

56. ročník matematické olympiády na středních školách

Karel Horák (editor); Martin Mareš (editor); Peter Novotný (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 56. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2006/2007. 48. mezinárodní matematická olympiáda. 19. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2008.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405123>

Terms of use:

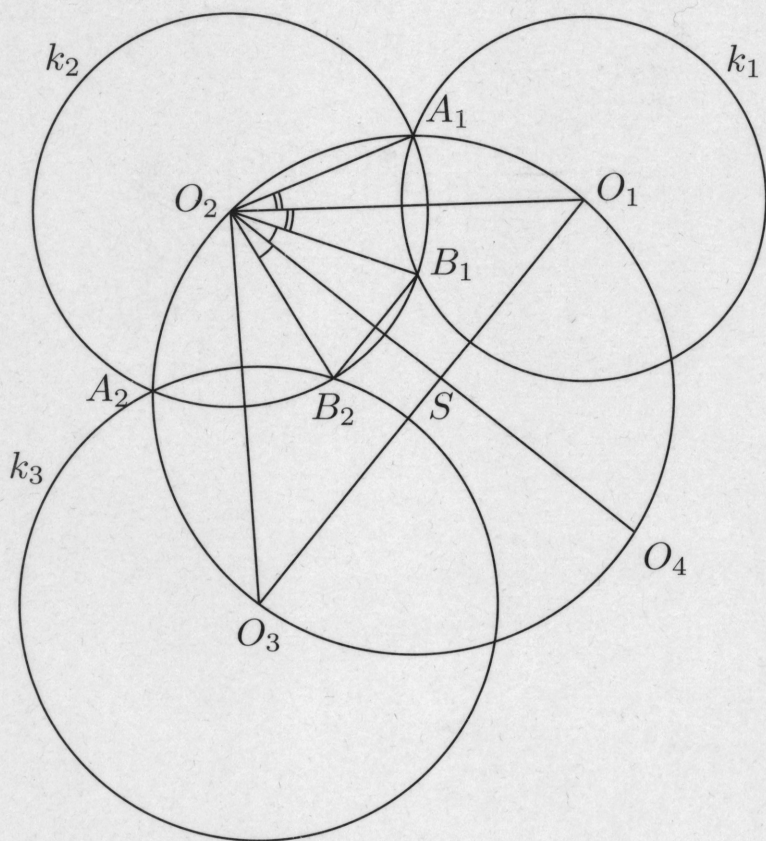
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

56. ročník matematické olympiády na středních školách



PADESÁTÝ ŠESTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2006/2007

48. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

19. MEZINÁRODNÍ OLYMPIÁDA V INFORMATICE

Vydání této publikace bylo podpořeno z projektu
NPV II „STM – Morava“, č. 2E06029.

Za přispění spolupracovníků zpracovali
RNDr. Karel Horák, CSc., Mgr. Martin Mareš, Mgr. Peter Novotný,
doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,
doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.,

© Karel Horák, editor, 2008

ISBN 978-80-7015-003-0

Obsah

O průběhu 56. ročníku matematické olympiády	5
Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO v kategoriích A, B, C a P	12
Výsledky ústředního kola 56. ročníku MO kategorie A	25
Výsledky ústředního kola 56. ročníku MO kategorie P	26
Kategorie C	27
Texty úloh	27
Řešení úloh	30
Kategorie B	41
Texty úloh	41
Řešení úloh	44
Kategorie A	56
Texty úloh	56
Řešení úloh	60
Kategorie P	89
Texty úloh	89
Kategorie Z5	109
Texty úloh	109
Kategorie Z6	112
Texty úloh	112
Kategorie Z7	115
Texty úloh	115
Kategorie Z8	118
Texty úloh	118
Kategorie Z9	120
Texty úloh	120
Přípravné soustředění před 48. MMO	124
Úlohy zadané na přípravném soustředění	125
Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské	128
Texty soutěžních úloh	129
Řešení úloh	130
48. mezinárodní matematická olympiáda	136
Texty soutěžních úloh	140
Řešení soutěžních úloh	141
1. střeoevropská matematická olympiáda	154
Texty soutěžních úloh	156
Řešení úloh	158
14. střeoevropská olympiáda v informatice	167
19. mezinárodní olympiáda v informatice	170
Texty soutěžních úloh	173

O průběhu 56. ročníku matematické olympiády

56. ročník Matematické olympiády proběhl v České republice ve školním roce 2006/07. Stejně jako v předešlých letech bylo hlavním pořadatelem této soutěže Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR, dále Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd ČR. Výkonný orgán soutěže — Ústřední komise MO — pracoval i v tomto ročníku ve stejném složení. Předsedou ÚK MO byl doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., funkce místopředsedů pak zastávali RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc. (pro kategorie A, B a C), prof. RNDr. *Pavel Tlustý*, CSc. (pro kategorie Z9–Z5) a doc. RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc. (pro kategorii P). Tajemníkem ÚK MO byl RNDr. *Karel Horák*, CSc.

Přípravu a definitivní výběr soutěžních úloh pro kategorie A, B a C již tradičně zajišťují dvě společné česko-slovenské úlohové komise (jedna pro kategorie A, B a C a jedna pro kategorie Z5–Z9), které na svých pravidelných jednáních (dvakrát ročně) dotvářejí s ročním předstihem definitivní podobu všech soutěžních úloh. Garanty výběru úloh pro středoškolské kategorie 56. ročníku MO byli: RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc. (pro kategorii A), doc. RNDr. *Pavel Novotný*, CSc. (pro kategorii B) a RNDr. *Pavel Leischner*, Ph.D. (pro kategorii C).

Při přípravě soutěžních úloh MO kategorie P se pravidelně střídají pracovníci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze a Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě. Tentokrát byli na řadě pracovníci a studenti z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, kteří se pak postarali i o opravu a vyhodnocení odevzdaných řešení.

Ústřední (III.) kola kategorií A a P se konala od 18. do 24. března 2007 ve Zlíně. Organizátorem závěrečné části soutěže v obou kategoriích bylo (na základě pověření ÚK MO) Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť, a to ve spolupráci se zlínskou pobočkou JČMF. Organizátoři připravili výborné podmínky pro vlastní soutěž. Ubytování téměř všech soutěžících a členů ÚK MO ve zlínském hotelu Baltaci bylo rovněž na vysoké úrovni. Vlastní soutěž se konala v prostorách zlínského gymnázia v Lesní čtvrti. Záštitu

nad zdárným průběhem celé akce převzali mj. Mgr. *Tomáš Zatloukal*, poslanec Evropského parlamentu, PaedDr. *Zdeněk Janalík*, senátor Senátu Parlamentu ČR, Mgr. *Tomáš Úlehla*, poslanec Poslanecké sněmovny Parlamentu ČR, *Libor Lukáš*, hejtman Zlínského kraje, prof. Ing. *Petr Sába*, CSc., rektor Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, Mgr. *Josef Slovák*, náměstek hejtmána Zlínského kraje pro oblast školství, mládeže a sportu, Mgr. *Hynek Steska*, náměstek primátorky statutárního města Zlína, člen Rady Zlínského kraje odpovědný za informatiku a prof. Ing. *Vladimír Vašek*, CSc., děkan Fakulty informatiky Univerzity Tomáše Bati.

Slavnostní zahájení soutěže v kategorii A se uskutečnilo v prostorách FAI UTB v neděli 18. 3. 2007 za přítomnosti zástupce MŠMT ČR Ing. *Jaroslava Froulíka*, vedoucího pobočky Matematického ústavu AV ČR v Brně doc. RNDr. *Jiřího Vanžury*, CSc., a dále všech výše uvedených garantů ústředního kola MO.

Přes nepřízeň počasí se organizátorům podařilo zajistit pro soutěžící i pro ÚK MO zajímavý doprovodný program. Pondělní odpoledne bylo zahájeno návštěvou Baťovy vily s přednáškou o historii Baťovy rodiny. Poté byli všichni účastníci soutěže přijati na Krajském úřadě ve Zlíně. Protože krajský úřad sídlí v původní administrativní budově Baťovy továrny, měli všichni možnost prohlédnout si tuto historickou budovu (tzv. mrakodrap) včetně vyhlídkové terasy a dobové pracovny Tomáše Bati v jednom z výtahů. Úterní odpoledne — po skončení soutěže — absolvovali soutěžící prohlídku kulturních a historických památek města Zlína spojenou s krátkou vycházkou do blízkého okolí.

Slavnostní vyhlášení výsledků v kategorii A a předání cen nejlepším soutěžícím se uskutečnilo ve středu 21. 3. 2007 v obřadní síni radnice města Zlín za přítomnosti představitelů města a dalších institucí. Europoslanec *Tomáš Zatloukal* na závěr odměnil tři nejlepší soutěžící týdnem zájezdem do země Beneluxu spojeným s návštěvou sídla Evropské unie v Bruselu.

Ústřední kolo kategorie P se konalo následně od 21. do 24. 3. 2007. Soutěžními dny byly čtvrtek 22. 3. a pátek 23. 3. 2007. Doprovodný program pro účastníky kategorie P byl připraven v podobném duchu jako pro účastníky kategorie A.

Závěrem této části zprávy vyslovujeme upřímné poděkování všem organizátorům III. kola 56. ročníku MO v kategoriích A i P, především pak řediteli Gymnázia Zlín-Lesní čtvrť RNDr. *Janu Chudárkovi* a jeho statutárnímu zástupci Mgr. *Pavlu Simkovičovi* — za pečlivě připravenou organizaci i zdárný průběh obou ústředních kol soutěže.

Ihned po ukončení ústředního kola MO v kategorii A byli všichni vítězové pozváni k výběrovému soustředění před 48. mezinárodní matematickou olympiádou, které se uskutečnilo 1.–5. dubna 2007 již tradičně v Kostelci nad Černými lesy. Podrobnou informaci o tomto soustředění najdete ve druhé části této publikace.

Ústřední komise MO se během tohoto soutěžního ročníku sešla dvakrát, a to v prosinci 2006 na Pedagogické fakultě UK v Praze a dále u příležitosti ústředního kola kategorie A (19. 3. 2007) ve Zlíně.

V závěru 56. ročníku MO a na počátku nového soutěžního ročníku se konala soustředění nejlepších řešitelů MO v jednotlivých věkových kategoriích (v Jevíčku pro nejlepší řešitele v kategoriích B a C v červnu 2007 a v Janských Lázních pro nejlepší řešitele kategorie A v září 2007). Dále proběhla již zaběhnutá příprava našeho reprezentačního družstva před nadcházející 48. MMO ve Vietnamu, a to na týdenním společném česko-slovenském setkání v Uherském Hradišti (17.–22. 6. 2007), kterou podobně jako v předchozím roce iniciovala brněnská Společnost Otakara Borůvky. Počátkem bezprostředně následujícího týdne (24.–27. 6. 2007) se české družstvo pro 48. MMO ještě zúčastnilo mezinárodního přípravného trojstřetnutí česko-polsko-slovenského, které se tentokrát konalo na Gymnáziu M. Kopernika v Bílovci.

V září 2007 se v Rakousku poprvé uskutečnila Středoevropská matematická olympiáda, již se zúčastnilo i šestičlenné družstvo českých olympijských nadějí.

Závěrem této stručné zprávy si Ústřední komise MO dovoluje poděkovat všem učitelům, odborným a vědeckým pracovníkům, kteří se podíleli na zdárném průběhu 56. ročníku MO. ÚK MO si přitom nesmírně váží práce všech pedagogických pracovníků, kteří se mnohokrát ve svém volném čase věnovali přípravě našich mladých matematických talentů na všech typech škol.

Projev předsedy Ústřední komise MO při slavnostním zahájení ústředního kola 56. ročníku MO ve Zlíně

Dámy a pánové, vážení hosté, milí soutěžící,

za necelý měsíc, přesněji 15. dubna, uplyne 300 let od narození švýcarského matematika, fyzika a astronoma *Leonharda Eulera*. Dovolte mi, abych ve svém vystoupení několika poznámkami vzpomenu tuto proslulou, dle mnohých největší postavu celé historie matematiky. Nebudu zde uvádět Eulerův životopis a ucelený přehled jeho díla, které najdete v mnoha encyklopediích. Místo toho uvedu jen pár zajímavostí, při kterých se doufám nebudete nudit. Snad se jejich podání v částečně odlehčené podobě bude hodit k našemu setkání více než akademicky suchý, fakty nabitý projev pronesený se zachmuřenou vážností. Myslím si, že to bude lépe odpovídat duchu Matematické olympiády, ušlechtilé zábavě pro mladé lidi, kteří se rozhodli ve sportovním duchu změřit sílu svých nápadů a myšlenek.

Čím všim se Leonhard Euler zabýval? I když se za chvíli omezím pouze na dvě malé ukázky z teorie čísel, nemohu pominout, že Eulerovo dílo mělo a má vliv na téměř vše, čím novověká matematika žila a žije. Uvedu jen pár srozumitelných příkladů.

Obrázky uzlů a jejich spojnic, které lze nakreslit jedním tahem, nazýváme eulerovskými grafy. Přirozené logaritmy mají za základ Eulerovo číslo. Komplexní jednotky nejvýhodněji zapisujeme v Eulerově tvaru. Počty stěn, hran a vrcholů každého konvexního mnohostěnu vyhovují Eulerově rovnosti. Libovolný trojúhelník má svou Eulerovu přímkou, na které leží průsečík výšek, střed kružnice opsané a těžiště trojúhelníku. Počet čísel, která jsou nesoudělná s daným číslem, vyjadřujeme Eulerovou funkcí. Eulerovo jméno nese i základní rovnice variačního počtu.

Za největší Eulerův úspěch však mnozí považují jeho objev jedné diferenciální rovnice pro matematickou fyziku, které říkáme Eulerova patrně jen proto, že má obsahově výstižný název vlnová rovnice. Euler se skutečně nezabýval pouze „čistou“ matematikou. Mnoho času věnoval výpočtům drah planet a pohybu Měsíce, balistice, kartografii a námořní navigaci, projevům magnetismu a otázkám konstrukce lodí. Tento výčet hesel k Eulerově dílu už jen doplním zmínkou o třech značkách, které Euler zavedl a které tak dobře ujal: protáhlé „S“ jako znak integrálu, řecké π pro Ludolfovo číslo a ležatá osmička označující nekonečno.

Někteří účastníci si možná zítra ráno postesknou, že při ústředním kole MO nebudou moci používat kalkulačky. Z Eulerova dětství se traduje, že v jedné bezesné noci vypočetl v hlavě první až šestou mocninu každého z první sta přirozených čísel a těchto 600 čísel natrvalo uložil do své paměti. V ní měl až do své smrti uloženu rovněž celou Homérovu Iliadu a z jejího vydání, které používal na gymnáziu, byl schopen uvést první a poslední verš každé jednotlivé stránky. Jednou také rozřešil při mezi dvěma studenty, jejichž výsledky náročných písemných výpočtů se lišily na padesátém desetinném místě; Euler rovnou příslušnou spornou číslici vypočetl jen tak v hlavě. Výjimečná paměť umožnila Eulerovi pokračovat v práci se stejnou intenzitou i v situaci, kdy 15 let před svou smrtí zcela oslepl. Prostým diktováním pak připravil do tisku 355 nových pojednání, které vycházely v prvním vydání ještě 50 let po jeho smrti.

Nyní už přejdu ke slíbené teorii čísel. Euler jako první dokázal takzvanou velkou Fermatovu větu pro exponent rovný číslu 3. Ukázal tedy, že neexistují přirozená čísla a , b , c , která by vyhovovala rovnici

$$a^3 + b^3 = c^3.$$

Důležitější než samotný výsledek byla metoda důkazu, kterou Euler novátorsky založil na výpočtech s tehdy neobvyklými čísly tvaru

$$a + b\sqrt{-3}.$$

Euler neřešil otázku, zda odmocniny ze záporných čísel mají nějaký praktický smysl. Podstatné pro něj bylo, že výpočty s takovými čísly se řídí stejnými zákony jako výpočty s čísly obvyklými, takže i jejich závěry by měly mít stejnou logickou průkaznost.

Obraťme však naši pozornost na čísla poněkud obvyklejší, kterým říkáme prvočísla. Euler ověřil, že k nim patří na svou dobu rekordně velké prvočíslo 2 147 483 647. Dostaneme ho, když do vzorce

$$M_p = 2^p - 1$$

dosadíme $p = 31$. Prvočísla tohoto tvaru nazýváme Mersennova na počest francouzského matematika a teologa *Marina Mersenna*, který zemřel 60 let před Eulerovým narozením. Přítomní soutěžící si jistě rychle uvědomí, že číslo M_p může být prvočíslo, jen když přirozené číslo p v exponentu je samo prvočíslo. Před Eulerem bylo známo, že M_p je prvočíslo pro všechna prvočísla p od $p = 2$ do $p = 19$ s výjimkou $p = 11$ a že ani

M_{23} není prvočíslo. Byl to právě Euler, který svými výpočty ověřil, že další kandidát, číslo M_{29} , je rovněž složené a že teprve M_{31} je po M_{19} opět prvočíslo.

Přesuňme se z 18. století do současnosti. Nejnovější „prvočíselnou“ událost jsme zaznamenali v den, kdy pro vás, milí soutěžící, začal tento školní rok. Ano, 4. září 2006 bylo ohlášeno nové největší známé prvočíslo. Je jím v pořadí 44. Mersennovo prvočíslo M_p s exponentem $p = 32\,582\,657$, jehož desítkový zápis vám ani nepřechtu, ani neukážu, protože má přibližně 9,8 miliónů číslic. Místo toho Vám však představím nesrovnatelně menší, avšak kuriózní prvočíslo, které má 16 číslic, konkrétně 8 devítek, 7 nul a 1 jedničku:

$$9\,999\,999\,900\,000\,001.$$

Podívejme se na obecnější číslo složené z n devítek, $n - 1$ nul a jedné jedničky:

$$\underbrace{99 \dots 9}_n \underbrace{00 \dots 0}_{n-1} 1.$$

O takovém čísle je známo, že je prvočíslo nejen pro $n = 8$, ale i pro $n = 2, 4, 6$. Pro $n = 1, 3, 5, 7, 9$ jde o číslo složené, bohužel je tomu tak i pro $n = 10$, takže pravidelné střídání složených čísel a prvočísel končí v první desítce hodnot n . Navíc žádné prvočíslo nenajdeme ani v druhé desítce těchto čísel. To zní trochu smutně, ale odpovídá to rozumnému očekávání odborníků, kteří něco o problémech prvočísel vědí.

Nebudte smutní, milí soutěžící, ani vy, když se vám zítra či pozítří nepodaří všechno spočítat. My, pracovníci Ústřední komise MO, také očekáváme, že ne všichni vyřešíte všechny úlohy. Do obou soutěžních dopolední vám všem však přejeme co nejvíce dobrých nápadů a štěstí.

Tabulka 1

Počty žáků středních škol soutěžících v I. kole 56. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	81	59	95	69	214	166	17	17	407	311
Středočeský	71	22	50	11	123	59	9	7	253	99
Jihočeský	46	27	37	22	78	66	4	4	165	119
Plzeňský	46	20	45	20	87	48	10	8	188	96
Karlovarský	18	12	18	8	23	20	0	0	59	40
Ústecký	26	18	45	16	56	41	0	0	127	75
Liberecký	44	13	38	11	52	32	13	13	147	69
Královéhradecký	29	21	40	14	69	31	5	5	143	71
Pardubický	32	24	15	9	40	32	3	3	90	68
Vysočina	58	42	48	21	63	39	15	7	184	109
Jihomoravský	129	73	98	43	184	114	8	8	419	238
Zlínský	96	33	88	10	82	57	4	4	270	104
Olomoucký	32	20	32	13	53	25	0	0	117	58
Moravskoslezský	48	35	79	28	138	87	25	22	290	172
ČR	756	419	728	295	1 262	817	113	98	2 859	1 629

Tabulka 2

Počty žáků středních škol soutěžících v II. kole 56. ročníku MO

Kraj	Kategorie								Celkem	
	A		B		C		P			
	S	U	S	U	S	U	S	U	S	U
Praha	53	9	33	20	90	24	17	6	193	59
Středočeský	22	1	11	7	49	8	7	1	89	17
Jihočeský	27	3	22	9	57	9	4	3	110	24
Plzeňský	20	2	17	8	47	11	7	2	91	23
Karlovarský	12	1	8	6	20	5	0	0	40	12
Ústecký	16	2	15	3	36	2	0	0	67	7
Liberecký	13	2	9	4	30	6	13	1	65	13
Královéhradecký	21	4	14	9	27	8	5	2	67	23
Pardubický	24	2	9	6	31	10	2	2	66	20
Vysočina	38	3	18	5	29	6	7	3	92	17
Jihomoravský	73	9	43	26	107	25	8	3	231	63
Zlínský	33	4	10	3	27	11	4	1	74	19
Olomoucký	20	2	13	4	24	7	0	0	57	13
Moravskoslezský	35	6	28	17	78	8	19	6	160	37
ČR	407	50	250	127	652	140	93	30	1 402	347

S ... počet všech soutěžících

U ... počet úspěšných řešitelů

Nejúspěšnější řešitelé II. kola MO
v kategoriích A, B, C a P

Z každého kraje a z každé kategorie jsou dle dostupných výsledků uvedeni všichni úspěšní řešitelé, kteří skončili do desátého místa. Označení G znamená gymnázium.

• • • • • Kraj Praha • • • • •

Kategorie A

1. *Michal Rolínek*, G J. Keplera, Praha 6
2. *Lukáš Malina*, G Ch. Dopplera, Praha 5
3. *Jindřich Helcl*, G Ch. Dopplera, Praha 5
4. *Matěj Peterka*, G Praha 6, Nad Alejí
- 5.–6. *Li Mang*, G Ch. Dopplera, Praha 5
Adam Ráž, G Praha 4, Budějovická
- 7.–8. *Šárka Gregorová*, G Praha 6, Nad Alejí
Dominik Mokriš, G J. Keplera, Praha 6
9. *Anna Lemberková*, G Praha 8, Ústavní

Kategorie B

1. *Li Mang*, G Ch. Dopplera, Praha 5
2. *Josef Tkadlec*, G J. Keplera, Praha 6
3. *Karel Pajskr*, G J. Keplera, Praha 6
4. *Matouš Kloda*, G J. Keplera, Praha 6
- 5.–6. *Vít Humpál*, G Ch. Dopplera, Praha 5
Karolína Rezková, G Praha 10, Voděradská
7. *Nguyen Van Nhan*, G Praha 6, Nad Alejí
8. *Petr Skála*, G Praha 9, Litoměřická
9. *Tomáš Kozák*, G Praha 5, Nad Kavalírkou
- 10.–12. *Michael Hakl*, G Ch. Dopplera, Praha 5

Vojtěch Kovařík, G J. Nerudy, Praha 1
Zuzana Tlapáková, G Praha 5, Nad Kavalírkou

Kategorie C

1. *Petr Ryšavý*, G J. Heyrovského, Praha 5
2. *Radek Marciňa*, G Ch. Dopplera, Praha 5
3. *Adam Domínek*, G J. Seiferta, Praha 9
4. *Miroslav Olšák*, G Budánka, Praha 5
5. *David Votava*, G Praha 9, Chodovická
6. *Petr Petras*, G Budánka, Praha 5
- 7.–9. *Jan Bilek*, G Praha 4, Na Vítězné pláni
Michal Soucha, G Praha 10, Voděradská
Ling Truong Nga, G Ch. Dopplera, Praha 5
- 10.–11. *Vlastimil Dort*, G Praha 9, Špitálská
Petr Sedláček, G Ch. Dopplera, Praha 5

Kategorie P

1. *Jakub Balhar*, G J. Nerudy, Praha 1
2. *Pavel John*, G Praha 6, Arabská
- 3.–4. *Martin Pokorný*, G Praha 6, Arabská
Roman Smrž, G E. Krásnohorské, Praha 4
5. *Matěj Korvas*, G J. Seiferta, Praha 9
6. *Tomáš Křen*, G Ch. Dopplera, Praha 5

• • • • • Středočeský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Lenka Slavíková*, G Mnichovo Hradiště

Kategorie B

- 1.–2. *Magdaléna Dudíková*, G Dobříš
Martin Jedlička, G Benešov
- 3.–4. *Jiří Brunner*, GJP Mladá Boleslav
Jan Sosnovec, G Mnichovo Hradiště

- 5.–7. *Ondřej Masopust*, G Slaný
Karel Mikeš, G Kolín
Karel Mudra, G Benešov

Kategorie C

1. *Petr Čermák*, G Kladno
2. *Kateřina Štěpánková*, G Kladno
3. *Kateřina Vetešníková*, GJP Mělník
4.–5. *Jana Břízová*, GJP Poděbrady
Tomáš Filípek, G Říčany
6.–8. *Jakub Meležínek*, GJP Poděbrady
Tomáš Plechatý, G VBT Slaný
Jitka Pohořelá, G pod Svatou Horou, Příbram

Kategorie P

1. *Tomáš Přasličák*, GOA Sedlčany

• • • • • Jihočeský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Radim Hošek*, G České Budějovice, Jírovcova
2. *Jan Matějka*, G České Budějovice, Jírovcova
3. *Libor Peltan*, G České Budějovice, Česká

Kategorie B

1. *Jan Matějka*, G České Budějovice, Jírovcova
2.–3. *Helena Pučelíková*, G Milevsko
Martina Vaváčková, G P.d.C. Tábor
4. *Ondřej Leder*, G České Budějovice, Česká
5.–6. *Tereza Nedvědová*, G České Budějovice, Jírovcova
Petr Urban, G, Jírovcova
7.–8. *Jan Čanda*, Biskupské G České Budějovice
Ladislava Frčková, G Strakonice
9. *Pavel Veselý*, G Strakonice

Kategorie C

1. *Adam Juraszek*, G České Budějovice, Jírovcova
2. *Jan Moravec*, G Český Krumlov
3. *František Steinhauser*, G Dačice
4. *Denisa Bernardová*, G České Budějovice, Jírovcova
- 5.–6. *Petr Doležal*, G České Budějovice, Jírovcova
Petr Procházka, G Písek
7. *Marek Sýkora*, G Prachatice
- 8.–9. *Tereza Hrubešová*, G Český Krumlov
Nikola Kozmová, G Strakonice

Kategorie P

1. *Josef Pihera*, G Strakonice
2. *Libor Peltan*, G České Budějovice, Česká
3. *Roman Říha*, G Prachatice

• • • • • Plzeňský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Tomáš Roskovec*, Masarykovo G Plzeň
2. *Vladislav Richter*, G Plzeň, Mikulášské nám.

Kategorie B

1. *Van Minh Nguyen*, G Tachov
- 2.–3. *David Čertík*, G Plzeň, Mikulášské nám.
Jakub Krauz, Masarykovo G Plzeň
4. *Radim Buřka*, G Plzeň, Mikulášské nám.
5. *Dana Křepinská*, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 6.–8. *Jiří Fcřšt*, Masarykovo G Plzeň
Jan Šourek, G L. Pika, Plzeň
Petr Šuma, G Plzeň, Mikulášské nám.

Kategorie C

1. *Jakub Klemsa*, G Klatovy
2. *Ha Duc Trung*, Masarykovo G Plzeň
3. *Karel Wagner*, G Plzeň, Mikulášské nám.
4. *Martin Skala*, G Plzeň, Mikulášské nám.
5. *Jakub Mandík*, G Klatovy
6. *Karel Kovářik*, G Klatovy
7. *Lukáš Chlad*, G Plzeň, Mikulášské nám.
8. *Martin Holeček*, G Plzeň, Mikulášské nám.
- 9.–11. *Jiří Keresteš*, SPŠE Plzeň
Petra Vahalová, Gymnázium Plasy
Vladimír Švígler, G Plzeň, Mikulášské nám.

Kategorie P

1. *Roman Diba*, VOŠ a SPŠE Plzeň
2. *Zuzana Burešová*, Masarykovo G, Plzeň

• • • • • **Karlovarský kraj** • • • • •

Kategorie A

1. *Štěpán Masák*, První české G Karlovy Vary

Kategorie B

1. *Viktor Löffelmann*, G Mariánské Lázně
2. *Martin Kvěš*, G Sokolov
- 3.–4. *Jan Chromý*, Svobodná chebská škola
Jakub Papež, Svobodná chebská škola
5. *Tomáš Nguyen*, Svobodná chebská škola
6. *Jan Kožák*, První české G Karlovy Vary

Kategorie C

- 1.–2. *Josef Hazi*, G Cheb
Lukáš Jarosil, G Sokolov

3. *Martin Mašek*, G Sokolov
- 4.–5. *Tomáš Hnídek*, G Sokolov
Tomáš Horák, Svobodná chebská škola

• • • • • Ústecký kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Jan Čapek*, G Duchcov, Masarykova
2. *Martin Obr*, Státní G Chomutov

Kategorie B

- 1.–2. *Le Sy Tuan*, SPŠ Teplice
Libor Vytlačil, G Roudnice nad Labem
3. *Václav Palík*, G Ústí nad Labem, Jateční
4. *Marcela Höferová*, G V. Hlavatého, Louny

Kategorie C

1. *Petr Linert*, G Most, Čs. armády
2. *Ondřej Fibigr*, G Lovosice

• • • • • Liberecký kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Hana Bendová*, G Česká Lípa
2. *Tomáš Kobrle*, G Jilemnice

Kategorie B

- 1.–2. *Vojtěch Duchoslav*, G Česká Lípa
Klára Holková, G F. X. Šaldy, Liberec
3. *Daniela Cvejnová*, G F. X. Šaldy, Liberec
4. *Jakub Štefela*, G F. X. Šaldy, Liberec

Kategorie C

1. *Matěj Ondrušek*, G Česká Lípa
2. *Jakub Vondra*, G Turnov
3. *Ondřej Kunc*, G Turnov
- 4.–6. *Kateřina Grygoryeva*, G Česká Lípa
Matouš Pilnáček, Podještědské G, Liberec
Magdaléna Radová, G Česká Lípa

Kategorie P

1. *Michal Minařík*, G F. X. Šaldy, Liberec

..... **Královéhradecký kraj**
.....

