník *ACBN*, bude bod *M* jeho stredom.

Z vyššie uvedeného rozboru vyplýva nasledujúca konštrukcia: Nájdeme stred *S* úsečky *CT* a na polpriamke *CT* určíme bod $M \neq S$ tak, aby platilo $|TM| = |CS|$. Ďalej na polpriamke *CT* zostrojíme bod $N \neq C$ tak, aby platilo $|MN| = |CM|$. Bodom *N* vedieme priamky $p \parallel CP$, $q \parallel CQ$. Priesečník priamok *q*, *CP* označíme *A*, priesečník priamok *p*, *CQ* označíme *B*. Potom trojuholník *ABC* je už hľadaným trojuholníkom.

Dôkaz. Bod *M* je podľa konštrukcie stredom uhlopriečky *CN* rovnobežníka *ACBN* a teda aj stredom úsečky *AB*. Úsečka *CM* je teda ťažnicou trojuholníka *ABC*, pričom podľa konštrukcie platí: $|CT| = 2 \cdot |TM|$, čo znamená, že bod *T* je ťažiskom trojuholníka *ABC*.

Z postupu vyššie uvedenej konštrukcie vyplýva, že úloha má vždy riešenie, a to jediné.

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY I. KOLA

C - I - 1

Nájdite všetky usporiadané dvojice reálnych čísel x, y , ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$xy - \frac{1}{x-y} + 1 = x + y + \frac{1}{y-x}, \quad (1)$$

$$(x^3 + y^3 - 2)(x^2 + y^2 - 2)(x + y - 2)(x - 2)(y - 2) = 0. \quad (2)$$

Riešenie: Rovnica (1) má zmysel len pre také x, y , pre ktoré platí

$$x \neq y. \quad (3)$$

Za predpokladu (3) vynásobíme obe strany rovnice (1) výrazom $x - y$.

Postupne dostaneme

$$\begin{aligned} x^2y - xy^2 - 1 + x - y &= x^2 - xy + yx - y^2 - 1, \\ xy(x - y) - (x + y)(x - y) + x - y &= 0, \\ (xy - x - y + 1)(x - y) &= 0, \end{aligned}$$

z čoho vzhľadom na (3) vyplýva $xy - x - y + 1 = 0$ čiže

$$(x - 1)(y - 1) = 0. \quad (4)$$

Rovnici (4), ako sa dosadením ľahko presvedčíme, aj rovnici (1) vyhovujú dvojice $(x, 1)$ a $(1, y)$, kde vzhľadom na (3) je $x \neq 1$, resp. $y \neq 1$.

Dosaďme do (2) $y = 1$. Dostaneme

$$(x^3 - 1)(x^2 - 1)(x - 1)(x - 2)(-1) = 0,$$

z čoho pre $x \neq 1$ vyplýva

$$(x^2 + x + 1)(x + 1)(x - 2) = 0. \quad (5)$$

Keďže kvadratický trojčlen $x^2 + x + 1$ má diskriminant rovný -3 , nemá reálne korene a rovnici (5) vyhovujú len čísla $x = -1$ a $x = 2$. O tom, že dvojice $(-1, 1)$ a $(2, 1)$ vyhovujú sústave (1), (2) sa dosadením ľahko presvedčíme.

Zostávajúce riešenia danej sústavy dostaneme, ak do (2) dosadíme $x = 1$. Pretože bude mať tvar

$$(y^3 - 1)(y^2 - 1)(y - 1)(-1)(y - 2) = 0,$$

z vyššie uvedenej úvahy vyplýva, že pri $y \neq 1$ jej vyhovujú len čísla $y = -1$ a $y = 2$. Ďalšie dve riešenia sústavy (1), (2) sú teda dvojice $(1, -1)$ a $(1, 2)$.

Sústava (1), (2) má teda práve štyri riešenia: $(1, -1)$, $(1, 2)$, $(-1, 1)$, $(2, 1)$.

C - 1 - 2

Zistite počet všetkých usporiadaných trojíc prirodzených čísel x, y, z , ktoré vyhovujú rovnici

$$xyz = 1\,000\,000. \quad (1)$$

Riešenie: Číslo $1\,000\,000 = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6$. Danej rovnici môžu preto vyhovovať len usporiadané trojice x, y, z čísel tvaru

$$x = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}, \quad y = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}, \quad z = 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3},$$

kde pre nezáporné celé čísla α_i, β_i platí

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 6, \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 6. \end{aligned} \tag{2}$$

Všetky trojice čísel vyhovujúcich ľubovoľnej z podmienok (2) sú:

006	042	114	150	231	321	420
015	051	123	204	240	330	501
024	060	132	213	303	402	510
033	105	141	222	312	411	600

Je ich teda celkom 28. Všetkých usporiadaných trojíc x, y, z vyhovujúcich rovnici (1) je preto $28 \cdot 28 = 784$.

C - I - 3

V rovine je daná množina **B** pozostávajúca z n bodov ($n \geq 3$), z ktorých žiadne tri neležia na priamke. Niektoré z bodov množiny **B** sú spojené úsečkami tvoriacimi množinu **U**. Sústava $\{\mathbf{B}, \mathbf{U}\}$ má nasledujúce vlastnosti:

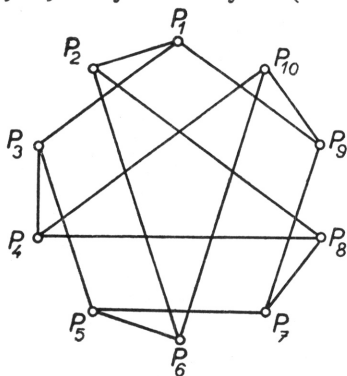
(1) Z každého bodu množiny **B** vychádzajú najviac tri úsečky množiny **U**.

(2) Každé dva body množiny **B** sú spojené buď úsečkou z **U**, alebo lomenou čiarou pozostávajúcou z dvoch úsečiek z **U**.

Zistite, aké je najväčšie možné číslo n a či existuje sústava $\{\mathbf{B}, \mathbf{U}\}$ s maximálnym n .

Riešenie: Najskôr ukážeme, že musí byť $n \leq 10$. Nech P je ľubovoľný bod množiny $\mathbf{B}$. Podľa predpokladov je bod P spojený nanajvýš s tromi bodmi množiny $\mathbf{B}$ úsečkami z $\mathbf{U}$ a každý z týchto troch bodov je spojený s najviac dvoma ďalšími bodmi z $\mathbf{B}$ úsečkami z $\mathbf{U}$. Bod P môže byť teda spojený najviac s deviatimi bodmi úsečkou z $\mathbf{U}$ alebo lomenou čiarou pozostávajúcou z dvoch úsečiek z $\mathbf{U}$. Z toho vzhľadom na (1), (2) vyplýva, že množina $\mathbf{B}$ môže obsahovať najviac 10 bodov.

Ukážme teraz, že pre desaťbodovú množinu $\mathbf{B}$ množina $\mathbf{U}$ s vlastnosťami (1), (2) skutočne existuje. Označme P_i , $i = 1, 2, \dots, 10$, body množiny $\mathbf{B}$ (obr. 11) a spojme



Obr. 11

každý z bodov P_{2j-1} , $j = 1, \dots, 5$ úsečkou s bodmi P_{2j} , P_{2j+1} a P_{2j-3} a každý z bodov P_{2j} , $j = 1, \dots, 5$, ktorý je už spojený úsečkou s bodom P_{2j-1} ešte s bodmi P_{2j-4} a P_{2j+4} , pričom označenie bodov indexami chápeme tak, že $P_0 \equiv P_{10}$, $P_{10+k} \equiv P_k$, $P_{-k} \equiv P_{10-k}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Takto vytvorená množina úsečiek má už vlastnosti (1), (2).

Z každého z bodov P_i vychádzajú totiž práve tri úsečky.

Z bodu P_{2j-1} vedie lomená čiara pozostávajúca z dvoch úsečiek cez bod P_{2j-3} do bodov P_{2j-2} a P_{2j-5} , cez bod P_{2j} do bodov P_{2j-4} a P_{2j+4} a cez bod P_{2j+1} do bodov P_{2j+2} a P_{2j+3} , čím sú vyčerpané všetky body množiny **B**. Analogicky z každého z bodov P_{2j} sa lomenou čiarou pozostávajúcou z dvoch úsečiek dostaneme cez bod P_{2j-4} do bodov P_{2j-5} a P_{2j+2} , cez bod P_{2j-1} do bodov P_{2j-3} a P_{2j+1} a konečne cez bod P_{2j+4} do bodov P_{2j-2} a P_{2j+3} .

C - I - 4

Je daný vypuklý štvoruholník $ABCD$ so stranami a, b, c, d . Kružnice k_A, k_B, k_C, k_D so stredmi v bodoch A, B, C, D také, že kružnice k_A a k_B, k_B a k_C, k_C a k_D, k_D a k_A majú vonkajší dotyk, existujú práve vtedy, keď platí

$$a + c = b + d.$$

Dokážte.

Riešenie: Nech existujú kružnice požadovaných vlastností. Potom pre ich polomery r_A, r_B, r_C, r_D musia platiť nasledujúce rovnosti:

$$r_A + r_B = a, \quad (1)$$

$$r_B + r_C = b, \quad (2)$$

$$r_C + r_D = c, \quad (3)$$

$$r_D + r_A = d. \quad (4)$$

Sčítaním rovností (1) a (3), resp. (2) a (4) dostaneme

$$r_A + r_B + r_C + r_D = a + c,$$

$$r_A + r_B + r_C + r_D = b + d,$$

z čoho už vyplýva dokazovaná rovnosť.

Nech platí o stranách daného štvoruholníka rovnosť

$$a + c = b + d. \quad (5)$$

K tomu, aby existovali kružnice požadovaných vlastností, musia platiť rovnosti (1) – (4) pre polomery hľadaných kružníc. Ukážeme preto, že za podmienky (5) existujú kladné čísla r_A, r_B, r_C, r_D , ktoré vyhovujú sústave (1) – (4).

Ak sčítame rovnice (1) a (3) a od tohto súčtu odčítame rovnicu (2), dostaneme $r_A + r_D = a - b + c$. Za podmienky (5) je však pravá strana tejto rovnosti rovná číslu d , čo znamená, že každé riešenie sústavy (1) – (3) vyhovuje aj rovnici (4). Z (1) hneď dostaneme $r_B = a - r_A$. Potom z (2) máme $r_C = b - r_B = r_A + b - a$ a z (3) $r_D = c - r_C = c - b + a - r_A$ čiže $r_D = d - r_A$. K tomu, aby boli čísla r_B, r_D kladné, musí byť $r_A < a$ a súčasne $r_A < d$ čiže

$$r_A < \min(a, d). \quad (6)$$

K tomu, aby boli kladné tiež čísla r_A i r_C z vyššie uvedené­ho vyplýva nutnosť splnenia nerovnosti

$$\max(0, a - b) < r_A. \quad (7)$$

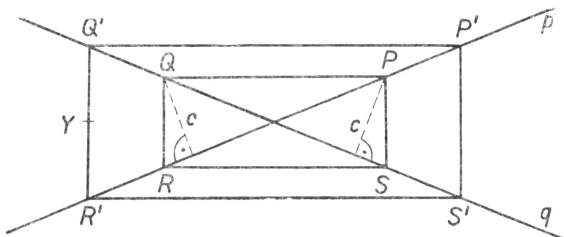
Nerovnosti (6), (7) však budú súčasne splnené len vtedy, keď $a - b < a$, čo zrejme platí, a súčasne $a - b < d$, čo však za podmienky (5) je tiež splnené, pretože $a - b = d - c$.

Poznámka: Riešenie úlohy bolo spracované podľa riešenia O. Tauferovej, žiačky I. B tr. gymnázia v Prahe 6, Arabská 682.



Figure 1

1000



Obr 13

ného má každý bod hranice pravouholníka $PQRS$ od priamok p, q súčet vzdialeností rovný c .

Ak Y je ľubovoľný bod roviny rôznobežiek p, q , ktorý neleží na hranici pravouholníka $PQRS$, potom možno zostrojiť pravouholník $P'Q'R'S'$, na hranici ktorého bude ležať bod Y tak, že bude rôznyi od pravouholníka $PQRS$, a preto súčet vzdialeností bodu Y od priamok p, q bude rôznyi od c .

Záver: Množinou bodov X požadovaných vlastností je teda hranica pravouholníka $PQRS$.

C - I - 6

V rovine je daných päť bodov štvorcovej mreže. Z úsečiek nimi určených aspoň jedna má stred v niektorom mrežovom bode. Dokážte.

Riešenie: V rovine zvolíme pravouhlú súradnicovú sústavu tak, aby mrežové body mali celočíselné súradnice. Ak $M_1 = [x_1, y_1]$, $M_2 = [x_2, y_2]$ sú koncové body nejakej úsečky, potom pre súradnice jej stredu $S = [x_s, y_s]$ platí

$$x_S = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_S = \frac{1}{2}(y_1 + y_2). \quad (1)$$

Z hľadiska parity súradníc x daných mrežových bodov môžu nastať tieto prípady: všetkých 5 je nepárnych; 4 sú nepárne, 1 párna; 3 sú nepárne, 2 párne; 2 sú nepárne, 3 párne; 1 je nepárna, 4 sú párne; všetkých 5 je párnych. Z uvedeného výčtu možností je zrejmé, že vždy aspoň tri body majú súradnice x rovnakej parity. Označme súradnice týchto bodov

$$[a_1, b_1], \quad [a_2, b_2], \quad [a_3, b_3].$$

Zatiaľ čo o číslach a_i , $i = 1, 2, 3$, vieme, že sú rovnakej parity, o číslach b_i , $i = 1, 2, 3$, môžeme tvrdiť len toľko, že sú celé. Určite však aspoň dve z nich, napr. b_1, b_3 , sú rovnakej parity. Potom však $[a_1, b_1], [a_3, b_3]$ je hľadaná dvojice mrežových bodov, pretože podľa (1) sú súradnice stredu

$$\frac{1}{2}(a_1 + a_3), \quad \frac{1}{2}(b_1 + b_3)$$

nimi určenej úsečky celé čísla čiže stred úsečky leží v mrežovom bode, ako bolo treba dokázať.

ÚLOHY II. KOLA

C - II - 1

Určte všetky usporiadané trojice reálnych čísel x, y, z , ktoré vyhovujú rovniciam

$$\begin{aligned}x + 2y &= 4, \\ 2xy - 3z^2 &= 4.\end{aligned}\tag{1}$$

Riešenie: Z prvej rovnice sústavy (1) vyplýva, že $x = 4 - 2y$ a po dosadení do druhej rovnice postupne dostaneme

$$\begin{aligned}2(4 - 2y)y - 3z^2 &= 4, \\ 4 + 4y^2 - 8y + 3z^2 &= 0, \\ 4(1 - y)^2 + 3z^2 &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

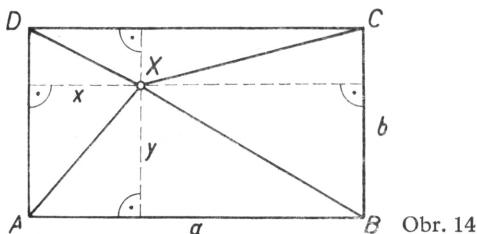
Z (2) priamo vyplýva, že musí platiť $y = 1, z = 0$, z čoho pre x dostaneme $x = 2$.

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že usporiadaná trojica $x = 2, y = 1, z = 0$ sústave (1) vyhovuje.

C - II - 2

V rovine je daný obdĺžnik $ABCD$ so stranami $|AB| = a, |BC| = b$. Vo vnútri obdĺžnika $ABCD$ nájdite všetky body X také, pre ktoré súčet štvorcov vzdialeností od vrcholov A, B, C, D je minimálny.

Riešenie: Označme si x vzdialenosť bodu X od strany AD a y jeho vzdialenosť od strany AB (obr. 14). Podľa



Pythagorovej vety potom dostaneme

$$|AX|^2 = x^2 + y^2, |BX|^2 = (a - x)^2 + y^2, |CX|^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2, |DX|^2 = x^2 + (b - y)^2.$$

Je teda

$$S = |AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 + |DX|^2 = x^2 + y^2 + (a - x)^2 + y^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2 + x^2 + (b - y)^2,$$

z čoho po jednoduchšej úprave dostaneme

$$S = a^2 + b^2 + (2x - a)^2 + (2y - b)^2.$$

Súčet $a^2 + b^2$ je konštantný. Štvorce $(2x - a)^2$, $(2y - b)^2$ sú nezáporné a svoju najmenšiu, t.j. nulovú hodnotu nadobúdajú práve vtedy, keď $2x = a$, $2y = b$, čo znamená, že súčet S je minimálny práve vtedy, keď X je stredom obdĺžnika $ABCD$.

C - II - 3a

Označme **M** množinu všetkých sedemciferných čísel zostavených z číslic 1, 2, 3, ..., 7 bez opakovania.

- a) Určte počet čísel z množiny **M** deliteľných číslom 25.
b) Určte počet čísel z množiny **M** deliteľných číslom 15.

Riešenie: a) Číslo je deliteľné číslom 25 práve vtedy, keď jeho posledné dvojčíslicie je buď 00, alebo 25, alebo 50, alebo 75. Z čísel množiny **M** žiadne neobsahuje číslicu 0. Zostávajú preto len dve možnosti: 25 a 75. Zostávajúcich päť cifier môžeme usporiadať ľubovoľne, pričom pre výber prvej máme 5 možností a pre výber ostatných postupne už len 4, 3, 2 možnosti a výberom prvých štyroch cifier je piata cifra už jednoznačne určená. Pre každé dvojčíslicie 25 a 75 je teda celkom $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ možností, z čoho vyplýva, že v množine **M** je práve $2 \cdot 120 = 240$ čísel deliteľných číslom 25.

b) K tomu, aby nejaké číslo bolo deliteľné číslom 15, musí byť deliteľné číslom 3. To však nastane práve vtedy, keď je číslom 3 deliteľný jeho ciferný súčet. Všetky čísla množiny **M** majú ciferný súčet rovnaký, a to

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28,$$

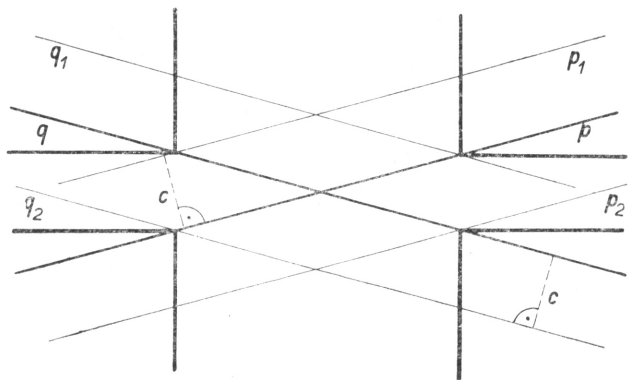
čo nie je číslo deliteľné 3. Z čísel množiny **M** teda žiadne nie je deliteľné číslom 3 a v dôsledku toho ani číslom 15.

C - II - 3b

V rovine sú dané dve rôznobežky p , q a dané je kladné číslo c . Určte množinu všetkých bodov danej roviny, pre ktoré je absolútna hodnota rozdielu vzdialeností od priamok p , q rovná číslu c .

Riešenie: Nech X je ľubovoľný bod hľadanej množiny. Označme d_p jeho vzdialenosť od priamky p a d_q vzdialenosť od priamky q . Podľa podmienok úlohy musí platiť: $|d_p - d_q| = c$ čiže buď $d_p = d_q + c$, alebo $d_q = d_p + c$.

Ak je $d_p = d_q + c$, je vzdialenosť bodu X od priamky p väčšia alebo rovná c . Bod X musí preto ležať v niektorej z polrovín ohraničenej priamkami p_1 , resp. p_2 neobsahujúcej priamku p (obr. 15), pričom p_1, p_2 sú rovnobežky



Obr. 15

s priamkou p , ktoré majú od nej vzdialenosť c . Ak hľadaný bod X leží v príslušnej polrovine ohraničenej priamkou p_1 vrátane tejto priamky, je $d_p = d_{p_1} + c$ čiže $d_{p_1} = d_q$. Bod X leží teda na niektorej z osí uhla priamok p_1 a q v príslušnej polrovine.

Obrátene, každý bod X , ktorý leží na niektorej z týchto dvoch polpriamok, vyhovuje podmienke $d_p = d_q + c$.

Analogickou úvahou ukážeme, že hľadanej množine patria všetky body osí uhlov priamok p_2 a q v príslušnej polrovine.

Ak vyjdeme z rovnosti $d_q = d_p + c$, dostaneme podobným spôsobom ďalšie dve časti hľadanej množiny. Ak totiž q_1, q_2 sú rovnobežky s priamkou q vo vzdialenosti c , potom hľadanej množine patria osi uhlov priamok p, q_1 , resp. p, q_2 v polrovine ohraničenej priamkou q_1 , resp. q_2 a neobsahujúcej priamku q .

PRÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

B - P - 1

Pre každé prirodzené číslo k existuje prirodzené číslo n také, že $12n + 5$ alebo $12n - 5$ je prvočíslo a je väčšie ako k .