Kategorie A

1. *Pavel Kuchyňa*, G B. Němcové, Hradec Králové
- 2.–3. *Tomáš Feige*, G B. Němcové, Hradec Králové
Martin Michálek, G J. K. Tyla, Hradec Králové
4. *Alena Peterová*, G Dobruška

Kategorie B

1. *Miroslav Miletín*, G B. Němcové, Hradec Králové
2. *Martin Šubr*, G Nový Bydžov
3. *Vít Hanousek*, G Trutnov
4. *Jan Lochman*, G Nový Bydžov
5. *Vladimír Lambert*, JG Náchod
6. *Hana Šustková*, G Trutnov
- 7.–8. *Jan Dundálek*, JG Náchod
Tomáš Zelenka, G B. Němcové, Hradec Králové
9. *Ondřej Heneberk*, G B. Němcové, Hradec Králové

Kategorie C

- 1.–2. *Petr Pařízek*, G B. Němcové, Hradec Králové
Martin Vojtíšek, G B. Němcové, Hradec Králové

- 3.–4. *Veronika Milerská*, G B. Němcové, Hradec Králové
Tomáš Rubín, G B. Němcové, Hradec Králové
- 5.–7. *Tomáš Adámek*, G B. Němcové, Hradec Králové
Michal Bilanský, LG Jičín
Petr Kučera, G J. K. Tyla, Hradec Králové
8. *Jan Štika*, G a SDOŠ Úpice

Kategorie P

1. *Jakub Kaplan*, G J. K. Tyla, Hradec Králové
2. *Lukáš Lánský*, G J. K. Tyla, Hradec Králové

• • • • • Pardubický kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Marek Scholle*, G Pardubice, Dašická
2. *Pavel Klavík*, GJR Chrudim

Kategorie B

- 1.–2. *Adam Bartoš*, G Hlinsko
Filip Petrásek, G Polička
3. *Jan Resler*, G Lanškroun
4. *Matěj Hývl*, G Přelouč
- 5.–6. *Edita Dvořáková*, G Ústí nad Orlicí
Ondřej Klejch, G Litomyšl

Kategorie C

1. *Filip Thustoš*, G Pardubice, Dašická
2. *Jakub Stodola*, G Polička
- 3.–5. *Stanislav Jeřábek*, G Vysoké Mýto
Ludmila Johnová, G Ústí nad Orlicí
Tereza Moravcová, G Lanškroun
6. *Tomáš Kučera*, G Hlinsko
7. *Jan Krys*, G Chrudim
8. *Martin Porteš*, G Svitavy

- 9.–10. *Martina Stodolová*, G Svitavy
Jakub Vojtěch, G Holice

Kategorie P

1. *Pavel Klavík*, GJR Chrudim
2. *Marek Scholle*, G Pardubice, Dašická

• • • • • Kraj Vysočina • • • • •

Kategorie A

1. *Mirek Dočekal*, G Jihlava
2. *Jan Máca*, G Třebíč
3. *Michal Kozák*, G Jihlava

Kategorie B

1. *Michal Koutný*, G Třebíč
2. *Hana Wurzelová*, GVM, Nové Město na Moravě
3. *Jiří Šeba*, G Jihlava
4.–5. *Zuzka Hernová*, G Pelhřimov
Zuzana Vacková, G Jihlava

Kategorie C

1. *Jan Nevoral*, G Jihlava
2. *Ondřej Šalanda*, G Žďár nad Sázavou
3. *Jaromír Karmazín*, G Velké Meziříčí
4. *Jiří Hladík*, G Žďár nad Sázavou
5. *Kateřina Ježová*, G Žďár nad Sázavou
6. *Věra Mojžíšová*, G Humpolec

Kategorie P

1. *Petr Kratochvíl*, G Světlá nad Sázavou
2. *Ondřej Piálek*, G Třebíč
3. *Filip Děchtěrenko*, G Jihlava

Kategorie A

1. *Zbyněk Konečný*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Jana Medková*, G Brno, Křenová
- 3.–6. *Jan Komínek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Filip Rozbořil, G Boskovice
Samuel Říha, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Hana Šormová, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
7. *Jiří Řihák*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 8.–9. *Tomáš Jelínek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Lukáš Mařica, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie B

1. *Samuel Říha*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Jan Kvarda*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 3.–5. *Gabriel Harangi*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Dušan Jakub, G Brno, Barvičova
Helena Paschkeová, G Brno, T. Novákové
6. *Jiří Marek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 7.–11. *Pavel Čadek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Lenka Franců, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Zuzana Komárková, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Tomáš Petrák, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Alexander Slávik, G Brno, T. Novákové

Kategorie C

1. *David Klaška*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
- 2.–3. *Michal Horák*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Bohuslav Zmek, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
4. *Adam Zemek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
5. *Helena Valouchová*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
6. *Petr Neuwirth*, G Šlapanice
- 7.–11. *František Fiala*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Jaromír Kala, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Tomáš Lamser, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Marek Le Xuan, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
Roman Lelek, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

Kategorie P

1. *Ondřej Bouda*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše
2. *Martin Veškrna*, G Brno, Videňská
3. *Michal Novák*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše

• • • • • **Zlínský kraj** • • • • •

Kategorie A

- 1.–2. *Josef Ondřej*, G Rožnov pod Radhoštěm
Jan Vaňhara, G L. Jaroše, Holešov
- 3.–4. *Jan Doleček*, G Kroměříž
Petr Vévoda, G Jana Pivečky, Slavičín

Kategorie B

1. *Jan Vaňhara*, G L. Jaroše, Holešov
2. *Jan Vala*, G F. Palackého, Valašské Meziříčí
3. *Alžběta Pechová*, SPŠS Vsetín

Kategorie C

1. *Roman Štěpánek*, G J. A. Komenského Uherský Brod
- 2.–3. *Josef Ondřej*, G Rožnov pod Radhoštěm
Terezie Šišáková, G J. A. Komenského, Uherský Brod
4. *Štěpán Poláček*, G F. Palackého, Valašské Meziříčí
5. *Veronika Pišková*, G J. A. Komenského, Uherský Brod
6. *Jan Kotík*, G Zlín-Lesní čtvrť
- 7.–9. *Jana Fojtů*, G Valašské Klobouky
Kateřina Márová, G Zlín-Lesní čtvrť
Antonín Štěpán, G F. Palackého, Valašské Meziříčí
- 10.–11. *Radka Kadlčíková*, G J. A. Komenského, Uherský Brod
Marek Václavík, MG Vsetín

Kategorie P

1. *Michal Pavelčík*, G J. A. Komenského, Uherský Brod

• • • • • Olomoucký kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Anežka Faltýnková*, G J. Škody, Přerov
2. *Tomáš Javůrek*, G Jeseník

Kategorie B

1. *Jana Faltýnková*, G Prostějov, Komenského
2. *Michaela Adamusová*, G Šternberk
3. *Vít Musil*, G Šumperk
4. *Tomáš Matuška*, G Kojetín

Kategorie C

1. *Tran Thanh Tung*, G J. Škody, Přerov
2. *Martin Broušek*, G J. Škody, Přerov
3. *Petr Kučera*, G J. Wolkera, Prostějov
- 4.–5. *Jan Kubelka*, G Uničov
Lukáš Langer, G Hranice
- 6.–7. *Vojtěch Miloš*, G Hranice
Tamara Skokánková, G Olomouc-Hejčín

• • • • • Moravskoslezský kraj • • • • •

Kategorie A

1. *Pavel Motloch*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
2. *Miroslav Klímoš*, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Tomáš Jeziorský*, G M. Koperníka, Bílovec
4. *Tomáš Princ*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
- 5.–6. *Jan Karlický*, G Frýdlant nad Ostravicí
Tomáš Toufar, G M. Koperníka, Bílovec

Kategorie B

1. *Miroslav Klimoš*, G M. Koperníka, Bílovec
2. *Hana Bílková*, G Frenštát pod Radhoštěm
3. *Lucie Mohelníková*, G M. Koperníka, Bílovec
4. *Jan Kusý*, G M. Koperníka, Bílovec
5. *Petr Kaděra*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
- 6.–7. *Tomáš Horák*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
Eliška Nekvapilová, G M. Koperníka, Bílovec
- 8.–9. *Pavel Motloch*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
Žaneta Murasová, G Frenštát pod Radhoštěm
- 10.–13. *Jitka Novotná*, G M. Koperníka, Bílovec
Jiří Tuza, G M. Koperníka, Bílovec
Jolanta Wantula, G M. Koperníka, Bílovec
Vojtěch Zwardoň, G Karviná

Kategorie C

1. *Martin Mrovec*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
2. *Simona Domesová*, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Miroslav Raška*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
4. *Daniela Mořkovská*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
5. *Radka Luňáčková*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
6. *Lenka Šloufová*, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba
- 7.–8. *Jan Legerský*, G Hrabůvka
Michal Zátopek, G Hrabůvka

Kategorie P

1. *Pavel Motloch*, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
2. *Miroslav Klimoš*, G M. Koperníka, Bílovec
3. *Tomáš Toufar*, G M. Koperníka, Bílovec
- 4.–5. *Petr Dluhoš*, Mendelovo G, Opava
Libor Plucnar, G P. Bezruče, Frýdek-Místek
6. *Martin Milata*, G Ostrava-Slezská Ostrava

Výsledky ústředního kola 56. ročníku MO
kategorie A

Vítězové

1.	<i>Michal Rolínek</i> , 8/8, J. Keplera, Praha 6	34 b.
2.	<i>Miroslav Klimoš</i> , 2/4, G M. Koperníka, Bílovec	28 b.
3.	<i>Jiří Řihák</i> , 4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	27 b.
4.–5.	<i>Zbyněk Konečný</i> , 4/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	24 b.
	<i>Hana Šormová</i> , 2/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	24 b.
6.	<i>Samuel Říha</i> , 2/4, G Brno, tř. Kpt. Jaroše	22 b.
7.–8.	<i>Anežka Faltýnková</i> , 4/4, J. Škody, Přerov	21 b.
	<i>Lenka Slavíková</i> , 4/4, G Mnichov Hradiště	21 b.
9.	<i>Pavel Motloch</i> , 6/6, P. Bezruče, Frýdek-Místek	19 b.
10.	<i>Tomáš Javůrek</i> , 8/8, G Jeseník	18 b.

Další úspěšní řešitelé

11.–13.	<i>Hana Bendová</i> , 8/8, G Česká Lípa	16 b.
	<i>Tomáš Jeziorský</i> , 4/4, G M. Koperníka, Bílovec	16 b.
	<i>Jan Máca</i> , 7/8, G Třebíč	16 b.
14.	<i>Alena Peterová</i> , 7/8, G Dobruška	15 b.
15.	<i>Šárka Gregorová</i> , 8/8, G Praha 6, Nad Alejí	14 b.
16.–21.	<i>Radim Hošek</i> , 8/8, G České Budějovice, Jírovcova	13 b.
	<i>Tomáš Koblíček</i> , 4/4, G Jilemnice	13 b.
	<i>Lukáš Malina</i> , 4/4, G Ch. Dopplera, Praha 5	13 b.
	<i>Matěj Peterka</i> , 7/8, G Praha 6, Nad Alejí	13 b.
	<i>Tomáš Toufar</i> , 3/4, G M. Koperníka, Bílovec	13 b.
	<i>Jan Vaňhara</i> , 6/8, L. Jaroše, Holešov	13 b.
22.–23.	<i>Pavel Kuchyňa</i> , 6/6, G B. Němcové, Hradec Králové	11 b.
	<i>Marek Scholle</i> , 8/8, G Pardubice, Dašická	11 b.

Výsledky ústředního kola 56. ročníku MO
kategorie P

Vítězové

1. <i>Josef Pihera</i> , 8/8, G Strakonice	51 b.
2. <i>Pavel Klavík</i> , 8/8, G J. Ressler, Chrudim	41 b.
3. <i>Roman Smrž</i> , 7/8, G E. Krásnohorské, Praha	32 b.
4. <i>Miroslav Klimoš</i> , 2/4, G M. Koperníka, Bílovec	30 b.
5. <i>Lukáš Lánský</i> , 3/4, G J. K. Tyla, Hradec Králové	18 b.
6. <i>Pavel Motloch</i> , 6/6, G P. Bezruč, Frýdek-Místek	17 b.

Další úspěšní řešitelé

7. <i>Jakub Kaplan</i> , 3/4, G J. K. Tyla, Hradec Králové	16 b.
8. <i>Martin Pokorný</i> , 4/4, G Praha 6, Arabská	15 b.
9. <i>Martin Milata</i> , 8/8, G Ostrava, Hladnovská	14 b.
10. <i>Libor Peltan</i> , 7/8, G České Budějovice, Česká	13 b.
11. <i>Ondřej Piálek</i> , 4/4, G Třebíč	12 b.
12. <i>Petr Dluhoš</i> , 8/8, Mendelovo G Opava	11 b.
13. <i>Petr Kratochvíl</i> , 4/4, G Světlá nad Sázavou	9 b.
14. <i>Pavel John</i> , 4/4, G Praha 6, Arabská	8 b.
15. <i>Marek Scholle</i> , 8/8, G Pardubice, Dašická	7 b.

Kategorie C

Texty úloh

C – I – 1

Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž platí

$$a + 5\sqrt{b} = b + 5\sqrt{a}.$$

(Jaroslav Švrček)

C – I – 2

Najděte všechny trojúhelníky, které lze rozřezat na lichoběžníky se stranami délek 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm.

(Ján Mazák)

C – I – 3

Najděte všechna přirozená čísla, jejichž zápis neobsahuje nulu a má následující vlastnost: vynecháme-li v něm libovolnou číslici, dostaneme číslo, které je dělitelem původního čísla.

(Jaromír Šimša)

C – I – 4

Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD . Označme E střed strany AB , F střed úsečky DE a G průsečík úseček BD a CE . Vyjádřete obsah lichoběžníku $ABCD$ pomocí jeho výšky v a délky d úsečky FG za předpokladu, že body A , F , C leží v přímce.

(Ján Mazák)

C – I – 5

Zjistěte, pro které přirozené číslo n je podíl

$$\frac{33\,000}{(n-4)(n+1)}$$

a) co největší, b) co nejmenší přirozené číslo.

(Eva Řídká)

C – I – 6

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC , v němž D je pata výšky z vrcholu C a V průsečík výšek. Dokažte, že $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$, právě když $|CD| = |AB|$.
(Jaroslav Zhouf)

C – S – 1

Určete počet všech čtyřmístných přirozených čísel, která jsou dělitelná šesti a v jejichž zápisu se vyskytují právě dvě jedničky.
(Pavel Leischner)

C – S – 2

Je dána kružnice k se středem S , která je opsána pravidelnému šestiúhelníku $ABCDEF$. Tečna v bodě A ke kružnici k protne přímkou SB v bodě K a tečna v bodě B protne přímkou SC v bodě L . Dokažte, že čtyřúhelníku $KLCB$ lze opsat kružnici, která je shodná s kružnicí k .
(Jaroslav Zhouf)

C – S – 3

Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, jejichž rozdíl $a - b$ je pátou mocninou některého prvočísla a pro něž platí $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$.
(Jaroslav Švrček)

C – II – 1

V rovině jsou dány dva různé body L, M a kružnice k . Sestrojte trojúhelník ABC co největšího obsahu tak, aby jeho vrchol C ležel na kružnici k , bod L byl středem strany AC a bod M středem strany BC .
(Pavel Leischner)

C – II – 2

Nechť p, q, r jsou přirozená čísla, pro něž platí $p + r\sqrt{p+q} + q = 2007$.
a) Určete, jakých hodnot může nabývat součet $p + q + r$.
b) Určete počet všech trojic (p, q, r) přirozených čísel, které vyhovují dané rovnici.
(Jaroslav Švrček)

C – II – 3

Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB , CD lze vepsat kružnici se středem O . Určete obsah S lichoběžníku, jsou-li dány délky úseček OB a OC .
(Pavel Leischner)

C – II – 4

Určete největší dvojmístné číslo k s následující vlastností: existuje přirozené číslo N , z něhož po škrtnutí první číslice zleva dostaneme číslo k -krát menší. (Po vyškrtnutí číslice může zápis čísla začínat jednou či několika nulami.) K určenému číslu k pak najděte nejmenší vyhovující číslo N .
(Jaromír Šimša)

Řešení úloh

C – I – 1

Substitucí $m = \sqrt{a}$, $n = \sqrt{b}$ převedeme rovnici na tvar $m^2 - n^2 - 5(m - n) = 0$, odkud pomocí vzorce pro rozdíl čtverců dostaneme $(m - n)(m + n - 5) = 0$. Je tedy $m - n = 0$ nebo $m + n = 5$.

V prvním případě po zpětné substituci zjistíme, že úloze vyhovují všechny dvojice přirozených čísel a, b , pro něž platí $b = a$. Ve druhém dostáváme $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 5$. Je tedy $1 \leq \sqrt{a}, \sqrt{b} \leq 4$, proto stačí postupně dosazovat $a = 1, 2, \dots, 16$ do vztahu

$$b = (5 - \sqrt{a})^2 \quad (1)$$

a zjišťovat, zda je odpovídající číslo b přirozené.

Daná rovnice se nemění záměnou neznámých a, b . Můžeme tedy předpokládat $a \leq b$, což spolu s rovností $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 5$ znamená, že $\sqrt{a} \leq 2,5$. Odtud $a \leq 6,25$. Proto se stačí při dosazování omezit jen na hodnoty $a = 1, 2, \dots, 6$ a zbylá řešení určit záměnou čísel a, b v nalezených dvojicích.

Vtipnější postup spočívá v umocnění závorky na pravé straně vztahu (1) a následné úpravě na tvar

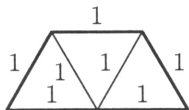
$$\frac{25 + a - b}{10} = \sqrt{a}, \quad (2)$$

z něhož je zřejmé, že číslo a (a vzhledem k symetrii dané rovnice i číslo b) je druhou mocninou přirozeného čísla. (V opačném případě by na levé straně rovnosti (2) bylo číslo racionální, kdežto na pravé číslo iracionální.) Pak je i levá strana vztahu (2) přirozené číslo menší než pět. Odtud plyne, že rozdíl $a - b$ je lichý násobek pěti. Za předpokladu $a < b$ je tedy buď $(a, b) = (4, 9)$, nebo $(a, b) = (1, 16)$. Další dvě řešení vzniknou záměnou čísel a, b .

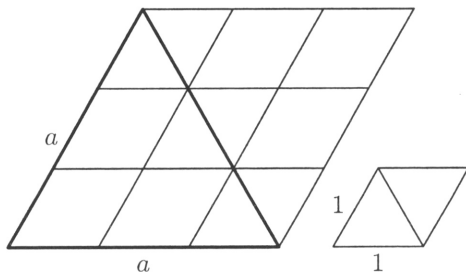
Závěr. Dané rovnici vyhovují jen dvojice $(a, b) = (1, 16), (4, 9), (9, 4), (16, 1)$ a všechny dvojice (a, a) , kde a je libovolné přirozené číslo.

C – I – 2

Lichoběžníky se stranami délek 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm jsou všechny navzájem shodné a skládají se ze tří rovnostranných trojúhelníků (obr. 1a). (Základny každého lichoběžníku mají dvě různé délky, v našem případě



Obr. 1a



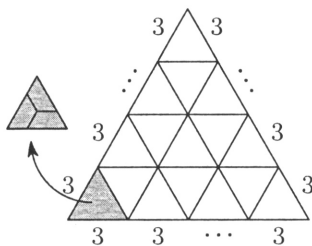
Obr. 1b

to musí být 2 cm a 1 cm.) Budeme je nazývat *základní lichoběžníky*. Rovnostranný trojúhelník s délkou strany 1 cm nazveme *základní trojúhelník*.

Vidíme, že každý z hledaných trojúhelníků lze rozřezat na konečný počet základních trojúhelníků. Proto jsou velikosti jeho vnitřních úhlů násobky šedesáti stupňů. Vnitřní úhly každého trojúhelníku jsou tři a součet jejich velikostí je 180° , má tedy smysl hledat jen trojúhelníky rovnostranné. Z podmínky rozřezání na konečný počet základních trojúhelníků dále plyne, že délka strany hledaného trojúhelníku vyjádřená v centimetrech je přirozené číslo. Označíme-li ji a , lze náš trojúhelník rozřezat právě na a^2 základních trojúhelníků. To lze odvodit například z podílu jeho obsahu $S_a = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ a obsahu $S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ základního trojúhelníku. Obecněji platí: dva trojúhelníky, které jsou podobné s koeficientem k , mají obsahy v poměru k^2 .

Jiné odvození počtu základních trojúhelníků v rovnostranném trojúhelníku se stranou a cm plyne z doplnění trojúhelníku na kosočtverec podle obr. 1b, kde bylo zvoleno $a = 3$. Kosočtverec je složen ze dvou rovnostranných trojúhelníků se stranou délky a cm. Lze jej tedy rozřezat na a^2 kosočtvců (jeden je zobrazen v pravé dolní části obrázku), z nichž každý je složen ze dvou základních trojúhelníků a kterým rovněž budeme říkat základní. Odtud plyne, že rovnostranný trojúhelník obsahuje stejný počet základních trojúhelníků, jako jemu příslušný kosočtverec obsahuje základních kosočtvců.

Zjistili jsme, že každý z hledaných trojúhelníků je rovnostranný se stranou délky a cm ($a \in \mathbb{N}$) a že je složen z a^2 základních trojúhelníků. Protože každý základní lichoběžník obsahuje právě tři základní trojúhelníky, musí být číslo a^2 , a tedy i číslo a dělitelné třemi. Z obr. 2 pak plyne, že každý rovnostranný trojúhelník se stranou délky $3n$ (cm), kde $n = 1, 2, \dots$, lze rozřezat na základní lichoběžníky.



Obr. 2

Závěr. Podmínkám úlohy vyhovují jen rovnostranné trojúhelníky s délkou strany $a = 3n$, kde n je přirozené číslo.

C – I – 3

Hledané číslo n obsahuje aspoň dvě číslice. Zapišme je ve tvaru $n = 10a + b$, kde a je číslo, jež vznikne škrtnutím poslední číslice b čísla n . Podle zadání platí $a \mid 10a + b$. Odtud $a \mid b$. Uvážíme-li navíc, že $b \neq 0$, musí být a jednomístné číslo, takže n je dvojčíslí s nenulovými číslicemi a, b , přičemž $b = ka$, $k \in \mathbb{N}$.

Škrtneme-li číslici a v čísle n , zůstane číslo b , které musí dělit původní číslo $n = 10a + b$, z čehož postupně dostáváme $b \mid 10a$, $ka \mid 10a$, $k \mid 10$ a odtud $k \in \{1, 2, 5\}$. Dosazením do $b = ka$ dostaneme tři možné případy $b = a$, $b = 2a$ a $b = 5a$ a v každém z nich snadno určíme vyhovující dvojice číslic a, b . Tak zjistíme, jak musejí hledaná čísla $n = 10a + b$ vypadat.

Závěr. Řešením úlohy jsou čísla: 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88 a 99: Zkouškou se přesvědčíme, že všechna vyhovují podmínkám úlohy.

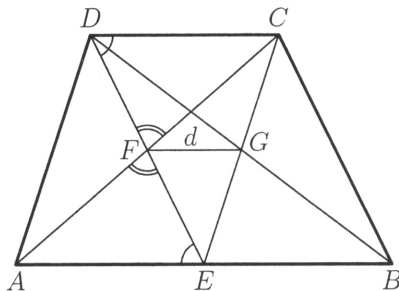
C – I – 4

Podle zadání jsou úhly EFD a AFC přímé, takže platí (obr. 3)

$$|\sphericalangle CDF| = |\sphericalangle AEF| \quad (\text{úhly střídavé}),$$

$$|\sphericalangle CFD| = |\sphericalangle AFE| \quad (\text{úhly vrcholové}).$$

Navíc bod F pólí úsečku DE , proto $|DF| = |EF|$ a trojúhelníky CDF a AEF jsou shodné podle věty *usu*. Odtud plyne $|CD| = |AE|$, což spolu s rovností $|AE| = |EB|$ vede k závěru, že EB a DC jsou dvě shodné a rovnoběžné úsečky. To znamená, že čtyřúhelník $EBCD$ je



Obr. 3

rovnoběžník. Průsečík G jeho úhlopříček proto půlí každou z nich. Body F a G jsou středy stran AC , EC trojúhelníku AEC , takže úsečka FG je jeho střední příčkou a $|AE| = 2|FG|$. Platí proto:

$$|AB| = 2|AE| = 4d \quad \text{a} \quad |CD| = |AE| = 2d.$$

Obsah lichoběžníku $ABCD$ je $S = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)v = 3dv$.

C – I – 5

Platí $33\,000 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$ a $(n+1) - (n-4) = 5$. Protože pro každé přirozené n je hodnota $n+1$ kladná, daný podíl je kladný, jen když je kladná i hodnota $n-4$, odtud $n \geq 5$.

a) Pro každé přirozené $n \geq 5$ platí $n-4 \geq 1$ a $n+1 \geq 6$, proto je největší hodnota daného podílu rovna $33\,000 : (1 \cdot 6) = 5\,500$ a dosáhneme ji pro $n = 5$.

b) Při hledání nejmenšího podílu označme jako a , b čísla $n+1$, $n-4$ v pořadí, které teprve upřesníme. Předpokládejme nejprve, že rozklad čísla ab na součin prvočinitelů obsahuje prvočísla 11 a 5. Pak jsou a , b po sobě jdoucí násobky pěti a právě jedno z nich, dejme tomu a , je násobkem čísla 55.

Uvažujme nejprve $a = 55$. Ze dvou možných hodnot $b = 50$ a $b = 60$ vybereme tu větší (abychom dostali menší hodnotu zkoumaného podílu). Hodnotě $b = 60$ z rovnosti $n+1 = 60$ (nebo rovnosti $n-4 = 55$) odpovídá $n = 59$ a zkoumaný podíl je pak roven číslu 10.

Pro $a = 110$ (resp. $a = 165$) není číslo 33 000 dělitelné žádným ze sousedních násobků pěti, tedy čísla 105 a 115 (resp. 160 a 170).

Pro další (větší) násobky a čísla 55 dostáváme $ab \geq 215 \cdot 220 > 33\,000$.

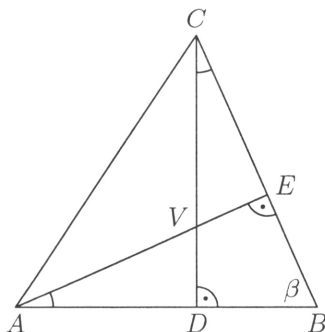
Neobsahuje-li rozklad čísla ab na součin prvočinitelů prvočíslo 11 nebo prvočíslo 5, je zkoumaný podíl (za předpokladu, že je celočíselný) dělitelný číslem 11 resp. číslem 125, takže je to číslo větší než hodnota 10, kterou jsme našli dříve.

Závěr. Největší hodnota daného podílu je 5 500 pro $n = 5$ a nejmenší je 10 pro $n = 59$.

C – I – 6

Při označení podle obr. 4 platí:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ADV| &= |\sphericalangle CDB| = 90^\circ, \\ |\sphericalangle VAD| &= |\sphericalangle BAE| = 90^\circ - \beta = |\sphericalangle BCD|. \end{aligned}$$



Obr. 4

Jsou tedy trojúhelníky ADV a CDB podobné podle věty *uu*. Z této podobnosti plyne

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|VD|}{|BD|}$$

a odtud $|AD| \cdot |BD| = |CD| \cdot |VD|$. Zdůrazněme, že tato rovnost platí pro každý ostroúhlý trojúhelník ABC . Vztah $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$ ze zadání úlohy tedy platí, právě když $|CD| = |AB|$.

C – S – 1

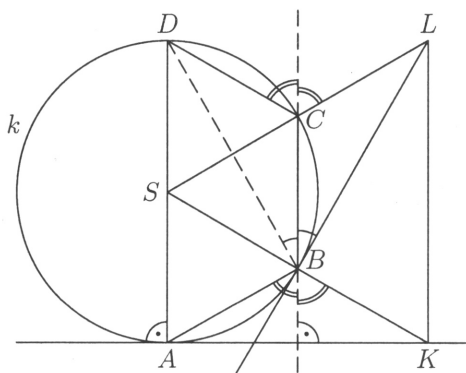
Aby číslo bylo dělitelné šesti, musí být sudé a mít ciferný součet dělitelný třemi. Označme tedy b číslici na místě jednotek (ta musí být sudá, $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$) a a tu číslici, která je spolu s číslicemi 1, 1 ($a \neq 1$) na prvních třech místech čtyřmístného čísla, jež splňuje požadavky úlohy.

Aby byl součet číslic $a + 1 + 1 + b$ takového čísla dělitelný třemi, musí číslo $a + b$ dávat při dělení třemi zbytek 1. Pro $b \in \{0, 6\}$ tak máme pro a možnosti $a \in \{4, 7\}$ ($a \neq 1$), pro $b \in \{2, 8\}$ je $a \in \{2, 5, 8\}$ a konečně pro $b = 4$ je $a \in \{0, 3, 6, 9\}$. Pro každé zvolené b a odpovídající $a \neq 0$ jsou zřejmě tři možnosti, jak číslice 1, 1 a a na prvních třech místech uspořádat, to je dohromady $(2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3) \cdot 3 = 39$ možností, pro $a = 0$ (když $b = 4$) pak jsou jen dvě možnosti (číslíce nula nemůže být první číslicí čtyřmístného čísla).

Celkem existuje 41 čtyřmístných přirozených čísel, jež splňují podmínky úlohy.

C – S – 2

Tečna ke kružnici k v bodě A je kolmá na průměr AD , a tedy i na stranu BC daného šestiúhelníku (obr. 5). Zároveň přímky SB a AB svírají s BC šedesátistupňový úhel, takže jsou souměrně sdružené podle osy BC . Bod K je tudíž souměrně sdružený s bodem A podle osy BC .



Obr. 5

Podobně tečna BL je kolmá na BS , takže svírá s přímkou BC úhel 30° stejně jako přímka BD . Přímka BL je tudíž souměrně sdružená s přímkou BD podle osy BC . Také přímky SC a CD jsou souměrně sdružené dle osy BC , takže bod L je podle téže osy souměrně sdružený s bodem D .

Dostali jsem tak, že čtyřúhelník $KLCB$ je souměrně sdružený s lichoběžníkem $ADCB$, kterému je opsána kružnice k . Vrcholy čtyřúhelníku $KLCB$ proto leží na kružnici souměrně sdružené s kružnicí k podle osy BC . Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

C – S – 3

Z rovnosti $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$ plyne rovnost $a - b = 4(\sqrt{a} + \sqrt{b})$. Protože $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, dostáváme po vydělení kladným číslem $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ rovnost

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 4, \quad (1)$$

neboli

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} + 4. \quad (2)$$

Jejím umocněním vyjde $a = b + 16 + 8\sqrt{b}$. Protože číslo $r = 8\sqrt{b}$ musí být celé, je $\sqrt{b}$ racionální odmocnina přirozeného čísla, takže $b = n^2$ pro vhodné přirozené číslo n . Z rovnosti (2) tak máme $a = (n + 4)^2$ a $a - b = (n + 4)^2 - n^2 = 2^3(n + 2)$. Číslo $a - b$ je tudíž pátou mocninou prvočísla, jen když $n + 2 = 2^2$ neboli $n = 2$.

Jedinou vyhovující dvojicí (a, b) je dvojice $(36, 4)$.

Poznámka. Když si po odvození vztahu (1) uvědomíme, že v závorce na pravé straně rovnosti $a - b = 4(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ je kladné racionální, a tedy přirozené číslo, vidíme, že musí platit $a - b = 2^5$. Pro odmocniny $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ tak dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} \sqrt{a} + \sqrt{b} &= 8, \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} &= 4, \end{aligned}$$

jejichž sečtením vyjde $\sqrt{a} = 6$ a odečtením $\sqrt{b} = 2$.

C – II – 1

Při *rozboru* uvažme libovolný trojúhelník ABC s vrcholem C na kružnici k , jehož strany AC , BC mají středy po řadě v bodech L , M (obr. 6). Protože LM je střední příčka takového trojúhelníku, je jeho obsah roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku LMC . Tento trojúhelník má pevnou stranu LM , takže jeho obsah je největší, právě když je největší jeho výška z vrcholu C , tedy vzdálenost d bodu C od přímky p určené body L , M .

takže číslo $\sqrt{p+q}$ je racionální, a tedy celé (odmocnina z přirozeného čísla je totiž buď číslo celé, nebo číslo iracionální). Proto z rovností

$$2007 = p + r\sqrt{p+q} + q = (p+q) + r\sqrt{p+q} = \sqrt{p+q}(\sqrt{p+q} + r)$$

dostáváme rozklad čísla 2007 na dva celočíselné činitele $\sqrt{p+q}$ a $\sqrt{p+q} + r$, pro které zřejmě platí

$$1 < \sqrt{p+q} < \sqrt{p+q} + r.$$

Z rozkladu na prvočinitele $2007 = 3^2 \cdot 223$ tudíž vidíme, že jsou možné pouze dva případy, které přehledně zapíšeme do tabulky:

$\sqrt{p+q}$	$\sqrt{p+q} + r$		$p+q$	r		$p+q+r$
3	669	$\iff$	9	666	$\implies$	675
9	223		81	214		295

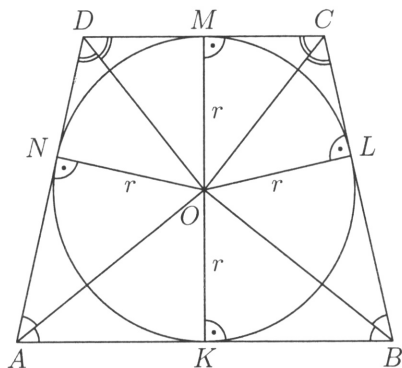
Možné hodnoty součtu $p+q+r$ tedy jsou pouze dvě čísla: 675 a 295. (Konkrétní trojice (p, q, r) , které to prokazují, nebudeme uvádět, protože rovnou určíme v části b) jejich počet.)

b) Rovnost $p+q+r = 675$ nastane, právě když bude trojice (p, q, r) splňovat podmínky $p+q = 9$ a $r = 666$; takových trojic je právě tolik co dvojic (p, q) , pro něž $p+q = 9$, tedy 8.

Rovnost $p+q+r = 295$ nastane, právě když bude trojice (p, q, r) splňovat podmínky $p+q = 81$ a $r = 214$; takových trojic je právě tolik co dvojic (p, q) , pro něž $p+q = 81$, tedy 80.

C – II – 3

Označme postupně K, L, M, N body dotyku vepsané kružnice po řadě se stranami AB, BC, CD, DA (obr. 7). Protože $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník, jeho vnitřní úhly u vrcholů A, B, C, D mají po řadě velikosti $\alpha, \alpha, 180^\circ - \alpha$ a $180^\circ - \alpha$. Úsečky OA, OB, OC, OD ležící na osách těchto



Obr. 7

úhlů proto spolu se čtyřmi navzájem shodnými úsečkami OK , OL , OM , ON rozdělují celý lichoběžník na osm pravoúhlých trojúhelníků, které se shodují v jedné odvěsně a mají ostré vnitřní úhly $\frac{1}{2}\alpha$ a $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Těchto osm trojúhelníků lze tudíž rozdělit do dvou čtveřic shodných trojúhelníků: jednu z nich tvoří trojúhelníky OAK , ON , OBK , OBL a druhou trojúhelníky OCL , OCM , ODM a ODN . Odtud plyne, že obsah S lichoběžníku $ABCD$ je roven čtyřnásobku součtu obsahů trojúhelníků OBL a OCL , tedy čtyřnásobku obsahu trojúhelníku OBC . Podle vnitřních úhlů u vrcholů B a C vidíme, že trojúhelník OBC je pravoúhlý s odvěsnami OB a OC , takže má obsah $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$ a hledaný celkový obsah S je tudíž $S = 2|OB| \cdot |OC|$.

Poznámka. Je-li O střed kružnice vepsané tečnovému čtyřúhelníku $ABCD$, je snadné ukázat, že jeho obsah je roven dvojnásobku součtu obsahů trojúhelníků OAB a OCD stejně jako trojúhelníků OBC a ODA . Poslední dva trojúhelníky jsou u našeho rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ shodné.

Jiné řešení. Pro výšku v a strany a , b , c , d lichoběžníku $ABCD$ s vepsanou kružnicí $k(O, r)$ platí rovnosti $v = 2r$ a $a + c = b + d$. Z první z nich plyne, že střed O leží na střední příčce lichoběžníku, jejíž délka $\frac{1}{2}(a + c)$ je podle druhé rovnosti rovna $\frac{1}{2}(b + d)$. V našem případě ovšem platí $b = d$, takže střední příčka je shodná s oběma rameny a bod O je jejím středem, neboť rovnoramenný lichoběžník je osově souměrný. Dohromady dostáváme, že bod O leží na kružnici sestrojené nad průměrem BC , a proto je OBC pravoúhlý trojúhelník o obsahu $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$. Jeho výška na přeponu BC je však poloměrem r vepsané kružnice k ,

tudíž obsah trojúhelníku OBC je rovněž roven $\frac{1}{2}b \cdot r$. Porovnáním obou vyjádření dostaneme rovnost $|OB| \cdot |OC| = b \cdot r$. Pro hledaný obsah S našeho lichoběžníku proto platí

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v = b \cdot 2r = 2 \cdot |OB| \cdot |OC|.$$

C – II – 4

Libovolné $(m+1)$ -místné přirozené číslo N s první číslicí c má vyjádření $N = c \cdot 10^m + x$, kde x je právě to číslo, které dostaneme z čísla N po škrtnutí první číslice c . Podle zadání má platit $N = c \cdot 10^m + x = kx$ neboli $c \cdot 10^m = (k-1)x$. Číslo $k-1$ tedy musí být dělitelem čísla $c \cdot 10^m$, které má ovšem pouze jednomístné prvočinitele: prvočísla 2, 5 a prvočinitele z rozkladu číslice c . Budeme proto postupně testovat na prvočinitele čísla $k-1$ pro největší dvojmístná k :

- ▷ $k = 99$: $k-1 = 98 = 2 \cdot 7^2$ nevyhovuje, neboť $7^2 \nmid c \cdot 10^m$.
- ▷ $k = 98$: $k-1 = 97$ nevyhovuje, neboť 97 je dvojmístné prvočíslo.
- ▷ $k = 97$: $k-1 = 96 = 2^5 \cdot 3$ vyhovuje, neboť například $2^5 \cdot 3 \mid c \cdot 10^m$ pro $c = 3$ a $m = 5$; abychom dostali menší N , můžeme ovšem zvolit menší $m = 4$ a $c = 3 \cdot 2 = 6$ (jiné c pro $m = 4$ nevyhovuje). Pro $m \leq 3$ už vztah $2^5 \cdot 3 \mid c \cdot 10^m$ neplatí pro žádnou nenulovou číslici c .

Hledané největší dvojmístné k je tedy 97. Podle předchozí diskuse určíme nejmenší vyhovující N , kterému odpovídá $m = 4$, $c = 6$ a $x = 6 \cdot 10^4 : 96 = 625$, takže $N = 6 \cdot 10^4 + 625 = 60\,625$.

Odpověď: Hledané k je rovno 97 a nejmenší vyhovující N je 60 625.

Kategorie B

Texty úloh

B – I – 1

Najděte všechny dvojice (a, b) celých čísel, jež vyhovují rovnici

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

(Pavel Novotný)

B – I – 2

Je dána kružnice k s průměrem AB . K libovolnému bodu Y kružnice k , $Y \neq A$, sestrojíme na polopřímce AY bod X , pro který platí $|AX| = |YB|$. Určete množinu všech takových bodů X .

(Pavel Leischner)

B – I – 3

Najděte nejmenší přirozené číslo k takové, že každá k -prvková množina trojmístných po dvou nesoudělných čísel obsahuje aspoň jedno prvočíslo.

(Pavel Novotný)

B – I – 4

V libovolném trojúhelníku ABC označme T těžiště, D střed strany AC a E střed strany BC . Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s přeponou AB , pro něž je čtyřúhelník $CDTE$ tečnový.

(Ján Mazák)

B – I – 5

Najděte všechny dvojice (p, q) reálných čísel takové, že mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$.

(Jozef Moravčík)

B – I – 6

Je dána úsečka AA_0 a přímka p . Sestrojte trojúhelník s vrcholem A a výškou AA_0 , jehož těžiště a střed kružnice opsané leží na přímce p .

(Eva Řídká)

B – S – 1

Určete všechny dvojice reálných čísel a a b , pro něž je mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ dělitelný mnohočlenem $x^2 + bx + a$.

(Jaromír Šimša)

B – S – 2

V trojúhelníku ABC označme D střed strany BC , E střed strany AC a T těžiště. Je-li strana BC delší než strana AC , má kružnice vepsaná trojúhelníku BDT menší poloměr než kružnice vepsaná trojúhelníku ATE . Dokažte.

(Pavel Novotný)

B – S – 3

Najděte nejmenší přirozené číslo n , pro které je podíl

$$\frac{n^2 + 15n}{33\,000}$$

přirozené číslo.

(Jaromír Šimša)

B – II – 1

Určete reálná čísla a, b, c tak, aby mnohočlen $x^4 + ax^2 + bx + c$ byl dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$ a přitom součet $a^2 + b^2 + c^2$ byl co nejmenší.

(Jaromír Šimša)

B – II – 2

Je dán trojúhelník ABC se stranou BC délky 22 cm a stranou AC délky 19 cm, jehož těžnice t_a, t_b jsou navzájem kolmé. Vypočítejte délku strany AB .

(Pavel Novotný)

B – II – 3

Přirozené číslo nazveme *vlnitým*, pokud pro každé tři po sobě jdoucí číslice a, b, c jeho desítkového zápisu platí $(a - b)(b - c) < 0$. Dokažte,

že z číslic $0, 1, \dots, 9$ je možno sestavit více než 25 000 desetimístných vlnitých čísel, která obsahují všechny číslice od nuly do devítky (číslice 0 nemůže být na prvním místě). (Jaromír Šimša)

B – II – 4

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Pro libovolný bod L jeho strany AB označme K , M paty kolmic z bodu L na strany AC , BC . Zjistěte, pro kterou polohu bodu L je úsečka KM nejkratší. (Jaroslav Švrček)

Řešení úloh

B – I – 1

Rovnici řešíme jako kvadratickou s neznámou a a parametrem b . Její diskriminant je

$$D = (7b + 5)^2 - 4(6b^2 + 4b + 3) = 25b^2 + 54b + 13$$

a kořeny

$$a_{1,2} = \frac{-7b - 5 \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Jsou-li a i b celá čísla, musí být i $\sqrt{D} = \pm(2a + 7b + 5)$ celé číslo. Můžeme tedy psát

$$D = 25b^2 + 54b + 13 = c^2,$$

kde c je celé nezáporné. Rovnici

$$25b^2 + 54b + 13 - c^2 = 0$$

opět řešíme jako kvadratickou. Její kořeny jsou

$$b_{1,2} = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 25 \cdot 13 + 25c^2}}{25}.$$

Jsou-li b a c celá čísla, musí být $\sqrt{404 + 25c^2}$ druhou mocninou nějakého celého nezáporného čísla d . Pro celá nezáporná čísla c, d tedy platí $d^2 - 25c^2 = 404$ čili

$$(d + 5c)(d - 5c) = 404.$$

Rozdíl $(d + 5c) - (d - 5c) = 10c$ je sudý, takže čísla $d + 5c$ a $d - 5c$ mají stejnou paritu. Navíc pro nezáporné c je $d + 5c \geq d - 5c$ a $d + 5c \geq 0$, takže z rozkladů čísla 404 na součin dvou celých čísel vyhovuje jediný, a to

$$d + 5c = 202, \quad d - 5c = 2.$$

Odtud $d = 102$, $c = 20$. Z kořenů

$$b_{1,2} = \frac{-27 \pm d}{25}$$

je celým číslem jenom $b = 3$. Potom

$$a_{1,2} = \frac{-7b - 5 \pm c}{2},$$

tedy $a_1 = -3$ a $a_2 = -23$.

Dané rovnici vyhovují dvě dvojice čísel (a, b) , a to $(-3, 3)$ a $(-23, 3)$.

Jiné řešení. Trojčlen $a^2 + 7ab + 6b^2 = (a + b)(a + 6b)$ se dá rozložit na součin. Pokusme se na součin rozložit i výraz $a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + c$, kde c je vhodná konstanta. Rozklad bude mít tvar

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + c = (a + b + x)(a + 6b + y).$$

Po roznásobení pravé strany a porovnání koeficientů u a a b dostaneme

$$x + y = 5, \quad 6x + y = 4,$$

neboli

$$x = -\frac{1}{5}, \quad y = \frac{26}{5},$$

takže vyjde

$$c = xy = -\frac{26}{25}.$$

Danou rovnici tak můžeme postupně upravit na tvar

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b - \frac{26}{25} = -3 - \frac{26}{25},$$

$$\left(a + b - \frac{1}{5}\right)\left(a + 6b + \frac{26}{5}\right) = -\frac{101}{25},$$

$$(5a + 5b - 1)(5a + 30b + 26) = -101.$$

Protože $5a + 5b - 1 \equiv -1 \pmod{5}$ a $5a + 30b + 26 \equiv 1 \pmod{5}$, vyhovují ze čtyř vyjádření čísla -101 ve tvaru součinu dvou celých čísel jen následující dvě:

$$5a + 5b - 1 = -1, \quad 5a + 30b + 26 = 101, \quad \text{a tedy } a = -3, \quad b = 3;$$

$$5a + 5b - 1 = -101, \quad 5a + 30b + 26 = 1, \quad \text{a tedy } a = -23, \quad b = 3.$$

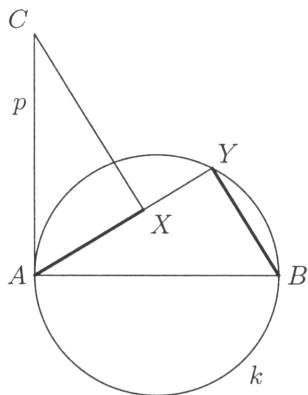
B - I - 2

Jestliže $Y = B$, potom $X = A$. Nechť $Y \neq B$. Označme p přímkou procházející bodem A a kolmou na AB a C ten bod přímky p ležící v polorovině ABY , pro nějž platí $|AC| = |AB|$ (obr. 8). Podle zadání platí $|AX| = |BY|$. Úhel AYB je podle Thaletovy věty

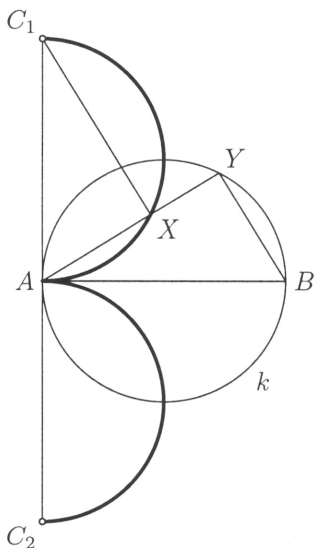
pravý, proto $|\sphericalangle ABY| = 90^\circ - |\sphericalangle YAB| = |\sphericalangle CAX|$. Trojúhelníky ABY a CAX jsou tedy shodné podle věty *sus*. Odtud vyplývá, že $|\sphericalangle CXA| = |\sphericalangle AYB| = 90^\circ$. Bod X proto leží na Thaletově půlkružnici nad průměrem AC .

Nechť naopak X je libovolný vnitřní bod této půlkružnice a Y průsečík přímky AX s kružnicí k ($Y \neq A$). Trojúhelníky CAX a ABY jsou shodné podle věty *usu*, a proto $|AX| = |BY|$. Bod X tedy patří do hledané množiny.

Hledanou množinou všech bodů X je sjednocení dvou půlkružnic nad průměry AC_1 a AC_2 ležících v téže polorovině jako bod B ; C_1 a C_2 jsou body ležící na kolmici vedené bodem A k přímce AB , přičemž $|AC_1| = |AC_2| = |AB|$ (obr. 9). Bod A do hledané množiny patří, body C_1 a C_2 nikoliv.



Obr. 8



Obr. 9

B – I – 3

Ke konstrukci množiny po dvou nesoudělných trojmístných složených čísel s velkým počtem prvků můžeme využít toho, že mocniny dvou různých prvočísel jsou nesoudělné. Množina

$$\{2^7, 3^5, 5^3, 7^3, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2\}$$

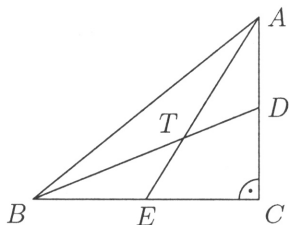
obsahuje 11 po dvou nesoudělných trojmístných čísel a není v ní žádné prvočíslo. Pro další prvočíslo 37 už platí $37^2 > 1\,000$, takže každé složené trojmístné číslo je dělitelné aspoň jedním prvočíslem menším než 37.

Dokážeme, že každá aspoň dvanáctiprvková množina po dvou nesoudělných trojmístných čísel už obsahuje prvočíslo. Množinu všech složených trojmístných čísel lze rozdělit na 11 podmnožin $A_2, A_3, A_5, A_7, A_{11}, A_{13}, A_{17}, A_{19}, A_{23}, A_{29}, A_{31}$, kde A_i obsahuje ta čísla, jejichž nejmenším prvočinitelem je číslo i . Každá dvě různá čísla z téže množiny A_i jsou soudělná. Nechť množina B trojmístných po dvou nesoudělných čísel má aspoň 12 prvků. Kdyby v B byla pouze složená čísla, podle Dirichletova principu by B obsahovala dvě čísla z téže množiny A_i ; tato čísla by ale byla soudělná. Proto množina B musí obsahovat aspoň jedno prvočíslo.

Hledané nejmenší číslo k je tedy 12.

B – I – 4

Konvexní čtyřúhelník je tečnový, právě když součty délek jeho protilehlých stran jsou stejné.



Obr. 10

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme $a = |BC|$, $b = |AC|$ (obr. 10). Podle Pythagorovy věty platí

$$|BD| = \sqrt{|BC|^2 + |CD|^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}, \quad |AE| = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Protože těžiště trojúhelníku dělí těžnici v poměru 1 : 2, je

$$|TD| = \frac{1}{3}|BD| = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}, \quad |TE| = \frac{1}{3}|AE| = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Čtyřúhelník $CDTE$ je tečnový, právě když $|CD| + |TE| = |EC| + |TD|$, tedy právě když

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Je-li $a = b$, rovnost zřejmě platí.

Je-li $a > b$, je $a^2 + \frac{1}{4}b^2 > b^2 + \frac{1}{4}a^2$, takže

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} < \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Podobně je-li $a < b$, je

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} > \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Čtyřúhelník $CDTE$ je tedy tečnový, právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný.

Jiné řešení. Označíme-li běžným způsobem a, b, c strany daného trojúhelníku a t_a, t_b, t_c délky jeho těžnic, bude čtyřúhelník $CDTE$ tečnový, právě když

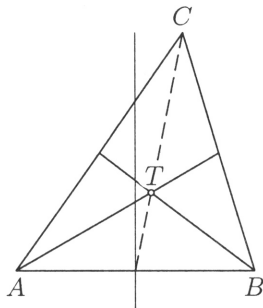
$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}t_b = \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}t_a \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{3}(t_a - t_b). \quad (1)$$

Ukážeme, že uvedená rovnost platí, právě když $a = b$.

V libovolném trojúhelníku ABC totiž platí

$$a < b, \quad \text{právě když} \quad t_a > t_b. \quad (2)$$

To je zřejmé z toho, že těžiště T uvažovaného trojúhelníku leží ve stejné polorovině určené osou AB jako vrchol C (obr. 11), přičemž $|TA| = \frac{2}{3}t_a, |TB| = \frac{2}{3}t_b$.



Obr. 11

Je-li $a = b$, rovnost (1) platí. Naopak je-li např. $a < b$, je podle (1) a (2)

$$0 > \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{3}(t_a - t_b) > 0,$$

což nelze. Proto $a = b$.

Čtýřúhelník $CDTE$ je tečnový, právě když je (pravoúhlý) trojúhelník ABC rovnoramenný.

B – I – 5

Dělením mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$ mnohočlenem $x^2 + px + q$ zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + q &= (x^2 + px + q)(x^2 - px + p^2 + p - q) + \\ &+ (2pq - p^3 - p^2)x + q - p^2q - pq + q^2. \end{aligned}$$

Mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$, právě když je zbytek $(2pq - p^3 - p^2)x + q - p^2q - pq + q^2$ nulový mnohočlen, tedy právě když platí současně

$$2pq - p^3 - p^2 = p(2q - p^2 - p) = 0$$

a

$$q - p^2q - pq + q^2 = q(1 - p^2 - p + q) = 0.$$

Je-li $p = 0$, potom $q = 0$ nebo $q = -1$.

Je-li $q = 0$, potom $p = 0$ nebo $p = -1$.

Je-li $p \neq 0$ i $q \neq 0$, potom musí platit $2q - p^2 - p = 0$ a $1 - p^2 - p + q = 0$. Z druhé rovnice vyjádříme $q = p^2 + p - 1$. Po dosazení do první rovnice máme $2p^2 + 2p - 2 - p^2 - p = p^2 + p - 2 = (p + 2)(p - 1) = 0$ a odtud $p = 1$, $q = 1$ nebo $p = -2$, $q = 1$.

Vyhovuje tedy pět dvojic (p, q) , a to $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 1)$.

Jiné řešení. Mnohočlen $x^2 + px + q$ je dělitelem mnohočlenu $x^4 + px^2 + q$, právě když existují taková reálná čísla a a b , že

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + q &= (x^2 + px + q)(x^2 + ax + b) = \\ &= x^4 + (a + p)x^3 + (b + ap + q)x^2 + (bp + aq)x + bq. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme podmínky

$$a + p = 0, \quad (1)$$

$$b + ap + q = p, \quad (2)$$

$$bp + aq = 0, \quad (3)$$

$$bq = q. \quad (4)$$

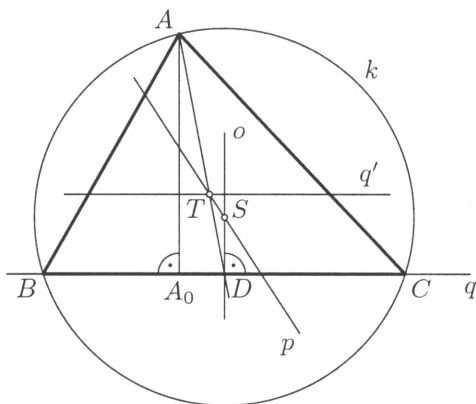
Jestliže $q = 0$, potom podle (3) $p = 0$ nebo $b = 0$. Dosazením $b = 0$ do (2) s využitím (1) dostaneme $-p^2 = p$, takže kromě $p = 0$ vyhovuje i $p = -1$.

Jestliže $q \neq 0$, vyplývá ze (4) $b = 1$. Vztahy (3) a (1) potom dávají $p - pq = 0$, tedy $p = 0$ nebo $q = 1$. V prvním případě musí být podle (2) $q = -1$, ve druhém $1 - p^2 + 1 = p$ a odtud $p = 1$ nebo $p = -2$.

Vyhovuje tedy pět dvojic (p, q) , a to $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 1)$.

B – I – 6

Předpokládejme, že ABC je hledaným trojúhelníkem. Jeho strana BC leží na přímce q , která prochází bodem A_0 a je kolmá na úsečku AA_0 . Na této přímce leží i střed D strany BC . Těžiště T je obrazem bodu D ve stejnoolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{2}{3}$, leží proto na přímce q' , která je obrazem přímky q ve zmíněné stejnoolehlosti. Střed S opsané kružnice leží na ose o strany BC čili na přímce, která prochází bodem D a je rovnoběžná s úsečkou AA_0 (obr. 12).



Obr. 12

Konstrukce: Bodem A_0 vedeme přímkou q kolmou na úsečku AA_0 . Sestrojíme obraz q' přímky q ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{2}{3}$. Označíme T průsečík přímky q' s přímkou p a D průsečík přímky AT s přímkou q . Bodem D vedeme rovnoběžku o s AA_0 a její průsečík s přímkou p označíme S . Průsečíky kružnice k se středem S a poloměrem $|SA|$ s přímkou q jsou vrcholy B a C hledaného trojúhelníku.

Důkaz: Úsečka AA_0 je kolmá na stranu BC , je to tedy výška trojúhelníku ABC . Bod S ležící na přímce p je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC . Ze shodnosti trojúhelníků BDS a CDS (Ssu) vyplývá, že D je střed strany BC . Proto je AD těžnice a T těžiště trojúhelníku ABC (platí totiž $|AT| = \frac{2}{3}|AD|$).

Diskuse: Není-li přímka p rovnoběžná s úsečkou AA_0 ani na ni kolmá, jsou body T a S jednoznačně určeny. V tom případě má úloha právě jedno řešení (až na označení bodů B a C), pokud kružnice k protíná přímku q ve dvou různých bodech; neprotíná-li k přímku p ve dvou různých bodech, nemá úloha řešení.

Je-li úsečka AA_0 částí přímky p , není bod S jednoznačně určen; vyhovují všechny rovnoramenné trojúhelníky se základnou BC , která má střed v bodě A_0 . Je-li úsečka AA_0 rovnoběžná s přímkou p , ale neleží na ní, nemá úloha řešení.

Je-li přímka p kolmá na úsečku AA_0 , má úloha řešení pouze tehdy, jsou-li přímky q' a p totožné. To nastane, jestliže přímka p protíná úsečku AA_0 v bodě V , pro nějž platí $|AV| = 2|A_0V|$. V takovém případě můžeme bod T zvolit na p kdekoliv a úloha má nekonečně mnoho řešení.

B – S – 1

Vydělením mnohočlenu $x^4 + ax^2 + b$ mnohočlenem $x^2 + bx + a$ zjistíme, že

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + bx + a)(x^2 - bx + b^2) + (ab - b^3)x + (b - ab^2).$$

Mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + bx + a$, právě když je zbytek $(ab - b^3)x + (b - ab^2)$ nulový mnohočlen, tedy $ab - b^3 = b(a - b^2) = 0$ a současně $b - ab^2 = b(1 - ab) = 0$. Je-li $b = 0$, jsou obě podmínky splněny. Pro $b \neq 0$ musí platit $a - b^2 = 0$ a $1 - ab = 0$. Odtud $a = b^2$, $1 - b^3 = 0$, a tedy $a = b = 1$.

Závěr: Mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + bx + a$ právě tehdy, je-li $b = 0$ (a a libovolné) nebo $a = b = 1$.

Jiné řešení. Mnohočlen $x^4 + ax^2 + b$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + bx + a$, právě když existují taková reálná čísla p, q , že $x^4 + ax^2 + b = (x^2 + bx + a)(x^2 + px + q)$. Roznásobením a porovnáním koeficientů dostaneme soustavu rovnic

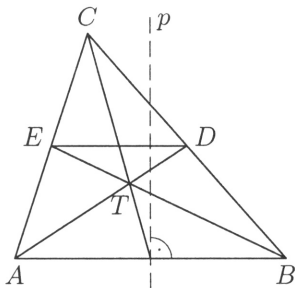
$$p + b = 0, \quad q + bp + a = a, \quad ap + bq = 0, \quad aq = b.$$

Z první rovnice vyjádříme $p = -b$ a z druhé $q = -bp = b^2$, dosazením do třetí a čtvrté máme $-ab + b^3 = 0$, $ab^2 = b$. Řešení dokončíme stejně jako v předchozím případě.

B – S – 2

Poloměr kružnice vepsané trojúhelníku je podílem jeho obsahu a polovičního obvodu.

Trojúhelníky ADE a BDE mají zřejmě stejný obsah, protože mají společnou stranu DE a shodnou výšku na ni (AB je rovnoběžná s DE). Stejný obsah tedy mají i trojúhelníky ATE a BDT , protože obsahy obou trojúhelníků se od obsahu zmíněných trojúhelníků liší právě o obsah „společného“ trojúhelníku DET (obr. 13).



Obr. 13

Označme p osu úsečky AB . Je-li strana BC delší než strana AC , leží bod C v téže polorovině s hraniční přímkou p jako bod A . Proto v této polorovině leží i těžiště T . Jeho vzdálenost od bodu A rovná $\frac{2}{3}t_a$ je tedy menší než jeho vzdálenost od bodu B rovná $\frac{2}{3}t_b$. To znamená, že $t_a < t_b$. Trojúhelník ATE má obvod $o_1 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}t_b + \frac{2}{3}t_a$, trojúhelník BDT má obvod $o_2 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b$. Z nerovností $b < a$ a $t_a < t_b$ proto vyplývá

$$o_2 - o_1 = \frac{1}{2}(a - b) + \frac{1}{3}(t_b - t_a) > 0,$$

neboli $o_1 < o_2$.

Trojúhelníky AET a BDT mají stejný obsah a první z nich má menší obvod, proto má kružnice vepsaná trojúhelníku AET větší poloměr než kružnice vepsaná trojúhelníku BDT .

B – S – 3

Číslo $n^2 + 15n = n(n + 15)$ má být dělitelné číslem $33\,000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$. Kdyby nebylo n dělitelné třemi, nebylo by třemi dělitelné ani číslo $n + 15$, a tedy ani součin $n(n + 15)$. Ze stejného důvodu musí být n dělitelné pěti, a tedy i patnácti. Pišme proto $n = 15k$. Aby bylo číslo $n(n + 15) = 15^2 k(k + 1)$ dělitelné číslem $8 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$, musí být součin $k(k + 1)$ dvou po sobě jdoucích přirozených čísel dělitelný osmi, pěti a jedenácti. Jeden z činitelů $k, k + 1$ musí být dělitelný aspoň dvěma z těchto tří čísel, takže musí být dělitelný některým z čísel 40, 55, 88. Nejmenším takovým číslem je 40. Jedenácti však není dělitelné ani číslo 40, ani žádný z jeho sousedů 39, 41. Dalším kandidátem je číslo 55, součin čísel 5 a 11. Je dělitelný osmi některý z jeho sousedů? Ano, větší z nich, takže součin $55 \cdot 56$ je dělitelný osmi, pěti i jedenácti; máme tedy $k = 55$. Hledané nejmenší číslo je tudíž $n = 15k = 825$.

B – II – 1

Dělením mnohočlenu $x^4 + ax^2 + bx + c$ mnohočlenem $x^2 + x + 1$ zjistíme, že platí

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + a) + (b - a + 1)x + (c - a).$$

Mnohočlen $x^4 + ax^2 + bx + c$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$, právě když je zbytek při dělení nulový mnohočlen, tedy $b - a + 1 = 0$ a současně $c - a = 0$; odtud $b = a - 1$, $c = a$.

Potom

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (a - 1)^2 + a^2 = 3a^2 - 2a + 1 = 3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}.$$

Tento výraz má nejmenší hodnotu pro $a = \frac{1}{3}$; snadno dopočítáme $b = a - 1 = -\frac{2}{3}$, $c = a = \frac{1}{3}$.

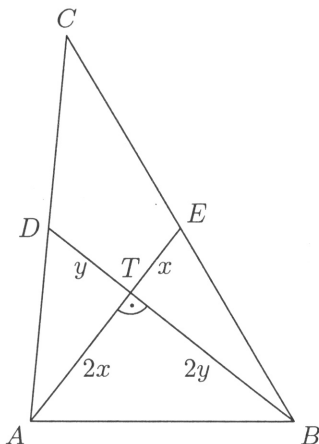
Jiné řešení. Mnohočlen $x^4 + ax^2 + bx + c$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + x + 1$, právě když existují reálná čísla p, q , pro něž

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 + x + 1)(x^2 + px + q).$$

Roznásobením pravé strany a porovnáním odpovídajících koeficientů dostaneme čtyři rovnice $p + 1 = 0$, $q + p + 1 = a$, $q + p = b$, $q = c$. Z nich vyjádříme $p = -1$, $q = a$, $c = a$, $b = a - 1$ a pokračujeme jako v prvním řešení.

B – II – 2

Označme D střed strany AC , E střed strany BC a T těžiště trojúhelníku ABC (obr. 14). Označíme-li dále $3x$ a $3y$ délky těžnic t_a a t_b , máme



Obr. 14

$|AT| = 2x$, $|ET| = x$, $|BT| = 2y$, $|DT| = y$. Ze zadání plyne, že trojúhelníky ATD , BET , ABT jsou pravoúhlé, takže podle Pythagorovy věty platí

$$(2x)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$x^2 + (2y)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$(2x)^2 + (2y)^2 = c^2.$$

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme $5(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ a po dosazení do třetí rovnice máme $c^2 = 4(x^2 + y^2) = \frac{1}{5}(a^2 + b^2)$. Numericky pak vzhledem k tomu, že $\frac{1}{5}(22^2 + 19^2) = 169$, vychází $c = 13$ cm.

B – II – 3

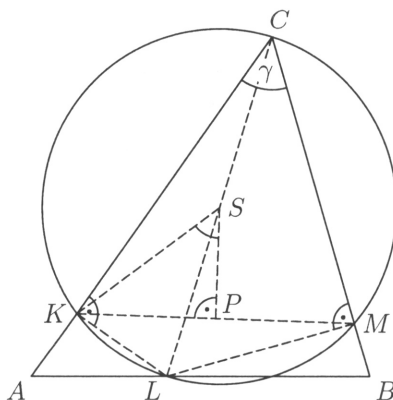
Číslice 0, 1, 2, 3 a 4 nazvěme malé (zkráceně m), číslice 5, 6, 7, 8 a 9 naopak velké (zkráceně v). Pravidelným střídáním malých a velkých číslic vždy vznikne vlnité číslo.

Čísel tvaru $vmvmvmvmvm$ je $(5!)^2$, čísel tvaru $mvmvmvmvmv$ je $4 \cdot 4! \cdot 5!$. Těch vlnitých čísel, která vzniknou pravidelným střídáním malých a velkých číslic, je tedy $5!(5! + 4 \cdot 4!) = 5! \cdot 4! \cdot (5 + 4) = 120 \cdot 24 \cdot 9 = 25\,920 > 25\,000$.

Poznámka. Všech desetimístných vlnitých čísel s vesměs různými číslicemi je 93 106.

B – II – 4

Protože jsou úhly LKC a LMC pravé, leží body K a M na Thaletově kružnici nad průměrem CL (obr. 15). Podle věty o obvodovém úhlu při-



Obr. 15

sluší těživě KM středový úhel velikosti 2γ , proto $|KM| = |CL| \sin \gamma$ (v pravoúhlém trojúhelníku KPS , kde P je střed úsečky KM a S střed úsečky CL , je totiž $|KS| = \frac{1}{2}|CL|$, $|\sphericalangle KSP| = \gamma$). Úsečka KM je tedy nejkratší, právě když je nejkratší úsečka CL ; to nastává právě tehdy, je-li L pata výšky z vrcholu C na stranu AB .

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0,$$

víte-li, že má čtyři různé reálné kořeny, přičemž součet dvou z nich je roven číslu 1. (Jaromír Šimša)

A – I – 2

Kružnice vepsaná danému trojúhelníku ABC se dotýká stran BC , CA , AB po řadě v bodech K , L , M . Označme P průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přímkou MK . Dokažte, že přímky AP a LK jsou rovnoběžné. (Peter Novotný)

A – I – 3

Jsou-li x , y , z reálná čísla z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ splňující podmínku $xy + yz + zx = 1$, pak platí

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leq 1 + (x+y+z)^2.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. (Jaroslav Švrček)

A – I – 4

Určete, pro která přirozená čísla n je možno množinu $M = \{1, 2, \dots, n\}$ rozdělit a) na dvě, b) na tři navzájem disjunktní podmnožiny o stejném počtu prvků tak, aby každá z nich obsahovala také aritmetický průměr všech svých prvků. (Peter Novotný)

A – I – 5

V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC , jejichž strana BC je průměrem kružnice k .
(Jiří Dula)

A – I – 6

Určete všechny funkce $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ takové, že pro všechna celá čísla x, y platí

$$f(f(x) + y) = x + f(y + 2006).$$

(Petr Kaňovský)

A – S – 1

Určete všechna reálná čísla s , pro něž má rovnice

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 0$$

čtyři různé reálné kořeny, přičemž součin dvou z nich je roven číslu -2 .
(Jaromír Šimša)

A – S – 2

Uvažujme množinu $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$ a všechny její tříprvkové podmnožiny. Rozhodněte, zda je více těch, které mají součin svých prvků větší než 2006, nebo těch, které mají součin svých prvků menší než 2006.
(Peter Novotný)

A – S – 3

Je dán lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem při vrcholu A a základnou AB , v němž platí $|AB| > |CD| \geq |DA|$. Označme S průsečík os jeho vnitřních úhlů při vrcholech A, B a T průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech C, D . Podobně označme U, V průsečíky os vnitřních úhlů při vrcholech A, D , resp. B, C .

a) Ukažte, že přímky UV a AB jsou rovnoběžné.

b) Dokažte, že průsečík E polopřímky DT s přímkou AB a body S, T, B leží na téže kružnici.
(Jaroslav Švrček, Pavel Calábek)

A – II – 1

Zjistěte, jaký je nejmenší možný obsah trojúhelníku ABC , jehož výšky vyhovují nerovnostem $v_a \geq 3$ cm, $v_b \geq 4$ cm, $v_c \geq 5$ cm.