Riešenie: Pre každé prirodzené číslo p existujú nezáporné celé čísla m, r také, že

$$p = 12m + r$$

a

$$0 \leq r < 12.$$

Ak p je prvočíslo, tak $r \neq 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$, t. j. $r \in \{1, 5, 7, 11\}$.

Keďže $1 \cdot 11 = 11 \cdot 1 = 11$, $1 \cdot 1 = 1$, $11 \cdot 11 = 121 = 12 \cdot 10 + 1$, tak súčin čísiel tvaru

$$12m + r, \quad r \in \{1, 11\} \tag{1}$$

je zase číslo tohoto tvaru.

Nech x je ľubovoľné číslo tvaru $12n + 5$. Potom x možno napísať ako súčin prvočísel $p_1, \dots, p_k$, t.j. $x = p_1, \dots, p_k$. Keby každé prvočíslo $p_i, i = 1, \dots, k$ bolo tvaru (1), tak aj x by muselo byť tvaru (1). Ale x nie je tohto tvaru. Teda aspoň jedno z prvočísel $p_1, \dots, p_k$ je tvaru $12m + 5$ alebo $12m + 7$.

Ak $k < 7$, tak napr. prvočíslo 7 vyhovuje podmienke úlohy.

Nech teda $k \geq 7$. Označíme l súčin všetkých prvočísel väčších ako 5 a menších ako k . Číslo $12l + 5$ je deliteľné prvočíslom p , ktoré má tvar $12n + 5$ alebo $12n + 7$. Keby bolo p menšie alebo rovné číslu k , tak p delí l . Potom p delí aj $12l + 5 - 12l = 5$. Ak prvočíslo p delí číslo l , tak $p > 5$ a to je spor. Teda p musí byť väčšie ako k . Takže p je hľadané prvočíslo tvaru $12n + 5$ alebo $12n + 7$ a väčšie ako číslo k .

B - P - 2

V množine všetkých reálnych čísel riešte sústavu rovníc o neznámych x, y

$$2x + py = 16, \quad (2)$$

$$x - 2y = \frac{1}{2}p^2, \quad (3)$$

$$(p-1)x + 2y = 12p - 6. \quad (4)$$

Prevedte diskusiu vzhľadom k parametru p .

Riešenie: Riešime najprv prvé dve rovnice. Z rovnice (3) dostávame

$$x = \frac{1}{2}p^2 + 2y.$$

Dosadením do (2) máme

$$4y + p^2 + py = 16$$

a teda

$$y(4 + p) = 16 - p^2. \quad (5)$$

Rozlíšime dva prípady.

1. $p = -4$. Potom rovnice (2), (3), (4) majú tvar

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 16, \\ x - 2y &= 8, \\ -5x + 2y &= -54. \end{aligned}$$

Ak spočítame druhú a tretiu rovnicu, tak dostávame

$$-4x = -46,$$

t. j.

$$x = \frac{23}{2}.$$

Potom napr. z druhej rovnice vyplýva, že

$$y = \frac{1}{2}(-8 + x) = \frac{1}{2}\left(-8 + \frac{23}{2}\right) = \frac{7}{4}.$$

Skúškou sa presvedčíme, že $x = \frac{23}{2}$, $y = \frac{7}{4}$ skutočne
vyhovuje sústave (2), (3), (4) pre $p = -4$.

2. Nech $p \neq -4$. Potom z rovnosti (5) vyplýva, že

$$y = \frac{16 - p^2}{4 + p} = 4 - p.$$

Jednoduchým výpočtom máme tiež hodnotu

$$x = \frac{1}{2}p^2 + 2y = \frac{1}{2}p^2 + 8 - 2p.$$

Dosadíme hodnoty x a y do rovnice (4):

$$(p - 1)\left(\frac{1}{2}p^2 + 8 - 2p\right) + 2(4 - p) = 12p - 6.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme rovnicu

$$p^3 - 5p^2 - 8p + 12 = 0.$$

Zrejme $p = 1$ je koreň tejto rovnice. Po vydelení koreňovým činiteľom $(p - 1)$ dostávame rovnicu

$$p^2 - 4p - 12 = 0.$$

Jej korene sú čísla

$$2 \pm \sqrt{4 + 12} = 2 \pm 4.$$

Zistili sme, že p musí mať niektorú z hodnôt 1, 6, -2 .

Skúškou sa presvedčíme, že pre $p = 1$ čísla $x = \frac{13}{2}$,

$y = 3$, pre $p = 6$ čísla $x = 14$, $y = -2$ a pre $p = -2$ čísla $x = 14$, $y = 6$ sú riešenia rovníc (2), (3), (4).

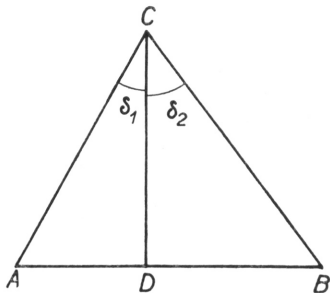
Ku každému ostrouhlému trojuholníku T o obsahu 1 existuje aspoň jeden taký pravouhlý trojuholník T' , že jeho obsah je najviac $\sqrt{3}$ a že platí $T \subseteq T'$. Dokážte!

Riešenie: Nech A, B, C sú vrcholy trojuholníka T , AB je jeho strana maximálnej dĺžky c . Označíme päť výšky z vrcholu C na stranu AB písmenom D . Nech v je dĺžka tejto výšky. Potom platí

$$\frac{1}{2} c \cdot v = 1.$$

Rozlíšime dva prípady.

1. Uhol $\delta_1 = \sphericalangle DCA$ je nie väčší ako 45° a súčasne uhol $\delta_2 = \sphericalangle BCD$ je nie väčší ako 45° (pozri obr. 16). Nech T' je rovnoramenný pravouhlý trojuholník s preponou EF ležiacou na priamke AB a vrcholom C . Zrejme platí $T \subseteq T'$.



Obr. 16

Plošný obsah trojuholníka $\mathbf{T}'$ je v^2 . Plošný obsah trojuholníka $\mathbf{T}$ je $\frac{1}{2} c \cdot v = 1$. Stačí teda ukázať, že $v \leq \frac{c \sqrt{3}}{2}$.

Zrejme platí $c = |AD| + |DB|$. Ľahko vidieť, že platí

$$|AD| = v \cdot \operatorname{tg} \sphericalangle DCA = v \cdot \operatorname{tg} \delta_1,$$

$$|BD| = v \cdot \operatorname{tg} \sphericalangle DCB = v \cdot \operatorname{tg} \delta_2.$$

Potom

$$c = v(\operatorname{tg} \delta_1 + \operatorname{tg} \delta_2) = v \cdot \frac{\sin(\delta_1 + \delta_2)}{\cos \delta_1 \cdot \cos \delta_2}.$$

Keďže AB je strana maximálnej dĺžky, tak $\sphericalangle BCA$ je uhol maximálnej veľkosti a teda $\delta_1 + \delta_2 \geq 60^\circ$.

Použitím známych vlastností goniometrických funkcií postupne dostávame

$$\cos \delta_1 \cdot \cos \delta_2 = \frac{1}{2} [\cos(\delta_1 + \delta_2) + \cos(\delta_1 - \delta_2)] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right),$$

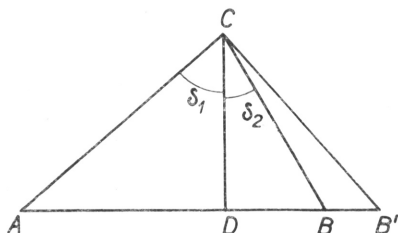
$$\sin(\delta_1 + \delta_2) \geq \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Potom

$$c \geq v \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)} = v \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

a to sme chceli ukázať.

2. Uvažujme teraz prípad, keď jeden z týchto uhlov, napr. $\delta_1 = \sphericalangle DCA$, je väčší ako 45° . Potom musí byť $\delta_2 = \sphericalangle DCB < 45^\circ$. Označíme B' priesečník kolmice na stranu AC idúcej bodom C (pozri obr. 17) s priamkou AB . Trojuholník $\mathbf{T}'$ s vrcholmi A, B', C je pravouhlý a obsahuje trojuholník $\mathbf{T}$. Zostáva nám odhadnúť jeho plošný obsah.



Obr. 17

Uhol $\sphericalangle CAB$ je rovný $90^\circ - \delta_1$ a teda menší ako 45° . Strana AC nie je dlhšia ako strana AB . Pre plošný obsah P' trojuholníka $\mathbf{T}'$ dostávame

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{2} v \cdot AB' = \frac{1}{2} v \cdot \frac{AC}{\cos \sphericalangle CAB} \leq \frac{1}{2} v \cdot \frac{c}{\cos 45^\circ} = \\ &= 1 \cdot \sqrt{2} < \sqrt{3}. \end{aligned}$$

V tomto prípade je $\mathbf{T}'$ hľadaný trojuholník a úloha je vyriešená.

B - P - 4

Daná je úsečka AB a bod C jej vnútra tak, že platí $|AC| \geq |BC|$. Ku každej kružnici k obsahujúcej body A, C zostrojíme obidve kružnice k' zhodné s k , ktoré

obsahujú body B, C . Vyšetrite množinu všetkých priesečníkov dvojíc k, k' .

Riešenie: Nech $\mathbf{M}$ je množina všetkých priesečníkov dvojíc k, k' s uvedenou vlastnosťou.

Zrejme bod C patrí do množiny $\mathbf{M}$. Nech $X \in \mathbf{M}$ a $X \neq C$. Existujú teda dve kružnice k, k' také, že k obsahuje body A, C, X , kružnica k' obsahuje body B, C, X a majú rovnaké polomery. Úsečka CX je tetivou obidvoch kružníc. Obvodové uhly $\sphericalangle XAC$ a $\sphericalangle XBC$ sú rovnaké. Teda trojuholník ABX je rovnoramenný. Odtiaľ vyplýva, že bod X leží na osi s úsečky AB a neleží na úsečke AB .

Ukážeme, že je to množina $\mathbf{M}$, t.j. že každý bod priamky s neležiaci na úsečke AB patrí do množiny $\mathbf{M}$.

Nech teda X leží na priamke s a neleží na úsečke AB . Trojice bodov A, C, X a B, C, X určujú dve kružnice k, k' , ktoré sa pretínajú v bodoch C a X . Stačí dokázať, že kružnice k a k' majú rovnaké polomery. Keďže X leží na osi úsečky AB , tak trojuholník ABX je rovnoramenný a teda $\sphericalangle XAC = \sphericalangle XBC$. Uhly $\sphericalangle XAC$ a $\sphericalangle XBC$ sú obvodové uhly tetivy XC v kružniciach k a k' . Odtiaľ vyplýva, že kružnice k a k' majú rovnaké polomery.

Teda vyšetrovaná množina $\mathbf{M}$ obsahuje bod C a všetky body osi úsečky AB neležiace na AB .

SÚŤAŽNÉ ÚLOHY I. KOLA

B - I - 1

V texte tejto úlohy symbol $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ ($x_1 \neq 0$) bude značiť dekadický zápis prirodzeného čísla. Koľko je navzájom rôznych sedemciferných čísel $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$, pre ktoré platí

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 + x_6x_5x_4x_3x_2x_1 = x_7x_7x_7x_7x_7x_7 ? \quad (1)$$

Riešenie: Aby zápis šesticiferného čísla $x_6x_5x_4x_3x_2x_1$ mal zmysel, musí byť $x_6 \neq 0$. Z rovnakých dôvodov musí byť $x_7 \neq 0$.

Z rovnosti (1) pre cifry najvyššieho rádu (stotisíce) vyplýva rovnosť $x_1 + x_6 = x_7$ alebo $x_1 + x_6 + 1 = x_7$. Porovnaním cifier najnižšieho rádu (jednotiek) dostávame rovnosti $x_1 + x_6 = x_7$ alebo $x_1 + x_6 = 10 + x_7$. Teda musí platiť $x_1 + x_6 = x_7$.

Podobnou úvahou dostaneme rovnosti $x_2 + x_5 = x_7$, $x_3 + x_4 = x_7$.

Počet riešení v množine nezáporných celých čísel sústavy rovníc

$$x_1 + x_6 = x_7, \quad (2)$$

$$x_2 + x_5 = x_7, \quad (3)$$

$$x_3 + x_4 = x_7, \quad (4)$$

pre ktoré je $x_1 > 0$, $x_6 > 0$, je počet riešení rovnice (1).

Keďže $x_1 > 0$, $x_6 > 0$, tak x_7 môže nadobúdať hodnoty 2, 3, ..., 9.

Rovnica (2) má $x_7 - 1$ riešení 1, $x_7 - 1$; 2, $x_7 - 2$; ... ; $x_7 - 1$, 1. Podobne rovnica (3) a (4) má $x_7 + 1$ riešení 0, x_7 ; 1, $x_7 - 1$; ... ; x_7 , 0. Úhrnom sústava rovníc (2), (3), (4) má

$$\sum_{x_7=2}^9 (x_7 - 1) \cdot (x_7 + 1) \cdot (x_7 + 1) \text{ riešení.}$$

Výpočtom zistíme

$$\begin{aligned} \sum_{x_7=2}^9 (x_7 - 1) \cdot (x_7 + 1) \cdot (x_7 + 1) &= 1 \cdot 3 \cdot 3 + \\ &+ 2 \cdot 4 \cdot 4 + \dots + 8 \cdot 10 \cdot 10 = 2256. \end{aligned}$$

Celkový počet sedemciferných čísel $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ spĺňajúcich podmienku (1) je teda 2256.

B - I - 2

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y , pre ktoré platí

$$x^y = y^{x-y}. \quad (5)$$

Riešenie: Nech x, y sú prirodzené čísla také, že platí rovnosť (5).

Ak $y = 1$, tak dostávame $x = x^1 = 1^{x-1} = 1$.

Ak $x = y$, tak zase

$$x^y = x^x = y^0 = 1$$

a to je možné len pre $x = 1$.

Predpokladajme teraz $x \neq y, y \neq 1$. Keďže $x^y \geq 1$, tak aj $y^{x-y} \geq 1$ a teda $x - y \geq 0$. Predpokladáme $x \neq y$,

takže $x > y > 1$. Číslo $d = x - y$ je prirodzené a platí

$$(y + d)^y = y^d. \quad (6)$$

Odtiaľ vyplýva, že $d > y$. Označíme $e = d - y$. Dosadením do (6) a vydelením číslom y^y postupne dostaneme

$$(y + d)^y = y^{e+y},$$

$$\left(\frac{y + d}{y}\right)^y = y^e.$$

Kedže y^e je prirodzené číslo, aj $\frac{y + d}{y} = 1 + \frac{d}{y}$ musí byť číslo prirodzené. Odtiaľ vyplýva, že existuje také prirodzené číslo n , že platí $d = ny$. Dosadením do rovnice (6) dostaneme

$$y^y \cdot (1 + n)^y = y^{ny}$$

a po odmocnení

$$y \cdot (1 + n) = y^n. \quad (7)$$

Pre $n = 1$ rovnica (7) nemá riešenie. Pre $n = 2$ rovnica (7) dáva

$$3y = y^2$$

a teda $y = 3$. Potom

$$x = y + d = 3 + 2 \cdot 3 = 9.$$

Pre $n = 3$ z rovnice (7) vyplýva

$$4y = y^3,$$

odtiaľ zase $y = 2$. Potom

$$x = 2 + 3 \cdot 2 = 8.$$

Ak $n > 3$, tak

$$2^{n-1} > n + 1.$$

Potom (spomeňme, že predpokladáme $y > 1$) platí

$$y^n \geq y \cdot 2^{n-1} > y(n + 1)$$

a teda rovnica (7) nemá riešenie.

Ukázali sme, že ak dvojica prirodzených čísel $[x, y]$ je riešením rovnice (5), tak musí byť niektorou z dvojíc $[1, 1]$, $[8, 2]$ alebo $[9, 3]$. Skúškou sa presvedčíme, že tieto dvojice sú riešením rovnice (5). (Podľa riešenia *Jana Vlačihu*, žiaka II. C triedy gymnázia v Prahe 4, Budějovická 680.)

B - 1 - 3

V obore a) všetkých racionálnych čísel,

b) všetkých celých čísel

riešte sústavu $(n + 1)$ rovníc o $(n + 1)$ neznámych

$$x_k x_0 + x_{k-1} x_1 + x_{k-2} x_2 + \dots + x_0 x_k = 2^k x_k \quad (8)$$

$(k = 0, 1, 2, \dots, n).$

Riešenie: Napíšeme sústavu rovníc (8) explicitne:

$$\begin{aligned} x_0^2 &= x_0, \\ x_1 x_0 + x_0 x_1 &= 2 \cdot x_1, \\ x_2 x_0 + x_1 x_1 + x_0 x_2 &= 2^2 \cdot x_2, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_n x_0 + \dots + x_0 x_n &= 2^n x_n. \end{aligned}$$

Z prvej rovnice vyplýva, že $x_0 = 0$ alebo $x_0 = 1$. Ak $x_0 = 0$, tak z druhej rovnice vyplýva $x_1 = 0$. Matematickou indukciou potom ľahko dostaneme $x_i = 0$ aj pre $i = 2, 3, \dots, n$. Teda jedným riešením sú čísla

$$x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0. \quad (9)$$

Nech $x_0 = 1$. Potom z druhej rovnice máme

$$2x_1 = 2x_1$$

a zdá sa, že x_1 môže byť ľubovoľné reálne číslo. Z tretej rovnice vyplýva

$$x_1^2 = 4 \cdot x_2 - 2x_2$$

a teda

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2}.$$

Matematickou indukciou ukážeme, že

$$x_k = \frac{x_1^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (10)$$

Pre $k = 0, 1, 2$ je tvrdenie pravdivé. Nech platí pre každé $k < i \leq n$. Potom z rovnice

$$x_i x_0 + x_{i-1} x_1 + \dots + x_0 x_i = 2^i x_i$$

dosadením dostávame

$$\begin{aligned} 2^i x_i - 2x_i &= \frac{x_1^i}{(i-1)!} + \frac{x_1^i}{(i-2)!2!} + \dots + \\ &+ \frac{x_1^i}{2!(i-2)!} \end{aligned} \quad (11)$$

Z binomickej vety však vyplýva

$$\begin{aligned}(1+1)^i &= \binom{i}{0} + \binom{i}{1} + \dots + \binom{i}{i} = \\ &= 1 + \frac{i!}{(i-1)!1!} + \frac{i!}{(i-2)!2!} + \dots + \frac{i!}{2!(i-1)!} + \frac{i!}{i!}.\end{aligned}$$

Teda

$$\begin{aligned}\frac{1}{(i-1)!} + \frac{1}{(i-2)!2!} + \dots + \frac{1}{2!(i-2)!} &= \\ &= \frac{2^i - 2}{i!}.\end{aligned}$$

Po dosadení do rovnice (11) jednoduchou úpravou máme

$$x_i = \frac{x_1^i}{i!}.$$

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že čísla (10) sú riešením sústavy rovníc (8).

Ak x_1 je racionálne číslo, tak aj ostatné (10) sú racionálne.

Teda čísla (9) a (10) predstavujú všetky racionálne riešenia sústavy rovníc (8), kde x_1 je ľubovoľné racionálne číslo.

Čísla (9) a (10) predstavujú aj všetky celočíselné riešenia sústavy rovníc (8), keď x_1 je také celé číslo, že x_1^k je deliteľné číslom $k!$ pre $k = 2, 3, \dots, n$.

Ak A_1, A_2, A_3 sú vrcholy ostrouhlého trojuholníka, potom najmenší kruh, ktorý ho obsahuje, je kruh ohraničený kružnicou opísanou trojuholníku $A_1A_2A_3$. Ak body A_1, A_2, A_3 nie sú vrcholy ostrouhlého trojuholníka a sú aspoň dva z nich navzájom rôzne, potom najmenší kruh, ktorý obsahuje A_1, A_2, A_3 , je kruh ohraničený Thalesovou kružnicou nad najdlhšou z úsečiek A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 . Dokážte.

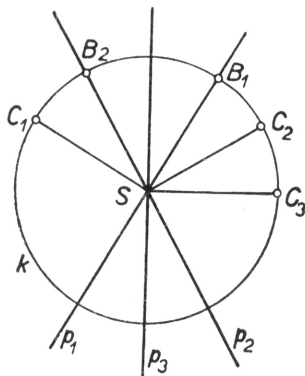
Riešenie: Najprv upresníme pojem „najmenší kruh“. Kruh (S_0, r_0) je najmenší kruh obsahujúci body A_1, A_2, A_3 , ak (i) kruh (S_0, r_0) obsahuje body A_1, A_2, A_3 a (ii) ak nejaký kruh (S, r) obsahuje body A_1, A_2, A_3 , tak $r \geq r_0$ a v prípade $r = r_0$ je $S = S_0$.

Najprv dokážeme dve pomocné tvrdenia.