(Pavel Novotný)

A – II – 2

Nechť a, b jsou reálná čísla. Má-li rovnice

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0$$

dva různé reálné kořeny takové, že jejich součet se rovná jejich součinu, pak platí $a + b > 0$ a přitom daná rovnice nemá žádné jiné reálné kořeny. Dokažte.

(Jaromír Šimša)

A – II – 3

Nechť M je libovolný vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC . Označme S, S_1, S_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC, AMC, BMC .

- Dokažte, že body M, C, S_1, S_2 a S leží na téže kružnici.
- Pro kterou polohu bodu M má tato kružnice nejmenší poloměr?

(Jaroslav Švrček)

A – II – 4

Nechť p, q ($p < q$) jsou daná přirozená čísla. Určete nejmenší přirozené číslo m s vlastností: Součet všech zlomků v základním tvaru, které mají jmenovatel m a jejichž hodnoty leží v otevřeném intervalu (p, q) , je aspoň $56(q^2 - p^2)$.

(Vojtěch Bálint)

A – III – 1

Na některé pole čtvercové šachovnice $n \times n$ ($n \geq 2$) postavíme figurku a pak s ní táhneme střídavě „šikmo“ a „přímo“. „Šikmo“ znamená na pole, které má s předchozím společný právě jeden bod. „Přímo“ znamená na sousední pole, které má s předchozím společnou stranu. Určete všechna n , pro něž existuje výchozí pole a posloupnost tahů začínající „šikmo“ tak, že figurka projde celou šachovnicí a na každém poli se octne právě jednou.

(Peter Novotný)

A – III – 2

V tětiovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L , M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA , BCD . Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD . Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. *(Pavel Leischner)*

A – III – 3

Označme $\mathbb{N}$ množinu všech přirozených čísel a uvažujme všechny funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{N}$ platí

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

Určete nejmenší možnou hodnotu $f(2007)$. *(Pavel Calábek)*

A – III – 4

Množina M obsahuje všechna přirozená čísla od 1 do 2007 včetně a má následující vlastnost: Je-li číslo n prvkem množiny M , leží v M všechny členy aritmetické posloupnosti s prvním členem n a diferencí $n + 1$. Rozhodněte, zda množina M musí obsahovat všechna přirozená čísla větší než určité číslo m . *(Jaromír Šimša)*

A – III – 5

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC takový, že $|AC| \neq |BC|$. Uvnitř jeho stran BC a AC uvažujme body D a E , pro něž je $ABDE$ tětiový čtyřúhelník. Průsečík jeho úhlopříček AD a BE označme P . Jsou-li přímky CP a AB navzájem kolmé, pak P je průsečíkem výšek trojúhelníku ABC . Dokažte. *(Ján Mazák)*

A – III – 6

Určete všechny uspořádané trojice (x, y, z) navzájem různých reálných čísel, které vyhovují množinové rovnici

$$\{x, y, z\} = \left\{ \frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y} \right\}.$$

(Jaromír Šimša)

Řešení úloh

A – I – 1

Označme hledané kořeny x_1, x_2, x_3, x_4 tak, aby platilo $x_1 + x_2 = 1$.
Potom

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Porovnáním koeficientů u odpovídajících mocnin x dostaneme známé Viětovy vztahy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \quad (1)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -\frac{7}{4}, \quad (2)$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{11}{2}, \quad (3)$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{7}{2}. \quad (4)$$

Protože $x_1 + x_2 = 1$, z (1) plyne $x_3 + x_4 = 2$. Rovnice (2) a (3) přepíšeme do tvaru

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{7}{4},$$

$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -\frac{11}{2},$$

což po dosazení hodnot $x_1 + x_2 = 1$ a $x_3 + x_4 = 2$ dává

$$x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{15}{4},$$

$$2x_1x_2 + x_3x_4 = -\frac{11}{2}.$$

Z této soustavy dvou lineárních rovnic již snadno dostaneme

$$x_1x_2 = -\frac{7}{4}, \quad x_3x_4 = -2.$$

Všimněme si, že pro tyto hodnoty součinů x_1x_2 a x_3x_4 je splněna i rovnice (4), kterou jsme dosud nevyužili. Z podmínek $x_1 + x_2 = 1$, $x_1x_2 = -\frac{7}{4}$ vyplývá, že x_1 a x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - x - \frac{7}{4} = 0, \quad \text{tedy } x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}.$$

Podobně z podmínky $x_3 + x_4 = 2$ a $x_3x_4 = -2$ dostaneme

$$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Zkoušku nalezených kořenů není třeba provádět, protože je splněna, jak jsme zdůraznili, celá soustava rovnic (1) až (4).

Závěr. Daná rovnice má kořeny $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$, $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$.

Jiné řešení. Z podmínek úlohy plyne, že levá strana rovnice je součinem mnohočlenů

$$x^2 - x + p \quad \text{a} \quad 4x^2 + qx + r,$$

kde p , q a r jsou reálná čísla. Po jejich vynásobení a porovnání koeficientů u odpovídajících mocnin x dostaneme soustavu čtyř rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} q - 4 &= -12, \\ 4p - q + r &= -7, \\ pq - r &= 22, \\ pr &= 14. \end{aligned}$$

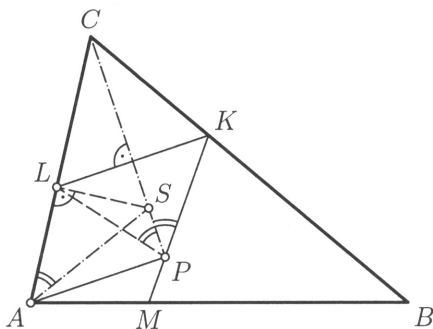
První tři rovnice mají jediné řešení $r = -8$, $p = -\frac{7}{4}$ a $q = -8$, které vyhovuje i čtvrté rovnici. Platí tedy rozklad

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = \left(x^2 - x - \frac{7}{4}\right)(4x^2 - 8x - 8).$$

Rovnice $x^2 - x - \frac{7}{4} = 0$ má kořeny $\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$, rovnice $4x^2 - 8x - 8 = 0$ má kořeny $1 \pm \sqrt{3}$.

A – I – 2

Označme k kružnici vepsanou trojúhelníku ABC a S její střed. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem α , β , γ . Protože body K , L jsou souměrně sdruženy podle osy vnitřního úhlu při vrcholu C , jsou přímky KL a CP na sebe kolmé a platí $|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle KPC|$ (obr. 16).



Obr. 16

Vyjádříme-li velikosti vnitřních úhlů při základnách KM a LK v rovnoramenných trojúhelnících KMB a LKC , dostaneme $|\sphericalangle MKB| = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle LKC| = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$. Z přímosti úhlu BKC tak plyne $|\sphericalangle MKL| = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Analogicky vyjde $|\sphericalangle KLM| = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle LMK| = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$.

Protože $|\sphericalangle KPC| + \frac{1}{2}\gamma = |\sphericalangle BKP| = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$, dostaneme pro velikost souměrně sdružených úhlů LPC a KPC rovnost

$$|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle KPC| = 90^\circ - \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Kružnice k vepsaná trojúhelníku ABC je současně kružnicí opsanou trojúhelníku KLM , který je, jak jsme zjistili výpočtem jeho úhlů, ostroúhlý. Její střed S je proto vnitřním bodem tohoto trojúhelníku, a tedy i vnitřním bodem úsečky CP . Protože

$$|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle LPS| = |\sphericalangle LAS| = \frac{\alpha}{2},$$

je $APSL$ tětíkový čtyřúhelník. Vzhledem k tomu, že úhel ALS je pravý, je i úhel APS pravý (přímky AP a CP jsou na sebe kolmé), a proto jsou přímky KL a AP rovnoběžné. Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Protože kružnice k je opsaná trojúhelníku KLM , můžeme jeho vnitřní úhly snadno vyjádřit z příslušných středových úhlů: $|\sphericalangle KSL| = 180^\circ - \gamma$, takže $|\sphericalangle KML| = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma$ atd.

A – I – 3

Pro libovolná reálná čísla $x, y, z \in \langle -1, 1 \rangle$ platí $1 - x^2 \geq 0$, $1 - y^2 \geq 0$, $1 - z^2 \geq 0$. Užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým

průměrem pro trojici nezáporných reálných čísel $1 - x^2$, $1 - y^2$, $1 - z^2$ tak dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} &\leq \frac{(1-x^2) + (1-y^2) + (1-z^2)}{3} = \\ &= \frac{3 - (x^2 + y^2 + z^2)}{3},\end{aligned}$$

takže

$$6\sqrt[3]{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)} \leq 6 - 2(x^2 + y^2 + z^2). \quad (1)$$

Vyhovují-li reálná čísla $x, y, z \in \langle -1, 1 \rangle$ podmínce $xy + yz + zx = 1$, ukážeme, že splňují také nerovnost

$$6 - 2(x^2 + y^2 + z^2) \leq 1 + (x + y + z)^2. \quad (2)$$

Pravou stranu této nerovnosti upravíme na tvar

$$1 + x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 3 + (x^2 + y^2 + z^2),$$

což po dosazení do (2) vede k ekvivalentní nerovnosti

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1.$$

Její platnost ověříme snadno. Stačí totiž dokázat, že pro reálná čísla x, y, z , která vyhovují podmínkám úlohy, platí nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx,$$

což je však ekvivalentní nerovnosti

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0,$$

která platí pro všechna reálná čísla x, y, z .

Závěr. Nerovnost, kterou jsme měli dokázat, vyplývá z dokázaných nerovností (1) a (2). Rovnost v ní přitom nastane, právě když nastane současně v obou zmíněných nerovnostech. To nastane, právě když $x = y = z$, což s ohledem na podmínku $xy + yz + zx = 1$ dává pouze dvě možnosti $x = y = z = \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$, pro něž v dokázané nerovnosti platí rovnost.

A – I – 4

a) Označme A a B hledané podmnožiny. Protože obě mají stejný počet prvků, je počet prvků množiny M nutně sudý. Je tedy $n = 2k$, kde k je vhodné přirozené číslo.

Pro $n = 4$ neexistuje rozklad množiny $M = \{1, 2, 3, 4\}$ na dvě podmnožiny daných vlastností, protože aritmetický průměr libovolných dvou různých čísel z množiny M se nemůže rovnat žádnému z těchto čísel. Seznamme vyhovující rozklad množiny M pro několik prvních sudých čísel n (aritmetický průměr prvků podmnožin vyznačíme polotučně):

$n = 2:$	$A = \{1\}$	$B = \{2\}$
$n = 4:$	rozklad neexistuje	
$n = 6:$	$A = \{1, \underline{2}, 3\}$	$B = \{4, \underline{5}, 6\}$
$n = 8:$	$A = \{2, 3, \underline{4}, 7\}$	$B = \{1, \underline{5}, 6, 8\}$
$n = 10:$	$A = \{1, 2, \underline{3}, 4, 5\}$	$B = \{6, 7, \underline{8}, 9, 10\}$
$n = 12:$	$A = \{1, 2, 3, \underline{4}, 6, 8\}$	$B = \{5, 7, \underline{9}, 10, 11, 12\}$

Nyní ukážeme, že hledaný rozklad množiny M existuje pro libovolné $n = 2k$ takové, že $k \neq 2$.

Pro lichá čísla k vyhovuje například rozklad množiny M na podmnožiny

$$A = \{1, 2, \dots, k\}, \quad B = \{k+1, k+2, \dots, 2k\}.$$

Součet všech prvků množiny A je $\frac{1}{2}k(k+1)$, jejich aritmetický průměr je $\frac{1}{2}(k+1)$, což je přirozené číslo. Jelikož $1 \leq \frac{1}{2}(k+1) \leq k$, je aritmetický průměr všech prvků množiny A prvkem množiny A. Podobně aritmetický průměr $\frac{1}{2}(3k+1)$ všech prvků množiny B je prvkem množiny B.

Pro $k = 4$ jsme existenci rozkladu ukázali v tabulce, pro sudá čísla $k \geq 6$ vyhovuje například rozklad množiny M na podmnožiny

$$A = \{1, 2, \dots, k-2, k, \underline{\frac{1}{2}(3k-2)}\}, \quad B = M \setminus A.$$

Platí $k < \frac{1}{2}(3k-2) \leq 2k$ a $\frac{1}{2}(3k-2)$ je přirozené číslo. Množina A tedy obsahuje k přirozených čísel z množiny M. Součet všech prvků množiny A je

$$1+2+\dots+(k-2)+k+\underline{\frac{1}{2}(3k-2)} = \frac{1}{2}(k-2)(k-1)+k+\underline{\frac{1}{2}(3k-2)} = \frac{1}{2}k(k+2).$$

Jeich aritmetický průměr je $\frac{1}{2}(k+2)$, což je přirozené číslo. Jelikož $1 \leq \frac{1}{2}(k+2) \leq k-2$, je aritmetický průměr všech prvků množiny A

prvkem množiny A. Obdobně ukážeme, že aritmetický průměr $\frac{3}{2}k$ všech prvků množiny B je prvkem množiny B.

Poznámka. Pro k sudé nevyhovuje například rozklad množiny M na podmnožiny

$$A = \{1, 2, \dots, k-1, \frac{3}{2}k\}, \quad B = M \setminus A,$$

protože průměr $\frac{3}{2}k$ všech prvků množiny B je prvkem množiny A. Vyhovuje však rozklad jiného druhu

$$\begin{aligned} A &= \{1, 3, \dots, k-1\} \cup \{k, k+4\} \cup \{k+5, k+7, \dots, 2k-1\}, \\ B &= \{2, 4, \dots, k-2\} \cup \{k+1, k+2, k+3\} \cup \{k+6, k+8, \dots, 2k\}, \end{aligned}$$

a to dokonce i pro hodnotu $k=4$, kdy v pravých stranách těchto rovností „chybějí“ třetí skupiny prvků, jež mají obecně po $\frac{1}{2}(k-4)$ prvcích. Počet prvků takové množiny A je roven $\frac{1}{2}k+2+\frac{1}{2}(k-4)=k$, jejich součet je roven

$$\frac{k^2}{4} + (2k+4) + \frac{(k-4)(3k+4)}{4} = k^2,$$

takže jejich průměr je číslo $k \in A$. Součet všech k prvků množiny B je roven

$$\frac{(k-2)k}{4} + (3k+6) + \frac{(k-4)(3k+6)}{4} = k^2 - 2k,$$

takže jejich průměr je číslo $k-2 \in B$.

b) Označme A, B a C hledané podmnožiny množiny M. Protože všechny mají stejný počet prvků, je číslo n nutně dělitelné třemi, je tedy tvaru $n=3k$, kde k je vhodné přirozené číslo. Pro součet s všech prvků množiny M platí $s=\frac{1}{2}3k(3k+1)$. Součet tří aritmetických průměrů všech prvků jednotlivých množin A, B a C je pak roven s/k , tedy $\frac{3}{2}(3k+1)$. Tento součet musí být podle podmínek úlohy přirozené číslo, proto je k nutně liché.

Pro čísla $n=3k$, kde k je liché, ukážeme, že zadání vyhovuje například rozklad množiny M na podmnožiny

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, \dots, k\}, & B &= \{k+1, k+2, \dots, 2k\} \\ \text{a } C &= \{2k+1, 2k+2, \dots, 3k\}. \end{aligned}$$

Součet všech prvků A je $\frac{1}{2}k(k+1)$, jejich aritmetický průměr je roven $\frac{1}{2}(k+1)$, což je přirozené číslo. Jelikož $1 \leq \frac{1}{2}(k+1) \leq k$, je aritmetický

v pravoúhlém trojúhelníku $C'O'S$ platí

$$|O'B'| = |O'C'| = \sqrt{|O'S|^2 + r^2} = \sqrt{|OO'|^2 + |OS|^2 + r^2}.$$

Pro velikost úsečky $O'A$ přitom máme

$$\begin{aligned} |O'A| &= \sqrt{|AO|^2 + |OO'|^2} = \sqrt{|BO|^2 + |OO'|^2} = \\ &= \sqrt{|OS|^2 + r^2 + |OO'|^2}. \end{aligned}$$

Odtud $|O'A| = |O'B'| = |O'C'|$, tudíž bod O' je středem kružnice opsané trojúhelníku $AB'C'$ a podle konstrukce leží na přímce p .

Naopak, pro libovolný bod O' přímky p lze sestavit průměr $B'C'$ kružnice k , který je kolmý k přímce $O'S$. Z předchozích úvah vyplývá, že $|O'A| = |O'B'| = |O'C'|$, takže jsme našli trojúhelník $AB'C'$ požadovaných vlastností, jehož kružnice opsaná má střed O' .

b) Nechť $|AS| < r$. V tomto případě lze postupovat analogicky. Střed O je zde vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce SA . Dojdeme přitom ke stejnému výsledku jako v případě a).

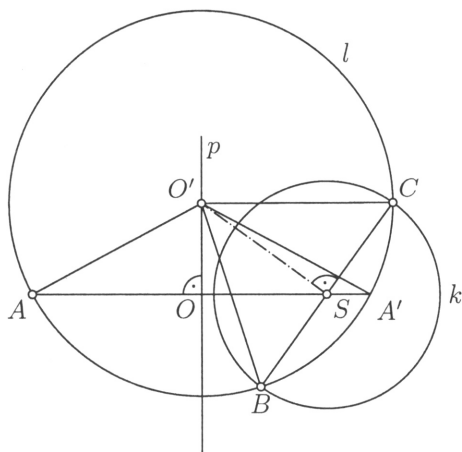
Závěr. Není-li A bodem kružnice k , je hledanou množinou O přímka p , která je kolmá k AS a současně prochází středem O kružnice opsané rovnoramennému trojúhelníku ABC se základnou BC , která je průměrem kružnice k kolmým na AS . Je-li A je bodem kružnice k , je $O = \{S\}$.

Jiné řešení. Pro daný bod A , který neleží na kružnici k , uvažujme trojúhelník ABC daných vlastností. Označme l kružnici opsanou trojúhelníku ABC (obr. 18). Protože bod S je středem společné tětiny BC kružnic k a l , protne kružnice l polopřímku opačnou k polopřímce SA ve vnitřním bodě, který označíme A' . Pro mocnost $m_l(S)$ bodu S ke kružnici l přitom platí

$$m_l(S) = -|BS| \cdot |CS| = -r^2 = -|AS| \cdot |A'S|, \quad (1)$$

kde r je poloměr kružnice k . Odtud plyne, že vzdálenost $|A'S|$, a tedy i poloha bodu A' na polopřímce opačné k SA jsou jednoznačně určeny polohou bodu A . Pro všechny trojúhelníky ABC vyhovující podmínkám úlohy je tedy AA' pevná úsečka. Kružnice opsané všem uvažovaným trojúhelníkům ABC proto mají společnou tětinu AA' , takže jejich středy leží na ose p úsečky AA' . V případě, kdy ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou BC , je úsečka AA' průměrem kružnice l a její střed O je

současně středem úsečky AA' . Přímka p prochází tímto bodem O kolmo k přímce AS .



Obr. 18

Naopak, ke každému bodu O' přímky p najdeme trojúhelník ABC požadovaných vlastností, který má střed opsané kružnice v bodě O' . Stačí sestavit průměr BC kružnice k , který je kolmý k přímce $O'S$. Pro pevně uvažované body A, A' a S jsme tak sestrojili body B, C , pro něž platí vztah (1). To znamená, že body A, B, C a A' leží na téže kružnici l . Vzhledem k tomu, že bod O' je průsečíkem os těživ AA' a BC této kružnice, které nejsou rovnoběžné, je bod O' středem kružnice l , tedy středem kružnice opsané trojúhelníku ABC .

A – I – 6

Nechť f je libovolná funkce požadovaných vlastností. Dosadíme-li do daného vztahu postupně $y = 0$ a $y = 1$, dostaneme rovnosti

$$f(f(x)) = x + f(2006), \quad \text{resp.} \quad f(f(x) + 1) = x + f(2007) \quad (1)$$

a jejich odečtením

$$f(f(x) + 1) - f(f(x)) = f(2007) - f(2006).$$

Poslední vztah lze zjednodušeně zapsat jako

$$f(z + 1) - f(z) = f(2007) - f(2006) \quad (2)$$

pro každé takové $z \in \mathbb{Z}$, které patří do oboru hodnot funkce f . Tímto oborem je ovšem celá množina $\mathbb{Z}$, jak hned vidíme z kterékoli z rovností (1).

Rovnost (2) platná pro každé $z \in \mathbb{Z}$ znamená, že funkce f na $\mathbb{Z}$ je (oboustranně nekonečná) aritmetická posloupnost, takže její předpis musí být tvaru $f(z) = az + b$ s vhodnými konstantami $a, b \in \mathbb{R}$. Jejich možné hodnoty zjistíme, když dosadíme do obou stran rovnosti ze zadání:

$$\begin{aligned} f(f(x) + y) &= a(f(x) + y) + b = a^2x + ay + ab + b, \\ x + f(y + 2006) &= x + a(y + 2006) + b = x + ay + 2006a + b. \end{aligned}$$

Takové dva výrazy mají tutéž hodnotu pro všechna $x, y \in \mathbb{Z}$, právě když zároveň platí $a^2 = 1$ a $2006a = ab$, neboli $a = \pm 1$ a $b = 2006$. Řešením úlohy jsou tedy jediné dvě funkce určené předpisy

$$f_1(x) = x + 2006 \quad \text{a} \quad f_2(x) = -x + 2006.$$

A – S – 1

Předpokládejme, že číslo s vyhovuje zadání úlohy, a označme kořeny x_1, x_2, x_3, x_4 dané rovnice tak, aby platilo

$$x_1x_2 = -2. \tag{0}$$

Z rozkladu na kořenové činitele

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

po roznásobení a porovnání koeficientů u stejných mocnin x dostaneme Viètovy vztahy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \tag{1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{s}{4}, \tag{2}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{11}{2}, \tag{3}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Z rovností (0) a (4) ihned plyne

$$x_3x_4 = \frac{1}{4}.$$

Z rovnosti (3) upravené do tvaru

$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -\frac{11}{2}$$

vychází po dosazení hodnot x_1x_2 a x_3x_4 rovnice

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2) - 2(x_3 + x_4) = -\frac{11}{2},$$

která spolu s rovnicí (1) tvoří soustavu dvou lineárních rovnic pro neznámé součty $x_1 + x_2$ a $x_3 + x_4$. Snadným výpočtem zjistíme, že řešením této soustavy je dvojice hodnot

$$x_1 + x_2 = 2 \quad \text{a} \quad x_3 + x_4 = 3.$$

Dosadíme-li vše zjištěné do rovnosti (2) upravené do tvaru

$$x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = \frac{s}{4},$$

zjistíme, že nutně $s = 17$.

Nyní musíme provést zkoušku: z rovností

$$x_1 + x_2 = 2 \quad \text{a} \quad x_1x_2 = -2$$

vyplývá, že čísla $x_{1,2}$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - 2x - 2 = 0, \quad \text{tedy} \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}; \quad (5)$$

z rovností

$$x_3 + x_4 = 3 \quad \text{a} \quad x_3x_4 = \frac{1}{4}$$

zase plyne, že čísla $x_{3,4}$ jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0, \quad \text{tedy} \quad x_{3,4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}. \quad (6)$$

Vidíme, že $x_{1,2,3,4}$ jsou skutečně čtyři navzájem různá reálná čísla, která splňují soustavu rovnic (1)–(4) pro hodnotu $s = 17$, takže to jsou kořeny rovnice ze zadání. Zdůrazněme, že zadáním úlohy nebylo tyto kořeny vypočítat. Nestačilo by ovšem jen ověřit, že každá z kvadratických rovnic v (5) a (6) má dva různé reálné kořeny (to nastane, právě kdy

jejich diskriminanty jsou kladná čísla), kromě toho by bylo nutné ještě ukázat, že tyto dvě rovnice nemají společný kořen.

Hledané číslo s je jediné a má hodnotu $s = 17$.

Jiné řešení. Označme $x_{1,2}$ ty kořeny dané rovnice, pro něž má platit $x_1x_2 = -2$. Mnohočlen z levé strany rovnice je dělitelný mnohočlenem $(x - x_1)(x - x_2)$, tedy mnohočlenem tvaru $x^2 + px - 2$ (kde $p = -x_1 - x_2$), platí tudíž rozklad

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = (x^2 + px - 2)(4x^2 + qx + r).$$

Roznásobením a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu

$$-20 = 4p + q, \quad s = -8 + pq + r, \quad 22 = -2q + pr, \quad -2 = -2r.$$

Ze čtvrté rovnice máme $r = 1$, po dosazení do třetí $22 = -2q + p$, což spolu s první rovnicí dává $p = -2$ a $q = -12$. Ze zbylé (druhé) rovnice pak určíme hodnotu $s = 17$. Víme, že pro ni má mnohočlen ze zadané rovnice rozklad

$$4x^4 - 20x^3 + 17x^2 + 22x - 2 = (x^2 - 2x - 2)(4x^2 - 12x + 1),$$

zbývá provést zkoušku (stejně jako při prvním postupu).

A – S – 2

Uvažovaná množina je množinou právě *všech (přirozených) dělitelů* čísla $160 = 2^5 \cdot 5$. Její prvky můžeme sdružit do dvojic tak, aby součin čísel v každé dvojici byl roven číslu 160:

$$1 \cdot 160 = 2 \cdot 80 = 4 \cdot 40 = 5 \cdot 32 = 8 \cdot 20 = 10 \cdot 16.$$

To znamená, že je-li $A = \{a, b, c\}$ trojice navzájem různých dělitelů čísla 160, je i $A' = \{160/a, 160/b, 160/c\}$ trojice navzájem různých dělitelů čísla 160.

Součin abc prvků trojice A se dá vyjádřit ve tvaru

$$2^k 5^l, \quad \text{kde } k \in \{0, 1, 2, \dots, 14\}, \quad l \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (1)$$

(číslo 160 má jen dva dělitele, jež jsou násobkem 2^5 , proto se v rozkladu součinu abc nemůže objevit 2^{15}). Není těžké zjistit, že největší přirozené

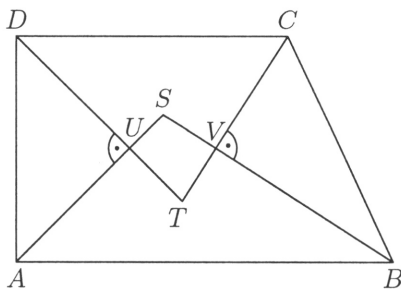
číslo tvaru (1), které je menší než 2 006, je číslo $2\,000 = 2^4 \cdot 5^3$ a nejmenší přirozené číslo, které je tvaru (1) a je větší než 2 006, je číslo $2\,048 = 2^{11}$ (samo číslo 2 006 tvaru (1) není). Přitom $2\,000 \cdot 2\,048 = 160^3$.

Je-li tedy součin prvků trojice A menší než 2 006, je nutně $abc \leq 2\,000$ a součin $160^3/(abc)$ prvků odpovídající trojice A' je nejméně $160^3/2\,000 = 2\,048$. Naopak, je-li součin prvků trojice A větší než číslo 2 006, je $abc \geq 2\,048$ a součin prvků trojice A' je nejvýše $160^3/2\,048 = 2\,000$. Jinými slovy *tříprvkových podmnožin se součinem prvků menším než 2 006 je právě tolik jako tříprvkových podmnožin se součinem prvků větším než 2 006*.

A – S – 3

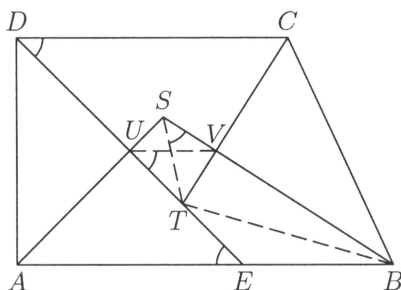
Bod U jako průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech A a D daného lichoběžníku má stejnou vzdálenost od stran AB , AD a zároveň i od stran AD , DC . To znamená, že má stejnou vzdálenost od obou základů AB , CD lichoběžníku $ABCD$. Podobně i bod V , který je průsečíkem os úhlů při vrcholech B a C , má od obou základů stejnou vzdálenost. Jsou tedy přímky UV a AB rovnoběžné. Tím je vyřešena část a).

Protože součet vnitřních úhlů jak při vrcholech A a D , tak při vrcholech B a C je 180° , je součet úhlů přilehlých straně AD trojúhelníku ADU roven 90° stejně jako součet úhlů přilehlých straně BC trojúhelníku BCV . To znamená, že oba uvedené trojúhelníky jsou pravoúhlé (s pravým úhlem při vrcholu U , resp. V , obr. 19). Čtyřúhelník $UTVS$ je tedy tětíkový (z předpokladu úlohy $|AB| > |CD| \geq |DA|$ plyne, že polopřímky AU a CV se neprotínají, body S a T proto leží v opačných polorovinách určených přímkou UV a body U , T , V , S leží na kružnici v uvedeném pořadí).



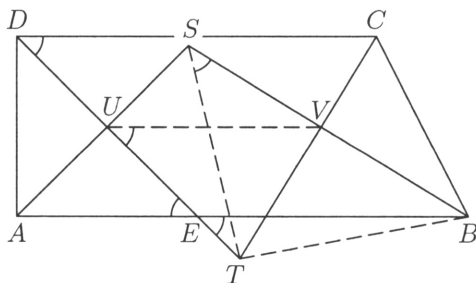
Obr. 19

Jak už víme, jsou přímky UV , AB a CD rovnoběžné, je tedy $|\sphericalangle VUT| = |\sphericalangle CDT| = 45^\circ$. Z rovnosti obvodových úhlů nad stranou TV tětívového čtyřúhelníku $UTVS$ tak plyne $|\sphericalangle VST| = |\sphericalangle VUT| = 45^\circ$. To je zároveň i velikost obvodového úhlu TSB příslušného tětívě TB kružnice opsané trojúhelníku STB (obr. 20). Zbývá ukázat, že na téže



Obr. 20

kružnici leží i bod E . To je zřejmé, pokud $E = T$. V opačném případě stačí zjistit, že velikost úhlu TEB je $180^\circ - 45^\circ$ nebo 45° podle toho, zda přímka BT body S , E odděluje či nikoli, což okamžitě plyne z toho, že přímka DT svírá se základnou AB úhel 45° (obr. 20 a 21). Tím je vyřešena část b).



Obr. 21

A – II – 1

Označme a , b , c velikosti stran trojúhelníku ABC . Pro jeho výšku v_b platí nerovnost

$$c \geq v_b,$$

neboť v_b je délka nejkratší úsečky spojující vrchol B s bodem přímky AC . Pro obsah S trojúhelníku ABC tak platí:

$$S = \frac{cv_c}{2} \geq \frac{v_b v_c}{2} \geq 10 \text{ cm}^2.$$

Pokud existuje trojúhelník ABC vyhovující podmínkám úlohy, jehož obsah je právě 10 cm^2 , potom v obou nerovnostech $S = \frac{1}{2}cv_c \geq \frac{1}{2}v_b v_c \geq 10 \text{ cm}^2$ nastává rovnost. Vychází tedy $c = v_b = 4 \text{ cm}$ a současně $v_c = 5 \text{ cm}$. Z první rovnosti plyne, že takový trojúhelník musí být pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A . Pro délku jeho odvěsny AC pak platí $b = v_c = 5 \text{ cm}$ a délka a jeho přepony BC je rovna $\sqrt{41} \text{ cm}$. Ze vzorce $S = \frac{1}{2}av_a$ pro jeho výšku v_a plyne

$$v_a = \frac{2S}{a} = \frac{20}{\sqrt{41}} \text{ cm} > 3 \text{ cm}.$$

Pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami $b = 5 \text{ cm}$ a $c = 4 \text{ cm}$ tedy vyhovuje podmínkám úlohy.

Nejmenší možný obsah trojúhelníku ABC , jehož výšky vyhovují podmínkám úlohy, je 10 cm^2 .

A – II – 2

Předpokládejme, že rovnice

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = 0 \tag{1}$$

má dva různé reálné kořeny x_1 a x_2 , pro které platí $x_1 + x_2 = x_1 x_2 = p$. Potom mnohočlen na její levé straně je dělitelný kvadratickým trojčlenem $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - px + p$, a má tudíž rozklad

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + ax + b = (x^2 - px + p)(x^2 + rx + s),$$

kde r a s jsou reálná čísla. Roznásobením výrazu na pravé straně poslední rovnosti a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x mnohočlenů na obou stranách dostaneme

$$-4 = -p + r, \tag{2}$$

$$4 = p + s - pr, \tag{3}$$

$$a = -ps + pr, \tag{4}$$

$$b = ps. \tag{5}$$

Ze vztahu (2) plyne

$$r = p - 4. \quad (6)$$

Dosazením za r do vztahu (3) dostaneme

$$s = 4 - p + p(p - 4) = (p - 4)(p - 1). \quad (7)$$

Jelikož kvadratická rovnice $x^2 - px + p = 0$ má dva různé reálné kořeny x_1 a x_2 , je její diskriminant kladné číslo, takže

$$p^2 - 4p > 0. \quad (8)$$

Sečteme-li rovnice (4) a (5) a dosadíme za r podle (6), vyjde podle předchozího vztahu

$$a + b = pr = p(p - 4) = p^2 - 4p > 0,$$

což jsme chtěli dokázat.

Pro diskriminant D rovnice

$$x^2 + rx + s = 0$$

podle vztahů (6), (7) a (8) platí

$$D = r^2 - 4s = (p - 4)^2 - 4(p - 4)(p - 1) = -3p(p - 4) = -3(p^2 - 4p) < 0.$$

Rovnice tudíž nemá reálné kořeny. Daná rovnice (1) proto nemá jiné reálné kořeny než x_1 a x_2 .

A – II – 3

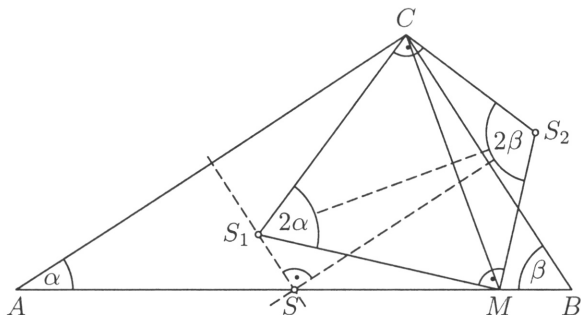
a) Označme po řadě α a β velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A a B uvažovaného pravoúhlého trojúhelníku ABC . Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem pro společnou tětivu CM kružnic k_1 a k_2 opsaných po řadě trojúhelníkům AMC a BMC plyne (obr. 22)

$$|\sphericalangle MS_1C| + |\sphericalangle MS_2C| = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

Čtyřúhelník CS_1MS_2 je tudíž tětivový. Protože body M a C jsou souměrně sdružené podle osy úsečky CM , na níž současně leží středná S_1S_2 kružnic k_1 a k_2 , platí dále

$$|\sphericalangle S_1MS_2| = |\sphericalangle S_1CS_2| = 90^\circ.$$

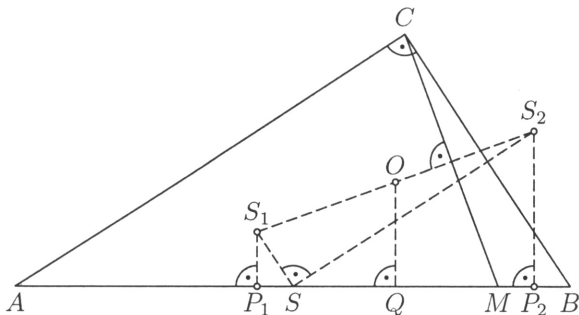
Kružnice opsaná čtyřúhelníku CS_1MS_2 je tedy Thaletovou kružnicí sestavenou nad průměrem S_1S_2 . Body S a S_1 však současně leží na ose odvěsny AC , podobně body S a S_2 leží na ose odvěsny BC uvažovaného trojúhelníku. Je tedy $\angle S_1SS_2 = 90^\circ$, a bod S proto leží rovněž na Thaletově kružnici opsané čtyřúhelníku CS_1MS_2 . (Je-li $M = S$, platí toto tvrzení triviálně.) Tím je dokázána část a) úlohy.



Obr. 22

b) Pro poloměr r kružnice (s tětivou CS) nalezené v části a) zřejmě platí $2r \geq |CS|$ s rovností, právě když je CS její průměr. Protože kružnice s průměrem CS prochází středy obou odvěsen AC , BC , rovnost $2r = |CS|$ nastane, právě když bod S_1 je střed AC a S_2 je střed BC (bod S_1 leží na ose odvěsny AC a bod S_2 na ose odvěsny BC), což zřejmě odpovídá volbě bodu M jako paty výšky z vrcholu C na přeponu AB .

Jiné řešení. a) Označme P_1 a P_2 po řadě středy úseček AM a BM (obr. 23). Protože ve stejnoolehlosti se středem M a koeficientem $\frac{1}{2}$ se úsečka AB zobrazí na úsečku P_1P_2 , zobrazí se střed S úsečky AB na

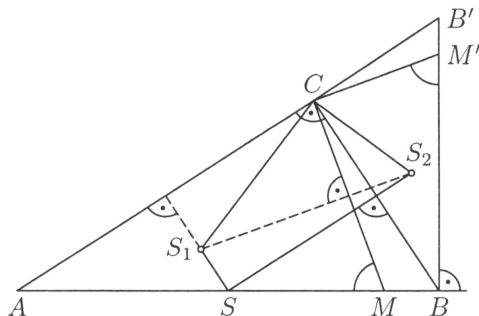


Obr. 23

střed Q úsečky P_1P_2 a zároveň jakožto obraz bodu S ve zmíněné stejno-
lehlosti je bod Q středem úsečky MS . Body P_1, P_2 jsou kolmé průměty
bodů S_1, S_2 na přeponu AB , takže bod Q je kolmým průmětem středu O
kružnice sestrojené nad průměrem S_1S_2 . Podle Thaletovy věty na této
kružnici zřejmě leží bod S , protože přímky S_1S a S_2S jakožto osy na-
vzájem kolmých odvěsen AC a BC svírají pravý úhel. Ze souměrnosti
uvedené kružnice podle přímky OQ pak plyne, že na ní leží i bod M ,
a tedy i bod C (ze souměrnosti podle přímky S_1S_2). Tím je část a)
dokázána.

b) Pro úsečku S_1S_2 a její kolmý průmět P_1P_2 platí $|S_1S_2| \geq |P_1P_2| =$
 $= \frac{1}{2}|AB|$. Kružnice opsaná čtyřúhelníku CS_1MS_2 má proto nejmenší
průměr $\frac{1}{2}|AB|$, právě když $S_1S_2 \parallel AB$, což vzhledem ke kolmosti úseč-
ky CM a její osy S_1S_2 nastane, právě když M je patou výšky z vrcho-
lu C v trojúhelníku ABC . (Poloměr r této kružnice má pak velikost
 $r = \frac{1}{4}|AB|$.)

Jiné řešení. a) Uvažujme podobné zobrazení složené z otočení kolem
středu C o orientovaný (pravý) úhel ACB a ze stejnolehlosti se středem C
a koeficientem rovným poměru $|BC| : |AC|$. Toto zobrazení převede body
 A, B a M po řadě do bodů B, B' a M' , přičemž BC je výška na přeponu
 AB' pravoúhlého trojúhelníku ABB' a bod M' leží na jeho odvěsně BB'
(obr. 24). Podle shodných úhlů AMC a $BM'C$ (nebo též podle pravých



Obr. 24

úhlů MCM' a MBM') vidíme, že kružnice opsaná trojúhelníku BMC
je opsána i trojúhelníku $BM'C$, takže její střed S_2 je obrazem bodu S_1
v uvažovaném podobném zobrazení (to převádí trojúhelník AMC právě
na trojúhelník $BM'C$). To znamená, že úhel S_1CS_2 je pravý, takže je
pravý i úhel S_1MS_2 (neboť přímka S_1S_2 je osou úsečky CM). Konečně

pravý je i úhel S_1SS_2 (neboť jeho ramena leží na osách navzájem kolmých odvěsen AC a BC), takže všechny tři body C , M , S leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem S_1S_2 .

Tím je dokázána část a) úlohy. Část b) vyřešíme stejně jako v prvním řešení.

A – II – 4

Ukážeme, že nejmenší m je 113 (nezávisle na hodnotách p , q). Zřejmě je $m > 1$. Pro libovolná přirozená čísla $c < d$ a $m > 1$ označme $S_m(c, d)$ součet všech zlomků v základním tvaru, které leží v otevřeném intervalu (c, d) a jejichž jmenovatel je m . Pak platí nerovnost

$$\begin{aligned} S_m(c, c+1) &\leq \left(c + \frac{1}{m}\right) + \left(c + \frac{2}{m}\right) + \dots + \left(c + \frac{m-1}{m}\right) = \\ &= (m-1)c + \frac{m-1}{2}, \end{aligned}$$

v níž rovnost nastane, právě když všechna čísla $1, 2, \dots, m-1$ jsou nesoudělná s m , tj. právě když m je prvočíslo.

Pro daná přirozená čísla p , q a $m > 1$ platí

$$\begin{aligned} S_m(p, q) &= S_m(p, p+1) + S_m(p+1, p+2) + \dots + S_m(q-1, q) \leq \\ &\leq \left((m-1)p + \frac{m-1}{2}\right) + \left((m-1)(p+1) + \frac{m-1}{2}\right) + \dots \\ &\quad + \left((m-1)(q-1) + \frac{m-1}{2}\right) = \\ &= (m-1) \frac{(q-p)(p+q-1)}{2} + (m-1) \frac{q-p}{2} = \\ &= (m-1) \frac{q-p}{2} (p+q-1+1) = \frac{(m-1)(q^2-p^2)}{2}, \end{aligned}$$

tedy

$$S_m(p, q) \leq \frac{(m-1)(q^2-p^2)}{2}. \quad (9)$$

Rovnost ve vztahu (9) přitom nastane, právě když m je prvočíslo. Podle zadání však platí

$$S_m(p, q) \geq 56(q^2-p^2).$$

S ohledem na vztah (9) vidíme, že nutně platí $\frac{1}{2}(m-1) \geq 56$, tj. $m \geq 113$. Vzhledem k tomu, že číslo 113 je prvočíslo, je nejmenší hledané číslo $m = 113$.

Jiné řešení. Součet všech zlomků, které mají jmenovatel m , nejsou celá čísla a leží v intervalu (p, q) , můžeme také určit jako rozdíl součtu všech zlomků se jmenovatelem m ležících v uzavřeném intervalu $\langle p, q \rangle$ a součtu všech přirozených čísel z tohoto intervalu. Pro uvažovaný rozdíl d pak platí

$$d = \sum_{j=pm}^{qm} \frac{j}{m} - \sum_{j=p}^q j.$$

Menšence i menšitele v uvažovaném rozdílu lze určit jako součty členů aritmetických posloupností. Pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti (a_i) využijeme známý vztah

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n).$$

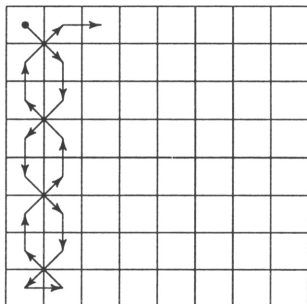
Pro hledaný rozdíl d tak dostáváme:

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}(p+q)((q-p)m+1) - \frac{1}{2}(p+q)(q-p+1) = \\ &= \frac{1}{2}(p+q)[((q-p)m+1) - (q-p+1)] = \frac{1}{2}(m-1)(q^2 - p^2). \end{aligned}$$

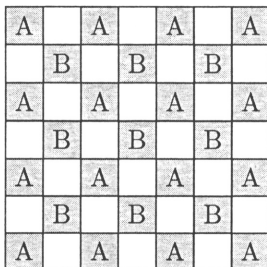
Dále budeme postupovat stejně jako v předchozím řešení.

A – III – 1

Nejprve ukážeme, že úloha má řešení pro libovolné sudé n . Postavíme-li figurku např. na kterékoliv rohové pole šachovnice $n \times n$, projdeme celou šachovnici po sousedních blocích typu $2 \times n$ způsobem naznačeným na obr. 25 pro $n = 8$. Posloupnosti tahů zde odpovídá posloupnost na sebe navazujících orientovaných úseček. Zcela analogicky lze postupovat pro každé sudé n .



Obr. 25



Obr. 26

Nyní ukážeme, že pro žádné $n \geq 3$ liché nelze šachovnici projít požadovaným způsobem. Důkaz provedeme sporem. Pripusťme, že pro určité liché n na šachovnici $n \times n$ existuje posloupnost tahů vyhovující podmínkám úlohy. Všechna její pole obarvíme podobně jako běžnou šachovnici 8×8 , a to tak, že rohová pole budou černá (podobně jako na obr. 26 pro $n = 7$). Dále všechna černá pole označíme písmeny A a B tak, aby žádná dvě černá pole mající společný právě jeden bod (vrchol) nebyla označena týmh písmenem. Budou-li rohová (černá) pole označena např. písmenem A, bude zřejmě počet polí A o n větší než počet polí B.

Pole šachovnice, která figurka požadovaným způsobem projde, označme postupně $1, 2, 3, \dots, n^2$ a k -tý tah zápisem $k \mapsto k + 1$. Je-li pole s číslem 1 černé, jsou černá právě pole s čísly $1, 2, 5, 6, 9, 10, \dots$; přitom každý (šikmý) tah $1 \mapsto 2, 5 \mapsto 6, 9 \mapsto 10, \dots$ spojuje černá pole označená různými písmeny, takže se celkové počty polí A a B liší nejvýše o 1, což odporuje zjištěnému rozdílu. Ke stejnému sporu dojdeme i v případě, kdy je pole s číslem 1 bílé, takže černá jsou právě pole s čísly $3, 4, 7, 8, 11, 12, \dots$ spojená (šikmými) tahy $3 \mapsto 4, 7 \mapsto 8, 11 \mapsto 12, \dots$

Tím je úloha vyřešena, jejímu zadání vyhovují všechna sudá $n \geq 2$.

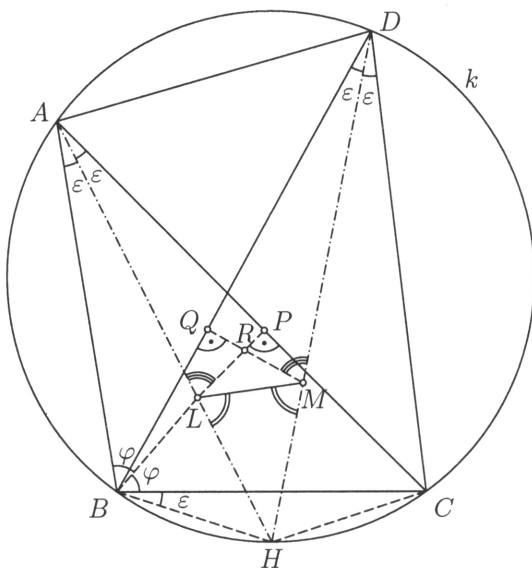
A – III – 2

Průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech A, D v trojúhelnících BCA, BCD označme H (obr. 27). Jak známo, je bod H středem příslušného oblouku BC kružnice k opsané čtyřúhelníku $ABCD$ (oblouku, který neobsahuje vrcholy A a D). Označme $\varepsilon = |\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle CAH| = |\sphericalangle BDH| = |\sphericalangle CDH| = |\sphericalangle CBH|$ a $\varphi = |\sphericalangle ABL| = |\sphericalangle CBL|$. Pak platí

$$|\sphericalangle BLH| = |\sphericalangle BAL| + |\sphericalangle ABL| = \varepsilon + \varphi = |\sphericalangle LBH|.$$

Trojúhelník HLB je tudíž rovnoramenný se základnou LB , takže $|HB| = |HL|$. Analogicky je i $|HC| = |HM|$. A protože $|HB| = |HC|$, je rovněž $|HL| = |HM|$, takže trojúhelník HML je rovnoramenný a platí $|\sphericalangle HLM| = |\sphericalangle HML|$.

Označme ještě P kolmý průmět bodu L na přímkou AC a Q kolmý průmět bodu M na přímkou BD (uvažovaný bod R je tak průsečíkem přímek LP a MQ). Protože pravoúhlé trojúhelníky APL a DQM se shodují v úhlech při vrcholech A a D , jsou shodné i úhly PLA a QMD při vrcholech L a M . Odtud a z rovnosti $|\sphericalangle HLM| = |\sphericalangle HML|$ tak vyplývá rovnost $|\sphericalangle PLM| = |\sphericalangle QML|$. To znamená, že trojúhelník LMR je rovnoramenný, jak jsme měli dokázat.



Obr. 27

A – III – 3

Uvažujme libovolnou funkci f požadovaných vlastností. Nejprve ukážeme, že je prostá. Jestliže $f(y_1) = f(y_2)$, pak pro všechna přirozená čísla x platí

$$y_1 f(x) = f(x f(y_1)) = f(x f(y_2)) = y_2 f(x),$$

a poněvadž $f(x)$ je přirozené číslo, plyne odtud $y_1 = y_2$, což znamená, že funkce f je prostá.

Volbou $x = 1$ v dané rovnici dostaneme $f(f(y)) = y f(1)$, což pro $y = 1$ dává $f(f(1)) = f(1)$. Protože f je prostá, plyne odtud

$$f(1) = 1, \quad (1)$$

takže pro všechna přirozená čísla y navíc platí

$$f(f(y)) = y. \quad (2)$$

Z právě odvozeného vztahu zároveň plyne, že oborem hodnot funkce f je celá množina $\mathbb{N}$. Můžeme tedy pro libovolné přirozené číslo z najít y ,

pro něž $y = f(z)$ a zároveň $f(y) = z$, takže podle vztahu ze zadání pak platí

$$f(xz) = f(xf(y)) = yf(x) = f(z)f(x).$$

Odtud lze matematickou indukcí snadno odvodit, že pro všechna přirozená čísla $n, x_1, x_2, \dots, x_n$ platí

$$f(x_1x_2 \dots x_n) = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n). \quad (3)$$

Ukážeme, že obraz $f(p)$ libovolného prvočísla p je také prvočíslo. Předpokládejme, že $f(p) = ab$, kde a, b jsou přirozená čísla různá od jedné. Podle (2) a (3) platí

$$p = f(f(p)) = f(ab) = f(a)f(b).$$

Protože funkce f je prostá a $f(1) = 1$, platí $f(a) > 1, f(b) > 1$, což odporuje předpokladu, že p je prvočíslo.

Jelikož $2007 = 3^2 \cdot 223$ je rozklad čísla 2007 na prvočinitele, dostaneme podle (3)

$$f(2007) = f^2(3)f(223),$$

kde obě čísla $f(3)$ a $f(223)$ jsou prvočísla. Jestliže $f(3) = 2$, potom podle (2) platí $f(2) = 3$ a nejmenší možná hodnota $f(223)$ je 5, takže $f(2007) \geq 20$. Pokud $f(3) = 3$, nejmenší možná hodnota $f(223)$ je 2 a platí $f(2007) \geq 18$. Snadno vidíme, že pro každou jinou volbu hodnot $f(3)$ a $f(223)$ platí $f(2007) \geq 18$.

Ukážeme, že existuje funkce vyhovující zadání, pro kterou platí $f(2007) = 18$. Definujme funkci f následujícím způsobem: Pro libovolné přirozené číslo x , které zapíšeme jako $x = 2^k 223^m q$, kde k a m jsou celá nezáporná čísla a q je přirozené číslo nesoudělné s čísly 2 a 223, zadáme hodnotu $f(x)$ vztahem

$$f(2^k 223^m q) = 2^m 223^k q.$$

Pak platí $f(2007) = f(223 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3^2 = 18$. Ověříme, že tato funkce f má požadovanou vlastnost. Nechť $x = 2^{k_1} 223^{m_1} q_1$ a $y = 2^{k_2} 223^{m_2} q_2$ jsou libovolná přirozená čísla zapsaná výše uvedeným způsobem. Potom

$$\begin{aligned} f(xf(y)) &= f(2^{k_1} 223^{m_1} q_1 f(2^{k_2} 223^{m_2} q_2)) = f(2^{k_1+m_2} 223^{m_1+k_2} q_1 q_2) = \\ &= 2^{k_2+m_1} 223^{m_2+k_1} q_1 q_2 \end{aligned}$$

a současně

$$yf(x) = 2^{k_2} 223^{m_2} q_2 f(2^{k_1} 223^{m_1} q_1) = 2^{k_2+m_1} 223^{m_2+k_1} q_1 q_2.$$

Závěr. Nejmenší možná hodnota čísla $f(2007)$ je 18.

Poznámka. Z výše uvedeného řešení vyplývá, že každá funkce f , která vyhovuje dané funkcionální rovnici, je určena nějakou bijekcí φ množiny prvočísel na sebe, která pro každé prvočíslo p splňuje rovnost $\varphi(\varphi(p)) = p$, a to předpisem

$$f(1) = 1,$$

$$f(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}) = \varphi(p_1)^{k_1} \varphi(p_2)^{k_2} \dots \varphi(p_m)^{k_m},$$

kde p_i jsou navzájem různá prvočísla a k_i nezáporná celá čísla. Každá bijekce φ uvedené vlastnosti rozkládá množinu prvočísel na sjednocení jednoprvkových a dvouprvkových navzájem disjunktních množin takových, že pro každou z nich tvaru $\{p\}$ platí $\varphi(p) = p$ a pro každou z nich tvaru $\{p_1, p_2\}$ platí $\varphi(p_1) = p_2$, $\varphi(p_2) = p_1$. Naopak každý takový rozklad určuje vyhovující bijekci φ .

A – III – 4

Ukážeme, že uvedený závěr obecně neplatí. Jako protipříklad zvolíme množinu

$$M = \mathbb{N} \setminus \{a: a+1 \text{ je prvočíslo větší než } 2008\},$$

která zřejmě obsahuje všechna čísla od 1 do 2007. Přitom aritmetická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvním členem $a_1 = n \in M$ a diferencí $d = n+1$ má obecný člen tvaru

$$a_k = a_1 + (k-1)d = n + (k-1)(n+1) = (n+1)k - 1,$$

odkud plyne, že číslo $a_k + 1 = (n+1)k$ není prvočíslo pro žádný index $k > 1$, takže a_k leží v M pro každý index k (ať už $a_k \leq 2007$, nebo $a_k \geq 2008$). Protože prvočísel je nekonečně mnoho, je nekonečně mnoho i přirozených čísel, která ve zvolené množině M neleží.

Jiné řešení. Každá vyhovující množina M musí obsahovat všechny členy 2007 aritmetických posloupností s prvním členem k a diferencí $k+1$, kde $k \leq 2007$:

$$A_1 = (1, 3, 5, \dots), \quad A_2 = (2, 5, 8, \dots), \quad \dots,$$

$$A_{2007} = (2007, 4015, 6023, \dots).$$

Zřejmě množina hodnot $A_k = \{k, 2k + 1, 3k + 2, \dots\}$ posloupnosti A_k je pro každé k tvořena všemi přirozenými čísly tvaru $i(k + 1) + k$ s celým nezáporným i .

Vysvětlíme, proč

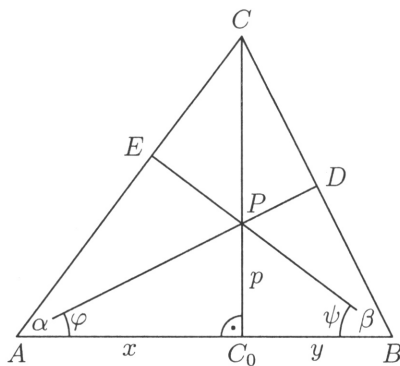
$$M = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{2\,007}$$

je nejmenší množina požadované vlastnosti. Ukážeme totiž, že pokud $n \in A_k$ pro některá čísla n a k , pak $A_n \subseteq A_k$. Nechť tedy $n \in A_k$ a $m \in A_n$. Pak platí $n = i(k + 1) + k$ a $m = j(n + 1) + n$ pro vhodná celá nezáporná i a j , odkud $m = j(i + 1)(k + 1) + i(k + 1) + k = (ji + j + i)(k + 1) + k$, což znamená, že $m \in A_k$.

Existuje však nekonečně mnoho přirozených čísel, která v sestrojené „minimální“ vyhovující množině M neleží; jsou to například všechny násobky čísla $2\,008!$.

A – III – 5

Označme $\varphi = |\sphericalangle BAD|$ a $\psi = |\sphericalangle ABE|$ (obr. 28). Z rovnosti obvodových úhlů $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB|$ v tětivovém čtyřúhelníku $ABDE$ tak při ob-



Obr. 28

vyklém značení úhlů v trojúhelníku ABC plyne

$$\alpha + \psi = \beta + \varphi. \quad (1)$$

Označme C_0 patu výšky z vrcholu C , v_c velikost výšky CC_0 a x , y , p velikosti příslušných úseků AC_0 , BC_0 , PC_0 (obr. 28), takže

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{x}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{p}{y}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_c}{x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{v_c}{y}. \quad (2)$$

Pokud bod P není průsečík výšek (tj. úhel $\alpha + \psi$ není pravý), můžeme podle (1) psát

$$\operatorname{tg}(\alpha + \psi) = \operatorname{tg}(\beta + \varphi),$$

což podle známého vzorce pro tangens součtu po dosazení z (2) dává (využíváme rovnost $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \varphi$, která z (2) navíc plyne)

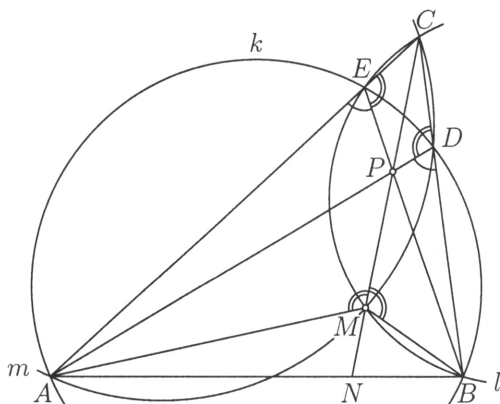
$$\frac{v_c}{x} + \frac{p}{y} = \frac{v_c}{y} + \frac{p}{x}$$

neboli

$$(p - v_c)(x - y) = 0.$$

Protože vzhledem k daným předpokladům je $p < v_c$ a $x \neq y$, nemůže poslední rovnost platit. Je tedy $\alpha + \psi = 90^\circ$ a bod P je průsečíkem výšek, což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Označme k kružnici opsanou tětívkovému čtyřúhelníku $ABDE$ a uvažme ještě kružnice l a m opsané trojúhelníkům BEC a ADC (obr. 29). Protože tětiva BE kružnice l protíná tětivu AD kružnice m



Obr. 29

v bodě P , mají kružnice l , m kromě bodu C ještě další průsečík, který označíme M . Z uvedené konstrukce vyplývá, že bod P leží uvnitř každé ze tří uvažovaných kružnic a má k nim stejnou mocnost (je to jejich *potenční bod*), proto bod P leží uvnitř úsečky CM .

Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou BC kružnice l plyne $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BEC| = 180^\circ - |\sphericalangle AEB|$ a analogicky $|\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle ADC| = 180^\circ - |\sphericalangle ADB|$, což vzhledem k rovnosti obvodových

úhlů $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB|$ nad tětivou AB kružnice k znamená, že

$$|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle AMC|.$$

Označme N patu výšky z vrcholu C trojúhelníku ABC . Pokud $M \neq N$, znamená poslední rovnost, že pravoúhlé trojúhelníky BNM a ANM jsou shodné, což ovšem odporuje předpokladu $|AC| \neq |BC|$. Je proto $M = N$, $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle AMC| = 90^\circ$ a bod P je tak průsečíkem výšek trojúhelníku ABC , což jsme chtěli dokázat.

A – III – 6

Jsou-li x, y, z tři navzájem různá reálná čísla, pak hodnoty

$$u = \frac{x-y}{y-z}, \quad v = \frac{y-z}{z-x}, \quad w = \frac{z-x}{x-y} \quad (1)$$

jsou zřejmě čísla různá od 0 a -1 a jejich součin je roven 1. Stejnou vlastnost tedy musí mít i hodnoty x, y, z z každé hledané trojice. Budeme proto neustále předpokládat, že platí vztahy

$$x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \quad x \neq y \neq z \neq x, \quad xyz = 1. \quad (2)$$

Protože daná množinová rovnice je pro uspořádané trojice (x, y, z) , (z, x, y) a (y, z, x) stejná, budeme kromě (2) předpokládat, že platí $x > \max\{y, z\}$, a rozlišíme dva případy podle toho, zda $y > z$, nebo $z > y$. Zavedme ještě označení intervalů $I_1 = (0, \infty)$, $I_2 = (-1, 0)$, $I_3 = (-\infty, -1)$.

Případ $x > y > z$. Pro zlomky (1) zřejmě platí $u \in I_1, v \in I_2$ a $w \in I_3$, takže $u > v > w$. Daná množinová rovnice proto může být splněna jedinečně tak, že $u = x, v = y$ a $w = z$. Po dosazení zlomků (1) a snadné úpravě dojdeme k rovnicím

$$xy + y = yz + z = zx + x, \quad \text{kde } x \in I_1, y \in I_2, z \in I_3. \quad (3)$$

Podle podmínky $xyz = 1$ z (2) můžeme do rovnice $xy + y = zx + x$ za člen zx dosadit $1/y$ a rovnici dále upravit:

$$xy + y = \frac{1}{y} + x \Rightarrow x(y-1) = \frac{1-y^2}{y} \Rightarrow x = -\frac{1+y}{y} \Rightarrow y = -\frac{1}{1+x}.$$

(Využili jsme toho, že s ohledem na $y \in I_2$ platí $y \neq 1$.) Z posledního vzorce plyne, že hodnota prvního výrazu v soustavě (3) je rovna -1 , takže z rovnosti druhého výrazu -1 máme

$$z = -\frac{1}{1+y} = -\frac{1}{1-\frac{1}{1+x}} = -\frac{1+x}{x},$$

pak ovšem i třetí výraz v (3) je roven -1 . Proto každé řešení naší úlohy (ve zkoumaném případě, kdy $x > y > z$) je tvaru

$$(x, y, z) = \left(t, -\frac{1}{1+t}, -\frac{1+t}{t}\right), \quad (4)$$

kde $t \in I_1$ je libovolné (protože platí (3), zkouška není nutná). Z uvedeného postupu rovněž plyne, že volbou $t \in I_2$ (resp. $t \in I_3$) ve vzorci (4) dostaneme všechna řešení naší úlohy s vlastností $z > x > y$ (resp. $y > z > x$), takže při výpisu všech řešení v závěrečné odpovědi není nutné uvádět cyklické permutace trojic ze vzorce (4).

Případ $x > z > y$. Pro zlomky (1) tentokrát platí $u \in I_3$, $v \in I_1$ a $w \in I_2$, takže $v > w > u$, a daná množinová rovnice je tudíž splněna, právě když $u = y$, $v = x$ a $w = z$. Po dosazení zlomků z (1) dojdeme k soustavě

$$x - y = y(y - z), \quad y - z = x(z - x), \quad z - x = z(x - y). \quad (5)$$

Sečtením těchto tří rovnic dostaneme

$$0 = y(y - z) + x(z - x) + z(x - y) = (y - x)(x + y - 2z),$$

odkud vzhledem k $x \neq y$ plyne $z = \frac{1}{2}(x + y)$. Po dosazení zpět do (5) snadno zjistíme (opět s ohledem na $x \neq y$), že vyhovuje pouze $x = 1$, $y = -2$ a $z = -\frac{1}{2}$. Stejnou trojici čísel je tvořeno (jediné) řešení úlohy s vlastností $y > x > z$, jakož i (jediné) řešení, pro něž $z > y > x$.

Odpověď: Řešením úlohy jsou všechny uspořádané trojice (4), kde $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, a tři trojice (x, y, z) tvaru

$$\left(1, -2, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 1, -2\right), \left(-2, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Poznámka. Vypíšeme-li všech šest možných soustav odpovídajících dané množinové rovnici, dostaneme kromě soustav (3) a (5) ještě soustavy

$$\begin{array}{lll} x - y = z(y - z), & y - z = y(z - x), & z - x = x(x - y); \\ x - y = x(y - z), & y - z = z(z - x), & z - x = y(x - y); \\ x - y = y(y - z), & y - z = z(z - x), & z - x = x(x - y); \\ x - y = z(y - z), & y - z = x(z - x), & z - x = y(x - y). \end{array}$$

První dvě vzniknou ze soustavy (5) cyklickou záměnou proměnných, takže je lze řešit týž postupem jako (5). Sečtením všech tří rovnic v každé ze dvou zbývajících soustav dostaneme tutéž rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \quad \text{neboli} \quad (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0,$$

která má jediné řešení $x = y = z$, což nejsou navzájem různá čísla.