Pomocné tvrdenie 1. Nech body C_1, C_2, C_3 sú body na kružnici k so stredom S také, že každý z uhlov $\sphericalangle C_1SC_2, \sphericalangle C_2SC_3, \sphericalangle C_3SC_1$ je menší ako 180° . Nech p_i je priamka idúca bodom S a kolmá na polomer cez bod $C_i, i = 1, 2, 3$. Nech σ_i je polrovina určená priamkou p_i a obsahujúca bod $C_i, i = 1, 2, 3$. Potom množina $\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3$ obsahuje jediný bod S .

Nech B_1 označuje ten priesečník priamky p_1 s kružnicou k , ktorý leží v polrovine σ_2 . Podobne nech B_2 je priesečník priamky p_2 s kružnicou k ležiaci v polrovine σ_1 . Potom $\sigma_1 \cap \sigma_2$ je uhol B_2SB_1 .

Keby priamka p_3 prechádzala uhlom $\sigma_1 \cap \sigma_2$ (rozumieme tým: p_3 a $\sigma_1 \cap \sigma_2$ majú iný spoločný bod ako stred kružni-



Obr. 18

ce S , pozri obr. 18), tak jeden z bodov B_1, B_2 leží v polrovine σ_3 . Môžeme predpokladať, že je to bod B_1 . Potom uhol $\sphericalangle B_1SC_3$ je ostrý alebo pravý. Takže

$$\sphericalangle C_1SC_3 = \sphericalangle C_1SB_1 + \sphericalangle B_1SC_3 \leq 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

a teda

$$\sphericalangle C_3SC_1 \geq 180^\circ,$$

čo nie je možné.

Teda priamka p_3 neprechádza uhlom $\sigma_1 \cap \sigma_2$. Odtiaľ vyplýva, že uhol $\sigma_1 \cap \sigma_2$ leží v polrovine σ_3 alebo $\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3$ má jediný prvok S . Vylúčime prvú možnosť. Keby uhol $\sigma_1 \cap \sigma_2$ ležal v polrovine σ_3 , tak bod C_3 leží buď vnútri uhla B_2SB_1 , alebo jeden z uhlov $\sphericalangle C_3SB_2, \sphericalangle B_1SC_3$ je menší ako 90° . V prvom prípade by bol uhol $\sphericalangle C_1SC_3$ menší ako uhol $\sphericalangle C_1SB_1 = 90^\circ$ a potom $\sphericalangle C_3SC_1$ väčší ako 180° a to nie je možné. Keby napr. bol uhol $\sphericalangle C_3SB_2$ menší ako 90° , tak

$$\sphericalangle C_3SC_2 = \sphericalangle C_3SB_2 + \sphericalangle B_2SC_2 < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

čo nie je možné, lebo uhol $\sphericalangle C_2SC_3$ je menší ako 180° .

Podobne sa ukáže, že uhol $\sphericalangle B_1SC_3$ nemôže byť menší ako 90° .

Pomocné tvrdenie 2. Nech C_1, C_2, C_3 sú body na kružnici k so stredom S a polomerom r . Nech žiaden z uhlov $\sphericalangle C_1SC_2, \sphericalangle C_2SC_3, \sphericalangle C_3SC_1$ nie je väčší ako 180° . Potom kruhy $(C_1, r), (C_2, r), (C_3, r)$ majú jediný spoločný bod S .

Ak jeden z uvažovaných uhlov, napr. $\sphericalangle C_1SC_2$, je priamy, tak kruhy $(C_1, r), (C_2, r)$ sa dotýkajú v bode S a teda nemajú iný spoločný bod. Ak všetky tri uhly sú menšie ako 180° , tak kruh (C_i, r) leží v polrovine určenej dotyčnicou v bode S a obsahujúcej bod C_i . Tvrdenie vyplýva bezprostredne z prvého pomocného tvrdenia.

Dokážeme teraz prvú časť tvrdenia. Nech body A_1, A_2, A_3 sú vrcholy ostrouhlého alebo pravouhlého trojuholníka. Nech S_0 je stred kružnice k opísanej tomuto trojuholníku a r_0 je jej polomer. Kruh (S_0, r_0) má vlastnosť (i). Ukážeme, že má aj druhú vlastnosť (ii). Nech (S, r) je kruh obsahujúci body A_1, A_2, A_3 . Ak $r > r_0$, tak nemáme čo dokazovať. Nech teda $r \leq r_0$.

Body A_1, A_2, A_3 ležia na kružnici k a splňajú podmienku druhého pomocného tvrdenia. Body A_1, A_2, A_3 ležia však v kruhu (S, r) a teda bod S je vzdialený od každého z nich o vzdialenosť, ktorá je menšia alebo rovná $r \leq r_0$. Teda bod S leží v každom kruhu $(A_1, r_0), (A_2, r_0), (A_3, r_0)$ a podľa druhého pomocného tvrdenia je $S = S_0$. To sme chceli dokázať.

Uvažujme prípad, že body A_1, A_2, A_3 nie sú vrcholy ostrouhlého trojuholníka. Máme tri možnosti:

1. body A_1, A_2, A_3 sú vrcholy pravouhlého trojuholníka,

2. body A_1, A_2, A_3 sú vrcholy tupouhlého trojuholníka,
3. body A_1, A_2, A_3 ležia na priamke.

Prípád 1. sme už vybavili vyššie.

Prípady 2. a 3. uvažujme súčasne. Predpokladáme, že ak nastane prípad 2., tak A_1A_2 je najdlhšia strana trojuholníka a v prípade 3. bod A_3 leží na úsečke A_1A_2 .

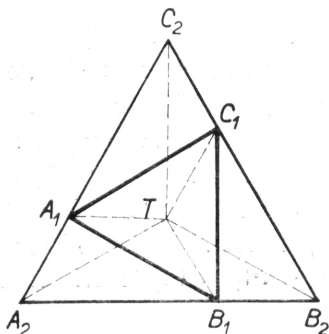
Potom Thalesova kružnice nad A_1A_2 obsahuje bod A_3 . Ak nejaký kruh (S, r) obsahuje body A_1, A_2 , tak musí byť $2r \geq |A_1A_2|$. Ak platí rovnosť $2r = |A_1A_2|$, tak A_1A_2 je priemer tohoto kruhu, S je stred úsečky A_1A_2 a teda kružnica (S, r) je Thalesova kružnica nad A_1A_2 .

B - I - 5

V rovnostrannom trojuholníku ABC je D stred strany AC , E stred strany BC . Nájdite množinu, ktorú tvoria ťažiská všetkých rovnostranných trojuholníkov obsiahnutých v trojuholníku ABC tak, že majú s úsečkou DE neprázdny prienik.

Riešenie: Najprv dokážeme pomocné tvrdenie: Nech $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ sú rovnostranné trojuholníky také, že vrcholy A_1, B_1, C_1 ležia na stranách trojuholníka $A_2B_2C_2$. Potom trojuholníky majú spoločné ťažisko.

Ak trojuholníky $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ nesplývajú, tak na každej strane trojuholníka $A_2B_2C_2$ leží práve jeden vrchol trojuholníka $A_1B_1C_1$. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že A_1 leží na strane A_2C_2 , B_1 leží na strane A_2B_2 a C_1 leží na strane B_2C_2 (pozri obr. 19). Porovnaním uhlov zistíme, že trojuholníky $A_1A_2B_1, B_1B_2C_1, C_1C_2A_1$



Obr. 19

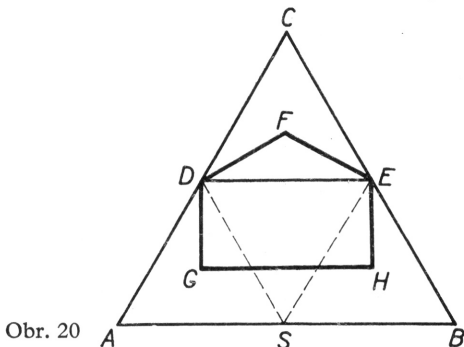
sú podobné. Majú rovnaké strany $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$ a teda sú zhodné. Nech T je ťažisko trojuholníka $A_1B_1C_1$. Potom trojuholníky A_1A_2T , B_1B_2T , C_1C_2T sú zhodné, lebo majú rovnaké strany $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$, $A_1T = B_1T = C_1T$ a rovnaké uhly pri vrchoch A_1 , B_1 , C_1 . Teda platí $A_2T = B_2T = C_2T$. Odtiaľ vyplýva, že T je ťažisko trojuholníka $A_2B_2C_2$.

Teraz môžeme prejsť k riešeniu pôvodnej úlohy. Nech $\mathbf{M}$ je množina ťažísk rovnostranných trojuholníkov obsiahnutých v trojuholníku ABC , ktoré majú neprázdny prienik s úsečkou DE . Nech $\mathbf{M}_1$ je množina ťažísk tých trojuholníkov obsiahnutých v trojuholníku ABC , ktoré sú rovnolahlé s trojuholníkom ABC a pretínajú úsečku DE . Zrejme platí $\mathbf{M}_1 \subseteq \mathbf{M}$.

Ak bod T patrí do množiny $\mathbf{M}$, tak existuje rovnostranný trojuholník XYZ obsiahnutý v trojuholníku ABC taký, že má neprázdny prienik s úsečkou DE a T je jeho ťažisko. Nech $X'Y'Z'$ je najmenší trojuholník rovnolahlý s trojuholníkom ABC , ktorý obsahuje trojuholník XYZ (jeho konštrukcia je evidentná). Zrejme $X'Y'Z'$ má neprázdny

prienik s úsečkou DE a je obsiahnutý v trojuholníku ABC . Teda jeho ťažisko patrí do množiny $\mathbf{M}_1$. Podľa pomocného tvrdenia však trojuholníky XYZ a $X'Y'Z'$ majú spoločné ťažisko. Teda $T \in \mathbf{M}_1$. Odtiaľ vyplýva, že $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$.

Nech S je stred strany AB . Nech F, G, H sú ťažiská trojuholníkov DEC, ADS, BES . Nech $\mathbf{M}_2$ je množina všetkých bodov päťuholníka $EFDGH$ rôznych od bodov D a E . Ukážeme, že $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$ (pozri obr. 20).



Obr. 20

Ak T je ťažisko trojuholníka XYZ rovnobáhlého s trojuholníkom ABC obsiahnutého v trojuholníku ABC a pretínajúceho úsečku DE , tak jednoduchou úvahou zistíme, že $T \in \mathbf{M}_2$ (stačí určiť vzdialenosť ťažiska T od strán trojuholníka ABC).

Naopak, nech $T \in \mathbf{M}_2$. Rozlíšime tri prípady.

a) Ak T leží v trojuholníku EFD a neleží na strane DE , tak trojuholník so stranou ležiacou na úsečke DE , s ťažiskom T a rovnobáhlý s trojuholníkom ABC je obsiahnutý v trojuholníku ABC a teda $T \in \mathbf{M}_1$.

b) Ak T leží na úsečke DE a $T \neq D$, $T \neq E$, tak sa ľahko zostrojí trojuholník XYZ rovnoľahlý s trojuholníkom ABC , s ťažiskom T a ležiaci vnútri trojuholníka ABC . Teda $T \in \mathbf{M}_1$.

c) Nech T leží v štvoruholníku $EDGH$ a neleží na úsečke DE . Trojuholník XYZ rovnoľahlý s trojuholníkom ABC , s vrcholom Z na úsečke DE a s ťažiskom T má požadované vlastnosti. Teda $T \in \mathbf{M}_1$.

Ukázali sme teda, že $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$ a $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$.

Môžeme zhrnúť: hľadaná množina bodov $\mathbf{M}$ je množina všetkých bodov päťuholníka $EFDGH$ rôznych od bodov D a E .

B - I - 6

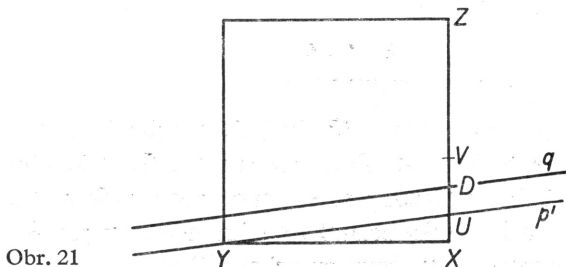
V rovine je daný štvorec $\mathbf{Q}$, bod M a priamka p neprechádzajúca bodom M . Zostrojte štvorec $\mathbf{Q}'$ tak, aby jeho strany boli rovnobežné so stranami štvorca $\mathbf{Q}$ a aby bod M a dva priesečníky priamky p s hranicou štvorca $\mathbf{Q}'$ delili túto hranicu na tri časti rovnakej dĺžky.

Riešenie: Pretože štvorec $\mathbf{Q}$ môžeme nahradiť ľubovoľným iným štvorcom, ktorý má strany rovnobežné so stranami štvorca $\mathbf{Q}$ a výsledok úlohy sa nezmení, tak môžeme predpokladať, že štvorec $\mathbf{Q}$ nepretína ani priamku p ani kolmicu cez bod M na priamku p .

Zostrojíme najprv priamku q a bod N , ktoré delia hranicu štvorca $\mathbf{Q}$ na tri časti rovnakej dĺžky. Potom pomocou rovnoľahlosti zostrojíme hľadaný štvorec $\mathbf{Q}'$.

Nech X je vrchol štvorca $\mathbf{Q}$, ktorého vzdialenosť od priamky p je minimálna. Nech Y, Z sú vrcholy štvorca $\mathbf{Q}$ susediace s vrcholom X , pritom vzdialenosť vrcholu Z od priamky p nie je menšia ako vzdialenosť vrcholu Y od priamky p . Nech V je bod na strane XZ taký, že $|VZ| = = 2 \cdot |XV|$. Nech p' je priamka rovnobežná s priamkou p a idúca vrcholom Y . Nech U je priesečník priamky p' so stranou XZ (ľahko vidieť, že U leží na úsečke XZ). Rozlíšime dva prípady:

a) $|XU| \leq |XV|$. Nech D je stred úsečky UV a q je priamka rovnobežná s priamkou p idúca bodom D . Zrejme q delí hranicu štvorca $\mathbf{Q}$ v pomere 1 : 2 (obr. 21).



Obr. 21

b) $XU > XV$. Na priamke XZ zostrojíme bod W tak, aby $WX = XZ$. Nech F je priesečník priamky YW a priamky rovnobežnej s priamkou p a idúcej bodom V . Nech E je taký bod na strane YX , že priamka EF je rovnobežná so stranou XZ . Priamka q idúca bodom E a rovnobežná s priamkou p delí obvod štvorca $\mathbf{Q}$ v pomere 1 : 2. (Obr. 22.)

Teraz jednoducho zostrojíme bod N taký, že N a priesečníky priamky q so stranami štvorca $\mathbf{Q}$ delia obvod štvorca $\mathbf{Q}$ na tri časti rovnakej dĺžky.

ÚLOHY II. KOLA

B - II - 1

Ostrouhlý trojuholník T_1 je obsiahnutý v trojuholníku T_2 . Potom o polomeroch r_1, r_2 kružníc opísaných trojuholníkom T_1 a T_2 platí $r_1 \leq r_2$. Dokážte.

Riešenie: Podľa úlohy B — I — 4, najmenší kruh obsahujúci trojuholník T_1 je kruh ohraničený kružnicou opísanou trojuholníku T_1 .

Nech R je polomer najmenšieho kruhu, ktorý obsahuje trojuholník T_2 . Podľa úlohy B — I — 4 platí $r_2 \geq R$.

Keďže najmenší kruh obsahujúci trojuholník T_2 obsahuje aj trojuholník T_1 , tak polomer R tohoto kruhu nie je menší, ako polomer r_1 najmenšieho kruhu obsahujúceho trojuholník T_1 , teda

$$r_2 \geq R \geq r_1.$$

(Riešil *Jan Nekovář*, 2. D trieda, gymnázium, Praha 2).

B - II - 2

Je daná šachovnica tvaru $n \times n$. Koľko figuriek možno maximálne na túto šachovnicu rozmiestniť tak, aby žiadne dve figurky nestáli na susedných políčkach? (Za susedné považujeme také políčka, ktoré majú spoločnú stranu alebo roh.)

Riešenie: Očísľujeme políčka šachovnice dvojicami prirodzených čísel tak, že $[i, j]$ je číslo políčka v i -tom stĺpci a j -tom riadku.

Na každé políčko $[i, j]$, kde i, j sú nepárne čísla, umiestnime jednu figurku. Takéto rozmiestnenie vyhovuje požiadavke úlohy, t. j. žiadne dve figúrky nestoja na susedných políčkach.

Ak n je párne, tak sme umiestnili $\frac{n^2}{4}$ figuriek na šachovnicu. Ak n je nepárne, tak sme umiestnili $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ figuriek.

Ukážeme, že viacej figuriek sa nedá umiestniť na šachovnicu tak, aby bola splnená požiadavka úlohy. Musíme zase rozlíšiť dva prípady:

1. Nech n je párne. Šachovnicu rozdelíme na $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ častí tvaru 2×2 . Nech na šachovnici je umiestnené m figuriek tak, že žiadne dve figúrky nestoja na susedných políčkach. Potom vnútri každej časti tvaru 2×2 smie byť najviac jedna figurka. Teda $m \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2$.

2. Nech n je nepárne. Nech na šachovnici je umiestnené m figuriek a žiadne dve nie sú na susedných políčkach. Šachovnicu rozšírime o nové políčka na šachovnicu tvaru $(n+1) \times (n+1)$ a figúrky necháme umiestnené tak, ako pôvodne boli. Potom $(n+1)$ je párne a podľa predchádzajúcej úvahy je $m \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

Z uvedeného vyplýva, že maximálny počet figuriek umiestnených na šachovnici tvaru $n \times n$ tak, aby žiadne dve nestáli na susedných políčkach, je $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ pre n párne a $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ pre n nepárne.

B - II - 3a

Určte, koľko rôznych trojíc x, y, z prirodzených čísel spĺňa rovnosť

$$x^{1y^{97}z^9} = 19^{791} \cdot 97^9 \quad (1)$$

Riešenie: Nech prirodzené čísla x, y, z vyhovujú rovnici (1). Ľahko zistíme, že 19 a 97 sú prvočísla. Preto čísla x, y, z musia byť súčinom mocnín čísel 19 a 97 s nezápornými celočíselnými exponentmi. Navyiac, číslo y nemôže obsahovať ako súčiniteľ kladnú mocninu čísla 97, lebo na pravej strane rovnosti (1) je mocnina 97^9 . Teda existujú nezáporné celé čísla a, b, c, d, e také, že platí

$$x = 19^a \cdot 97^b, \quad y = 19^c, \quad z = 19^d \cdot 97^e.$$

Dosadíme do rovnice (1):

$$19^a \cdot 97^b \cdot 19^{97c} \cdot 19^{9d} \cdot 97^{9e} = 19^{791} \cdot 97^9.$$

Z toho dostaneme pre čísla a, b, c, d, e dve rovnice

$$a + 97c + 9d = 791, \quad (2a)$$

$$b + 9e = 9. \quad (2b)$$

Každému nezápornému celočíselnému riešeniu rovníc (2a) a (2b) odpovedá jedno riešenie rovnice (1). Teda stačí zistiť počet nezáporných celočíselných riešení rovníc (2a) a (2b).

Rovnica (2b) má dve riešenia: $e = 0, b = 9$ a $e = 1, b = 0$.

Keďže $8 \cdot 97 = 776 < 791 < 9 \cdot 97 = 873$, tak číslo c môže nadobúdať hodnoty 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Postupne tieto hodnoty dosadíme do rovnice (2a).

1. $c = 0$. Potom

$$\begin{aligned}a + 9d &= 791, \\a &= 9(87 - d) + 8.\end{aligned}$$

Číslo d môže nadobúdať hodnoty 0, 1, ..., 87.

Pre každú z uvedených hodnôt čísla d existuje práve jedno číslo a vyhovujúce rovnici (2a).

Teda máme 88 riešení.

2. $c = 1$. Potom

$$\begin{aligned}a + 9d &= 694, \\a &= 9(77 - d) + 1.\end{aligned}$$

Podobne ako v prípade 1. máme 78 riešení.

3. $c = 2$. Potom

$$\begin{aligned}a + 9d &= 597, \\a &= 9(66 - d) + 3.\end{aligned}$$

Máme 67 riešení.

4. $c = 3$. Potom

$$\begin{aligned}a + 9d &= 500, \\a &= 9(55 - d) + 5.\end{aligned}$$

Máme 56 riešení.

5. $c = 4$. Potom

$$\begin{aligned}a + 9d &= 403, \\ a &= 9(44 - d) + 7.\end{aligned}$$

Máme 45 riešení.

6. $c = 5$. Potom

$$\begin{aligned}a + 9d &= 306, \\ a &= 9(34 - d).\end{aligned}$$

Máme 35 riešení.

7. $c = 6$. Potom

$$\begin{aligned}a + 9d &= 209, \\ a &= 9(23 - d) + 2.\end{aligned}$$

Máme 24 riešení.

8. $c = 7$. Potom

$$\begin{aligned}a + 9d &= 112, \\ a &= 9(12 - d) + 4.\end{aligned}$$

Máme 13 riešení.

9. $c = 8$. Potom

$$\begin{aligned}a + 9d &= 15, \\ a &= 9(1 - d) + 6.\end{aligned}$$

Máme 2 riešenia.