Jiné řešení. Jsou-li x, y, z tři navzájem různá reálná čísla, pak hodnoty

$$u = \frac{x - y}{y - z}, \quad v = \frac{y - z}{z - x}, \quad w = \frac{z - x}{x - y} \quad (1)$$

jsou zřejmě různé od čísel 0 a -1 a platí mezi nimi vztahy

$$v = f(u), \quad w = f(v) \quad \text{a} \quad u = f(w), \quad (2)$$

kde f je lineární lomená funkce daná předpisem $f(t) = -\frac{1}{1+t}$. Přesvědčíme se o tom přímým výpočtem:

$$f(u) = -\frac{1}{1+u} = -\frac{1}{1+\frac{x-y}{y-z}} = -\frac{y-z}{(x-y)+(y-z)} = \frac{y-z}{z-x} = v;$$

z důvodu cykličnosti platí i zbývající dva vztahy v (2).

Uvedený poznatek znamená, že každé řešení úlohy je pro vhodné $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ buďto uspořádaná trojice tvaru

$$(x, y, z) = (t, f(t), f(f(t))) = \left(t, -\frac{1}{1+t}, -\frac{1+t}{t}\right), \quad (3)$$

nebo uspořádaná trojice tvaru

$$(x, y, z) = (t, f(f(t)), f(t)) = \left(t, -\frac{1+t}{t}, -\frac{1}{1+t}\right). \quad (4)$$

Zbývá provést zkoušku: snadno se přesvědčíme, že zatímco trojice tvaru (3) je řešením pro každé $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, trojice tvaru (4) vyhovují pouze pro $t = 1$, $t = -2$ a $t = -\frac{1}{2}$ a jsou to cyklické permutace těchto tří hodnot.

Kategorie P

Texty úloh

P – I – 1

Pizza kolem

Marco se rozhodl, že využít své kulinářské i cyklistické dovednosti a založí si firmu pro výrobu a rozvoz pizzy. Firmu plánuje provozovat tak, že vždy nejdříve bude shromažďovat objednávky, a když jich bude dostatek, tak pizzy upeče, sedne na kolo a rozveze je zákazníkům. Protože Marco je lepší cyklista než kuchař, tak zatím ve své nabídce plánuje pouze jeden druh pizzy. Aby se ale odlišil od konkurence, tak přijímá objednávky i na šestinové části pizzy. Lze si u něj objednat například $1/6$, $4/6$ nebo $15/6$ pizzy. Navíc, jako speciální službu zákazníkům, chce Marco pizzy pro každého zákazníka dodat co nejméně rozřezané (aby si zákazník sám mohl rozhodnout, jak si dále pizzu rozdělí). Proto například $4/6$ pizzy chce dodat jako jeden kus příslušné velikosti a $15/6$ chce dodat jako 2 celé pizzy a k nim jednu polovinu pizzy (Marco chce také dodat co nejvíce pizz vcelku, takže uspokojení této objednávky třemi kusy velikosti $5/6$ nepřipadá v úvahu).

Až když Marco všude rozdál letáky propagující jeho novou firmu, tak si uvědomil, že díky jeho speciální službě zákazníkům není jednoduché zkombinovat objednávky tak, aby mu moc kusů pizzy nezbylo. Obrátil se proto na vás, abyste mu napsali program, který by mu s problémem pomohl. Pro začátek by mu stačil program, který na vstupu dostane objednávky a na výstup vypíše, kolik pizz má Marco napéct.

Formát vstupu: Na prvním řádku vstupního souboru `pizza.in` se nachází celé číslo N , $1 \leq N \leq 10\,000$ — počet objednávek. Ve vstupním souboru pak následuje N řádků. Každý řádek popisuje jednu objednávku a obsahuje jedno celé číslo c , $1 \leq c \leq 100$, které je počet objednaných šestin pizzy.

Formát výstupu: Výstupní soubor `pizza.out` bude obsahovat jedno celé číslo p , které značí nejmenší možný počet pizz, které je třeba upéct,

aby šlo splnit všechny objednávky a byla dodržena speciální služba zákazníkům.

Příklad 1:

pizza.in	pizza.out
3	2
2	(z jedné pizzy lze například uříznout dva kusy
2	o velikosti $2/6$ a z druhé pizzy se uřízne kus
3	velký $3/6$)

Příklad 2:

pizza.in	pizza.out
3	3
4	(kvůli požadavku na dodání co nejméně rozřezaných kousků pizzy je třeba pro každou objednávku upéct celou pizzu)
5	
3	

P – I – 2

Zasypané město

Archeolog Bedřich Hrozný zkoumá nově nalezené zasypané město v poušti. Jako první krok se rozhodl, že pomocí sonaru určí, kolik místností měly všechny domy ve městě dohromady.

Kus pouště, kde město leželo, si Bedřich pokryl čtvercovou sítí o rozměrech $M \times N$. Se sonarem postupně projel všechny řádky takto vytvořené čtvercové sítě a svá měření si zaznamenal. Pro jednoduchost předpokládal, že pod každým polem této sítě se nachází buď kamení, nebo písek. Na základě získaných dat by rád určil, kolik místností (souvisejících oblastí písku) v zasypaném městě bylo.

Soutěžní úloha. Na vstupu je dán popis zasypaného města, které si představujeme jako čtvercovou síť o rozměrech $M \times N$. Políčka čtvercové sítě jsou popsána po řádcích od horního ke spodnímu a na jednotlivých řádcích postupně zleva doprava. Bedřich si svá měření zapsal pomocí dvojic čísel, kde první číslo znamená počet políček s pískem a druhé počet políček s kamením. Data získaná ze sonaru tedy tvoří K dvojic nezáporných čísel (p, q) . Dvojice (p, q) reprezentuje, že z následujících $p + q$ políček je prvních p políček tvořeno jen pískem a zbylých q políček je tvořeno kamením. Každý úsek takovýchto $p + q$ políček leží pouze v jednom řádku čtvercové sítě, tj. žádná dvojice (p, q) neodpovídá úseku políček na dvou či více řádcích.

Vášim úkolem je spočítat počet místností v zasypaném městě. Místností se rozumí souvislá oblast písku, která už v žádném směru nejde zvětšit. Dvě políčka čtvercové sítě považujeme za sousední, pokud mají společnou hranu, nikoliv jen vrchol.

Formát vstupu: Na prvním řádku souboru `mesto.in` se nacházejí tři nezáporná čísla M , N a K — počet řádků a sloupců čtvercové sítě města a počet dvojic, které popisují její obsah. Je známo, že M i N jsou menší než 50 000 a že K je menší než 1 000 000 000. Každý z dalších K řádků obsahuje dvě *nezáporná* čísla p a q , kde p je počet políček zasypaných pískem a q je počet políček, pod kterými jsou kameny. Políčka jsou popsána po řádcích od horního řádku sítě, na jednotlivých řádcích zleva doprava. Navíc žádná dvojice (p, q) nepopisuje políčka obsažená na více řádcích.

Pokud se Vám nepodaří vyřešit úlohy s výše popsánými omezeními na M , N a K , předpokládejte, že každé M a N jsou nejvýše 500 a K je nejvýše 100 000.

Formát výstupu: Jediný řádek souboru `mesto.out` by mělo tvořit jediné nezáporné číslo — počet místností v zasypaném městě. Všimněte si, že pokud pod všemi políčky je jen kamení, bude toto číslo rovno nule.

Příklad:

`mesto.in` `mesto.out`

4 4 7 3

0 4

2 1

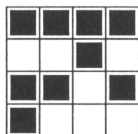
1 0

0 2

1 1

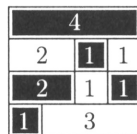
0 1

3 0

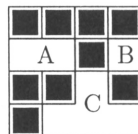


Zasypané město

■ kamení
□ písek



Zasypané město,
jak ho vidí sonar



Místnosti
zasypaného města
označené A, B, C.

Okružní jízda

Ve Stínové Praze je komplikovaný dopravní systém. Tvoří ho křižovatky, navzájem propojené ulicemi, ale na rozdíl od reálné Prahy může do jedné křižovatky vést libovolný počet ulic. Zajisté chápete, že řízení dopravy ve Stínové Praze je velmi složité a často dochází k nehodám. Radní ve Stínové Praze se rozhodli zlepšit dopravní situaci. Nejprve ze všech ulic udělali jednosměrky, a to tak, že do každé křižovatky vchází alespoň jedna ulice a z každé křižovatky vychází alespoň jedna ulice. Pak navíc na každé křižovatce zakázali jednu možnost odbočení (tedy před touto změnou se křižovatka, do níž vede k ulic a z níž vede l ulic, dala projet kl způsoby; nyní je možné ji projet jen $kl - 1$ způsoby). Stínoví Pražané si ale začali stěžovat, že se nedokážou dostat z domu do práce či naopak. Aby podobná tvrzení vyvrátili, rozhodli se radní dokázat, že se dá z každé ulice dostat do každé jiné. Dělat to pro každou dvojici ulic zvlášť by bylo pracné, proto chtějí nalézt „okružní jízdu“ — tj. cyklickou posloupnost ulic takovou, že všechna odbočení v ní jsou povolena, nikde se v ní nejede v protisměru a každá ulice se v ní vyskytuje právě jednou. Všimněte si, že taková posloupnost nemusí existovat: např. pokud existuje křižovatka, do které vede méně ulic, než kolik z ní vychází.

Formát vstupu: Na prvním řádku vstupního souboru `okruh.in` jsou dvě přirozená čísla n a m , udávající počet křižovatek a počet ulic ve Stínové Praze. Křižovatky jsou očíslovány přirozenými čísly od 1 do n . Následujících m řádků popisuje ulice. Na každém z nich je dvojice čísel u a v ($1 \leq u, v \leq n$), znamenající, že z křižovatky u vede jednosměrná ulice do křižovatky v . Mezi dvěma křižovatkami může vést v každém směru nejvýše jedna ulice. Dále následuje n řádků, i -tý z nich popisuje, jaké odbočení je zakázáno na i -té křižovatce. Jsou-li na i -tém řádku čísla u a v ($1 \leq u, v \leq n$), pak jedeme-li po ulici z u do i , nesmíme odbočit do ulice z i do v .

Formát výstupu: Do výstupního souboru `okruh.out` vypište posloupnost čísel $v_1, v_2, \dots, v_m$ ($1 \leq v_i \leq n$ pro každé i) takovou, že:

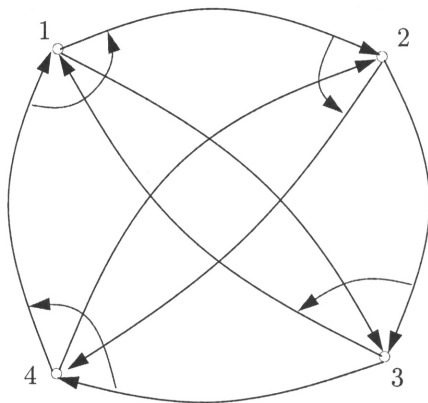
- ▷ z v_i do v_{i+1} (pro $1 \leq i \leq m$) vede ulice,
- ▷ jedeme-li ulicí z v_i do v_{i+1} , je povoleno odbočit do ulice z v_{i+1} do v_{i+2} (pro $1 \leq i \leq m$), a
- ▷ každá ulice je použita, tj. existuje-li ulice z u do v , pak existuje i tak, že $v_i = u$ a $v_{i+1} = v$.

Indexy počítáme cyklicky, tj. $v_{m+1} = v_1$ a $v_{m+2} = v_2$. Pokud existuje

více takových posloupností, vypište libovolnou z nich. Pokud taková posloupnost neexistuje, vypište řetězec „Okružní jízda neexistuje.“.

Příklad 1:

okruh.in	okruh.out (jeden ze správných výstupů)
4 8	
1 2	1 2 3 4 2 4 1 3
2 3	
3 1	
3 4	
1 3	
4 2	
2 4	
4 1	
4 2	
1 4	
2 1	
3 1	



Příklad 2:

okruh.in	okruh.out
3 3	Okružní jízda neexistuje.
1 2	
2 3	
3 1	
3 2	
1 3	
2 1	

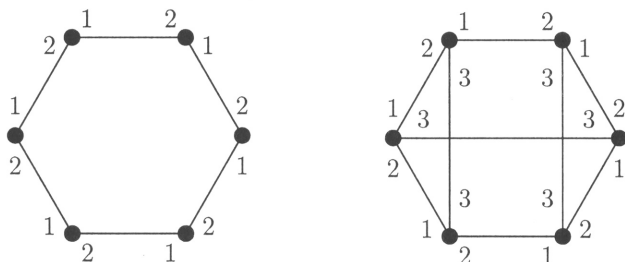
P – I – 4

Grafomat

Grafem nazveme libovolnou konečnou množinu V vrcholů grafu spolu s množinou E hran, což jsou neuspořádané dvojice vrcholů. Žádné dva vrcholy nejsou spojeny více hranami, žádná hrana nespojuje vrchol se sebou samým.

K-graf budeme říkat takovému grafu, ve kterém s každým vrcholem sousedí právě K hran a konce těchto hran jsou očíslovány přirozenými čísly od 1 do K . Oba konce jedné hrany přitom mohou být očíslovány různě.

ně. Pokud budeme hovořit o hranách vycházejících z nějakého vrcholu v , budeme zmiňovat *místní* čísla hran (to jsou čísla konce, kterým je v) a čísla *protější* (to jsou ta zbývající). Pro každý vrchol jsou místní čísla všech jeho hran navzájem různá. Následující obrázek ukazuje příklad 2-grafu a 3-grafu:



Ohodnocení grafu nazveme přiřazení prvků nějaké konečné množiny vrcholům grafu — tedy například rozdělení vrcholů na černé a bílé nebo označení vrcholů čísly od 1 do 5.

Grafomat je zařízení pro automatické řešení grafových úloh. Jeho vstupem je libovolný K -graf G spolu s jeho ohodnocením; výstupem je nějaké další ohodnocení téhož grafu. Samotný výpočet je vykonáván *automaty* umístěnými v jednotlivých vrcholech grafu. Každý automat má svou paměť a řídí se programem. Programy všech automatů jsou identické, zatímco paměť má každý automat svoji a mimo to ještě může nahlížet do paměti svých grafových sousedů.

Paměť automatu je tvořena konečným množstvím proměnných, které si můžeme představit jako pascalské proměnné typu interval. Obsahují tedy přirozená čísla v nějakém pevném rozsahu, který nezávisí na velikosti vstupu. Mimo to je také možné používat pole intervalových proměnných, jejichž indexy jsou opět z pevných intervalů. Žádné jiné typy proměnných (neomezeně velká čísla, ukazatele, ...) použít nelze.

Zvláštní roli hrají proměnné x a y . Proměnná x na počátku výpočtu obsahuje vstupní ohodnocení toho vrcholu grafu, ke kterému patří, hodnota proměnné y na konci výpočtu určí výstupní ohodnocení vrcholu. Všechny proměnné s výjimkou proměnné x mají svou počáteční hodnotu pevně určenu. Deklarace proměnných vypadá například takto:

```
var x: 1..5;      { číslo od 1 do 5, na počátku vstup }
    y: 1..5 = 3; { číslo od 1 do 5, na počátku 3,
                  na konci výstup }
    z: array [1..2] of 3..4 = (3, 4); { pole dvou čísel }
```


Řídící program automatu si můžeme představit jako pascalský program, v němž si zakážeme používat rekurzi a který bude manipulovat pouze s proměnnými v paměti automatu a případně i automatů sousedních. Na své vlastní proměnné se automat odkazuje jejich jmény, jako by to byly obyčejné pascalské globální proměnné, na proměnné sousedů pak konstrukcí $S[i].p$. Zde i je celočíselný výraz s hodnotou $1 \dots K$, jenž značí, o kolikátého souseda se jedná, tedy místní číslo hrany, kterou je soused připojen; p je jméno libovolné proměnné. Proměnné sousedů je možné pouze číst.

Aby mohl program dávat do souvislostí své hrany s hranami svých sousedů, má k dispozici ještě proměnné $P[1], \dots, P[K]$, které jsou pevně nastaveny tak, že $P[i]$ obsahuje protějščí číslo hrany s místním číslem i . Výraz $S[i].S[P[i]].x$ je tedy totéž jako samotné x . (Pozor, zatímco druhé S je odkaz na proměnnou patřící sousedovi, proměnná P v indexu je opět místní.)

Výpočet grafomatu probíhá v taktech, a to následovně: V nultém taktu se proměnné všech automatů nastaví na počáteční hodnoty a proměnné x na vstupní ohodnocení jednotlivých vrcholů. V každém dalším taktu se pak vždy jednou spustí program každého automatu, přičemž proměnné svých sousedů vidí program ve stavu, v jakém byly na začátku taktu. Ačkoliv tedy jednotlivé automaty běží současně, nemůže se stát, že by jeden četl z proměnné, do které právě druhý zapisuje.

Výpočet pokračuje tak dlouho, dokud v nějakém taktu všechny automaty neprovedou příkaz *stop*. Pak se výpočet zastaví a z proměnných y grafomat přečte výstupní ohodnocení grafu. Pokud příkaz *stop* provedou jen některé automaty, výpočet pokračuje, a to i na těchto automatech. Struktura grafu, jakož i obsah proměnných P zůstává po celou dobu výpočtu konstantní.

Za *časovou složitost* výpočtu budeme považovat počet taktů, které uběhnou do zastavení. Nijak tedy nezávisí na rychlosti programů jednotlivých automatů. Podobně jako u časové složitosti klasických algoritmů nebudeme hledět na multiplikativní konstanty a bude nás zajímat pouze asymptotické chování složitosti, tedy zda je lineární, kvadratická, atd. Případy, kdy výpočet neskončí, nebudeme připouštět, pro úplnost ale dodejme, že tehdy se nutně musí hodnoty proměnných periodicky opakovat.

Příklad 1: Je dán 3-graf a v něm vyznačen jeden vrchol v , a to tak, že jeho proměnná x bude inicializována jedničkou, zatímco všem ostatním

vrcholům nulou. Napište program pro grafomat, který označí všechny vrcholy z vrcholu v dosažitelné po hranách, a to tak, že jejich proměnná y bude na konci výpočtu rovna jedné, zatímco u nedosažitelných vrcholů bude nulová.

Řešení: Inspirujeme se prohledáváním grafu do šířky. V každém taktu se každý vrchol podívá, zda některý z jeho sousedů je již označen a pokud ano, také se sám označí. Pokud se označení nezmění, vrchol voláním **stop** souhlasí se zastavením. Průběh výpočtu tedy bude vypadat tak, že v i -tém taktu budou označeny ty vrcholy, jejichž vzdálenost od v je menší nebo rovna i . Výpočet zastaví, jakmile se hodnoty proměnných přestanou měnit, tj. po nejvýše N taktech. Proto je časová složitost našeho programu lineární v počtu vrcholů (na rozdíl od klasického průchodu do šířky nezávisí na počtu hran).

Program vypadá následovně:

```
var x: 0..1;           { byl vrchol označen ve vstupu? }
    y: 0..1 = 0;       { je označen teď? }
    prev: 0..1 = 0;     { předchozí stav }
    i: 1..3;
begin
  prev := y;           { zapamatujeme si, jestli už byl označen }
  if x=1 then y := 1;   { přeneseme označení ze vstupu }
  for i := 1 to 3 do     { podívejme se na všechny sousedy }
    if S[i].y <> 0 then { je-li i-tý soused označen, }
      y := 1;           { označ i sebe sama }
  if y = prev then stop; { pokud se nic nemění,
                        můžeme končit }
end.
```

Příklad 2: Mějme 2-graf složený z jediného cyklu sudé délky (tj. z vrcholů očíslovaných $0 \dots N-1$, přičemž vrchol i je spojen hranou označenou 1 s vrcholem $(i+1) \bmod N$ a hranou označenou 2 s vrcholem $(i-1) \bmod N$; příklad takového grafu pro $N=6$ najdete na obrázku na začátku tohoto textu). V tomto grafu je vyznačen jeden vrchol v . Napište program pro grafomat, který označí vrchol protilehlý k v , tedy vrchol s číslem $(v + N/2) \bmod N$.

Řešení: Vyšleme „signál“ putující z vrcholu v ve směru jedničkových hran rychlostí 1 vrchol za takt a druhý signál putující stejnou rychlostí opačným směrem. Jakmile nějaký vrchol zjistí, že do něj přišly oba signály, označí se a signály již dál nepředává.

```

var x: 0..1;          { vstupní značka u vrcholu }

y: 0..1 = 0;          { výstupní značka }
l, r: 0..1 = 0; { už tímto vrcholem prošel signál
                  doleva a doprava? }

begin
  if x=1 then          { začínáme posílat }
    begin x := 0; l := 1; r := 1; end
  else if (S[2].l=1) and (S[1].r=1) then
    { signály se v tomto vrcholu potkaly }
    begin y := 1; stop; end
  else if (S[2].l=1) and (l=0) then l := 1
    { předáme signál doleva }
  else if (S[1].r=1) and (r=0) then r := 1
    { předáme signál doprava }
  else stop;           { nic se neděje => můžeme končit }
end.

```

Soutěžní úloha. Napište program pro grafomat, který v zadaném 3-grafu s vyznačenými dvěma vrcholy nalezne nejkratší cestu vedoucí mezi nimi a vyznačí vrcholy ležící na této cestě. Můžete předpokládat, že cesta vždy existuje. Pokud je nejkratších cest více, vyberte si libovolnou z nich.

Vstup bude tvořen proměnnou x , která bude v prvním ze zadaných vrcholů rovna jedné, v druhém dvěma a ve všech ostatních vrcholech nulová.

Výstupem programu bude proměnná y ve vrcholech nejkratší cesty jedničková, jinde nulová.

Pokuste se nalézt takový program, jehož časová složitost bude záviset pouze na délce sestavené cesty a ne na velikosti celého grafu.

P – II – 1

Zasypané město

Archeolog Bedřich Hrozný již s vaší pomocí zmapoval zasypané město, které objevil. Nyní by rád započal s vykopávacími pracemi. Požádal o pomoc místní univerzitu, která mu dala k dispozici N studentů prvního a N studentů druhého ročníku. Každý ze studentů, které má k dispozici, studuje jednu z následující tří specializací: starověká historie, středověká historie nebo archeologie. Bedřich Hrozný by rád rozdělil studenty do N dvojic tak, aby v každé dvojici byl jeden student prvního a jeden student

druhého ročníku. Navíc chce, aby studenti v každé dvojici měli různé specializace, a tak se jejich znalosti vzájemně doplňovaly.

Pokuste se najít řešení, jehož časová složitost je co nejmenší, pokud odhlédnete od času potřebného na načtení vstupu.

Formát vstupu: Vstupní soubor se jmenuje `mesto.in`. Jeho první řádek obsahuje číslo N , které udává počet studentů prvního (a druhého) ročníku. Každý ze zbývajících $2N$ řádků obsahuje jedno číslo a řetězec `starovek`, `stredovek` nebo `archeologie`, které udávají ročník a specializaci jednotlivých studentů. Číslo a řetězec jsou vždy odděleny jednou mezerou.

Formát výstupu: Výstupní soubor se jmenuje `mesto.out`. Pokud studenty nelze rozdělit do dvojic dle požadavků Bedřicha Hrozného, výstupní soubor obsahuje jediný řádek s textem „Studenty nelze rozdelit do dvojic.“. V opačném případě soubor obsahuje N řádků, z nichž každý obsahuje dva řetězce, které jsou `starovek`, `stredovek` a `archeologie`. Tyto řetězce jsou odděleny jednou mezerou a udávají specializace studentů prvního a druhého ročníku (v tomto pořadí) v jednotlivých dvojicích.

Příklad:

<code>mesto.in</code>	<code>mesto.out</code>
3	<code>starovek stredovek</code>
1 <code>starovek</code>	<code>starovek archeologie</code>
1 <code>starovek</code>	<code>stredovek starovek</code>
2 <code>archeologie</code>	
1 <code>stredovek</code>	
2 <code>stredovek</code>	
2 <code>starovek</code>	

P – II – 2

Okružní jízda

Z domácího kola si zajisté vzpomínáte na Stínovou Prahu a její problémy s dopravou. Přesto si ale její popis připomeneme. Stínovou Prahu tvoří křižovatky, navzájem propojené ulicemi. Na rozdíl od reálné Prahy může do jedné křižovatky vést libovolný počet ulic větší než tři. Na začátku letošního ročníku se radní rozhodli zvýšit bezpečnost dopravy následujícím způsobem: Nejprve ze všech ulic udělali jednosměrky, a to tak, že do každé křižovatky vchází stejný počet ulic, jaký z ní vychází. Pak

navíc na každé křižovatce zakázali jednu možnost odbočení (tedy před touto změnou se křižovatka, do níž a z níž vedlo k ulic, dala projet k^2 způsoby; po změně to bylo možné jen $k^2 - 1$ způsoby). Přes odpor Stínových Pražanů se tuto vyhlášku podařilo prosadit a dnes dorazily ze statistického úřadu první výsledky: počet dopravních nehod se zdvojnásobil.

Na krizové poradě se radní rozhodli pro nový pokus: zruší se jednosměrky (každou ulici tedy lze projet oběma směry), zato se na každé křižovatce zakázají tři možnosti odbočení. Zákaz je také „obousměrný“, tj. je-li zakázáno na dané křižovatce odbočit z a -té ulice do b -té ulice, je také zakázáno odbočit z b -té ulice do a -té ulice. Křižovatku t ulic lze tedy projet $t(t-1) - 6$ způsoby. Vzhledem k historii Stínové Prahy je t vždy sudé a $t \geq 4$.

Aby se radní tentokrát vyhnuli fámám o autech duchů, donekonečna jezdících v ulicích Stínové Prahy bez možnosti dosáhnout cíle, požádali vás opět o nalezení „okružní jízdy“ — cyklické posloupnosti ulic takové, že všechna odbočení v ní jsou povolena a každá ulice se v ní vyskytuje právě jednou.

Formát vstupu: Na prvním řádku vstupního souboru `okruh.in` jsou dvě přirozená čísla n a m , která udávají počet křižovatek a počet ulic ve Stínové Praze. Křižovatky jsou očíslovány přirozenými čísly od 1 do n . Následujících m řádků popisuje ulice. Na každém z nich je dvojice čísel u a v ($1 \leq u, v \leq n$), znamenající, že mezi křižovatkami u a v vede ulice. Mezi dvěma křižovatkami může vést nejvýše jedna ulice. Dále následuje n řádků, i -tý z nich popisuje, jaká odbočení jsou zakázána na i -té křižovatce a obsahuje šest přirozených čísel. Pokud jsou na něm čísla u_1, v_1, u_2, v_2, u_3 a v_3 ($1 \leq u_j, v_j \leq n$), říkají, že jedeme-li po ulici z u_j -té křižovatky, $1 \leq j \leq 3$, na i -tou křižovatku, nesmíme odbočit do ulice vedoucí k v_j -té křižovatce, a naopak, přijíždíme-li z v_j -té křižovatky, nesmíme pokračovat směrem k u_j -té.

Formát výstupu: Do výstupního souboru `okruh.out` vypište posloupnost čísel $v_1, v_2, \dots, v_m$ ($1 \leq v_i \leq n$ pro každé i) takovou, že:

- ▷ z v_i do v_{i+1} (pro $1 \leq i \leq m$) vede ulice,
- ▷ jedeme-li ulicí mezi v_i -tou a v_{i+1} -tou křižovatkou, je povoleno odbočit do ulice mezi v_{i+1} -tou a v_{i+2} -tou křižovatkou, $1 \leq i \leq m$, a
- ▷ každá ulice je projeta právě jednou, tj. existuje-li ulice mezi u -tou a v -tou křižovatkou, pak existuje i takové, že $v_i = u$ a $v_{i+1} = v$ nebo $v_i = v$ a $v_{i+1} = u$.

Indexy počítáme cyklicky, tj. $v_{m+1} = v_1$ a $v_{m+2} = v_2$. Pokud existuje

více takových posloupností, vypište libovolnou z nich. Pokud taková posloupnost neexistuje, vypište řetězec „Okružni jízda neexistuje.“.

Příklad:

okruh.in

okruh.out

5 10

1 2 4 5 2 3 5 1 3 4

1 2

(jeden ze správných výstupů)

2 3

3 4

4 5

5 1

1 3

2 4

3 5

4 1

5 2

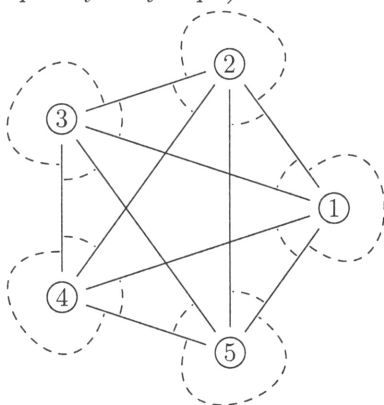
5 2 2 3 4 5

1 3 1 5 3 4

2 4 2 1 4 5

3 5 2 3 1 5

4 1 1 2 3 4



Obrázek města z příkladu.

Čárkované čáry označují zakázaná odbočení.

P – II – 3

Pizza kolem

Marcova firma Pizza kolem slaví díky vaší pomoci v minulém kole olympiády velký úspěch. Marco se proto rozhodl firmu rozšířit. Plánuje mít několik poboček na hranici města a obrátil se na vás, abyste mu pomohli rozhodnout, kde by bylo nejlepší nové pobočky otevřít.

Pro jednoduchost si budeme hranici města představovat jako kružnici, kterou rozdělíme na N stejně dlouhých úseků. Marco ví, kolik jeho zákazníků v každém z těchto úseků žije. Mimo to je nutné, aby vždy celý úsek byl přiřazen téže pizzerii Marcovy firmy a aby úseky přiřazené jedné pizzerii následovaly po sobě. Jedna pizzerie dokáže obsloužit K zákazníků, takže je nutné, aby součet zákazníků v úsecích přiřazených jedné pizzerii byl nejvýše K . Marco by byl rád, kdyby náklady na rozšíření jeho firmy byly co nejnižší, a proto chce pokrýt všechny úseky kružnice co nejmenším počtem pizzerií.

Formát vstupu: Jméno vstupního souboru je `pizza.in`. První řádek obsahuje dvě celá kladná čísla N a K , která udávají počet úseků, na které je kružnice (hranice města) rozdělena, a počet zákazníků, které dokáže jedna pizzerie obsloužit. Každý z následujících N řádků obsahuje jedno celé číslo A_i , $i = 1, \dots, N$, které udává, kolik zákazníků žije v i -tém úseku kružnice. Můžete předpokládat, že $1 \leq A_i \leq K$ pro všechna $i = 1, \dots, N$.

Formát výstupu: Jméno výstupního souboru je `pizza.out`. První řádek obsahuje číslo M , které udává minimální počet pizzerií, které musí Marco otevřít. Každý z následujících M řádků obsahuje dvě čísla S_i a T_i , $i = 1, \dots, M$, určující úseky, které budou pokryty i -tou pizzerií. Pokud $1 \leq S_i \leq T_i \leq M$, pak i -tá pizzerie bude obsluhovat úseky $S_i, S_i + 1, \dots, T_i$. Pokud $1 \leq T_i < S_i \leq M$, pak bude tato pizzerie obsluhovat úseky $T_i, T_i + 1, \dots, S_i$. Oblasti, které jsou obsluhovány jednotlivými pizzeriemi, musí být navzájem disjunktní a každý úsek musí být obsluhován některou z pizzerií. Navíc součet počtů zákazníků, kteří žijí v úsecích obsluhovaných jednou pizzerií, musí být nejvýše K .

Příklad:

<code>pizza.in</code>	<code>pizza.out</code>
7 11	4
4	6 1
4	2 3
7	4 4
6	5 5
6	
4	
2	

P – II – 4

Grafomat na lovu

Definice grafomatu je uvedena v textu úlohy P–I–4.

Soutěžní úloha. Král Lamželezo XXVI. tuze rád organizoval lovy. Přičilo se mu ale zabíjení čehokoliv živého, ať už to byla zvířata nebo nešikovní honci navzájem, a tak si pořídil robotické lovce a posílal je lovit mechanickou zvěř. Lovci pokaždé vytvořili kruhovou formaci okolo nory, každý lovec se propojil s oběma sousedními a ledva si libovolný z nich všiml, že zvíře vystrčilo anténky, předal zprávu ostatním a všichni naráz

vypálili. Vaším úkolem je napsat program pro grafomat, který bude lovce řídit. Můžete předpokládat, že zvíře zahlédne vždy jen jediný z lovců.

Mějme 2-graf složený z jediného cyklu sudé délky, tj. z vrcholů očíslovaných od 0 do $N - 1$, přičemž vrchol i je spojen hranou označenou 1 s vrcholem $(i + 1) \bmod N$ a hranou označenou 2 s vrcholem $(i - 1) \bmod N$ (tedy stejně, jako na prvním obrázku ve studijním textu). Váš program se má chovat následovně: pokud dostane $x = 0$ ve všech vrcholech, ihned se zastaví s $y = 0$ (lovci nic nevidí, a proto nestřílí); pokud dostane v jednom vrcholu $x = 1$ a v ostatních $x = 0$, má se po nějakém konečném počtu kroků zastavit s $y = 1$ ve všech vrcholech, přičemž ve všech předchozích krocích musí být y nulové (jeden lovec zvěř zahlédl, takže po čase všichni současně vystřelí). Pro ostatní kombinace vstupů se program může chovat libovolně.

Pokud vám to pomůže, můžete předpokládat, že počet vrcholů grafu je v nějakém vhodném tvaru (třeba mocnina dvojky, druhá mocnina apod.).

P – III – 1

Pizza vrací úder

Rozmach Marcovy firmy narazil na konec roku, přesněji řečeno na daňové přiznání. Během rozvážení pizz a zřizování nových poboček Marco neměl čas zabývat se účetnictvím a nyní s úděsem zjistil, že si u svých zběžných poznámek zapomněl zapsat, co jsou příjmy a co výdaje. Nicméně nezpanikařil, vzpomněl si na příběhy, které vykládal jeho dědeček (bývalý kápo italské mafie), a jal se účetní záznamy doplnit (zfalšovat).

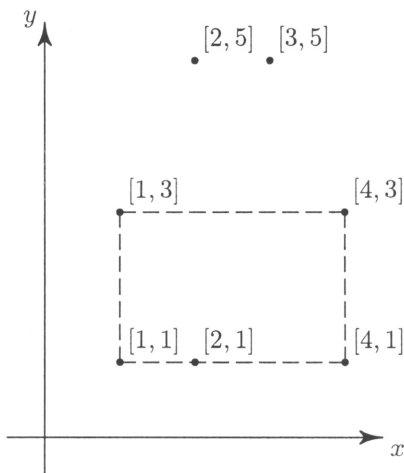
Aby výsledek vypadal co nejdůvěryhodněji, rozhodl se použít čísla ze svých poznámek a pouze si u nich zvolit, které jsou příjmy a které výdaje. Navíc se rozhodl, že když falšovat, tak pořádně. Rád by vypadal jako úspěšný obchodník, a tedy nekončil ve ztrátě. Na druhou stranu, chce platit co nejmenší daň, tedy jeho zisk by měl být co nejmenší. Při řešení tohoto nelehkého úkolu by mu mohlo pomoci to, že velikosti čísel v jeho poznámkách jsou podstatně menší než jejich počet.

Soutěžní úloha. Je dáno n přirozených čísel $a_1, \dots, a_n$ z rozsahu 1 až k ; hodnota k je typicky řádově menší než n . Vaším úkolem je nalézt čísla $s_i \in \{+1, -1\}$ taková, že součet $z = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_n a_n$ je nezáporný a zároveň nejmenší možný. Např. pro $n = k = 4$ a $a_i = i$ pro $i = 1, 2, 3, 4$ je optimální řešení $s_1 = s_4 = +1$ a $s_2 = s_3 = -1$ s velikostí součtu $z = 0$.

Obdélník

V rovině je dáno n vesměs různých bodů $B_1, \dots, B_n$. Vaším úkolem je navrhnout algoritmus, který nalezne obdélník $A_1A_2A_3A_4$, jehož vrcholy jsou některé ze zadaných bodů, tj. $A_1 = B_i$ pro nějaké i , $1 \leq i \leq n$, analogicky pro A_2 , A_3 a A_4 , a počet bodů B_i ležících uvnitř obdélníku $A_1A_2A_3A_4$ je maximální možný. Navíc se požaduje, aby hrany obdélníku $A_1A_2A_3A_4$ byly rovnoběžné s osami, tj. x -ové souřadnice vrcholů A_1 a A_4 a vrcholů A_2 a A_3 byly stejné a rovněž y -ové souřadnice vrcholů A_1 a A_2 a vrcholů A_3 a A_4 byly stejné. Body, které leží na hranách obdélníku $A_1A_2A_3A_4$, považujeme za body ležící uvnitř obdélníku. Pokud zadané body netvoří žádný obdélník $A_1A_2A_3A_4$, který by vyhovoval podmínkám zadání, program vypíše vhodnou zprávu.

Jedno z možných zadání a příklad řešení (v tomto případě jediného optimálního) jsou na obr. 30. Je zde $n = 7$ bodů se souřadnicemi $[1, 1]$, $[2, 1]$, $[4, 1]$, $[1, 3]$, $[4, 3]$, $[2, 5]$ a $[3, 5]$. Optimálním řešením je obdélník s rohy $[1, 1]$, $[4, 1]$, $[4, 3]$ a $[1, 3]$, který obsahuje pět bodů.



Obr. 30

P – III – 3

Grafomat a šamani

Na indiánské vesnice kmene Grafomatonů se zvolna snáší soumrak. Příštího dne začne největší ze slavností tohoto léta, na níž se sejdou všichni členové kmene. Indiáni se v tichém očekávání chystají ulehnout do svých teepee, pouze šamani postávají u signálních ohňů a pilně vysílají kouřové signály do sousedních vesnic. Rituál totiž vyžaduje, aby lidé z právě poloviny vesnic přišli pomalováni červeně a z druhé poloviny zeleně. Jen šamani vědí, jak se na tom dokáží domluvit — možných signálů je totiž pomálu a každá vesnice vidí jen na tři sousední. Jak to mohou dělat? Jak? ...

Když jste se ze sna probudili, napadlo vás, že indiánské domlouvání docela přesně odpovídá této úloze pro grafomat:

Soutěžní úloha. Napište program pro grafomat, který v zadaném 3-grafu s jedním označeným vrcholem označí právě polovinu vrcholů a skončí. Předpokládejte, že graf je souvislý (z každého vrcholu jde po hranách dojít do každého) a že má sudý počet vrcholů, takže rozdělení na poloviny je vždy možné. (Sudý počet vrcholů mají ve skutečnosti všechny 3-grafy, ale to zde nebudeme dokazovat.)

Vstup bude tvořen proměnnou x , která bude v označeném vrcholu rovna jedné a všude jinde nulová.

Výstupem programu bude proměnná y , nulová v právě polovině vrcholů a jedničková ve zbývajících.

Nápověda: Zkuste si nejdříve rozmyslet, jak by se úloha dala řešit, pokud by namísto obecného 3-grafu byl zadán strom (tj. souvislý graf bez cyklů).

Definice grafomatu je uvedena v textu úlohy P–I–4. Nadto si dovoluujeme připomenout, že počet stavů každého automatu musí být konečný, takže nelze používat proměnné, jejichž rozsah hodnot závisí na velikosti vstupu.

P – III – 4

Policie zasahuje

Program: policie.pas / policie.c / policie.cpp
Vstup: policie.in
Výstup: policie.out

I v tomto kole se na vás radní Stínové Prahy obrací s dalším, ještě naléhavějším, problémem. Ve městě se totiž usídlila mafie a její řádění překročilo únosnou mez. Proto byla městská policie pověřena učinit řádění mafie přítrž. Jak už to ale bývá, není dostatek důkazů o činnosti mafie, a tak se policisté rozhodli nějakou dobu sledovat, jak se mafiáni mezi sebou stýkají. Mafiáni jsou však prohnani a nechodí jen po ulicích, ale využívají ke svým přesunům i kanalizační systém města. Do kanalizace je tedy třeba rozestavit policejní hlídky tak, aby bylo zamezeno tajným kontaktům mezi mafiány. Přesněji, je potřeba, aby na každé cestě mezi domy dvou mafiánů byla alespoň jedna policejní hlídka.

Tento nelehký úkol naštěstí zjednodušuje fakt, že kanalizačním systémem Stínové Prahy lze mezi každými dvěma domy projít právě jedním způsobem. Takže pokud se má mafián dostat kanalizací z jednoho místa na druhé, má jen jedinou možnost, kudy kanalizací projít (pokud nechce jít žádným místem dvakrát). Speciálně to tedy znamená, že kanalizace má „acyklickou“ strukturu a je souvislá, jako např. kanalizační systém na obrázku.

Vášim úkolem je napsat program, který pro daný popis kanalizačního systému a seznam domů ve vlastnictví mafiánů určí minimální počet hlídek, které je nutné do kanalizačního systému rozmístit tak, aby na každé cestě mezi dvěma domy mafiánů byla alespoň jedna hlídka. Hlídky lze umísťovat pouze do míst větvení, tj. hlídka nemůže být umístěna uprostřed stoky. Speciálně hlídka, která je umístěna ve větvení, kam je napojen dům některého z mafiánů, odděluje tento dům od všech ostatních domů.

Vstup: Na prvním řádku vstupního souboru `policie.in` jsou dvě celá čísla n ($3 \leq n \leq 100\,000$) a p ($2 \leq p < n$) oddělená jednou mezerou. Číslo n udává počet větvení v kanalizačním systému — *větvením* rozumíme buď slepý konec nějaké stoky (napojený na dům, který ale nemusí patřit mafiánovi) nebo křižovatku, ze které vedou alespoň dvě stoky. Kanalizační systém města je pak tvořen $n - 1$ stokami, z nichž každá spojuje dvě větvení. Číslo p udává počet domů, které jsou ve vlastnictví mafiánů.

Větvení v kanalizaci jsou očíslována přirozenými čísly od 1 do n . Domy jsou do kanalizace připojeny jen v místech větvení. Na každém z následujících $n - 1$ řádků vstupního souboru jsou dvě celá čísla a_i a b_i ($1 \leq a_i, b_i \leq n$), která určují větvení spojená i -tou stokou.

Posledních p řádků vstupního souboru obsahuje vždy jedno celé číslo od 1 do n . Tato čísla jsou navzájem různá a určují čísla větvení v kanalizaci, kam jsou napojeny domy mafiánů.

Výstup: Váš program má do výstupního souboru `policie.out` vypsát nejmenší možný počet míst, která je třeba obsadit hlídkou, aby na cestě mezi každými dvěma domy mafiánů byla alespoň jedna hlídka.

Příklad:

`policie.in` `policie.out`

8 5

2

1 2

1 3

(Hlídky je možné umístit
na větvení s čísly 1 a 5.)

1 4

1 5

5 6

5 7

7 8

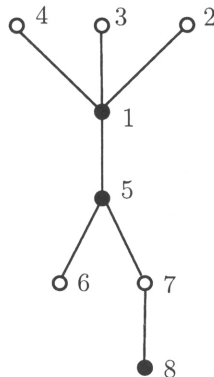
2

3

4

6

7



P – III – 5

Rybka

Program: `rybka.pas` / `rybka.c` / `rybka.cpp`

Vstup: `rybka.in`

Výstup: `rybka.out`

Za horkých bezmračných letních dní se voda v rybníce Blatáku někdy skoro vaří. Slunce nemilosrdně žhne a malé rybky se spěchají skrýt do hlubších a chladnějších částí rybníka. Jen rybka Julka se opozdila za ostatními a už skoro umdlévá.

Taková choulostivá malá rybka, jako je Julka, snáší jen určitý rozsah teplot, řekněme t_1 až t_2 (včetně krajních hodnot). Ráno mají různé části rybníka různou teplotu a jakmile vyjde slunce, všechny části rybníka se ohřívají stejně rychle, a to o 1 stupeň za 1 časovou jednotku. Rybník Blaták je obdélníkový a je rozdělen na $m \times n$ stejně velkých čtvercových polí. Pole na pozici $[i, j]$ má ráno teplotu $T[i, j]$ stupňů ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$). Julka je ráno na pozici $[J_x, J_y]$ a potřebovala by se dostat do bezpečí na pozici $[C_x, C_y]$. Julka se za každou časovou jednotku posune

na jedno ze čtyř přes hranu sousedících čtvercových polí nebo zůstane stát. Pak se vždy teplota všech polí zvýší o 1 stupeň.

Samozřejmě se rybička cestou nesmí přehřát ani nachladit, tj. pole, kde se Julka vyskytuje, musí mít teplotu T , $t_1 \leq T \leq t_2$. Tato teplota musí být dodržena jak v okamžiku, když Julka na pole vplouvá, tak když jej opouští (mezi čímž se teplota zvýšila alespoň o 1 stupeň). Vyjimku tvoří jen cílové pole, na které smí vplout nezávisle na jeho teplotě a tím se dostat do bezpečí. Rybka Julka nesmí samozřejmě na své cestě opustit rybník.

Napište program, který dostane na vstupu Julčin teplotní rozsah $\langle t_1, t_2 \rangle$ ($0 \leq t_1 < t_2 \leq 10^6$), velikost Blatáku $m \times n$ ($1 \leq m, n \leq 1000$), počáteční a cílovou pozici Julky $[J_x, J_y]$ a $[C_x, C_y]$ ($1 \leq J_x, C_x \leq m, 1 \leq J_y, C_y \leq n$) a počáteční teplotu každého pole rybníka $T[i, j]$ ($0 \leq T[i, j] \leq 10^6$) a najde pro naši malou rybku cestu do bezpečí respektující teplotní omezení či zjistí, že taková cesta neexistuje. Nalezená cesta má být nejrychlejší možná, tj. má trvat co nejméně časových jednotek. Pokud existuje více nejrychlejších cest, program může vypsát libovolnou z nich. Můžete předpokládat, že všechny teploty t_1, t_2 a $T[i, j]$ jsou celá čísla. Navíc také můžete předpokládat, že rybka je na počátku v poli s teplotou pro ni přijatelnou a že počáteční pole je různé od cílového.

Vstup: Na prvním řádku vstupního souboru `rybka.in` jsou čtyři celá čísla m, n, t_1 a t_2 oddělená mezerami, na druhém řádku jsou pak souřadnice J_x, J_y, C_x a C_y . Všechna čísla $m, n, t_1, t_2, J_x, J_y, C_x$ a C_y splňují výše uvedená omezení. Rybník Blaták je orientován tak, že pole se souřadnicemi $[i, j]$ sousedí severní hranou s polem se souřadnicemi $[i, j - 1]$, jižní hranou s polem se souřadnicemi $[i, j + 1]$, západní hranou s polem $[i - 1, j]$ a východní hranou s polem $[i + 1, j]$. Posledních n řádků vstupního souboru popisuje počáteční teploty jednotlivých částí rybníka, na řádku $j + 2$ se tedy nacházejí čísla $T[1, j], T[2, j], T[3, j], \dots, T[m, j]$ vzájemně oddělená mezerami.

Výstup: Do souboru `rybka.out` vypište Julčinu cestu jako posloupnost pokynů pro pohyb rybky oddělených mezerami. Pokyn je buď jeden znak S, J, V nebo Z, který určuje směr pohybu rybky, nebo kladné číslo udávající počet časových jednotek, po které se rybka nepohybuje. Jednotlivé pokyny jsou odděleny jednou mezerou. Výstupní soubor nesmí obsahovat dvě čísla za sebou a poslední pokyn, který obsahuje, musí být pokynem k pohybu rybky. V případě, že cesta neexistuje, vypište do výstupního souboru řádek s textem „Chudak Julka!“.

Příklad:

rybka.in

3 4 10 20

2 2 3 4

9 7 13

0 18 15

1 15 19

2 3 0

rybka.in

3 2 20 30

1 1 3 1

25 13 25

27 24 0

rybka.out (*jedna z více možností*)

V S 1 Z Z 5 J J J V V

rybka.out

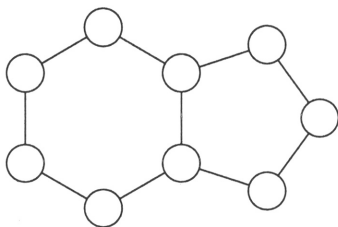
Chudak Julka!

Kategorie Z5

Texty úloh

Z5 – I – 1

Šestiúhelník a pětiúhelník mají společnou stranu se dvěma vrcholy. Doplň do všech vrcholů obou obrazců (obr. 31) čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 tak,



Obr. 31

aby součet čísel v šestiúhelníku i v pětiúhelníku byl 24. Každé číslo použij právě jednou. Stačí, když najdeš jedno řešení. (L. Hozová)

Z5 – I – 2

Cyklistického závodu Tour de Lhota se zúčastnila šestičlenná družstva. V prvních deseti etapách závod nikdo nevzdal. V jedenácté etapě po hromadném pádu odstoupilo 17 cyklistů a v každé další etapě pak jich odstoupilo vždy o 3 méně než v předešlé etapě. Do cíle závěrečné 15. etapy dojelo 53 cyklistů. Kolik družstev se zúčastnilo závodu? (Š. Ptáčková)

Z5 – I – 3

Cvičená blecha Hopsalka stála na hodinách na čísle 12. Hrála s Vaškem takovou hru: Vašek házel kostkou. Kolik ok mu padlo, o tolik čísel poskočila. Po prvním hodu skočila po směru chodu hodinových ručiček, po druhém hodu proti směru hodinových ručiček a po třetím hodu opět po směru hodinových ručiček. Víme, že Vaškovi padla oka 2, 5 a 6, ale ne-

víme, v jakém pořadí. Na která čísla mohla Hopsalka doskočit po třetím skoku?
(*L. Hozová*)

Z5 – I – 4

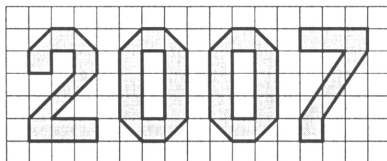
Pomocí číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a pomocí dvou desetinných čárek utvoř dvě desetinná čísla tak, aby jejich součet byl co nejmenší. Najdi všechny možnosti. (Každou číslici použij právě jednou.) (*S. Bednářová*)

Z5 – I – 5

Sedm trpaslíků sbíralo hříbky. V košíčkách měli 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 hříbků. Sněhurka chtěla stejný počet hříbků na polévku jako na smažení i jako na usušení. Jak rozdělili trpaslíci své košíčky do tří skupin tak, aby počet hříbků v každé skupině byl stejný? (Trpaslíci nesměli hříbky z košíčků vytahovat.) (*Š. Ptáčková*)

Z5 – I – 6

Lucka vystříhovala ze čtverečkováného papíru číslice 2, 0, 0, 7 tak, jak je naznačeno na obr. 32. Urči obsah vystřižených číslic, je-li strana čtverečku sítě dlouhá 4 cm.
(*M. Raabová*)



Obr. 32

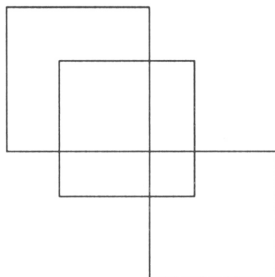
Z5 – II – 1

Děvčata sbírala víčka od PET-láhví. Šárka jich nasbírala 20, Světlana 29, Marta 31, Maruška 49 a Monika 51. Každá z dívek nasypala všechna svá nasbíraná víčka buď do modré, nebo do červené krabice. Pavlík při počítání víček zjistil, že v modré krabici je dvakrát více víček než v červené. Které z dívek nasypaly svá víčka do modré a které do červené krabice?
(*L. Hozová*)

Z5 – II – 2

Na obr. 33 jsou znázorněny tři vzájemně se překrývající čtverce. Zjisti jejich obsahy, jestliže víš, že současně platí:

- ▷ strana největšího čtverce je o 1 mm delší než strana prostředního a o 2 mm delší než strana nejmenšího z nich,
- ▷ společná část největšího a prostředního čtverce je čtverec s obsahem 100 mm^2 ,
- ▷ společná část prostředního a nejmenšího čtverce je čtverec s obsahem 64 mm^2 .



Obr. 33

(Nemá význam měřit, obrázek je nepřesný.)

(S. Bednářová)

Z5 – II – 3

Na zahrádce vyrostlo čtyřikrát více kedluben než brokolic a třikrát více ředkviček než kedluben. Celková hmotnost brokolic byla 5 kg. Kolik kusů zeleniny vyrostlo na zahrádce, jestliže každá brokolice vážila 250 g? (Jiná zelenina tam nerostla.)

(L. Černíček)

Kategorie Z6

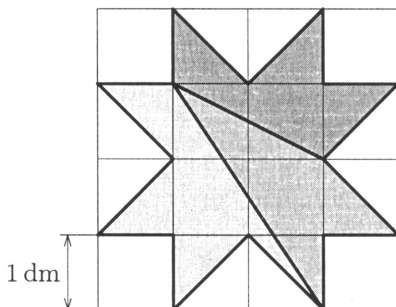
Texty úloh

Z6 – I – 1

Lukáš natíral laťkový plot. Každých 10 minut natřel 8 latěk. Jeho mladší bratr Ondra mu chvilku pomáhal, takže byl Lukáš hotov o čtvrt hodiny dříve, než předpokládal. Jak dlouho mu Ondra pomáhal, když natřel každých 7 minut 4 latky? (M. Raabová)

Z6 – I – 2

Hvězda na obr. 34 je rozdělena dvěma úsečkami na tři díly. Zjisti obsah každého z nich. (L. Šimůnek)



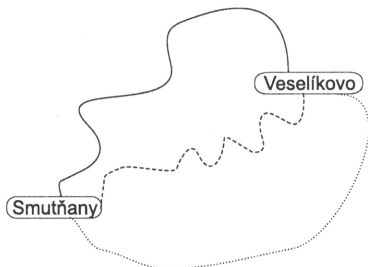
Obr. 34

Z6 – I – 3

Vícemístné číslo se nazývá *optimistické*, jestliže jeho číslice zleva doprava rostou. Jestliže číslice čísla zleva doprava klesají, říkáme, že je to číslo *pesimistické*. Součet sedmimístného pesimistického a sedmimístného optimistického čísla složených z týchž číslic je 11 001 000. Které číslice jsme použili na zápis těchto dvou čísel? (S. Bednářová)

Z6 – I – 4

Ze Smutňan do Veselíkova vedou tři cesty. Ta, která je na mapě (obr. 35) vyznačena plnou čarou, měří 40 km, nejvyšší povolená rychlost je na ní



Obr. 35

80 km/h a vybírá se na ní mýtné 50 Kč. Čárkovaná cesta je dlouhá 35 km, nejvyšší povolená rychlost je na ní 60 km/h a mýtné je 150 Kč. Na tečkované cestě, která je dlouhá 45 km, se vybírá mýtné 100 Kč a nejvyšší povolená rychlost je 100 km/h. Strýček Uspěchaný a tetička Spořivá se chtějí dostat ze Smutňan do Veselíkova, strýček co nejdříve, tetička co nejlevněji. Oba si zavolali taxi, jehož řidiči si účtují 15 Kč za kilometr cesty a zaplacení mýtného.

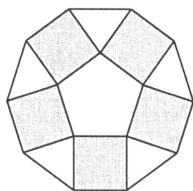
1. Kterou cestu má vybrat taxikář strýčka Uspěchaného?
2. Kterou cestu má vybrat taxikář tetičky Spořivé?
3. O kolik minut bude kratší cesta strýčka Uspěchaného v porovnání s cestou tetičky?
4. O kolik korun zaplatí strýček víc než tetička? *(S. Bednářová)*

Z6 – I – 5

Naše třída plánovala turistický výlet. Jednotlivé skupiny myslely, že jeho délka bude 28, 16, 32, 37 a 15 kilometrů. Spletly se ale o 5, 7, 8, 9 a 14 kilometrů. Jak dlouhý byl výlet? *(M. Volfová)*

Z6 – I – 6

Ze shodných čtverců a rovnoramenných trojúhelníků jsme složili (bez překrývání) útvar znázorněný na obr. 36. Zjisti velikosti vnitřních úhlů těchto rovnoramenných trojúhelníků. *(S. Bednářová)*

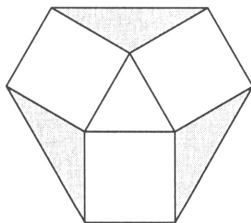


Obr. 36

Z6 – II – 1

Ze tří shodných šedivých trojúhelníků a tří shodných čtverců jsme složili (bez překrývání) útvar znázorněný na obrázku. V jeho středu se nachází trojúhelníkový otvor s obsahem 2 cm^2 .

- Zjisti velikost vnitřních úhlů šedivého trojúhelníku.
- Jaký je obsah šedivé plochy na obr. 37? (S. Bednářová)



Obr. 37

Z6 – II – 2

Čtvrtina žáků třídy jsou neplavci. Polovina neplavců se přihlásila do plaveckého kurzu. Čtyři neplavci se do kurzu nepřihlásili. Kolik žáků ve třídě umí plavat a kolik je celkem ve třídě žáků? (S. Bodláková)

Z6 – II – 3

Vícemístné číslo se nazývá *optimistické*, pokud jeho číslice zleva doprava rostou. Pokud číslice čísla zleva doprava klesají, říkáme, že je to číslo *pesimistické*. Najdi všechna optimistická čísla, pro která současně platí:

- ▷ aritmetický průměr číslic daného čísla je 7,
- ▷ pokud v tomto čísle vyměníme první číslici s poslední, dostaneme pesimistické číslo. (S. Bednářová)

Kategorie Z7

Texty úloh

Z7 – I – 1

Jana narýsovala šestiúhelník. Délky všech stran vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Potom si uvědomila, že každé dvě jeho sousední strany jsou na sebe kolmé. Narýsuj, jak mohl vypadat Janin šestiúhelník, je-li jeho obvod 16 cm a jeho obsah 12 cm^2 . *(M. Dillingerová)*

Z7 – I – 2

Rozděl obdélník na obrázku na co nejmenší počet tvarově stejných částí tak, aby každá z nich obsahovala jen taková čísla, která dávají po dělení třemi navzájem různé zbytky. Pozor, řezat se smí jen po čarách sítě!

		14	32		
43	102	11			90
22	18		301		7
	35		99	29	
12				62	

(S. Bednářová)

Z7 – I – 3

Urči počet zlomků, jejichž hodnota je celým násobkem tří a čísel i jmenovatel jsou trojmístná přirozená čísla. *(L. Šimůnek)*

Z7 – I – 4

Dědeček nesl do mlýna pytel zrní. Najednou mu začala zrníčka z pytle vypadávat a za dědečkem zůstávala cestička značená jednotlivými zrníčky. Tři ptáčci si toho všimli a začali jednotlivá zrníčka zobat. První zobal

zrníčka zelený ptáček, a to tak, že sezobal každé čtvrté zrnko ležící na zemi. Potom přiletěl zobat červený ptáček a sezobl každé páté na zemi ležící zrnko. Nakonec slétl na cestičku modrý ptáček a sezobal každé třetí na zemi ležící zrníčko. Kolik zrníček dědeček ztratil, jestliže ptáčci sezobali dohromady 79 zrníček? (M. Dillingerová)

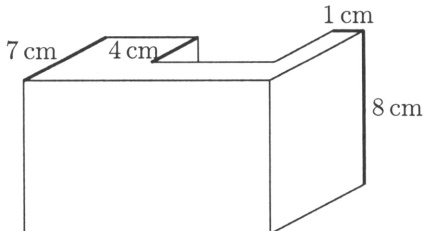
Z7 – I – 5

Aspoň trojmístné číslo s navzájem různými ciframi, jehož žádné tři za sebou jdoucí číslice a , b , c nesplňují ani $a < b < c$, ani $a > b > c$, se nazývá *vlnité*. Napiš

- největší vlnité číslo, které není dělitelné 3,
 - největší vlnité číslo dělitelné 150.
- (S. Bednářová)

Z7 – I – 6

Osmiboký kolmý hranol načrtnutý na obr. 38 vznikl slepením tří kvádrů. Zjisti objem a povrch tohoto hranolu, pokud víš, že mezi osmi jeho bočními stěnami jsou čtyři dvojice shodných stěn, a znáš délky vyznačených hran (obrázek je nepřesný, nevypatí se měřit). (S. Bednářová)



Obr. 38

Z7 – II – 1

V letním táboře je 50 dětí. Šestina dívek a osmina chlapců neumí plavat. Plavat umí 43 dětí. Kolik dívek je v táboře? (S. Bodláková)

Z7 – II – 2

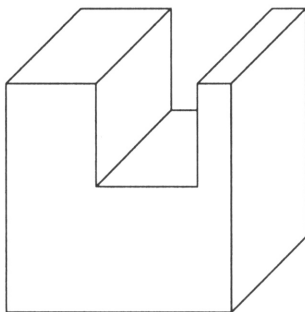
Martin, Tomáš a Jirka tipovali výsledek příkladu:

$$2,4 - 1,5 \cdot 3,6 : 2 =$$

Jejich průměrný tip se od správného výsledku lišil o 0,4. Tomáš tipoval $-1,2$ a Jirka $1,7$. Zjisti, které číslo tipoval Martin, pokud víš, že nejhorší tip se od správného výsledku lišil o 2. *(S. Bednářová)*

Z7 – II – 3

Z krychle s povrchem 384 cm^2 jsme vyřízli kvádr se čtvercovou podstavou tak, jak je vidět na obr. 39. Objem takto vzniklého osmibokého hranolu je roven třem čtvrtinám objemu původní krychle. Vypočítejte povrch hranolu. *(S. Bednářová)*



Obr. 39

Kategorie Z8

Texty úloh

Z8 – I – 1

Z čísl $1, 2, \dots, 9$ jsme vytvořili tři smíšená čísla $a\frac{b}{c}$. Potom jsme tato tři čísla správně sečetli. Jaký nejmenší součet jsme mohli dostat? (Každou číslici jsme použili právě jednou.)
(S. Bednářová)

Z8 – I – 2

Král si nechal nalít plnou číši vína. Pětinu vína z ní upil. Pak si nechal číši dolít vodou a upil čtvrtinu obsahu. Opět mu číši dolili vodou a král z ní upil třetinu. Páže mu zase číši dolilo vodou. Kolik procent čistého vína zbylo ve sklenici?
(M. Krejčová)

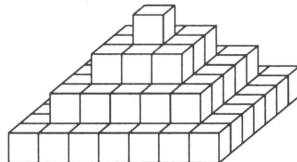
Z8 – I – 3

Je dán pravidelný devítiúhelník $ABCDEFGHI$. Vypočítejte velikost úhlu, který svírají přímky DG a BE .
(M. Raabová, M. Krejčová)

Z8 – I – 4

Žáci postavili z malých kostek pyramidu podobnou té na obr. 40, měla však více pater. Pyramida, svého druhu největší na světě, stála od té doby na dvoře školy a přšelo na ni. Po čase se musely všechny kostky, na které přšelo, tedy ty na povrchu, vyměnit. Vyměnilo se celkem 2025 kostek. Kolik měla pyramida pater?

(L. Šimůnek)



Obr. 40

Z8 – I – 5

Je dáno čtyřmístné číslo. Přičteme k němu takové čtyřmístné číslo, které je napsáno číslicemi prvního čísla, ale v opačném pořadí. Kterými čísly je vždy dělitelný tento součet? *(L. Hozová)*

Z8 – I – 6

Výška rovnoramenného trojúhelníku ABC dělí jeho obsah v poměru 1 : 3. Určete obsah a obvod trojúhelníku ABC , je-li $|AC| = |BC|$ a $|AB| = \sqrt{32}$ cm. *(L. Hozová)*

Z8 – II – 1

Myslím si zlomek. Jeho číselník je o 35 menší než jmenovatel. Součet myšleného zlomku a téhož zlomku v základním tvaru je $\frac{16}{13}$. Který zlomek si myslím? *(S. Bednářová)*

Z8 – II – 2

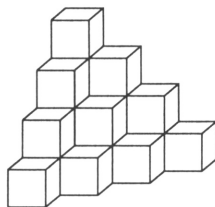
V pohádkovém údolí žili trojhlaví a šestihlaví draci. Dohromady měli 117 hlav a 108 nohou. Každý drak má 4 nohy. Zjistěte, kolik tam žilo trojhlavých a kolik šestihlavých draků. *(S. Bodláková)*

Z8 – II – 3

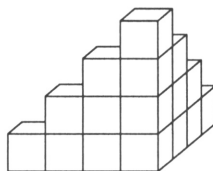
Z krychlí jsme postavili stavbu podobnou té na obr. 41, avšak místo čtyř pater jich měla dvacet pět. Pak jsme všechny vnější stěny stavby natřeli barvou. Svislé stěny byly červené a vodorovné stěny byly modré. (Stavba stojí na zemi, podstavu jsme tedy nenatírali.)

a) Kolikrát více jsme spotřebovali červené barvy než modré?

b) Kolik stěn krychliček jsme dohromady obarvili? *(L. Šimůnek)*



Obr. 41 pohled zepředu



pohled zezadu

Kategorie Z9

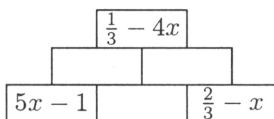
Texty úloh

Z9 – I – 1

Kolik šestimístných přirozených čísel má tu vlastnost, že součin jejich číslic je 750? (P. Tlustý)

Z9 – I – 2

Vyplňte správnými výrazy prázdná pole ve sčítací pyramidě na obr. 42. Ve správně vyplněné sčítací pyramidě se v každém poli (kromě těch ze spodního patra) nachází součet výrazů, které jsou napsány ve dvou polích těsně pod ním. (S. Bednářová)



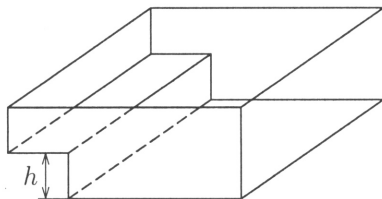
Obr. 42

Z9 – I – 3

Do kružnice s poloměrem 2 cm je vepsán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Přímký FE a CD se protínají v bodě M . Určete délku úsečky AM . (M. Volfová)

Z9 – I – 4

Matematické soutěže se zúčastnilo 142 žáků. Ne každý však odevzdal třetí úlohu. Když nakonec autor soutěže zpracovával statistiku, zapsal si, že odevzdané třetí úlohy ohodnotil průměrně 3,9 bodu (zaokrouhlo na desetiny) a každý soutěžící dostal za třetí úlohu průměrně 2,7 bodu



Obr. 44

ještě nebyla na úrovni schodu. Po 23 min napouštění se hladina nacházela ve výšce 55 cm a schod již byl nějakou dobu pod hladinou. Po 35,5 min napouštění byl bazén naplněn do výšky 80 cm. V jaké výšce h ode dna bazénu se nachází schod? (L. Šimůnek)

Z9 – II – 3

Nováková, Vaňková a Sudková vyhrály štafetu a kromě diplomů dostaly i bonboniéru, kterou hned po závodech sluply. Kdyby snědla Petra o 3 bonbóny více, snědla by jich právě tolik, co Míša s Janou dohromady. A kdyby si Jana pochutnala ještě na sedmi bonbónech, také by jich měla tolik, co druhé dvě dohromady. Ještě víme, že počet bonbónů, které snědla Vaňková, je dělitelný třemi a že Sudková si smlsla na sedmi bonbónech. Jak se děvčata jmenovala? Kolik bonbónů snědla každá z nich?