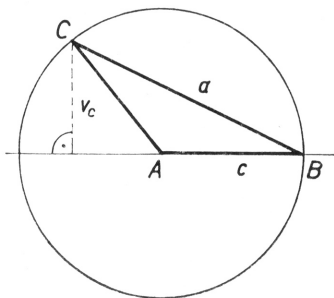
Celkový počet nezáporných celočíselných riešení sústavy (2a), (2b) a teda počet prirodzených riešení rovnice (1) je

$$2 \cdot (88 + 78 + 67 + 56 + 45 + 35 + 24 + 13 + 2) = 816.$$

(Riešil *Roman Kamaryt*, 2. D trieda, gymnázium W. Piecka, Praha 2.)

Určte všetky trojuholníky o obsahu 18 cm^2 , ktoré majú jedinou stranu dlhšiu ako 6 cm .

Riešenie: Nech ABC je trojuholník o obsahu 18 cm^2 a pre jeho strany platí $a > 6 \text{ cm}$, $b \leq 6 \text{ cm}$, $c \leq 6 \text{ cm}$ (obr. 23). Potom trojuholník leží v kruhu so stredom A



Obr. 23

a polomerom 6 cm . Výška v_c na stranu AB je nie väčšia ako polomer tohoto kruhu, t. j. 6 cm . Plošný obsah trojuholníka ABC je

$$\frac{1}{2} c \cdot v_c = 18.$$

Keďže $c \leq 6$, $v_c \leq 6$, tak musí byť $v_c = c = 6$. Potom musí byť aj $b = 6$ a trojuholník je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A . Takýto trojuholník zrejme vyhovuje požiadavkám úlohy.

Jediným riešením je teda rovnoramenný trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole A a odvesnami $b = c = 6 \text{ cm}$.

(Riešil *Jaroslav Lapšanský*, 2. D trieda, gymnázium, Humenné).

Iné riešenie: Nech ABC je trojuholník vyhovujúci úlohe a strana BC je dlhšia ako 6 cm. Označíme D päť výšky v_a na stranu BC . Dĺžku úsečiek BD , DC označíme x , y . Teda

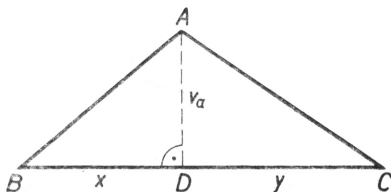
$$x + y = a > 6$$

(obr. 24). Podľa zadania úlohy platí

$$\frac{v_a \cdot (x + y)}{2} = 18,$$

t. j.

$$v_a x + v_a y = 36. \quad (3)$$



Obr. 24

Podľa Pythagorovej vety a zadania úlohy platí

$$x^2 + v_a^2 = c^2 \leq 36, \quad (4)$$

$$y^2 + v_a^2 = b^2 \leq 36. \quad (5)$$

Spočítame nerovnosti (4), (5) a rovnosť (3) vynásobenú -2 . Dostaneme

$$x^2 - 2v_a x + v_a^2 + y^2 - 2v_a y + v_a^2 \leq 0,$$

teda

$$(x - v_a)^2 + (y - v_a)^2 \leq 0.$$

Súčet druhých mocnín môže byť nula len vtedy, ak obidva sčítance sú nulové, t. j.

$$x - v_a = 0,$$

$$y - v_a = 0.$$

Dostali sme

$$x = y = v_a.$$

Po dosadení do rovnice (3) dostaneme

$$2x^2 = 36.$$

Odtiaľ

$$x = y = v_a = 3\sqrt{2}.$$

Po dosadení do (4) a (5) máme

$$9 \cdot 2 + 9 \cdot 2 = c^2 \leq 36,$$

$$9 \cdot 2 + 9 \cdot 2 = b^2 \leq 36.$$

Teda $b = c = 6$.

Z výpočtu vyplýva, že ABC je rovnoramenný trojuholník so stranami $b = c = 6$ a $a = 6\sqrt{2}$. Uhol pri vrchole A je pravý.

Tento trojuholník vyhovuje požiadavke úlohy a je teda jediným trojuholníkom vyhovujúcim úlohe.

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

A - P - 1

Nech a_{jk} ($j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, m$) sú reálne čísla, pre ktoré je

$$0 \leq a_{j1} \leq a_{j2} \leq \dots \leq a_{jm} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Dokážte nerovnosť

$$\left(\sum_{k=1}^m a_{1k} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{2k} \right) \dots \left(\sum_{k=1}^m a_{nk} \right) \leq m^{n-1} \sum_{k=1}^m a_{1k} a_{2k} \dots a_{nk}.$$

Kedy platí rovnosť?

Řešení: Nerovnost dokážeme indukcií podle n . Pro $n = 1$ zřejmě platí a vždy nastává rovnost. Klíčem k důkazu bude případ $n = 2$. Změníme-li označení, abychom si ušetřili psaní indexů 1 a 2, a vynecháme-li předpoklad nezápornosti, který v tomto případě nebudeme potřebovat, redukuje se pro $n = 2$ úloha na důkaz následující věty:

Jsou-li $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m$, $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_m$ reálná čísla, platí

$$\left(\sum_{k=1}^m x_k\right)\left(\sum_{k=1}^m y_k\right) \leq m \sum_{k=1}^m x_k y_k.$$

Rovnost nastává, právě když buď $x_1 = x_2 = \dots = x_m$, nebo $y_1 = y_2 = \dots = y_m$.

(Tato věta je známa jako tzv. Čebyševova nerovnost.)

Důkaz: Pro každé dva indexy, $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ je

$$\begin{aligned} x_i y_j + x_j y_i &= x_i y_i + x_j y_j - (x_i - x_j)(y_i - y_j) \leq \\ &\leq x_i y_i + x_j y_j, \end{aligned} \quad (1)$$

neboť podle předpokladu je $(x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0$. Sečteme-li nerovnosti (1) pro všech m^2 dvojic (i, j) , dostaneme

$$2 \sum_{(i,j)} x_i y_j \leq m \sum_{i=1}^m x_i y_i + m \sum_{j=1}^m x_j y_j,$$

což po úpravě dává dokazovanou nerovnost.

Nastane-li v Čebyševově nerovnosti rovnost, nastane rovnost i ve všech nerovnostech (1), tj. pro každé dva indexy $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ platí

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) = 0.$$

Speciálně tedy

$$(x_1 - x_m)(y_1 - y_m) = 0.$$

Je proto buď $x_1 = x_m$ a tedy $x_1 = x_2 = \dots = x_m$, nebo $y_1 = y_m$ a tedy $y_1 = y_2 = \dots = y_m$. Obráceně, platí-li tato podmínka, snadno se přesvědčíme, že v Čebyševově nerovnosti nastane rovnost.

Proveďme indukční krok, abychom dokázali nerovnost pro obecné n . Předpokládejme, že platí pro $n = p$, a do-

kážeme, že pak platí i pro $p + 1$ m -tic reálných čísel

$$0 \leq a_{i1} \leq a_{i2} \leq \dots \leq a_{im} \quad (i = 1, 2, \dots, p + 1).$$

Podle indukčního předpokladu je

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^m a_{1k} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{2k} \right) \dots \left(\sum_{k=1}^m a_{pk} \right) \leq \\ & \leq m^{p-1} \sum_{k=1}^m a_{1k} a_{2k} \dots a_{pk}. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li obě strany nezáporným číslem $\sum_{k=1}^m a_{p+1,k}$ dostaneme

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^m a_{1k} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{2k} \right) \dots \left(\sum_{k=1}^m a_{pk} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{p+1,k} \right) \leq \\ & \leq m^{p-1} \left(\sum_{k=1}^m a_{1k} a_{2k} \dots a_{pk} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{p+1,k} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Protože kromě předpokladu

$$a_{p+1,1} \leq a_{p+1,2} \leq \dots \leq a_{p+1,m}$$

platí také

$$a_{11}a_{21} \dots a_{p1} \leq a_{12}a_{22} \dots a_{p2} \leq \dots \leq a_{1p}a_{2p} \dots a_{pp},$$

jak plyne z předpokladů o prvních p m -ticích (s využitím předpokladu nezápornosti), podle Čebyševovy nerovnosti je

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^m a_{1k} a_{2k} \dots a_{pk} \right) \left(\sum_{k=1}^m a_{p+1,k} \right) \leq \\ & \leq m \sum_{k=1}^m a_{1k} a_{2k} \dots a_{pk} a_{p+1,k}. \end{aligned} \quad (3)$$

Z nerovností (2), (3) ihned plyne dokazovaná nerovnost pro $n = p + 1$. Důkaz je proveden.

Zbývá ještě zjistit, kdy nastane rovnost. Prozkoumáme-li právě provedený důkaz, zjistíme, že to bude, právě když pro alespoň $n-1$ indexů $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$a_{j_1} = a_{j_2} = \dots = a_{j_m},$$

nebo když pro alespoň jeden index $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ je

$$a_{j_1} = a_{j_2} = \dots = a_{j_m} = 0.$$

A - P - 2

Nájdite všechny hodnoty parametra p , pro které funkcia

$$f(x) = x^2 + 4px - |x^2 - 2px + p^2 - 1|$$

nemá lokální extrém.

Řešení: Snadno zjistíme, že

$$f(x) = 2\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{2} - 1 \quad \text{pro } x \in \langle p-1, p+1 \rangle$$

$$f(x) = 6px - p^2 + 1 \quad \text{pro } x \in (-\infty, p-1) \cup \langle p+1, +\infty).$$

Jestliže $-\frac{p}{2} \in (p-1, p+1)$ neboli $p \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

pak funkce $f(x)$ v intervalu $\langle p-1, -\frac{p}{2} \rangle$ klesá a

v intervalu $\langle -\frac{p}{2}, p+1 \rangle$ roste, takže v bodě $x = -\frac{p}{2}$ má lokální extrém.

Jestliže $p \leq -\frac{2}{3}$, funkce $f(x)$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$ klesá, a nemá tedy lokální extrém.

Jestliže $p \geq \frac{2}{3}$, funkce $f(x)$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$ roste a nemá tedy lokální extrém.

Závěr: Funkce $f(x)$ nemá lokální extrém, právě když $|p| \geq \frac{2}{3}$.

A - P - 3

V rovine je daný trojuholník ABC a priamka p . Zostrojte úsečku, ktorej krajné body rozpoľujú obvod trojuholníka ABC a ktorej stred leží na priamke p .

Řešení: Nejprve najdeme množinu středů všech úseček, jejichž krajní body púli obvod trojúhelníku ABC . Využijeme při tom následující pomocnou větu:

Pohybují-li se v rovině body P, Q rovnoměrně a přímočaře, pohybuje se rovnoměrně a přímočaře i střed S úsečky PQ .

Pomocnou větu nejsnadněji dokážeme metodou souřadnic. Má-li na počátku pohybu bod P souřadnice $[a_1, a_2]$ a bod Q souřadnice $[b_1, b_2]$, má v čase t bod p souřadnice

$$p_1 = a_1 + tu_1,$$

$$p_2 = a_2 + tu_2$$

a bod Q souřadnice

$$q_1 = b_1 + tv_1,$$

$$q_2 = b_2 + tv_2,$$

kde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ je vektor rychlosti bodu P a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ je vektor rychlosti bodu Q . Střed S úsečky PQ má tedy v čase t souřadnice $[s_1, s_2]$, kde

$$s_1 = \frac{p_1 + q_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2} + t \frac{u_1 + v_1}{2},$$

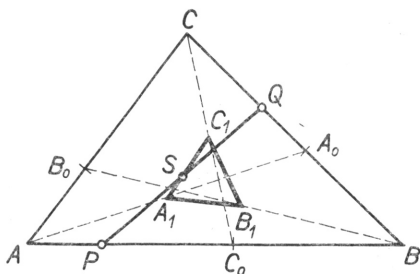
$$s_2 = \frac{p_2 + q_2}{2} = \frac{a_2 + b_2}{2} + t \frac{u_2 + v_2}{2}.$$

Odtud je vidět, že bod S se pohybuje také rovnoměrně a přímočaře (jeho pohyb začíná ve středu spojnice počátečních poloh bodů P, Q a jeho rychlost je $\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$). Pomocná věta je dokázána.

Vraťme se k trojúhelníku ABC . Označme A_o takový bod na jeho hranici, že body A, A_o půlí jeho obvod, tj.

$$|AB| + |BA_o| = |AC| + |CA_o|$$

(z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že bod A_o leží uvnitř strany BC). Analogicky zavedme body B_o a C_o a označme A_1, B_1, C_1 středy úseček AA_o, BB_o, CC_o (obr. 25). Probíhá-li bod P úsečku AC_o , probíhá bod Q , který spolu s bodem P půlí obvod trojúhelníku ABC , úsečku A_oC a střed úsečky PQ probíhá úsečku A_1C_1 . Pokračujeme-li

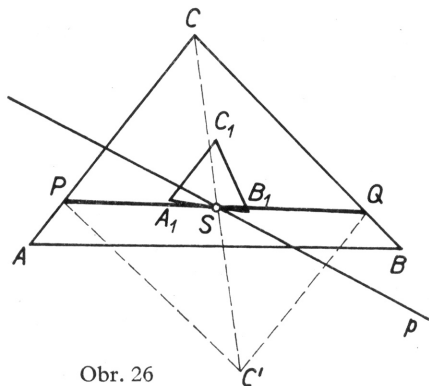


Obr. 25

dále, zjistíme, že hledanou množinou je hranice trojúhelníku $A_1B_1C_1$.*)

Zbývá vyřešit naši konstrukční úlohu. Snadno sestrojíme body A_1 , B_1 , C_1 . Množina středů všech hledaných úseček je průnik přímky p s trojúhelníkem $A_1B_1C_1$. Ke každému bodu S tohoto průniku existuje, jak víme, jediná hledaná úsečka se středem v bodě S . Leží-li např. bod S na straně A_1B_1 , bude jeden z krajních bodů této úsečky ležet na straně AC a druhý na straně BC . Bod S je středem jediné úsečky, která má krajní body na přímkách AC , BC . Tato úsečka je tedy hledanou úsečkou, tj. navíc pólí obvod trojúhelníku ABC , a snadno ji sestrojíme známou konstrukcí využívající faktu, že úhlopříčky rovnoběžníku se pólí (obr. 26): Sestrojíme bod C' souměrně sdružený s bodem C podle středu S . Bodem C' vedeme rovnoběžky se stranami AB , AC a ty je protnou v krajních bodech P , Q hledané úsečky.

*) Trojúhelník $A_1B_1C_1$ leží uvnitř trojúhelníku ABC . Body A_1 , B_1 , C_1 jsou skutečně vrcholy trojúhelníku — nesplynou ani neleží v přímce, jak je vidět z vyjádření vektoru rychlosti středu S pomocí vektorů rychlostí bodů P , Q , které jsme odvodili v důkazu pomocné věty.



Obr. 26

Úloha má 0, 1, 2 nebo nekonečně mnoho řešení podle toho, jaká je vzájemná poloha přímky p a trojúhelníku $A_1B_1C_1$.

A - P - 4

Nech a, b, c sú veľkosti strán trojuholníka ABC a r je polomer jemu opísanej kružnice. Označme $V = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2$. Trojuholník ABC je ostrouhlý práve vtedy, keď $V > 0$, pravouhlý práve vtedy, keď $V = 0$, a tupouhlý práve vtedy, keď $V < 0$. Dokážte.

Řešení: Při obvyklém značení platí

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma,$$

a tedy

$$V = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2 = 4r^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2).$$

Podle základních trigonometrických vzorců je

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + \\ &+ 1 - \cos^2 \gamma = 2 - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \\ &- \cos^2(\alpha + \beta) = 2 - \cos(\alpha + \beta) [\cos(\alpha - \beta) + \\ &+ \cos(\alpha + \beta)] = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.\end{aligned}$$

Je tedy

$$V = 8r^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Jsou-li úhly α, β, γ ostré, jsou jejich kosiny kladné a $V > 0$.

Je-li jeden z nich pravý, je jeho kosinus nula a $V = 0$.

Je-li jeden z nich tupý a ostatní ostré, je jeden kosinus záporný a ostatní kladné a $V < 0$.

A - I - 1

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnost prirodzených čísel, která obsahuje všechny prirodzené čísla. Dokážte, že existují indexy $i < j < k$ také, že $a_k - a_j = a_j - a_i$.

Řešení: Zvolme libovolně index i . Protože posloupnost $\{a_n\}$ není omezená, existují její členy a_h , pro které platí

$$a_h > \max(a_1, a_2, \dots, a_i).$$

Jako j vezmeme index prvního takového a_h , tj.

$$j = \min(h; a_h > \max(a_1, a_2, \dots, a_i)).$$

Zřejmě je $j > i$. Aby bylo $a_k - a_j = a_j - a_i$, musí platit

$$a_k = 2a_j - a_i. \quad (1)$$

Protože $a_j > a_i$, je

$$2a_j - a_i > a_j. \quad (2)$$

Protože posloupnost $\{a_n\}$ obsahuje všechna přirozená čísla, existuje index k tak, že platí (1). Z toho, jak jsme definovali index j , a z nerovnosti (2) vyplývá, že $k > j$. Tím je důkaz proveden. Ukázali jsme dokonce, že existuje nekonečně mnoho trojic indexů $i < j < k$ tak, že $a_k - a_j = a_j - a_i$, a při tom $a_i < a_j < a_k$.

V rovině je dána ortonormální soustava souřadnic. Body, jejichž obě souřadnice jsou celočíselné, nazveme mřížovými body. Necht' $\mathbf{M}_n$ je množina všech mřížových bodů $[i, j]$, pro které je $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$. Označme $f(n)$ nejmenší přirozené číslo k s touto vlastností: v $\mathbf{M}_n$ existuje k bodů $P_1, P_2, \dots, P_k$ tak, že ke každému bodu $A \in \mathbf{M}_n$ lze najít bod P_s ($1 \leq s \leq k$), jehož vzdálenost od bodu A je nejvýše rovna 1. Dokažte, že platí

$$\frac{n^2}{5} \leq f(n) \leq \frac{n^2 + 16n}{5}.$$

Řešení: Místo mřížový bod budeme pro stručnost říkat jen bod. Symbolem $|\mathbf{A}|$ budeme značit počet prvků konečné množiny $\mathbf{A}$. Řekneme, že dva body spolu sousedí, jsou-li buď totožné, nebo mají-li vzdálenost 1.

Necht' $\mathbf{P}$ je libovolná podmnožina množiny $\mathbf{M}_n$ taková, že každý bod z $\mathbf{M}_n$ sousedí s nějakým bodem z $\mathbf{P}$ (takové podmnožiny $\mathbf{P}$ existují, např. množina $\mathbf{M}_n$ sama). Protože každý bod sousedí právě s pěti body, sousedí každý bod z $\mathbf{P}$ nejvýše s pěti body z $\mathbf{M}_n$, a tedy

$$5 |\mathbf{P}| \geq |\mathbf{M}_n| = n^2.$$

Pro každou takovou podmnožinu $\mathbf{P}$ je tedy

$$|\mathbf{P}| \geq \frac{n^2}{5}$$

a speciálně

$$f(n) \geq \frac{n^2}{5}.$$

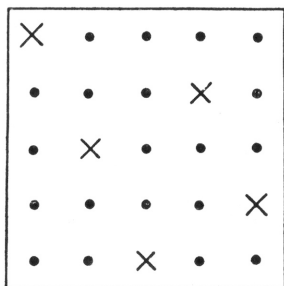
Dále sestrojíme „hodně řídkou“ množinu $\mathbf{R}_n \subset \mathbf{M}_n$, tak aby každý bod z $\mathbf{M}_n$ sousedil s nějakým bodem z $\mathbf{R}_n$. Ukážeme-li, že

$$|\mathbf{R}_n| \leq \frac{n^2 + 16n}{5},$$

bude tím spíše

$$f(n) \leq \frac{n^2 + 16n}{5}.$$

Rovinu rozdělme vodorovnými a svislými přímkami na čtverce 5×5 . V každém čtverci vezmeme body označené na obr. 27 křížky — množinu všech těchto bodů označ-



Obr. 27

me $\mathbf{P}$. Každý bod sousedí právě s jedním bodem z $\mathbf{P}$. Označme $\mathbf{P}_n$ množinu všech bodů $[i, j] \in \mathbf{P}$, pro které je $0 \leq i \leq n+1$ a $0 \leq j \leq n+1$. Každý bod z $\mathbf{M}_n$ sousedí právě s jedním bodem z $\mathbf{P}_n$. Některé body z $\mathbf{M}_n$ však (pokud n není příliš malé) sousedí s body z $\mathbf{P}_n$, které neleží v $\mathbf{M}_n$ (jsou to některé z bodů na stranách čtverce $\mathbf{M}_n$).

Tyto body množiny $\mathbf{P}_n$ nahradíme jejich sousedy z množiny $\mathbf{M}_n$. Z množiny $\mathbf{P}_n$ tak dostaneme množinu $\mathbf{R}_n$. Teď už $\mathbf{R}_n \subset \mathbf{M}_n$ a každý bod z $\mathbf{M}_n$ sousedí alespoň s jedním bodem z $\mathbf{R}_n$. Přitom je $|\mathbf{R}_n| \leq |\mathbf{P}_n|$. Snadno odhadneme počet bodů v $\mathbf{P}_n$. V každém z $n + 2$ „řádků“ ($j = 0, 1, \dots, n + 1$) je, jak vidíme z konstrukce množiny $\mathbf{P}_n$, „každý pátý bod“ z $\mathbf{P}_n$ a z $n + 2$ bodů ($i = 0, 1, \dots, n + 1$) patří do $\mathbf{P}_n$ tedy nejvýše $\frac{n + 2}{5} + 1$ bodů.

Celkem je tedy

$$|\mathbf{P}_n| \leq (n + 2) \left(\frac{n + 2}{5} + 1 \right) = \frac{n^2 + 9n + 14}{5}.$$

Pro $n \geq 2$ je

$$n^2 + 9n + 14 \leq n^2 + 16n,$$

a tedy

$$f(n) \leq |\mathbf{R}_n| \leq |\mathbf{P}_n| \leq \frac{n^2 + 9n + 14}{5} \leq \frac{n^2 + 16n}{5}.$$

Pro $n = 1$ je $f(1) = 1$, a tedy také

$$f(1) \leq \frac{1^2 + 16 \cdot 1}{5}.$$

Jemnějšími metodami bychom dostali přesnější odhady čísla $f(n)$. I z našich úvah je zřejmé, že v dokazované nerovnosti platí na obou stranách ostrá nerovnost.

Nech $a_1, \dots, a_n$ sú nezáporné čísla, pre ktoré platí $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$. Pre každé reálne číslo x platí

$$x^2 + x \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + n^3 \sum_{i=1}^n a_i^4 > 0.$$

Dokážte!

Řešení: Diskriminant kvadratického polynomu

$$p(x) = x^2 + x \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 + n^3 \sum_{i=1}^n a_i^4$$

je roven

$$D = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^4 - 4n^3 \sum_{i=1}^n a_i^4.$$

Vzhľadom k tomu, že

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0, \text{ je } \sum_{i=1}^n a_i^4 > 0$$

(obě nerovnosti jsou ekvivalentní s nenulovostí alespoň jednoho a_i), a tedy

$$D < \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^4 - n^3 \sum_{i=1}^n a_i^4.$$

Aniž by úvaha ztratila na obecnosti, můžeme předpokládat, že čísla a_i jsou indexovaná tak, že

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n. \quad (1)$$

Použijeme-li na čtyři stejné n -tice nezáporných čísel (1) nerovnost, kterou jsme odvodili v A—P—1, dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^4 \leq n^3 \sum_{i=1}^n a_i^4. \quad (2)$$

Odtud vidíme, že $D < 0$. Polynom $p(x)$ nemá tedy reálné kořeny a protože $p(0) > 0$, je $p(x) > 0$ pro každé reálné číslo x .

Jiné řešení: Nerovnost (2) můžeme dokázat také pomocí známé Cauchyovy-Schwarzovy-Buňakovského nerovnosti, která tvrdí:

Pro každých $2n$ reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Položíme-li pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$x_i = a_i, \quad y_i = 1,$$

dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2$$

a po umocnění na druhou

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^4 \leq n^2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2. \quad (3)$$

Položíme-li pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$x_i = a_i^2, \quad y_i = 1,$$

dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^4. \quad (4)$$

Z nerovností (3) a (4) dostaneme ihned (2).

Další řešení: Nerovnost (2) dostaneme i z Hölderovy nerovnosti, která tvrdí: Je-li $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$ a $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou nezáporná čísla, pak

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$

Položíme-li $p = 4$ a pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$x_i = a, y_i = 1,$$

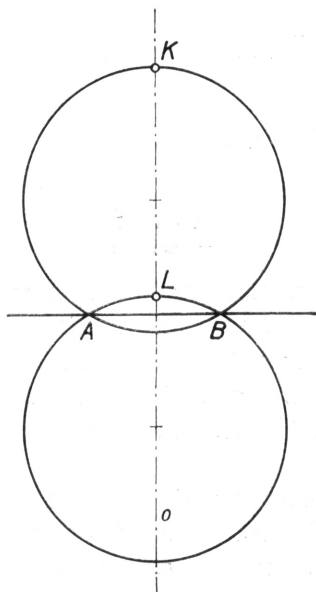
dostaneme po umocnění na čtvrtou hned (2).

A - 1 - 4

V rovině jsou dány body A, B o vzdálenosti $|AB| = c > 0$ a přímka $p \parallel AB$ ležící ve vzdálenosti $d > 0$ od přímky AB . Na přímce p sestrojte bod C tak, aby v trojúhelníku ABC byly velikosti výšky v_b a těžnice t_a stejné. Jaká je podmínka řešitelnosti?

Řešení: *Rozbor:* Necht' trojúhelník ABC je řešením úlohy. Doplňme jej na rovnoběžník $ABEC$. Z bodu A spusťme kolmici na přímku BE a její patu označme P . Zřejmě je $|AE| = 2t_a$, $|AP| = v_b$ a tedy $|AE| : |AP| = 2 : 1$, takže $\sphericalangle AEP = 30^\circ$. Úhel AEB není pravý, to by bylo

osy úsečky AB s množinou $\mathbf{M}$ ležící v té polovině ohraničené přímkou AB , která obsahuje přímku p (obr. 30).



Obr. 30

Vzdálenost bodu K od přímky AB je $\frac{c}{2} \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{c}{2}(2 + \sqrt{3})$,

vzdálenost bodu L od přímky AB je $\frac{c}{2} \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{c}{2}(2 - \sqrt{3})$.

Pro počet řešení tedy dostáváme

$$d > \frac{c}{2}(2 + \sqrt{3}) \dots\dots\dots 0 \text{ řešení}$$

$$d = \frac{c}{2}(2 + \sqrt{3}) \dots\dots\dots 1 \text{ řešení}$$

$$\frac{c}{2}(2 - \sqrt{3}) < d < \frac{c}{2}(2 + \sqrt{3}) \dots 2 \text{ řešení}$$

$$d = \frac{c}{2}(2 - \sqrt{3}) \dots \dots \dots 3 \text{ řešení}$$

$$0 < d < \frac{c}{2}(2 - \sqrt{3}) \dots \dots \dots 4 \text{ řešení}$$

A - I - 5

V rovině je dána ortonormální soustava souřadnic. Dva mřížové body se nazývají sousední, je-li jejich vzdálenost rovna jedné (každý mřížový bod má tedy 4 sousední mřížové body). V uvažované rovině je dán kruh **K** o poloměru $r \geq 2$, na hraniční kružnici kruhu **K** neleží žádný mřížový bod.

Mřížový bod *A* ležící uvnitř **K** nazveme „vnitřním okrajovým bodem“, jestliže aspoň jeden bod sousední s *A* leží vně **K**. Obdobně nazveme mřížový bod *B* ležící vně **K** „vnějším okrajovým bodem“, jestliže aspoň jeden bod sousední s *B* leží uvnitř **K**.

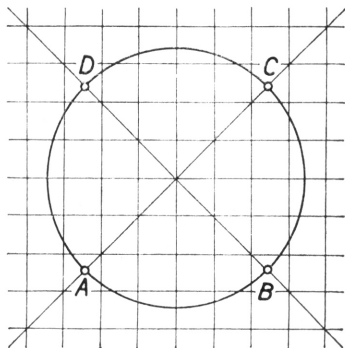
Dokažte, že počet vnějších okrajových bodů je o 4 větší než počet vnitřních okrajových bodů.

Řešení: Úlohu nejprve přeformulujeme do názornější podoby:

Na čtverečkováném papíru je narysována kružnice s poloměrem $r \geq 2$ tak, aby neprocházela žádným průsečíkem linek. Vrchol čtverečku nazveme „vnitřním okrajovým bodem“, leží-li uvnitř kružnice a některý sousední vrchol

leží vně. Analogicky zavedeme „vnější okrajové body“. Máme dokázat, že vnějších okrajových bodů je právě o 4 více než vnitřních.

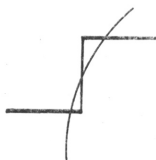
Označme A, B, C, D průsečíky dané kružnice s přímkami, které procházejí jejím středem a svírají s linkami čtverečkové sítě úhel 45° (obr. 31). Tyto body rozdělí



Obr. 31

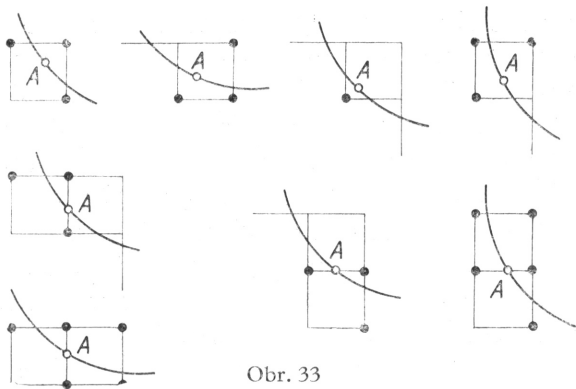
kružnici na čtyři oblouky. Ke každému oblouku zahrneme i oba jeho krajní body. Čtverečkům, v nichž leží — třeba i jen na straně — některý z bodů A, B, C, D , budeme říkat kritické čtverečky. Vyznačme všechny vodorovné strany, které protínají oblouk AD nebo BC , a všechny svislé strany, které protínají oblouk AB nebo CD (budeme mluvit o vyznačených stranách) a nejsou přitom strany kritických čtverečků. Ukážeme, že všechny okrajové body, které nejsou vrcholy kritických čtverečků, jsou koncové body vyznačených úseček: Vezměme si nějaký okrajový bod, který není vrcholem kritického čtverečku. Ten

je podle definice okrajových bodů koncovým bodem některé strany — nechť je to např. svislá strana (pro vodorovnou stranu bychom uvažovali analogicky). Pokud tato svislá strana protíná oblouk AB nebo CD , je vyznačena. Protíná-li oblouk AD (u oblouku BC bychom uvažovali analogicky), leží oba její koncové body na vodorovných vyznačených stranách protínajících oblouk AD (obr. 32).



Obr. 32

To je způsobeno tím, že v oblouku AD se kružnice „ve svislém směru mění rychleji než ve směru vodorovném“. Přesněji: Nechť vodorovná a svislá přímka protínají oblouk AD v bodech V , resp. S a jejich průsečík P nechť na oblouku neleží. Pak $PV < PS$. Všechny okrajové body, které nejsou vrcholy kritických čtverečků, tedy leží na vyznačených úsečkách. Mezi všemi koncovými body vyznačených úseček je stejný počet vnitřních a vnějších okrajových bodů, neboť každá vyznačená úsečka spojuje jeden vnitřní a jeden vnější okrajový bod a žádné dvě nemají společný bod. Zbývá vyšetřit kritické čtverečky. V okolí bodu A může nastat 8 situací znázorněných na obr. 33. Vidíme, že v každém případě je mezi vrcholy kritických čtverečků, které neleží na vyznačených úsečkách, právě o jeden vnější okrajový bod více než vnitřních okrajových bodů. Stejně je tomu i v okolí bodů B , C , D . Celkem je tedy vnějších okrajových bodů o čtyři více než vnitřních.



Obr. 33

Jiné řešení: Sestrojíme všechny strany čtverečků, které protínají danou kružnici a oba jejich koncové body jsou okrajové body (dál jim budeme říkat jen strany). Vnější a vnitřní okrajové body budeme počítat takto: Zvolíme si některou stranu jako výchozí a budeme postupovat po kružnici od průsečíku s výchozí stranou třeba ve směru otáčení hodinových ručiček. Jakmile dojdeme k průsečíku se stranou, připočítáme jeden vnitřní a jeden vnější okrajový bod, pokud jsme některý z nich nepočítali už dříve. Oběhneme-li celou kružnici, spočítáme tak všechny okrajové body. Setkáme se při tom se stranami vodorovnými a svislými. Dojdeme-li ke straně, která je rovnoběžná se stranou bezprostředně předcházející, zvětší se počet vnějších i vnitřních okrajových bodů o 1. Dojdeme-li ke straně kolmé ke straně bezprostředně předcházející, mají obě strany jeden okrajový bod společný a započteme jen druhý okrajový bod. Vyjdeme od vodorovné strany, která leží nejvíc vlevo (je-li jich víc, zvolme libovolnou z nich). Po-

psaným způsobem postupujeme tak dlouho, až dojdeme ke svislé straně, která leží nejvíc nahoře (k libovolné z nich, je-li jich víc). Procházíme-li tímto „kvadrantem“, dvojice sousedních na sebe kolmých stran se pravidelně střídají. Následuje-li po vodorovné straně strana svislá, přibude 1 vnější okrajový bod, následuje-li po svislé straně vodorovná, přibude 1 vnitřní okrajový bod. Projdeme-li „kvadrant“, napočítáme o 1 vnější okrajový bod víc než vnitřních, neboť jsme vyšli od vodorovné strany a skončili u svislé. Podobně je tomu i u ostatních tří „kvadrantů“ a z toho je vidět, že vnějších okrajových bodů je o 4 víc než vnitřních.

A - I - 6

Dokažte, že v trojúhelníku o stranách a, b, c a úhlech α, β, γ (úhel α leží proti straně a , atd.) platí

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma > 0.$$

Řešení: Označme r poloměr kružnice opsané uvažovanému trojúhelníku. Pak je

$$a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma$$

a tedy

$$\begin{aligned} a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma &= 2r \sin \alpha \cos \alpha + \\ &+ 2r \sin \beta \cos \beta + 2r \sin \gamma \cos \gamma = \\ &= 2r [\sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) + \sin \gamma \cos \gamma] = \\ &= 2r [\sin \gamma \cos (\alpha - \beta) - \sin \gamma \cos (\alpha + \beta)] = \\ &= 2r \sin \gamma [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)] = \\ &= 4r \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Protože v intervalu $(0, \pi)$ jsou hodnoty funkce sinus kladné, je uvažovaný výraz kladný.

Jiné řešení: Podle kosinové věty je

$$2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$2ac \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2,$$

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2.$$

Vynásobíme-li první rovnici číslem c^2 , druhou b^2 a třetí a^2 a sečteme, dostaneme

$$\begin{aligned} 2abc(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) &= \\ &= 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - a^4 - b^4 - c^4 = \\ &= 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2 = 4a^2c^2 - (2ac \cos \beta)^2 = \\ &= 4a^2c^2(1 - \cos^2 \beta) > 0. \end{aligned}$$

Další řešení: Pokud trojúhelník není tupouhlý, je platnost dokazované nerovnosti zřejmá. Nechť tedy γ je tupý úhel. Využijeme-li toho, že funkce kosinus na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ klesá a je kladná, a trojúhelníkové nerovnosti, dostaneme

$$\begin{aligned} a \cos \alpha + b \cos \beta &> a \cos(\alpha + \beta) + b \cos(\alpha + \beta) > \\ &> c \cos(\alpha + \beta) = -c \cos \gamma. \end{aligned}$$

A - II - 1

Má-li rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ všechny kořeny reálné, potom $a^2 \geq 3b$. Dokažte.

Řešení: Označíme-li kořeny dané rovnice x_1, x_2, x_3 , je $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, tedy

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b,$$

a proto

$$\begin{aligned} a^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \geq \\ &\geq 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 3b. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost plyne z nerovnosti

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,$$

kterou dostaneme sečtením nerovností $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, $(x_2 - x_3)^2 \geq 0$, $(x_3 - x_1)^2 \geq 0$. (Je též přímým důsledkem Cauchyovy nerovnosti.)

Jiné řešení: Není těžké zjistit, že má-li mnohočlen všechny kořeny reálné, má jeho derivace také všechny kořeny reálné. Derivace mnohočlenu $x^3 + ax^2 + bx + c$ je mnohočlen $3x^2 + 2ax + b$. Ten má všechny kořeny reálné, právě když má nezáporný diskriminant, tj.

neboli

$$4a^2 - 12b \geq 0,$$

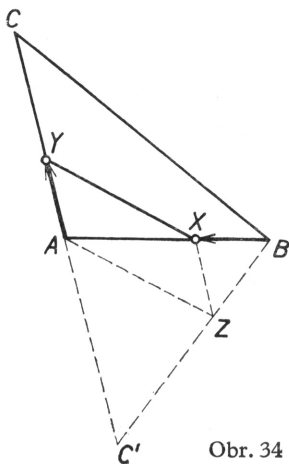
$$a^2 \geq 3b.$$

A - II - 2

V trojúhelníku ABC se na úsečce BA pohybuje rovnoměrně bod X z bodu B do bodu A a na úsečce AC bod Y rovnoměrně z bodu A do bodu C tak, že v počátečním okamžiku je X v bodě B a Y v bodě A , v koncovém okamžiku je X v bodě A a Y v bodě C .

Sestrojte polohu bodů X a Y , při které mají nejmenší vzdálenost.

Řešení: Pro každý časový okamžik doplníme body X , Y a A na rovnoběžník $XYZA$ (obr. 34). Je pak $XZ \parallel CA$,



Obr. 34

$|XZ| : |XB| = |YA| : |XB| = |CA| : |AB|$
 (vzhledem k rovnoměrnosti pohybu bodů X, Y). Odtud plyne, že bod Z se pohybuje rovnoměrně po úsečce BC' , kde C' je bod souměrný k bodu C podle bodu A .

Protože je $|XY| = |AZ|$, převádí se úloha na nalezení takového bodu Z_0 na úsečce BC' , který má minimální vzdálenost od bodu A . Tímto bodem Z_0 je buď pata P kolmice vedené bodem A na přímkou BC' (je-li P bodem úsečky BC'), nebo některý z krajních bodů úsečky BC' . K bodu P pak sestrojíme bod X_0 ($X_0Z_0 \parallel AC$) a bod Y_0 (doplněním bodů A, Z_0, X_0 na rovnoběžník $AZ_0X_0Y_0$). Je-li $Z_0 = B$, jsou hledané body $X = B, Y = A$. Je-li $Z_0 = C$, je $X = A, Y = C$.

Jiné řešení: Zvolíme soustavu souřadnic tak, aby vrcholy trojúhelníku měly kartézské souřadnice $A = [0, 0], B = [b, 0], C = [c, d]$, pak polohy bodů X, Y mají souřadnice $X = [b(1 - t), 0], Y = [ct, dt]$ pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Funkce proměnné t

$$|XY|^2 = [(b+c)^2 + d^2] \left[t - \frac{b(b+c)}{d^2 + (b+c)^2} \right]^2 + \frac{b^2 d^2}{d^2 + (b+d)^2}$$

nabývá v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ minima

$$\text{v bodě } t = \frac{b(b+c)}{d^2 + (b+c)^2} \text{ v případě } 0 < \frac{b(b+c)}{d^2 + (b+c)^2} < 1,$$

$$t = 0 \quad \text{v případě } \frac{b(b+c)}{d^2 + (b+c)^2} \leq 0,$$

$$t = 1 \quad \text{v případě } \frac{b(b+c)}{d^2 + (b+c)^2} \geq 1.$$

Výrazy udávající souřadnice extrémálních bodů X , Y se snadno sestojí (konstrukci zde nepopisujeme).

A - II - 3a

Je dáno přirozené číslo $k > 1$. Najděte nejmenší přirozené číslo n s touto vlastností: ať zvolíme jakkoli n různých přirozených čísel, vždy bude součet nebo rozdíl některých dvou z nich dělitelný číslem k .

Řešení: Hledané číslo je $n = \frac{k+3}{2}$ pro lichá k , $n = \frac{k+4}{2}$ pro sudá k .

Nejprve ukážeme, že toto číslo n má požadovanou vlastnost. Zvolme n různých přirozených čísel a uvažujme jejich zbytky při dělení číslem k . Jsou-li si dva ze zbytků rovny, je rozdíl příslušných čísel dělitelný číslem k . Jsou-li zbytky navzájem různé, tj. tvoří-li n navzájem různých čísel z množiny $\{0, 1, \dots, k-1\}$, pak alespoň dva leží v téže z $n-1$ podmnožin

$$\{0\}, \{1, k-1\}, \dots, \left\{\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}\right\} \text{ pro lichá } k,$$

$$\{0\}, \{1, k-1\}, \dots, \left\{\frac{k-2}{2}, \frac{k+2}{2}\right\}, \left\{\frac{k}{2}\right\} \text{ pro sudá } k$$

a součet příslušných dvou čísel je dělitelný číslem k .

Nakonec ukážeme, že uvedené číslo n je nejmenší číslo

s požadovanou vlastností. Existuje totiž $n - 1$ různých přirozených čísel takových, že součet ani rozdíl žádných dvou z nich není dělitelný číslem k .

Jsou to např. čísla

$$1, 2, \dots, \frac{k-1}{2}, k \text{ pro lichá } k,$$

$$1, 2, \dots, \frac{k}{2}, k \text{ pro sudá } k.$$

A - II - 3b

V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník $\mathbf{T}$ s vrcholy A, B, C , s pravým úhlem při vrcholu C a odvěsnami délek a, b . Na polopřímce CA najděte bod A' a na polopřímce CB bod B' tak, aby vzniklý trojúhelník $\mathbf{T}'$ s vrcholy A', B', C byl rovnoramenný a přitom aby obsah rozdílu množin $\mathbf{T} \cup \mathbf{T}'$ a $\mathbf{T} \cap \mathbf{T}'$ byl minimální. Trojúhelník $\mathbf{T}'$ sestrojte.

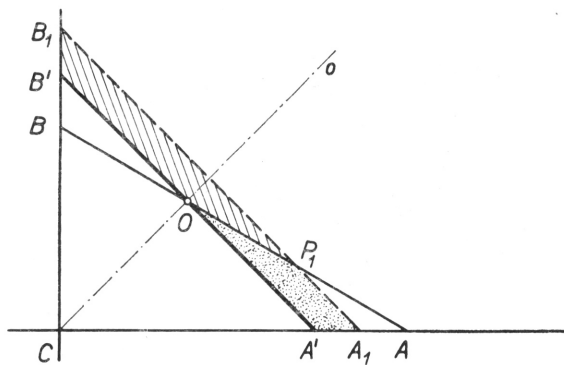
Řešení: Bez omezení obecnosti můžeme předpokládat, že $a \leq b$. Je-li $a = b$, stačí zvolit $\mathbf{T}' = \mathbf{T}$. Necht' tedy $a < b$, hledejme délku u odvěsen trojúhelníku $\mathbf{T}'$. Je-li u zatím proměnná délka odvěsen, označme $S(u)$ obsah rozdílu $\mathbf{T} \cup \mathbf{T}'$ a $\mathbf{T} \cap \mathbf{T}'$. Je-li $u > b$, $S(u)$ lze zmenšit zmenšením u . Je-li $u < a$, lze $S(u)$ zmenšit zvětšením u . Stačí se proto omezit na případ, že $a \leq u \leq b$. Zvolíme-li ortonormální soustavu souřadnic tak, že kladná osa x je polopřímka CB a kladná osa y polopřímka CA , má přímka

AB rovnici $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, přímka $A'B'$ rovnici $x + y - u = 0$. Jejich průsečík P má proto souřadnice $\left[a \frac{b-u}{b-a}, b \frac{u-a}{b-a} \right]$. Obsah $S(u)$ je roven součtu obsahu trojúhelníku (popř. degenerovaného v bod) PAA' a trojúhelníku PBB' ,

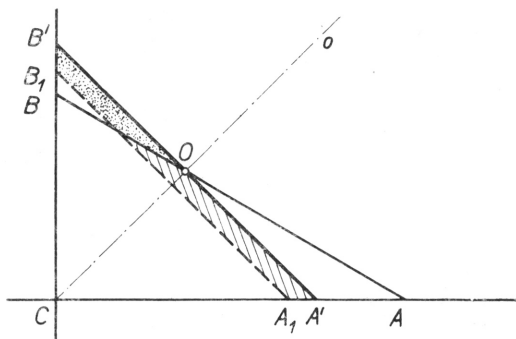
$$S(u) = \frac{1}{2} \frac{a}{b-a} (b-u)^2 + \frac{1}{2} \frac{b}{b-a} (u-a)^2 - \\ - \frac{1}{2} \frac{a+b}{b-a} \left(u - \frac{2ab}{a+b} \right)^2 + \frac{1}{2} ab \frac{b-a}{a+b}.$$

Minimum $S(u)$ tedy nastane pro $u = u_0 = \frac{2ab}{a+b}$. Souřadnice bodu P jsou pak $\left[\frac{1}{2} u_0, \frac{1}{2} u_0 \right]$. Bod P je proto průsečíkem přepony daného trojúhelníku $\mathbf{T}$ s osou pravého úhlu při vrcholu C . Přeponu trojúhelníku $\mathbf{T}'$ pak dostaneme, vedeme-li bodem P kolmici k přímce PC .

Jiné řešení: Jak už víme, stačí vyšetřit případ $a < b$. Označme O průsečík přepony AB s osou o úhlu BCA . Bodem O vedme přímku kolmou k ose o a její průsečíky s přímkami AC, BC označme A', B' . Sestrojme nyní přeponu $A_1B_1 \parallel A'B'$ tak, aby $A_1 \in AA'$ (obr. 35). Dostaneme tak trojúhelník $\mathbf{T}_1 \equiv A_1B_1C$. Průsečík P_1 přepon AB, A_1B_1 leží uvnitř úsečky OA , neboť $a < b$. Označme S' (resp. S_1) obsah rozdílu množin $\mathbf{T} \cup \mathbf{T}'$ a $\mathbf{T} \cap \mathbf{T}'$ (resp. $\mathbf{T} \cup \mathbf{T}_1$ a $\mathbf{T} \cap \mathbf{T}_1$).



Obr. 35



Obr. 36

Platí

$$S_1 = S' + B_1B'OP_1 - A'OP_1A_1.$$

Ze souměrnosti čtyřúhelníku AA'_1B_1B' podle osy o plyne, že $B_1B'OP_1 > A'OP_1A_1$, a tedy $S_1 > S'$. Analogicky zjistíme, že i když přeponu $A_1B_1 \parallel A'B'$ vedeme tak, aby $B_1 \in BB'$ (obr. 36), je $S_1 > S'$. Pro ostatní polohy přepony $A_1B_1 \parallel A'B'$ je zřejmě také $S_1 > S'$. Trojúhelník $A'B'C$ má tedy požadovanou vlastnost.

A - III - 1

Nechť n je dané přirozené číslo. Určete počet všech uspořádaných trojic $[x, y, z]$ nezáporných celých čísel x, y, z , která vyhovují rovnici

$$x + 2y + 5z = 10n.$$

Řešení: Daná rovnice má v oboru nezáporných celých čísel právě tolik řešení jako nerovnice

$$2y + 5z \leq 10n. \quad (1)$$

Je-li $[y, z]$ řešení této nerovnice, je

$$0 \leq z \leq 2n. \quad (2)$$

Ke každému z , pro které platí (2), existuje právě

$$\left[\frac{10n - 5z}{2} \right] + 1 = 5n + 1 + \left[-\frac{5z}{2} \right]$$

čísel y tak, že dvojice $[y, z]$ splňuje (1) — jsou to $y = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{10n - 5z}{2} \right]$. (Hranaté závorky označují celou část čísla, které obsahují.) Celkový počet řešení nerovnice (1) a tedy i dané rovnice je

$$\sum_{z=0}^{2n} \left(5n + 1 + \left[-\frac{5z}{2} \right] \right) = (2n + 1)(5n + 1) + \sum_{z=0}^{2n} \left[-\frac{5z}{2} \right].$$

Sčítáme-li přes sudá a lichá z zvlášť, dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{z=0}^{2n} \left[-\frac{5z}{2} \right] &= \sum_{k=1}^n (-5k) + \sum_{k=1}^n (-5k + 2) = \\ &= -5n(n+1) + 2n.\end{aligned}$$

Celkem dostaneme právě $5n^2 + 4n + 1$ řešení.

Jiné řešení: Je-li $z = 0$, redukuje se daná rovnice na

$$x + 2y = 10n$$

a má $5n + 1$ řešení. Je-li $z = 1$, redukuje se rovnice na

$$x + 2y = 10n - 5$$

a má $5n - 2$ řešení. Je-li $z \geq 2$, položíme $t = z - 2$.

Označíme-li $P(n)$ počet řešení dané rovnice, má rovnice

$$x + 2y + 5t = 10(n - 1)$$

v oboru nezáporných celých čísel právě $P(n - 1)$ řešení a přitom má právě tolik řešení jako daná rovnice v oboru celých čísel $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 2$. Je tedy

$$\begin{aligned}P(n) &= 5n + 1 + 5n - 2 + P(n - 1) = \\ &= P(n - 1) + 10n - 1.\end{aligned}$$

Protože $P(0) = 1$, je

$$\begin{aligned}P(n) &= 1 + \sum_{k=1}^n (10k - 1) = 1 - n + 10(1 + 2 + \dots + n) = \\ &= 5n^2 + 4n + 1.\end{aligned}$$

Je dán kvádr $\mathbf{Q}$ o rozměrech a, b, c , $a < b < c$. Najděte velikost hrany krychle $\mathbf{K}$, která má s daným kvádrem rovnoběžné stěny a společný střed tak, aby objem rozdílu množin $\mathbf{Q} \cup \mathbf{K}$ a $\mathbf{Q} \cap \mathbf{K}$ byl minimální.

Řešení: Označme x neznámou velikost hrany krychle a $V(x)$ objem rozdílu těles $\mathbf{Q} \cup \mathbf{K}$ a $\mathbf{Q} \cap \mathbf{K}$. Tento rozdíl je složen z bodů, které jsou v $\mathbf{Q}$, ale nejsou v $\mathbf{K}$, a z bodů, které jsou v $\mathbf{K}$, ale nejsou v $\mathbf{Q}$.

Je-li $x > c$, lze $V(x)$ zmenšit zmenšením x , je-li $x < a$, lze $V(x)$ zmenšit zvětšením x . Stačí se tedy omezit na případ, že $a \leq x \leq c$.

Budeme rozlišovat dva případy:

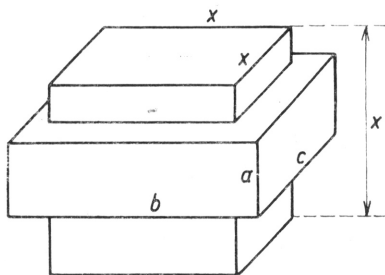
A. $a \leq x \leq b$. Pak je (obr. 37) objem $V(x)$ roven součtu objemu $a(bc - x^2)$ vnějšího prstence a objemu $x^2(x - a)$ dvou kvádrů, takže $V(x) = x^3 - 2ax^2 + abc$.

B. $b \leq x \leq c$. Pak je (obr. 38) objem $V(x)$ roven součtu objemu $(x^2 - ab)x$ prstence a objemu $ab(c - x)$ dvou kvádrů, takže $V(x) = x^3 - 2abx + abc$.

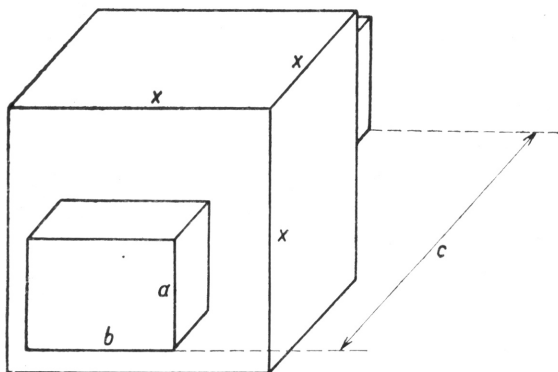
Protože derivace funkce $V(x)$ v intervalu (b, c) je $V'(x) = 3x^2 - 2ab > 0$, může v tomto intervalu nastat minimum jen pro $x = b$.

V intervalu (a, b) je derivace funkce $V(x)$ rovna $V'(x) = 3x^2 - 4ax$. Pokud $\frac{4}{3}a < b$, je záporná pro $a < x <$

$< \frac{4}{3}a$, kladná pro $\frac{4}{3}a < x < b$ a rovna nule pro $x =$



Obr. 37



Obr. 38

$= \frac{4}{3}a$. Je-li $\frac{4}{3}a \geq b$, je derivace pro $a < x < b$ záporná.

Závěr: Hledaná hrana krychle má velikost $\frac{4}{3}a$, je-li $b >$

$> \frac{4}{3}a$, a má velikost b , je-li $b \leq \frac{4}{3}a$.

Jestliže ve čtyřúhelníku $ABCD$, jehož vrcholy leží na kružnici o poloměru 1, platí $|AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| \geq 4$, potom $ABCD$ je čtverec. Dokažte. (Můžete užít Ptolemaiův vzorec

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|.)$$

Řešení: Protože AC, BD jsou tětivy kružnice o poloměru 1, je $|AC| \leq 2, |BD| \leq 2$. Zkombinujeme-li ještě nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem s Ptolemaiovým vzorcem, dostáváme

$$\begin{aligned} 4 &\leq |AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| \leq \\ &\leq \frac{(|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|)^2}{4} = \frac{|AC|^2 \cdot |BD|^2}{4} \leq 4. \end{aligned}$$

Všude tedy nastává rovnost. Je proto $|AC| = 2, |BD| = 2$ a (z rovnosti mezi ar. a geom. průměrem) $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |AD|$. Tětivy AC, BD jsou tedy průměry kružnice, a proto $|AB| = |CD| = \sqrt{2}, |BC| = |AD| = \sqrt{2}$. Body A, B, C, D jsou vrcholy čtverce.

Připomeňme ještě, že Ptolemaiův vzorec se snadno odvodí pomocí kosinové věty — viz např. 16. svazek Školy mladých matematiků *S. Horák: Kružnice*.

Jiné řešení je založeno místo na Ptolemaiově vzorci na následujícím principu: Mějme danu kružnici a na ní tři navzájem různé body X, Y, Z . Pohybuje-li se bod Z' po

oblouku XZY , je součin $|XZ'| \cdot |YZ'|$ maximální, právě když $|XZ'| = |YZ'|$. Trojúhelník XYZ' má totiž maximální obsah, právě když $|XZ'| = |YZ'|$, kdy má maximální výšku na stranu XY . Jeho obsah je roven $\frac{1}{2}|XZ'| \cdot |YZ'| \cdot \sin \sphericalangle XZ'Y$ a obvodový úhel $\sphericalangle XZ'Y$ zůstává při pohybu bodu Z' konstantní.

Uvažujme nyní čtyřúhelník $ABCD$ vepsaný do kružnice k o poloměru 1. Nejprve sestrojme čtyřúhelník $AB'CD'$ vepsaný do kružnice k tak, aby $|AB'| = |CB'|$, $|AD'| = |CD'|$. Podle zmíněného principu je pak

$$(|AB| \cdot |BC|)(|CD| \cdot |DA|) \leq (|AB'| \cdot |B'C|)(|CD'| \cdot |D'A|)$$

a pokud $B' \neq B$ nebo $C' \neq C$, platí ostrá nerovnost. Dále sestrojme čtyřúhelník $A'B'C'D'$ vepsaný do kružnice k tak, aby $|B'A'| = |D'A'|$, $|B'C'| = |D'C'|$. Teď je

$$\begin{aligned} & (|D'A| \cdot |AB'|)(|B'C| \cdot |CD'|) \leq \\ & \leq (|D'A'| \cdot |A'B'|)(|B'C'| \cdot |C'D'|) \end{aligned}$$

a pokud $A' \neq A$ nebo $D' \neq D$, platí ostrá nerovnost. Odtud vidíme, že pokud čtyřúhelník $ABCD$ není totožný se čtyřúhelníkem $A'B'C'D'$, který z něho vznikl popsáním procesem, je

$$|AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| < |A'B'| \cdot |B'C'| \cdot |C'D'| \cdot |D'A'|.$$

Čtyřúhelník $A'B'C'D'$ je však zřejmě čtverec a důkaz je proveden.

Nechť n je libovolné přirozené číslo. Najděte všechny n -tice reálných čísel $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, pro které platí

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_{n-i+1}.$$

Řešení: Nejprve ukážeme (což se provádělo v úloze A — P — 1), že platí pomocná věta:

Nechť $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ jsou reálná čísla. Potom

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \leq n \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

a rovnost nastane právě když buď $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, nebo $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Pomocnou větu dostaneme sečtením nerovností

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$$

pro všechny dvojice indexů $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Použijeme-li ji na n -tice

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \quad -x_n \leq -x_{n-1} \leq \dots \leq -x_1,$$

dostaneme

$$\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n -x_{n-i+1} \leq n \sum_{i=1}^n -x_i \cdot x_{n-i+1},$$

čili

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \geq n \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_{n-i+1}.$$

Právě, když zde platí rovnost, tj. právě, když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, platí nerovnost z textu úlohy.

A - III - 5

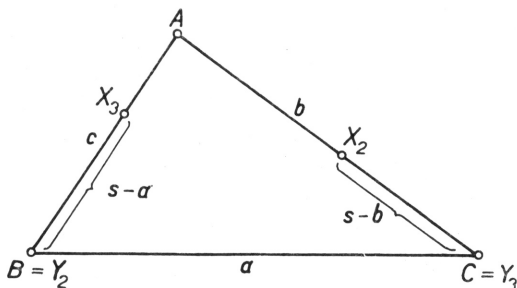
Je dán trojúhelník ABC s velikostmi stran $a \geq b \geq c$. Mezi všemi dvojicemi bodů X, Y na hranici trojúhelníku ABC , které tuto hranici dělí na dvě části stejné délky, najděte všechny takové, pro něž je vzdálenost $|XY|$ maximální.

Řešení: Předpokládejme, že se bod X pohybuje rovnoměrně po hranici trojúhelníku ABC . Potom se bod Y , který spolu s X púlí obvod trojúhelníku, pohybuje také rovnoměrně, a to stejnou rychlostí jako bod X . Pokud žádný z bodů X, Y není ve vrcholu trojúhelníku, jsou oba tyto body na různých stranách trojúhelníku, tedy na ramenech úhlu. Uvažujme nyní konvexní úhel φ s vrcholem V , na jednom jeho ramenu body R_1, R_2 a na druhém S_1, S_2 tak, že $|VR_1| = |VS_1| = u$, $|VR_2| = u + v$, $|VS_2| = u - v$ ($u \geq v \geq 0$). Podle kosinové věty je

$$|R_2S_2|^2 = 2u^2(1 - \cos \varphi) + 2v^2(1 + \cos \varphi),$$

a tedy $|R_2S_2|$ je maximální při $v = u$, tj. $S_2 \equiv V$. To však znamená pro naši úlohu, že největší vzdálenost mohou mít body X a Y jen v případě, že jeden z bodů X nebo Y

bude ve vrcholu trojúhelníku. Porovnejme proto tyto tři vzdálenosti (obr. 39). Je-li bod Y_2 ve vrcholu B , je bod



Obr. 39

X_2 na straně AC , a to ve vzdálenosti $s-a$ od bodu C , kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ je poloviční obvod trojúhelníku ABC (je totiž $|Y_2C| + |CX_2| = s$). Ze stejného důvodu je pro $Y_3 = C$ bod X_3 ve vzdálenosti $s-a$ od bodu B na straně AB .

Podle kosinové věty je

$$\begin{aligned} |X_2Y_2|^2 &= a^2 + (s-a)^2 - 2a(s-a)\cos\gamma \\ \text{a} \\ |X_3Y_3|^2 &= a^2 + (s-a)^2 - 2a(s-a)\cos\beta. \end{aligned}$$

Protože podle předpokladu $a \geq b \geq c$, je také $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, tj. $\cos\beta \leq \cos\gamma$, a proto

$$|X_2Y_2|^2 \leq |X_3Y_3|^2. \quad (1)$$

Porovnáme-li stejným způsobem pro $Y_1 = A$ vzdálenosti $|X_2Y_2|$ a $|X_1Y_1|$, dostaneme, že

$$|X_1 Y_1|^2 \leq |X_2 Y_2|^2. \quad (2)$$

Přitom v (1) nastává rovnost, právě když $\beta = \gamma$, a v (2) nastává rovnost, právě když $\alpha = \beta$. Proto vzdálenost je vždy maximální pro dvojici $X_3 Y_3$, tj. je-li jeden z bodů X, Y ve vrcholu C . Je-li $c = b$, je vzdálenost maximální i v případě, je-li jeden z bodů X, Y ve vrcholu B ; je-li $a = b = c$, je vzdálenost maximální, kdykoli jeden z bodů X, Y je ve vrcholu (rovnostředného) trojúhelníku.

A - III - 6

Najděte všechna přirozená čísla n , $n < 10^7$, pro která platí: Je-li přirozené číslo m , $1 < m < n$, nesoudělné s číslem n , pak je m prvočíslo.

Řešení: Necht n je přirozené číslo, pro které platí tvrzení úlohy. Jestliže pro prvočíslo p platí $p^2 < n$, pak n je dělitelné číslem p . Skutečně, kdyby p nedělilo n , $p^2 < n$, potom p^2, n by byla nesoudělná čísla, ale p^2 není prvočíslo.

Snadno zjistíme, že čísla 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30 vyhovují úloze. Žádné jiné číslo menší než 30 nemá vlastnost v úloze popsanou. Předpokládejme, že n má tuto vlastnost, $n > 30$. Protože $2^2 < 30$, $3^2 < 30$, $5^2 < 30$, je n dělitelné dvěma, třemi i pěti a tedy $n = 30k \geq 60$. Protože $7^2 < 60$, je $n \geq 7 \cdot 60 = 420$. Potom $11^2 < 420$, $13^2 < 420$, $17^2 < 420$, $19^2 < 420$, a tedy $n \geq 420 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 > 10^7$. Žádná další čísla $n < 10^7$ s požadovanou vlastností tedy neexistují. (Dá se dokonce ukázat, že neexistují už ani žádná taková $n \geq 10^7$.)

Cílem korespondenčního semináře bylo dále zvyšovat úroveň špičkových řešitelů MO, kteří nejsou z Prahy ani z Bratislavy a neměli tak možnost pracovat v tamních seminářích pro přípravu na MMO. K účasti bylo prostřednictvím ÚV MO na základě výsledků v MO a návrhů KV MO pozváno 35 žáků, z nichž se přihlásilo a zúčastnilo 25. Pravidelně jim byla rozesílána série poměrně náročných úloh, které měli během 5 týdnů vyřešit. Došlá řešení byla pak opravena, ohodnocena a spolu s rozmnoženým komentářem vrácena účastníkům. Uvádíme znění všech úloh v korespondenčním semináři zadaných.

1. Nerovnosti

11. Dokážte, že pre kladné čísla a, b, c platí

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c).$$

12. Nech α, β, γ sú uhly ostrouhlého trojuholníka. Ak $\alpha < \beta < \gamma$, potom $\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma$; dokážte!
13. Súčet druhých mocnín piatich reálnych čísel a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 je 1. Dokážte, že najmenšia z hodnôt

$(a_i - a_j)^2$ pre $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, i \neq j$ nie je väčšia ako $\frac{1}{10}$.

14. Nájdite celú časť čísla

$$y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1\,000\,000}.$$

15. Na jednotkovej kružnici, v prvom kvadrante, sú dané také oblúky $\widehat{AM}_1 = X_1, \widehat{AM}_2 = X_2, \dots, \widehat{AM}_k = X_k, A \equiv (1, 0)$, že $X_1 < X_2 < \dots < X_k$.

Dokážte, že

$$\begin{aligned} & \sin 2X_1 + \sin 2X_2 + \dots + \sin 2X_{k-1} - \sin(X_1 - \\ & - X_2) - \sin(X_2 - X_3) - \dots - \sin(X_{k-1} - X_k) < \\ & < \frac{\pi}{2} + \sin(X_1 + X_2) + \sin(X_2 + X_3) + \dots + \\ & + \sin(X_{k-1} + X_k). \end{aligned}$$

16. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \\ & + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{n}{4}. \end{aligned}$$

17. Nech $x_0 = 5, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, n = 0, 1, 2, \dots$

Potom $45 < x_{1000} < 45,1$; dokážte!

2. Geometrické nerovnosti

21. Je dán pravidelný 25-úhelník $A_1A_2 \dots A_{25}$ se středem O . Z vektorů $\mathbf{OA}_1, \mathbf{OA}_2, \dots, \mathbf{OA}_{25}$ jich vyberte několik tak, aby velikost součtu vybraných vektorů byla co největší. Určete tuto maximální velikost.
22. V konvexním n -úhelníku jsou sestrojeny všechny úhlopříčky, a dělí ho tak na mnohoúhelníčky. Určete maximální možný počet stran mnohoúhelníčku.
23. Obdélníkové pole o rozměrech 300×400 je rozděleno pěšinami na čtverce 100×100 , po obvodu pole vedou také pěšiny. Po pěšině jde chodec rychlostí v , přes pole rychlostí u . Poradte chodci, jak se dostane z jednoho rohu pole do opačného rohu nejrychleji, a určete, za jak dlouho.
24. Je dáno n jednotkových úseček v rovině tak, že mají společný bod a jejich koncové body jsou vrcholy $2n$ -úhelníku. Dokažte, že alespoň jedna jeho strana není menší než strana pravidelného $2n$ -úhelníku vepsaného do kružnice o průměru 1.
25. Do daného trojúhelníku vepište trojúhelník s co nejmenším obvodem. (Uvnitř každé strany daného trojúhelníku leží jediný vrchol vepsaného trojúhelníku.)
26. Mezi všemi trojúhelníky vepsanými do dané kružnice najděte ten, který má největší součet čtverců stran.
27. Poloměr kružnice opsané trojúhelníku označme R , vepsané r . Dokažte, že $R \geq 2r$. Pro které trojúhelníky platí rovnost? Dokažte, že pro každá dvě čísla $R \geq 2r$ existuje příslušný trojúhelník.

3. Mnogočleny

31. Součin dvou mnohočlenů s celými koeficienty má všechny koeficienty dělitelné pěti. Dokažte, že alespoň jeden z mnohočlenů má všechny koeficienty dělitelné pěti.
32. Je dáno číslo $a \neq 0$ a nenulový mnohočlen $P(x)$. Dokažte, že mnohočlen $(x - a)^n P(x)$ má alespoň $n + 1$ nenulových koeficientů.
33. Je dán mnohočlen 7. stupně s komplexními koeficienty. Leží-li v rovině komplexních čísel všechny jeho kořeny uvnitř (ne na hranici) úhlu velikosti 60° s vrcholem v počátku, jsou všechny jeho koeficienty nenulové. Dokažte.
34. Najděte nejmenší reálné číslo a , které má následující vlastnost: Pro každý mnohočlen $f(x)$ druhého stupně, pro který $|f(x)| \leq 1$ pro všechna $0 \leq x \leq 1$, platí $f'(0) \leq a$.
35. Napište mnohočlen $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ jako rozdíl čtverců dvou mnohočlenů různého stupně s reálnými koeficienty.
36. Buď r přirozené číslo. Dokažte, že trojčlen $x^2 - rx - 1$ není dělitelem žádného nenulového mnohočlenu s celými koeficienty v absolutní hodnotě menšími než r .
37. Mají-li dva mnohočleny 3. stupně s celými koeficienty společný iracionální kořen, pak mají ještě další společný kořen. Dokažte.

4. Kombinatorika

41. Dřevěnou krychli natřeli na červenou a pak ji rozřezali na n^3 stejně velkých krychliček. Kolika způsoby je možno z krychliček složit červenou krychli původních rozměrů?
42. Je dáno prvočíslo $p > 2$ a přirozené číslo n . Kolika způsoby lze obarvit vrcholy pravidelného p -úhelníku pomocí n barev? Způsoby, při nichž se po otočení p -úhelníku barvy shodují, nepokládáme za různé.
43. Uvažujme všechna slova složená z n písmen X a n písmen Y . Diferencí slova budeme rozumět číslo, které udává, kolikrát v něm jsou vedle sebe různá písmena. Dokažte, že pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ je počet slov s diferencí $n-k$ roven počtu slov s diferencí $n+k$.
44. Je dáno přirozené číslo $n > 2$. Uvažujme všechna slova složená z n písmen X a n písmen Y . Slovům, která lze rozdělit na dvě slova, z nichž každé obsahuje stejně X a Y , budeme říkat slova 1. druhu. Slovům, která lze takto rozdělit jediným způsobem, budeme říkat slova 2. druhu. Dokažte, že slov 2. druhu je dvakrát tolik jako slov 1. druhu.
45. Je dáno přirozené číslo $n > 2$ a množina $\mathbf{M}$, jejíž prvky jsou slova složená z písmen X a Y , přičemž každé slovo má právě n písmen a jakákoli dvě různá slova se liší alespoň na třech místech. Dokažte nerovnost

$$|\mathbf{M}| \leq \frac{2^n}{n+1}.$$

46. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$2^{4n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1}.$$

47. Řekneme, že systém $\mathcal{S}$ podmnožin nějaké množiny je dokonalý, jestliže pro žádné dvě podmnožiny $\mathbf{A} \in \mathcal{S}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{S}$ neplatí $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Jaký je největší možný počet podmnožin tvořících dokonalý systém podmnožin n -prvkové množiny?

5. Geometrie

51. V prostoru jsou dány dva různé body A, B . Najděte množinu všech bodů X , pro které se $|XA|^2 - |XB|^2$ rovná danému kladnému číslu k .

52. V prostoru je dána rovina ρ a body A, B v opačných poloprostorech určených rovinou ρ . Najděte v rovině ρ všechny body X , pro které je $||XA| - |XB||$ maximální.

53. V prostoru je dán klín K (průnik dvou poloprostorů, jejichž hraniční roviny nejsou rovnoběžné) a uvnitř něho polopřímka p , jejíž počátek náleží hraně klínu K . Najděte rovinu ρ , která prochází polopřímkou p tak, že p je osou úhlu $\rho \cap K$.

54. Bod X se pohybuje po přímce p konstantní rychlostí danou vektorem $\mathbf{u}$, bod Y se pohybuje po přímce q konstantní rychlostí danou vektorem $\mathbf{v}$. Přímky p a q jsou mimoběžné a v jednom okamžiku je X v bodě A , Y v bodě B . Najděte polohu bodů X, Y , při které je vzdálenost $|XY|$ minimální.

55. V trojbokém jehlanu $ABCV$ je $|AV| = |BV|$ a hrana AC je kolmá ke stěně ABV , $|CV| = p$. Koule o poloměru r se dotýká stěny ABV v jejím těžišti, hrany CV a základny ABC . Vypočtěte objem jehlanu pomocí veličin p, r .
56. V rovině je dán trojúhelník ABC a bod P . Paty kolmic vedených bodem P k stranám trojúhelníku ABC označíme K, L, M . Udejte nutnou a postačující podmínku pro to, aby
- body K, L, M, P ležely na kružnici,
 - body K, L, M ležely na přímce.
57. V rovině je dán trojúhelník ABC . Kružnice k_A prochází bodem A a dotýká se strany BC v bodě B , kružnice k_B prochází bodem B a dotýká se strany CA v bodě C a kružnice k_C prochází bodem C a dotýká se strany AB v bodě A . Dokažte, že se kružnice k_A, k_B, k_C protínají v jednom bodě Q . Co platí o úhlech $\sphericalangle QAB, \sphericalangle QBC, \sphericalangle QCA$?
58. V prostoru jsou dány přímky p, q a rovina ρ , dále je dána délka $d > 0$. Sestrojte úsečku délky d rovnoběžnou s rovinou ρ , jejíž jeden krajní bod náleží p a druhý q .

Zpráva o XXI. MMO

XXI. mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve dnech 28. června — 9. července 1979 ve Velké Británii. Jejím hlavním dějištěm bylo Westfield College v Londýně, kde má své sídlo School Mathematics Project, který MMO zajišťoval po organizační stránce.

Co do účasti znamenala XXI. MMO rekord: oficiální delegace na ni vyslalo dvaadvacet zemí: Belgie, Brazílie, Bulharsko, Československo, Finsko, Francie, Holandsko, Izrael, Jugoslávie, Kuba, Maďarsko, NDR, NSR, Polsko, Rakousko, Rumunsko, Řecko, SSSR, Švédsko, USA, Velká Británie a Vietnam. S belgickou delegací přijel navíc jeden žák z Lucemburska; celkem se MMO zúčastnilo 166 soutěžících ze 23 zemí. Z tradičních účastníků tentokrát chybělo Mongolsko, nově se zúčastnila Brazílie a Izrael. Kromě toho byl na XXI. MMO přítomen pozorovatel z Austrálie, která se vážně zajímá o účast na některé příští MMO; myšlenka MMO tedy pronikla již na všechny kontinenty.

První etapa MMO byla zahájena 28. června v Bristolu, kde sídlila mezinárodní jury během přípravných prací. Zde se nejprve vybíraly soutěžní úlohy z návrhů zaslaných zúčastněnými zeměmi a předběžně zpracovaných organizátory MMO. Jury zasedala pod vedením předsedy

dr. Trevora Fletchera v budově Churchill Hallu bristolské univerzity.

Vedle přípravy soutěže se na jednáních jury diskutovala i některá obecná témata. Mnoho pozornosti bylo věnováno vymezení tematiky olympiádních úloh. Tradiční požadavek, aby úlohy na MMO tematicky nevybočovaly z rámce průniku témat probíraných na školách všech zúčastněných zemí, je stále více pocítován jako nepříjemné a nežádoucí omezení. I když se nepodařilo ještě zcela sjednotit názory na tuto otázku, vyzněla diskuse alespoň ve všeobecné doporučení nevylučovat napříště a priori určitou problematiku jen proto, že se všude dokonale neprobírá. Šlo hlavně o komplexní čísla, trigonometrii, elementy analýzy, popř. též počtu pravděpodobnosti. Převládal názor, že od účastníků MMO je možno očekávat přece jen o něco víc než jen běžné školské znalosti — je ovšem třeba tyto požadavky včas specifikovat.

Výsledkem práce jury v této první etapě byl výběr šesti úloh pro soutěž:

1. Nechť p a q jsou přirozená čísla taková, že

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Dokažte, že p je dělitelné číslem 1979.

2. Je dán pětiboký hranol se základnami $A_1A_2A_3A_4A_5$ a $B_1B_2B_3B_4B_5$. Všechny hrany obou základů a všechny úsečky A_jB_k , $1 \leq j \leq 5$, $1 \leq k \leq 5$ obarvíme červenou nebo zelenou barvou tak, aby v každém trojúhelníku, jehož vrcholy jsou vrcholy hranolu a jehož všechny strany byly

obarveny, existovala dvojice stran různých barev. Dokažte, že všech deset hran obou základů musí mít stejnou barvu.

3. V rovině jsou dány dvě protínající se kružnice k_1 a k_2 . Označme A jeden z jejich průsečíků. Po kružnici k_1 , resp. k_2 se pohybují body B_1 , resp. B_2 ve stejném smyslu konstantní rychlostí tak, že se při každém oběhu setkávají v bodě A .

Dokažte, že v rovině existuje pevný bod P , pro který v každém okamžiku platí $|PB_1| = |PB_2|$.

4. Je dána rovina π , bod $P \in \pi$ a bod $Q \notin \pi$. Najděte všechny body $R \in \pi$, pro něž je podíl

$$\frac{|PQ| + |PR|}{|QR|}$$

maximální.

5. Najděte všechna reálná čísla b , pro něž existují nezáporná reálná čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 taková, že platí

$$\sum_{k=1}^5 kx_k = b, \quad \sum_{k=1}^5 k^3x_k = b^2, \quad \sum_{k=1}^5 k^5x_k = b^3.$$

6. Po vrcholech pravidelného osmiúhelníku $ABCDEFGH$ skáče klokan. Každým skokem se přemísťuje z jednoho vrcholu do některého z obou sousedních; začíná v A a zastaví se, jakmile se poprvé dostane do E .

Označme a_n počet všech různých cest z A do E složených z právě n skoků. Dokažte, že pro všechna $k = 1, 2, 3, \dots$ platí

$$a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{k-1} - y^{k-1}),$$

kde

$$x = 2 + \sqrt[3]{2}, \quad y = 2 - \sqrt[3]{2}.$$

Poznámka. Cestou z A do E složenou z právě n skoků rozumíme posloupnost $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ vrcholů osmiúhelníku s těmito vlastnostmi:

- (i) $P_0 = A, \quad P_n = E;$
- (ii) pro všechna $j = 1, 2, \dots, n-1$ je $P_j \neq E;$
- (iii) pro každé $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ jsou P_j a P_{j+1} dva sousední vrcholy osmiúhelníku.

Výběr úloh na MMO je ovšem vždy výsledkem různých kompromisů; jury je omezena na předložené návrhy a nemá dostatek času úlohy ještě nějak dotvářet. Jako již často v posledních letech, byla i tentokrát v návrzích slabě zastoupena geometrie. Jury se však snažila, aby výsledný výběr byl tematicky pestrý a nepreferoval výrazně žádnou oblast školské matematiky. Vybrané úlohy pocházely z návrhů předložených NSR (1. a 6. úloha), Bulharskem (2.), SSSR (3.), USA (4.) a Izraelem (5.).

Součástí výběru úloh je také odhad jejich obtížnosti. To není lehký úkol, neboť žáci pracují při soutěži v podmínkách klausury a časový faktor může sehrát velkou roli. Po delší debatě se jury dohodla nezdůrazňovat příliš rozdíly mezi úlohami a ohodnotit je šesti (úlohy 1 a 4) a sedmi (úlohy 2, 3, 5, 6) body.

V sobotu 30. června dorazila již všechna soutěžící družstva do Londýna, a tak se jury v plném počtu a posílena

o zástupce vedoucích delegací mohla pustit do konečné formulace přijatých úloh v národních jazycích žáků. V neděli 1. července byly již texty přeloženy, rozmnoženy a připraveny k rozdělení soutěžícím. Jury tak zbylo trochu volna k návštěvě města Bristolu. Večer byli členové jury přijati náměstkem bristolského primátora a potom si v Churchill Hallu vyslechli koncert komorní hudby.

Vlastní soutěž XXI. MMO proběhla v Londýně ve Westfield College, kde byli všichni soutěžící také ubytováni. Slavnostní zahájení bylo 2. července dopoledne za přítomnosti státního sekretáře pro školství *Sira Jamese Hamiltona*. Jury přijela na toto zahájení ranním rychlíkem z Bristolu, kam se pak odpoledne vrátila, aby byla zachována obvyklá izolace od soutěžících. V Bristolu pak ještě jury navštívila Clifton College a prohlédla si areál této školy. Teprve v druhý den soutěže, 3. července ráno, přesídlila jury nadobro do Londýna do Westfield College.

Žáci řešili 2. července první tři a 3. července druhé tři soutěžní úlohy. V následujících dnech již měli volno k prohlídkám londýnských pamětihodností a k výletu lodí do Grenwiche, kdežto členové jury pilně pracovali na opravě žakovských řešení a koordinaci jejich hodnocení. Práce pokračovaly ve velkém tempu a dosti napjatý harmonogram byl dodržen jen za cenu některých „přesčasů“. Vedle toho byl ve středu večer na programu koncert a ve čtvrtek přijetí všech účastníků MMO primátorem na londýnské radnici. V pátek 6. července byly již známy konečné výsledky soutěže a jury mohla rozhodnout o udělení cen. Celkem bylo uděleno 8 prvních cen — za řešení ohodnocená 37—40 body, 32 druhých cen (za 29—36 bodů) a 43

třetích cen (za 20—28 bodů). Navíc dostal jeden vietnamský žák zvláštní cenu za elegantní řešení třetí úlohy.

Na tomto posledním pracovním zasedání jury byly také prodiskutovány některé obecné otázky MMO v budoucnosti a byla přijata některá doporučení k organizaci příštích MMO. V pátek 6. července večer pak byla ve Westfield College uspořádána slavnostní závěrečná večeře pro všechny zúčastněné i četné hosty. V sobotu 7. července dopoledne se pak rovněž ve Westfield College konalo slavnostní rozdělení cen za přítomnosti vévodkyně z Gloucesteru, která osobně předala diplomy 83 žákům, kteří získali některou z udělených cen. Kromě diplomů dostali ocenění žáci také věcné dary (matematickou literaturu, plnicí pera).

Ihned po rozdělení cen odjeli všichni účastníci MMO autobusy do Oxfordu, cestou se nakrátko zastavili ve Windsoru, kde si prohlédli zámek. V Oxfordu pak byli většinou ubytováni v Keble College. Neděle 8. července byla věnována organizované prohlídce dalších oxfordských kolejí (čs. delegace navštívila Magdalen College) a odpolednímu autobusovému výletu do Stratfordu nad Avonou. Večer pak byla ve velké jídelně Keble College poslední, slavnostní večeře na rozloučenou.

V pondělí 9. července se již delegace opět rozjížděly do svých domovů. Československá delegace se vrátila do Prahy letadlem v odpoledních hodinách.

Československo se podílelo na XXI. MMO ve shodě s propozicemi této soutěže ve všech jejích fázích; návrhem úloh, prací v mezinárodní jury po celou dobu a soutěžním družstvem v plném počtu osmi žáků.

Jako návrh byl do Londýna již v květnu zaslán soubor čtyř úloh. Dvě z nich byly organizátory MMO zařazeny do širšího výběru, který byl předložen jury. Při postupném zužování výběru se jedna z našich úloh udržela až do posledního výběru šesti úloh z osmi. Byla to však algebraická úloha dosti náročná a jury usoudila, že by nebylo vhodné předkládat žákům více než jednu náročnou úlohu na každý den soutěže.

Československé družstvo pro XXI. MMO bylo jako obvykle vybráno z úspěšných účastníků naší MO kategorie A, a to podle výsledků dosažených ve III. i ve II. kole s přihlédnutím k výkonům podávaným v přípravných soustředěních a v korespondenčním semináři. Podle těchto kritérií byli jako nejlepší vybráni žáci:

<i>Jaroslav Hančl</i>	4. r. gymnázia v Bílovci
<i>Miroslav Chlebík</i>	4. r. gymnázia v Čadci
<i>Jozef Jirásek</i>	4. r. gymnázia v Košicích
<i>Ladislav Kubini</i>	3. r. gymnázia v Bardějově
<i>Radan Kučera</i>	4. r. gymnázia v Brně
<i>Jan Nekovár</i>	2. r. gymnázia v Praze 2
<i>Otto Ritter</i>	4. r. gymnázia v Praze 2
<i>Josef Tkadlec</i>	4. r. gymnázia v Bílovci

Výsledky, jichž dosáhli na XXI. MMO, jsou shrnuty v tabulce:

Žák	Počet bodů za řešení úlohy č.						Cel- kem	Udělená cena
	1	2	3	4	5	6		
Hančl	1	0	0	6	7	2	16	—
Chlebík	6	0	6	1	2	5	20	III.
Jirásek	0	7	7	6	0	4	24	III.
Kubini	0	0	6	6	4	1	17	—
Kučera	0	7	7	1	7	1	23	III.
Nekovář	6	7	7	6	7	7	40	I.
Ritter	0	2	0	6	3	1	12	—
Tkadlec	1	4	7	6	7	1	26	III.

Výsledky lze hodnotit jako úspěch, hlavně díky výbornému výkonu *J. Nekováře* — nejmladšího člena čs. družstva, který v soutěži neztratil ani bod (stejného výsledku dosáhli jen tři další soutěžící: dva sovětsí a jeden vietnamský žák). Po jedenácti letech tak Československo opět získalo jednu z prvních cen na MMO.

I když výkony ostatních členů čs. družstva nepředčily očekávání, je zisk čtyř třetích cen jistě uspokojivý. Bližší pohled na tabulku výsledků svědčí o známé skutečnosti, že si naši žáci dovedou dobře poradit s úlohami se standardní tematikou algebraickou (úloha 5), ale zejména geometrickou (úlohy 3 a 4). Značné potíže měli naproti tomu s první úlohou, jejíž obtížnost jury poněkud podcenila.

Je to totiž úloha „triková“ (a tedy ne právě nejvhodnější pro klauzurní soutěž): kdo na úpravu vedoucí k jednoduchému řešení nepřišel, nedokázal zpravidla vůbec nic. Stejně potíže měla i většina ostatních soutěžících, některá družstva dokonce za první úlohu nezískala ani jeden bod. Také u šesté úlohy, kde šlo o v podstatě nepříliš těžké kombinatorické úvahy spojené s řešením rekurentních vztahů, nedopadli naši žáci právě nejlépe.

Šestice soutěžních úloh XXI. MMO vcelku dobře prověřila znalosti i nápaditost soutěžících a umožnila poměrně jemné odstupňování hodnocení podaných výkonů. Umístění čs. družstva na sedmém místě v neoficiální klasifikaci podle součtu bodů je uspokojivé a patrně odpovídá našim reálným možnostem. K tomu, abychom se zařadili mezi světovou špičku, nám chybí zatím větší vyrovnanost družstva a spolehlivost výkonu i v podmínkách MMO, které jsou přece jenom náročnější — po stránce odborné i psychickou zátěží — než na naší domácí matematické olympiádě.

**Vedoucí a zástupci vedoucích delegací
na XXI. MMO**

Austrálie	prof. J. L. Williams, Sydney (pozorovatel)
Belgie	prof. A. Festraets, Brusel prof. W. van Harume
Brazílie	prof. A. Barone, Sao Paulo
Bulharsko	prof. J. B. Tabov, Sofia V. Michailov
Československo	dr. F. Zítek, Praha doc. dr. J. Moravčík, Žilina
Finsko	dr. M. Lahtinen, Helsinky dr. E. Pekkonen
Francie	prof. C. Deschamps, Paříž prof. D. Gerll
Holandsko	dr. J. van de Craats, Leiden dr. A. W. Boon, Haag
Izrael	prof. J. Gillis, Tel Aviv A. Markus
Jugoslávie	prof. D. Ljubić, Bělehrad V. Janković
Kuba	dr. F. Recío
Maďarsko	prof. E. Hódi, Budapešť dr. I. Reiman
NDR	prof. G. Buroschi, Rostock dr. M. Noacková, Berlín

NSR	prof. A. Engel, Frankfurt n. M. dr. H. Sewerin
Polsko	Mgr. A. Małowski, Varšava dr. M. Bryński
Rakousko	prof. T. Mühlgassner, Eisenstadt prof. G. Windischbacher, Štýrský Hradec
Rumunsko	prof. I. Cuculescu, Bukurešť prof. P. Horia
Řecko	prof. I. Merminghis, Athény
SSSR	prof. A. P. Savin, Moskva V. I. Mišin
Švédsko	prof. L-Å. Lindahl, Uppsala dr. S. Jonsson
USA	prof. S. L. Greitzer, New Brunswick prof. M. Klamkin, Edmonton
Velká Británie	dr. C. Goldsmith, Wiltshire dr. T. Heard, Londýn
Vietnam	prof. Le Hai Chau, Hanoj Dao Van Phong

Celkové výsledky XXI. MMO
(pořadí zemí podle získaných cen)

Země	počet cen			celkem bodů
	1.	2.	3.	
SSSR	2	4	1	267
NSR	1	5	2	235
Rumunsko	1	4	2	240
Vietnam	1	3	—	134 ¹⁾
USA	1	2	2	199
Československo	1	—	4	178
Francie	1	—	1	155
Velká Británie	—	4	4	218
Polsko	—	2	3	160
NDR	—	2	2	180
Maďarsko	—	2	2	176
Švédsko	—	2	1	143
Jugoslávie	—	1	4	168
Holandsko	—	1	1	131
Bulharsko	—	—	5	150
Rakousko	—	—	4	152
Izrael	—	—	2	119
Finsko	—	—	1	89
Belgie	—	—	1	66
Řecko	—	—	1	57
Kuba	—	—	—	35 ²⁾
Brazílie	—	—	—	19 ³⁾
Lucembursko	—	—	—	7 ⁴⁾

1) Vietnamské družstvo bylo jen čtyřčlenné.

2) Kubánské družstvo bylo jen čtyřčlenné.

3) Brazílské družstvo bylo pětičlenné.

4) Soutěžil jen jeden žák.

Řešení úloh XXI. MMO

1. Zkoumaný součet postupně upravíme

$$\begin{aligned}
 & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = \\
 & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} - \\
 & \quad - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1318}\right) = \\
 & = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1319} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{659}\right) = \\
 & = \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \dots + \frac{1}{1319} = \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319}\right) + \\
 & \quad + \left(\frac{1}{661} + \frac{1}{1318}\right) + \dots + \left(\frac{1}{989} + \frac{1}{990}\right) = \\
 & = \frac{1779}{660 \cdot 1319} + \frac{1779}{661 \cdot 1318} + \dots + \frac{1779}{989 \cdot 990}.
 \end{aligned}$$

Zlomky uvedeme na společného jmenovatele a sloučíme. Poněvadž 1779 je prvočíslo, nemůže se při tom zkrátit, a číselník výsledného zlomku bude nutně číslem 1779 dělitelný.

2. Nejprve dokážeme, že každé dvě sousední hrany téže základny mají touž barvu. Kdyby tomu tak nebylo, existovaly by na jedné základně — např. $A_1A_2A_3A_4A_5$ — dvě

hrany, např. A_1A_2 a A_2A_3 , z nichž první by byla červená a druhá zelená. Z tohoto předpokladu však odvodíme spor.

Z vrcholu A_2 vychází pět obarvených úseček A_2B_1 , $A_2B_2, \dots, A_2B_5$, alespoň tři z nich mají touž barvu.

Nechť tato barva je červená a nechť jsou to úsečky A_2B_j , A_2B_k , A_2B_l . Ze tří vrcholů B_j , B_k , B_l pětiúhelníku jsou nutně vždy dva sousední — např. B_jB_k . Úsečka B_jB_k je tedy hrana druhé základny, a je tedy obarvena. Kdyby však byla hrana B_jB_k červená, měl by trojúhelník $A_2B_jB_k$ všechny tři strany červené, což by odporovalo podmínkám úlohy, je tedy B_jB_k obarvena nazeleno.

Podívejme se nyní na úsečky A_1B_j , A_1B_k . Je-li aspoň jedna z nich — např. A_1B_j — červená, má trojúhelník $A_1A_2B_j$ všechny tři strany červené, což je opět spor. Jsou-li však obě úsečky A_1B_j , A_1B_k zelené, je celý trojúhelník $A_1B_jB_k$ zelený, tedy opět spor s podmínkami úlohy.

Předpokládáme-li, že z vrcholu A_2 vycházejí alespoň tři zelené úsečky A_2B_j , A_2B_k , A_2B_l , musí být hrana B_jB_k spojující dva sousedící vrcholy B_jB_k nutně červená, jinak by vznikl zelený trojúhelník $A_2B_jB_k$. Potom však obě úsečky A_3B_j , A_3B_k musí být červené (jinak by trojúhelník $A_2A_3B_j$, resp. $A_2A_3B_k$ měl tři zelené strany), to však znamená, že trojúhelník $A_3B_jB_k$ má všechny tři strany červené.

Dostali jsme tak spor v každém případě, což znamená, že všechny strany jedné a téže základny mají nutně touž barvu. Zbývá dokázat, že nemůže být jedna základna zelená a druhá červená.

Necht $A_1 A_2$ jsou dva sousední vrcholy červené základny. Z vrcholu A_1 nutně vedou alespoň tři červeně obarvené úsečky $A_1 B_j$, $A_1 B_k$, $A_1 B_l$. Kdyby jich totiž bylo méně, vedly by z A_1 nutně dvě zelené úsečky k dvěma sousedním vrcholům druhé, zelené základny a vznikl by tak trojúhelník s třemi stranami obarvenými nazeleno. Z vrcholů B_j , B_k , B_l jsou opět nutně dva sousední, např. B_j , B_k . Úsečky $A_2 B_j$, $A_2 B_k$ nemohou být červené — trojúhelník $A_1 A_2 B_j$, resp. $A_1 A_2 B_k$ by pak měl všechny tři strany červené. Jsou tedy obě zelené, to však znamená, že trojúhelník $A_2 B_j B_k$ má všechny tři strany zelené, což je opět spor s podmínkami úlohy.

Je tedy vidět, že všechny hrany obou základen musí být obarveny touž barvou. Úsečky $A_j B_k$, $j, k = 1, 2, \dots, 5$, pak mají — všechny nebo všechny s výjimkou jediné — druhou barvu.

3. Označme S_1 , resp. S_2 , střed kružnice k_1 , resp. k_2 , C střed úsečky $S_1 S_2$ a A' druhý průsečík kružnic k_1 a k_2 . Dokážeme, že hledaným bodem P je obraz bodu A' při středové souměrnosti vzhledem k bodu C . Tato souměrnost převádí S_1 v S_2 a zřejmě platí $|PS_2| = |A'S_1|$, $|PS_1| = |AS_2|$ a $PS_2 \parallel AS_1$, $PS_1 \parallel AS_2$.

Z toho, že se body B_1 , B_2 pohybují konstantní rychlostí a že se při každém oběhu setkávají v bodě A , plyne, že jejich úhlová rychlost je stejná, tj., že se středové úhly $\sphericalangle AS_1 B_1$, $\sphericalangle AS_2 B_2$ vždy rovnají.

Vedme nyní libovolnou přímku bodem A' a označme B'_1 , resp. B'_2 její další průsečíky s kružnicemi k_1 , resp. k_2 . (Je-li přímka tečnou k některé z kružnic, splyne B'_1 , resp.

B'_2 s bodem A' .) Dále rozlišíme dva případy podle toho, zda bod A' odděluje či neodděluje body B'_1, B'_2 .

Jestliže je neodděluje, je úhel $\sphericalangle AA'B'_1 = \sphericalangle AA'B'_2$ obvodovým úhlem v obou kružnicích, kterému ovšem odpovídají stejné středové úhly. Jestliže A' odděluje body B'_1 a B'_2 , jsou obvodové úhly $\sphericalangle AA'B'_1$ a $\sphericalangle AA'B'_2$ výplňkové, takže součet jim odpovídajících úhlů středových je 360° . V obou případech však vzhledem k definici pohybu bodů B_1 a B_2 vidíme, že B'_1 a B'_2 jsou odpovídající si polohy pohyblivých bodů B_1 a B_2 . Znamená to, že v každém okamžiku leží bod A' na přímce B_1B_2 .

Vezměme nyní přímku B_1B_2 a promítněme na ni kolmo body S_1, S_2, P ; průměty označme po řadě S'_1, S'_2, P' . Z vlastností středové souměrnosti pak plyne $|S'_1A'| = |S'_2P'|$, $|S'_2A'| = |S'_1P'|$.

Nyní opět rozlišíme dva případy podle toho, zda bod A' odděluje či neodděluje body B_1, B_2 . Navíc budeme pro jednoduchost předpokládat, že $|B_1A'| \leq |B_2A'|$.

Jestliže A' odděluje B_1 a B_2 , máme

$$\begin{aligned} |B_2P'| &= |B_2S'_2| + |S'_2P'| = |B_2S'_2| + |S'_1A'| = \\ &= \frac{1}{2}(|B_2A'| + |B_1A'|) = \frac{1}{2}|B_1B_2|. \end{aligned}$$

V opačném případě pak

$$\begin{aligned} |B_2P'| &= |B_2S'_2| - |S'_2P'| = |B_2S'_2| - |S'_1A'| = \\ &= \frac{1}{2}(|B_2A'| - |B_1A'|) = \frac{1}{2}|B_1B_2|. \end{aligned}$$

V obou případech tedy kolmý průmět bodu P na přímku B_1B_2 pólí úsečku B_1B_2 , tedy vždy platí $|B_1P| = |B_2P|$.

4. Nejprve si odvodíme některé nutné podmínky, jimž musí vyhovovat bod R . Označme S patu kolmice spuštěné s bodu Q na rovinu π .

Zřejmě je $R \neq P$. V trojúhelníku PQR totiž platí $|PQ| + |PR| \geq |QR|$, přičemž rovnost nastane právě tehdy, je-li $P = R$. Je tedy pro $P \neq R$

$$\frac{|PQ| + |PR|}{|QR|} > 1 = \frac{|PQ|}{|QP|}.$$

Bod S nutně leží na úsečce PR . Kdyby tomu tak nebylo, bylo by nutně $P \neq S$. Na přímce PS bychom pak vzali bod R' takový, aby S leželo na úsečce PR' a aby přitom $|SR'| = |SR|$. Bylo by pak ovšem také $|QR'| = |QR|$, neboť $QS \perp \pi$. Podle trojúhelníkové nerovnosti by však platilo

$$\frac{|PQ| + |PR'|}{|QR'|} = \frac{|PQ| + |PS| + |SR'|}{|QR|} > \frac{|PQ| + |PR|}{|QR|},$$

bod R by nevyhovoval úloze.

Úsečka QS je tedy nutně výškou v trojúhelníku PQR . Tento trojúhelník navíc musí být rovnoramenný: $|PR| = |PQ|$.

Označme γ úhel $\sphericalangle QPR$; je to úhel, který svírá přímka PQ s rovinou π . Označme dále $\alpha = \sphericalangle PRQ$, $\beta = \sphericalangle PQR$. Podle sinové věty platí

$$\frac{|PQ| + |PR|}{|QR|} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Pro daném jmenovateli je pak čitatel maximální, je-li $\alpha = \beta$, tj. je-li trojúhelník PQR rovnoramenný.

Toto tvrzení se dokáže např. takto: Na kružnici se středem S a poloměrem rovným 1 zvolme tři body A, B, C tak, aby $\sphericalangle ASB = \alpha$, $\sphericalangle BSC = \beta$, $\sphericalangle ASC = \alpha + \beta$. Potom $\sin \alpha + \sin \beta$ je délka kolmého průmětu úsečky AC na přímkou kolmou k SB . Je zřejmé, že tento průmět bude nejdelší, bude-li přímka, na kterou promítáme, rovnoběžná s úsečkou AC , tj. bude-li $AC \perp SB$, tj. bude-li SB osou úhlu $\sphericalangle ASC$, tj. bude-li $\alpha = \beta$.

Nyní již můžeme úlohu řešit: je-li $P \neq S$, existuje jediné řešení; je to bod R takový, aby S leželo na úsečce PR a aby trojúhelník PQR byl rovnoramenný, $|PR| = |PQ|$. Je-li $P = S$, tj. je-li $PQ \perp \pi$, pak existuje nekonečně mnoho bodů R ; vyplňují celou kružnici o středu P a poloměru PQ .

5. Předpokládejme, že pro některé reálné číslo b existují čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 vyhovující podmínkám úlohy.

Potom platí

$$b^3 = \sum_{k=1}^5 k^5 x_k = b \sum_{k=1}^5 k^3 x_k = b^2 \sum_{k=1}^5 k x_k.$$

Poněvadž je zřejmé $b^3 - 2b^3 + b^3 = 0$, platí také

$$0 = \sum_{k=1}^5 k x_k (k^4 - 2b k^2 + b^2) = \sum_{k=1}^5 k x_k (k^2 - b)^2.$$

Zde jsou však všechny sčítance nezáporné; má-li se jejich součet rovnat nule, musí být všechny nulové, tj. musí být

$$k x_k (k^2 - b) = 0$$

pro každé $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Jedno možné řešení je zřejmě $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, potom je také $b = 0$.

Je-li některé $x_k \neq 0$, je nutně $b = k^2$. To však znamená, že pro všechna $j \neq k$ je $x_j = 0$, a tedy $x_k = k$.

Číslo b tedy může být jen některé z čísel 0, 1, 4, 9, 16, 25 a kterékoli z těchto čísel může být číslem b .

6. Pro každý vrchol V daného osmiúhelníku označme $f_n(V)$ počet všech cest z A do V o n skocích, tj. počet všech posloupností

$$P_0, P_1, \dots, P_n$$

vrcholů osmiúhelníku s těmito vlastnostmi:

- (a) $P_0 = A, P_n = V$,
- (b) P_n a P_{k+1} jsou dva sousední vrcholy pro $k = 0, 1, \dots, n-1$.
- (c) $P_k \neq E$ pro $k = 1, 2, \dots, n-1$.

V důsledku symetrie vzhledem k ose AE platí

$$f_n(H) = f_n(B), \quad f_n(G) = f_n(C), \quad f_n(F) = f_n(D)$$

pro všechna n .

Do vrcholů A, B, C, E se lze dostat jedním skokem vždy z obou sousedních vrcholů, takže platí

$$f_n(A) = f_{n-1}(B) + f_{n-1}(H) = 2f_{n-1}(B),$$

$$f_n(B) = f_{n-1}(A) + f_{n-1}(C), \tag{1}$$

$$f_n(C) = f_{n-1}(B) + f_{n-1}(D), \tag{2}$$

$$f_n(E) = f_{n-1}(D) + f_{n-1}(F) = 2f_{n-1}(D).$$

Naproti tomu jsou vrcholy D a F dosažitelné pouze z vrcholu C , resp. G , takže

$$f_n(D) = f_{n-1}(C).$$

Číslo a_n , které máme určit, je v našem označení rovno

$$a_n = f_n(E) = 2f_{n-1}(D) = 2f_{n-2}(C).$$

Podle (1) je

$$f_n(B) = f_{n-1}(A) + f_{n-1}(C) = 2f_{n-2}(B) + f_{n-1}(C),$$

takže

$$f_{n-1}(C) = f_n(B) - 2f_{n-2}(B). \quad (3)$$

Zároveň podle (2)

$$f_{n+1}(C) = f_n(B) + f_n(D) = f_n(B) + f_{n-1}(C),$$

takže

$$f_n(B) = f_{n+1}(C) - f_{n-1}(C).$$

Dosazením do (3) odtud dostáváme

$$f_{n-1}(C) = f_{n+1}(C) - f_{n-1}(C) - 2[f_{n-1}(C) - f_{n-3}(C)],$$

tzn.

$$f_{n+1}(C) - 4f_{n-1}(C) + 2f_{n-3}(C) = 0. \quad (4)$$

Prímým výpočtem snadno zjistíme, že je

$$f_1(C) = 0, \quad f_2(C) = 1, \quad f_3(C) = 0, \quad f_4(C) = 4.$$

Odtud a ze (4) je již vidět, že $f_{2k+1}(C) = 0$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \dots$, tj. že je $a_{2k+1} = 0$ pro $k = 1, 2, 3, \dots$

Obecný výraz pro a_{2k} , $k = 1, 2, 3, \dots$,

$$a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^{k-1} - y^{k-1}), \quad (5)$$

kde $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$, ověříme: pro $k = 2, 3$ dostaneme dosazením

$$2 = 2 \cdot f_2(C) = a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \sqrt{2},$$

$$8 = 2f_4(C) = a_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^2 - y^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (4 + 4) \sqrt{2}.$$

Rovnice (4) přepsaná pro a_{2k} pak zní

$$a_{2k} - 4 a_{2(k-1)} + 2 a_{2(k-2)} = 0; \quad (6)$$

dosadíme-li sem podle (5), vidíme, že (6) platí pro každé $k \geq 2$.

Jozef Moravčík
Leo Boček
Lev Bukovský
Miroslav Fiedler
Antonín Vrba
Jan Vyšín
František Zítek

DVACÁTÝ OSMÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Ilustroval: Vlastimil Macháček
Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p.,
v Praze roku 1981
jako svou publikaci č. 5-42-14/28
Edice Pomocné knihy pro žáky
Odpovědný redaktor: Stanislav Horák
Výtvarný redaktor: Václav Hanuš
Technická redaktorka: Jiřina Perglová
Z nové sazby písmem Plantin vytiskl Mír, n. p.,
závod 5, Praha 2, Václavská 12
Formát papíru 70 × 100 cm
Počet stran 175
AA 5,83 (5,36 AA textu, 0,47 AA grafiky) - VA 6,22
Náklad 3500
Tematická skupina a podskupina 03/2
1. vydání
Cena brožovaného výtisku Kčs 8,00
505/21,825

14-508-81	Kčs 8,00
-----------	----------

matematická olympiáda



SPN 5 - 42 - 14/28

14 - 508 - 81

03/2

Kčs 8,—