(M. Volfová)

Z9 – II – 4

Je dán obdélník $KLMN$, kde $|KL| = 6$ cm a $|ML| = 4$ cm. Vypočítejte obvody všech rovnoramenných trojúhelníků KLX , jestliže bod X leží na straně MN . (M. Dillingarová)

Z9 – III – 1

Pavel si zvolil dvě přirozená čísla a, b ($a \geq b$) a vypočítal rozdíl jejich druhých mocnin. Vyšlo mu 2007. Které dvojice čísel si mohl Pavel zvolit? (P. Tlustý)

Z9 – III – 2

V laboratoři na polici stojí uzavřená skleněná nádoba ve tvaru kváдру. Nachází se v ní 2,4 litru destilované vody, avšak objem nádoby je větší. Voda sahá do výšky 16 cm. Když kvádrou nádoby postavíme na jinou

její stěnu, bude hladina ve výšce 10 cm. Kdybychom ji postavili ještě na jinou stěnu, voda by sahala jen do výšky 9,6 cm. Určete rozměry nádoby.
(*L. Šimůnek*)

Z9 – III – 3

Přečtete si výsledky ankety konané v Peci pod Sněžkou, při níž bylo osloveno 1 240 lidí:

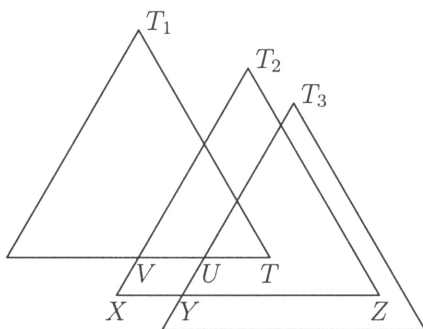
„V existenci Krakonoše věří 46 % dotázaných (zaokrouhleno na celé číslo), 31 % v jeho existenci nevěří (zaokrouhleno na celé číslo). Ostatní dotazovaní odmítli na tuto otázku jakkoli reagovat.“

- Kolik nejméně lidí mohlo v anketě odpovědět, že věří v existenci Krakonoše?
 - Kolik nejvíce lidí mohlo odmítnout na anketu odpovědět? Uveďte konkrétní počty, nikoli procenta.
- (*L. Šimůnek*)

Z9 – III – 4

Na obr. 45 jsou znázorněny tři shodné, navzájem se překrývající rovnostranné trojúhelníky. Určete obsah každého z nich, když víte, že současně platí:

- ▷ Průnikem trojúhelníku T_1 a trojúhelníku T_2 je rovnostranný trojúhelník s obsahem $\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
 - ▷ Průnikem trojúhelníku T_2 a trojúhelníku T_3 je rovnostranný trojúhelník s obsahem $\frac{9}{4}\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
 - ▷ Průnikem trojúhelníku T_1 a trojúhelníku T_3 je rovnostranný trojúhelník s obsahem $\frac{1}{4}\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
- (*S. Bednářová*)



Obr. 45

Přípravné soustředění před 48. MMO

V průběhu 56. ročníku se konalo výběrové soustředění bezprostředně po skončeném celostátním kole kategorie A, a to od 1. do 5. dubna 2007 v Kostelci nad Černými lesy nedaleko Prahy. Na soustředění bylo pozváno 9 nejlepších řešitelů III. kola kategorie A s výjimkou Pavla Motlocha, který se rozhodl dát přednost účasti na mezinárodní fyzikální olympiádě. Soustředění bylo zaměřeno na přípravu reprezentantů a posloužilo ke konečné nominaci šestičlenného družstva.

Úspěšnost jednotlivých studentů ukazuje následující tabulka:

Michal Rolínek	8/8 GJK Praha 6	70
Zbyněk Konečný	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	60
Miroslav Klimoš	2/4 GMK Bílovec	54,5
Lenka Slavíková	4/4 G Mnichovo Hradiště	48,5
Jiří Řihák	4/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	47,5
Hana Šormová	2/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	47,5
Samuel Říha	2/4 G Brno, tř. Kpt. Jaroše	44,5
Anežka Faltýnková	4/4 GJŠ Přerov	42,5
Tomáš Javůrek	8/8 G Jeseník	38,5

Na základě uvedených výsledků, v nichž jsou započítány i výsledky oblastního a celostátního kola, bylo prvních šest vybráno do reprezentativního družstva a sedmý byl určen jako náhradník. Toto družstvo nás reprezentovalo i na již tradičním střetnutí s družstvy Slovenska a Polska.

Jednotlivé semináře vedli a úlohy připravili:

dr. *Jaroslav Zhouf* (1. 4.),

dr. *Karel Horák* (2. 4.),

dr. *Pavel Calábek* (3. 4.),

dr. *Jaroslav Švrček* (4. 4.)

a doc. *Jaromír Šimša* (5. 4.)

Úlohy zadané na přípravném soustředění

1. V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$\frac{x}{2^x} + \frac{y}{2^y} = \frac{z}{2^z}.$$

2. Nechť p je prvočíslo, n je přirozené číslo a q je přirozený dělitel čísla $(n+1)^p - n^p$. Dokažte, že číslo $q-1$ je dělitelné číslem p .

3. Reálná čísla a, b, c, d, e, f jsou taková, že platí

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e + f &= 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 &= 6. \end{aligned}$$

Dokažte, že platí nerovnost

$$abcdef \leq \frac{1}{2}.$$

4. V konvexním šestiúhelníku $ABCDEF$ platí rovnosti

$$|AD| = |BC| + |EF|, \quad |BE| = |FA| + |CD| \quad \text{a} \quad |CF| = |DE| + |AB|.$$

Dokažte, že platí

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|CD|}{|FA|} = \frac{|EF|}{|BC|}.$$

5. V trojúhelníku ABC , jehož strany vyhovují rovnosti $|AB| + |BC| = 3|AC|$, označme V střed jeho vepsané kružnice a D a E body, v nichž se vepsaná kružnice postupně dotýká stran AB, BC . Jsou-li K a L obrazy bodů D a E ve středové souměrnosti se středem V , je čtyřúhelník $ACKL$ je tětíkový. Dokažte.

6. Nalezněte všechna přirozená čísla $n > 1$, pro něž existuje jediné přirozené číslo $a \leq n!$ takové, že $a^n + 1$ je dělitelné číslem $n!$.

7. V ostroúhlém trojúhelníku ABC , jehož strany AB a AC jsou různé dlouhé, označme H průsečík výšek a M střed strany BC . Na straně AB zvolme bod D a na straně AC bod E tak, že $|AE| = |AD|$ a body D, H, E leží v přímce. Dokažte, že HM je kolmá na společnou sečnu kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ADE .

8. Nechť n je přirozené číslo, $n \geq 2$ a $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ kladná reálná čísla taková, že

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{n+1} - a_n \geq 0.$$

Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{n-1}{2} \cdot \frac{a_1 a_n + a_2 a_{n+1}}{a_1 a_2 a_n a_{n+1}}.$$

Zjistěte dále, kdy nastává rovnost.

9. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y) + xy.$$

10. Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C . Na stranách AB a BC jsou zvoleny body M a N tak, že platí

$$\frac{|CN|}{|NB|} = \frac{|AC|}{|BC|} = 2 \quad \text{a} \quad MN \parallel AC.$$

Označme O průsečík přímk CM a AN . Na úsečce ON zvolme bod K tak, že platí $|MO| + |OK| = |KN|$. Označme dále T průsečík kolmice k přímce ON procházející bodem K s osou úhlu ABC . Dokažte, že úhel MTB je pravý.

11. V rovině je dán pravidelný třicetiúhelník $A_1 A_2 \dots A_{30}$. Dokažte, že jeho úhlopříčky $A_1 A_{19}$, $A_3 A_{24}$ a $A_8 A_{28}$ se protínají ve společném bodě.

12. Určete, jakých celočíselných hodnot může nabývat výraz

$$\frac{(x+y+z)^2}{xyz}.$$

jsou-li x, y, z přirozená čísla.

13. Nechť O je střed kružnice k opsané trojúhelníku ABC a AD její průměr. Označme P průsečík tečny ke kružnici k sestrojené v bodě D a přímky BC . Dále nechť M, N jsou průsečíky přímky PO po řadě se stranami AC, AB . Dokažte, že $|OM| = |ON|$.

14. Určete počet všech pořadí číslic od 1 do 9, jako například 172863945, ve kterých číslice od 1 do 5 stojí zleva doprava v rostoucím pořadí, zatímco číslice od 1 do 6 nikoliv. Výsledek запиšte jedním číslem, ne výrazem.

15. Deset gangsterů stojí na rovné lince tak, že jejich vzdálenosti jsou navzájem různé. Ve stejný okamžik každý z gangsterů vystřelí na nejbližšího z devíti ostatních a zasáhne ho. Určete nejmenší možný počet zasažených gangsterů.

16. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x a y , pro které platí

$$x + y^2 + z^3 = xyz,$$

kde z je největší společný dělitel čísel x a y .

17. Ke kružnici opsané libovolnému ostroúhlému trojúhelníku ABC sestavíme tečny s body dotyku B , C a jejich průsečík označíme T . Dále označíme jako P průsečík přímk AT , BC a jako Q střed úsečky AP . Najděte poměr $a : b : c$ délek stran trojúhelníku ABC , při kterém má úhel ABQ největší možnou velikost.

Mezinárodní střetnutí česko-polsko-slovenské

V rámci závěrečné přípravy před MMO se uskutečnilo již čtvrté mezinárodní střetnutí mezi týmy České republiky, Polska a Slovenska. Jednotlivé země reprezentovala šestice účastníků, kteří si vybojovali ve svých zemích postup na 48. MMO v Hanoji.

Soutěž se uskutečnila od 24. do 27. června 2007 v severomoravském Bílovci. Všechna tři reprezentační družstva přicestovala na místo konání již v neděli večer 24.6. Organizace a průběh soutěže zůstal zachován z předešlých ročníků — je přizpůsoben stylu III. kola naší MO a podmínkám na MMO. Soutěžícím byly ve dvou dnech předloženy dvě trojice soutěžních úloh, přitom za každou z nich mohli získat nejvýše 7 bodů, celkově tedy (stejně jako na MMO) 42 body. Na každou trojici úloh měli soutěžící vyhrazeno 4,5 hodiny.

Pořadí	Jméno	Země	Body	Součet
1.	Maciej Gawron	POL	7 7 7 7 3 0	31
2.	Karol Żebrowski	POL	7 7 5 7 3 0	29
3.	Wojciech Zaremba	POL	6 7 4 1 7 1	26
4.	Jacek Jendrej	POL	7 7 2 7 1 0	24
5.	Piotr Dobel	POL	3 3 4 6 5 0	21
6.	Tomasz Kobos	POL	7 7 5 0 1 0	20
7.–8.	Miroslav Klimoš	CZE	7 2 2 7 1 0	19
	Michal Rolínek	CZE	7 2 2 7 1 0	19
9.	Zbyněk Konečný	CZE	7 1 2 7 1 0	18
10.–11.	Ondrej Mikuláš	SVK	0 7 2 7 1 0	17
	Michal Szabados	SVK	6 7 3 0 1 0	17
12.	Vladislav Ujházi	SVK	0 7 4 1 1 0	13
13.	Tomáš Rusin	SVK	2 2 5 1 1 0	11
14.–15.	Tomáš Kocák	SVK	0 7 2 0 1 0	10
	Lenka Slavíková	CZE	4 0 2 2 2 0	10
16.	Hana Šormová	CZE	3 0 2 0 3 0	8
17.	Michal Spišiak	SVK	1 1 2 2 1 0	7
18.	Jiří Řihák	CZE	0 0 2 1 0 0	3

Návrh všech šesti úloh (a jejich vzorová řešení) připravili členové úlohové komise z České republiky — dr. *Jaroslav Švrček* a doc. *Jaromír Šimša*. Úlohy koordinovala mezinárodní komise ve složení *Jaromír Šimša*, *Jaroslav Švrček* a *Karel Horák* za Českou republiku, *Pavol Novotný* a *Ján Mazák* za Slovensko a *Waldemar Pompe* a *Adam Osękowski* za Polsko.

Texty soutěžních úloh

1. Najděte všechny mnohočleny P s reálnými koeficienty, pro něž rovnost

$$P(x^2) = P(x) \cdot P(x + 2)$$

platí pro libovolné reálné číslo x . (*Pavel Calábek*)

2. Necht' $a_1 = a_2 = 1$ a $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ (Fibonacciho posloupnost). Dokažte, že pro každé přirozené číslo m existuje takový index k , pro nějž je číslo $a_k^4 - a_k - 2$ dělitelné číslem m . (*Ján Mazák*)

3. Necht' k je kružnice opsaná takovému konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$, že polopřímky DA a CB se protínají v bodě E , pro který platí $|CD|^2 = |AD| \cdot |ED|$. Označme F ($F \neq A$) průsečík kružnice k s přímkou procházející bodem A a kolmou na ED . Dokažte, že pak platí: Úsečky AD a CF jsou shodné, právě když střed kružnice l opsané trojúhelníku ABE leží na přímce ED . (*Jaroslav Švrček*)

4. Dokažte, že pro každé reálné číslo $p \geq 1$ lze z množiny reálných čísel x splňujících nerovnosti

$$p < x < \left(2 + \sqrt{p + \frac{1}{4}}\right)^2$$

vybrat čtyři navzájem různá přirozená čísla a, b, c, d , pro něž platí rovnost $ab = cd$. (*Jaromír Šimša*)

5. Zjistěte, pro která

$$n \in \{3\,900, 3\,901, 3\,902, 3\,903, 3\,904, 3\,905, 3\,906, 3\,907, 3\,908, 3\,909\}$$

lze množinu $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ rozdělit na disjunktní trojice tak, aby v každé trojici se jedno číslo rovnalo součtu ostatních dvou čísel.

(*Peter Novotný*)

6. Necht $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Kružnice procházející body A a D má vnější dotyk s kružnicí procházející body B a C ve vnitřním bodě P uvažovaného čtyřúhelníku. Předpokládejme, že

$$|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle PDC| \leq 90^\circ \quad \text{a} \quad |\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCD| \leq 90^\circ.$$

Dokažte, že pak platí $|AB| + |CD| \geq |BC| + |AD|$. (Waldemar Pompe)

Řešení úloh

1. Konstantní mnohočlen $P(x) = c$ vyhovuje, právě když $c = c^2$, mnohočleny $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$ jsou tedy řešením úlohy.

Ukažme nyní, že jediný vyhovující mnohočlen P kladného stupně n je tvaru $P(x) = (x - 1)^n$. Uvedený mnohočlen je vzhledem k identitě $(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n(x + 1)^n$ zřejmě řešením pro každé $n \geq 1$.

Je-li ax^n ($a \neq 0$) vedoucí člen mnohočlenu $P(x)$ kladného stupně n , je ax^{2n} vedoucí člen mnohočlenu $P(x^2)$ a a^2x^{2n} vedoucí člen mnohočlenu $P(x)P(x+2)$. Pokud P vyhovuje dané rovnosti, dostáváme porovnáním příslušných členů $a = a^2$, tedy $a = 1$. Proto lze mnohočlen P zapsat ve tvaru $P(x) = (x - 1)^n + Q(x)$, kde Q je buď nulový mnohočlen, anebo nenulový mnohočlen stupně k , kde ovšem $0 \leq k < n$. Porovnáním mnohočlenů

$$\begin{aligned} P(x^2) &= (x^2 - 1)^n + Q(x^2), \\ P(x)P(x+2) &= ((x - 1)^n + Q(x))((x + 1)^n + Q(x+2)) \end{aligned}$$

obdržíme (po roznásobení a zrušení mocniny $(x^2 - 1)^n$ na obou stranách) rovnost

$$Q(x^2) = (x - 1)^n Q(x+2) + (x + 1)^n Q(x) + Q(x)Q(x+2).$$

Vidíme, že nulový mnohočlen Q vztah splňuje. Pro nenulový mnohočlen Q stupně $k < n$ je ovšem $Q(x^2)$ mnohočlen stupně $2k$, zatímco na pravé straně odvozeného vztahu je mnohočlen stupně $n + k$ (jeho vedoucí člen je $2bx^{n+k}$, je-li bx^k vedoucí člen mnohočlenu $Q(x)$). Protože $2k < n + k$, nemůže uvedená rovnost platit.

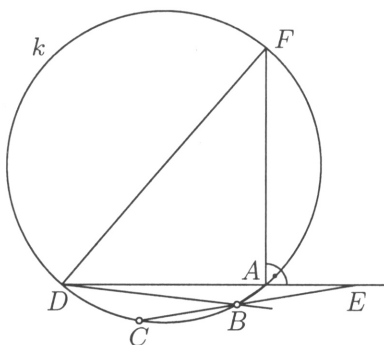
Odpověď. Úloze vyhovují konstantní mnohočleny $P(x) = 0$ a $P(x) = 1$ a pro každé n přirozené mnohočlen $P(x) = (x - 1)^n$.

2. Všechny kongruence a zbytkové třídy jsou podle daného modulu m . Žádanou kongruenci $a_k^4 - a_k - 2 \equiv 0$ získáme jako důsledek jednodušší kongruence $a_k \equiv -1$.

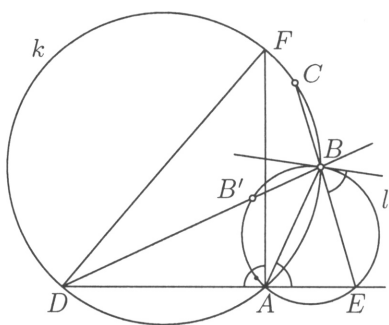
Posloupnost zbytkových tříd čísel a_k má následující vlastnost: zbytkové třídy libovolných dvou po sobě jdoucích členů a_k, a_{k+1} jednoznačně určují zbytkové třídy jak všech následujících členů a_i ($i > k+1$), tak všech předchozích členů a_i ($i < k$). Odtud obvyklým postupem, založeným na tom, že všech uspořádaných dvojic zbytkových tříd je m^2 , tedy konečný počet, plyne, že posloupnost zbytkových tříd čísel a_i je periodická, a to hned od svého prvního členu. Existuje tedy číslo $p > 0$ (závislé na daném modulu m) takové, že $a_i \equiv a_{i+p}$ pro každý index i . Není-li $m = 1$ (pro ně je tvrzení úlohy triviální), je zřejmě $p > 1$. Protože $a_1 \equiv a_2 \equiv 1$, platí rovněž $a_{p+1} \equiv a_{p+2} \equiv 1$, odkud $a_p \equiv 0$ a $a_{p-1} \equiv -1$, takže můžeme vzít $k = p - 1$ a důkaz je hotov.

3. Zřejmě je DF průměrem kružnice k . Nejprve ukážeme, že za daných podmínek nemůže bod C ležet v polorovině DFA .

Pokud body B, C leží na části DA oblouku DAF (obr. 46), jsou zřejmě úhly DCB a DBA tupé, proto $|DC| < |DB| < |DA| < |DE|$, takže rovnost $|CD|^2 = |AD| \cdot |ED|$ nemůže platit. Pro body B, C na části AF oblouku DAF (obr. 47) je úhel BAE ostrý a pro úhel DBE platí $|\sphericalangle DBE| = 180^\circ - |\sphericalangle DBC| \leq 90^\circ$, nemůže tedy případný další průsečík B' polopřímky DB s kružnicí l ležet za bodem B (úsekový úhel příslušný tětivě BE kružnice l je totiž roven úhlu BAE , a ten je ostrý). Proto $|DC| > |DB| \geq |DB'|$. Rovnost $|CD|^2 = |AD| \cdot |ED|$ nemůže tedy platit, protože pro mocnost bodu D ke kružnici l platí $|AD| \cdot |ED| = |DB| \cdot |DB'| < |DC|^2$.



Obr. 46



Obr. 47

Jestliže tedy bod C neleží v polorovině FDA , je $|FC| = |DA|$, právě když $DAFC$ je pravoúhelník, tj. právě když CA je průměr kružnice k , což

je ekvivalentní tomu, že úhel CBA je pravý, a to je ekvivalentní tomu, že trojúhelník AEB je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu B , neboli střed kružnice opsané trojúhelníku AEB je středem úsečky AE .

4. Čísla $a = (k-1)k$, $b = (k+1)k$, $c = (k-1)(k+1)$, $d = k^2$ zřejmě splňují rovnost $ab = cd$ a nerovnosti $a < c < d < b$ pro každé $k > 1$. Necht' tedy k je nejmenší přirozené číslo, pro které platí $p < a$ neboli $p < (k-1)k$ (při zadaném p). Ukažme, že pro takové k pak platí $b = (k+1)k \leq p + 4 + 2\sqrt{4p+1}$, což je zřejmě číslo o $\frac{1}{4}$ menší než horní mez intervalu ze zadání, takže tím bude řešení úlohy úplné.

Podle výběru čísla k platí $p \geq (k-2)(k-1)$. Řešením této kvadratické nerovnice dostaneme odhad

$$k \leq \frac{3}{2} + \sqrt{p + \frac{1}{4}},$$

ze kterého již plyne

$$\begin{aligned} b = (k+1)k &\leq \left(\frac{5}{2} + \sqrt{p + \frac{1}{4}}\right) \left(\frac{3}{2} + \sqrt{p + \frac{1}{4}}\right) = \\ &= \frac{15}{4} + 4\sqrt{p + \frac{1}{4}} + \left(p + \frac{1}{4}\right) = p + 4 + 2\sqrt{4p+1}. \end{aligned}$$

5. Z možnosti rozdělení na disjunktní trojice plyne $3 \mid n$. V každé trojici $\{a, b, a+b\}$ je součet $2(a+b)$, tedy sudé číslo, proto musí být sudý i součet všech čísel od 1 do n , součin $n(n+1)$ musí tedy být dělitelný čtyřmi. Celkem máme, že číslo n musí být tvaru $12k$ nebo $12k+3$, čemuž z daných čísel vyhovují pouze $n = 3900$ a $n = 3903$.

V dalším odstavci popíšeme konstrukci, jak z vyhovujícího rozkladu pro dané $n = k$ vytvořit vyhovující rozklady pro $n = 4k$ a $n = 4k+3$. To nám zaručí, že rozklady pro $n = 3900$ i $n = 3903$ existují, a to díky sestupné posloupnosti

$$3900 \rightarrow 975 \rightarrow 243 \rightarrow 60 \rightarrow 15 \rightarrow 3$$

(místo 3900 lze začít i číslem 3903) a díky triviálnímu rozkladu pro $n = 3$ (z něhož postupně sestrojíme rozklady pro $n = 15$, $n = 60$ atd. až pro $n = 3900$ resp. $n = 3903$).

Z vyhovujícího rozkladu množiny $\{1, 2, \dots, k\}$ nejprve vyrobíme vyhovující rozklad množiny prvních k sudých čísel $\{2, 4, \dots, 2k\}$ (prostě

všechna čísla ve všech trojicích výchozího rozkladu vynásobíme dvěma).
V případě $n = 4k$ pak zbylá čísla

$$\{1, 3, 5, \dots, 2k-1, 2k+1, 2k+2, \dots, 4k-1, 4k\}$$

rozdělíme do k trojic $\{2j-1, 3k-j+1, 3k+j\}$, kde $j = 1, 2, \dots, k$.
Vidíte je ve sloupcích tabulky

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2k-3 & 2k-1 \\ 3k & 3k-1 & 3k-2 & \dots & 2k+2 & 2k+1 \\ 3k+1 & 3k+2 & 3k+3 & \dots & 4k-1 & 4k \end{pmatrix}$$

V případě $n = 4k+3$ zbylá čísla

$$\{1, 3, 5, \dots, 2k-1, 2k+1, 2k+2, \dots, 4k+2, 4k+3\}$$

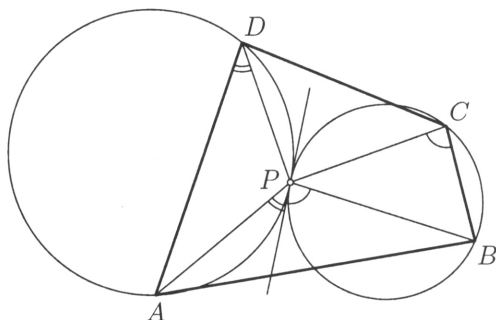
rozdělíme do $k+1$ trojic $\{2j-1, 3k+3-j, 3k+j+2\}$, kde $j = 1, 2, \dots, k+1$,
tvořených sloupci tabulky

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2k-1 & 2k+1 \\ 3k+2 & 3k+1 & 3k & \dots & 2k+3 & 2k+2 \\ 3k+3 & 3k+4 & 3k+5 & \dots & 4k+2 & 4k+3 \end{pmatrix}.$$

Tím je důkaz toho, že čísla $n = 3900$ a $n = 3903$ vyhovují, hotov.

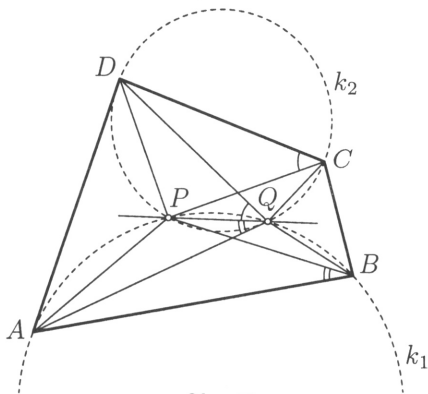
6. Je-li P společný bod zmíněných kružnic, plyne z věty o obvodových a úsekových úhlech, že je zároveň i bodem dotyku, právě když (obr. 48)

$$|\sphericalangle ADP| + |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle APB|. \quad (1)$$



Obr. 48

Uvažujme kružnice k_1 , k_2 opsané trojúhelníkům ABP a CDP a označme Q případný další průsečík obou kružnic (obr. 49). Protože bod A leží vně kružnice BCP , je $|\sphericalangle BCP| + |\sphericalangle BAP| < 180^\circ$. Proto bod C leží vně kružnice k_1 . Analogicky leží i bod D vně této kružnice. Odtud plyne, že body P a Q leží na téže oblouku CD kružnice k_2 .



Obr. 49

Analogicky body P a Q leží na téže oblouku AB kružnice k_1 . Bod Q tudíž leží buď uvnitř úhlu BPC , nebo uvnitř úhlu APD . Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že bod Q leží uvnitř úhlu BPC (obr. 49). V takovém případě podle předpokladu úlohy platí

$$|\sphericalangle AQD| = |\sphericalangle PQA| + |\sphericalangle PQD| = |\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCD| \leq 90^\circ. \quad (2)$$

Protože bod Q leží na částech oblouků AB i CD uvnitř úhlu BPC , leží bod Q dokonce uvnitř trojúhelníku BPC , tedy i uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$.

Z vlastností protějších a vedlejších úhlů tětiových čtyřúhelníků $APQB$ a $DPQC$ (obr. 49) plyne

$$|\sphericalangle BQC| = |\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle PDC|,$$

takže podle předpokladu úlohy

$$|\sphericalangle BQC| \leq 90^\circ. \quad (3)$$

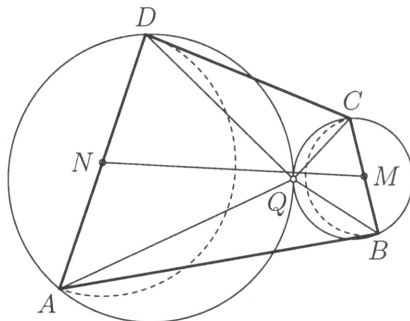
Protože je navíc $|\sphericalangle PCQ| = |\sphericalangle PDQ|$, dostáváme podle (1)

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ADQ| + |\sphericalangle BCQ| &= |\sphericalangle ADP| + |\sphericalangle PDQ| + |\sphericalangle BCP| - |\sphericalangle PCQ| = \\ &= |\sphericalangle ADP| + |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle APB|. \end{aligned}$$

A protože také $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle AQB|$, vychází

$$|\sphericalangle ADQ| + |\sphericalangle BCQ| = |\sphericalangle AQB|.$$

To ovšem znamená, jak už víme z úvodní úvahy, že kružnice BCQ a DAQ se dotýkají v bodě Q (obr. 50).



Obr. 50

Uvažujme nyní polokruhy sestrojené nad stranami BC a DA „dovnitř“ čtyřúhelníku $ABCD$. Protože úhly AQD a BQC nejsou tupé, leží každý z obou polokruhů celý uvnitř odpovídajícího kruhu příslušného kružnici BQC , resp. AQD ; a protože se obě kružnice dotýkají vně, mají i oba polokruhy sestrojené nad stranami BC a DA nejvýše jeden společný bod (tj. nepřekrývají se). Označíme-li M a N středy stran BC a DA , plyne odtud nerovnost $|MN| \geq \frac{1}{2}(|BC| + |DA|)$.

Na druhou stranu zřejmě platí $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD})$, takže $|MN| \leq \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$. Odtud vychází dokazovaná nerovnost $|AB| + |CD| \geq |BC| + |DA|$.

V třetí dekádě července 2007 se sjelo do vietnamské Hanoje 520 středoškolských studentů z 93 zemí celého světa na další ročník nejprestižnější soutěže jednotlivců v řešení matematických úloh.

Logotypu této mezinárodní olympiády dominuje symbol místa konání 48. MMO, hlavního města Hanoje (jde o chrám literatury, první vietnamskou univerzitu založenou v roce 1076) uprostřed dvou kolmic symbolizujících matematickou soustavu souřadnic a zároveň zeměpisný poledník s rovnoběžkou.

Obě křivky pak dodávají logotypu mocné vnitřní pnutí, které symbol Hanoje obklopuje. Na jedné straně tak představují společné směřování, spojení, solidaritu a přátelství mladých lidí na MMO, na straně druhé vytvářejí představu plamene symbolizujícího odkrývaný talent a tvořivost mládeže, jež může matematiku využít k naplňování vznešených cílů lidstva.

Vietnamští organizátoři se na celý průběh akce připravili velmi dobře a nachystali soutěžícím a jejich vedoucím velmi zajímavý program na celou dobu pobytu. S podporou státních orgánů zajistili všem účastníkům komfortní hotelové ubytování a výtečné stravování, regulérní podmínky pro oba soutěžní dny i následnou náročnou práci hodnotících porot. Koordinační týmy tvořili velmi erudovaní matematici — učitelé mnoha místních vysokých škol a vědeckých ústavů. Pro chvíle odpočinku byl připraven bohatý program, takže všichni účastníci měli možnost poznat nejen pamětihodnosti hlavního města Hanoje a přírodní krásy přímořského letoviska Ha Long, ale seznámit se při jedné exkurzi rovněž s technologií výroby hedvábí. Význam soutěže byl umocněn přítomností vietnamského premiéra *Nguyen Tan Dunga* na slavnostním zahájení v předvečer prvního soutěžního dne. O týden později předával zlaté medaile nejlepším soutěžícím osobně prezident VSR *Nguyen Minh Triet*.



Vedoucím družstva ČR byl doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., z Masarykovy univerzity v Brně. Naše šestičlenné soutěžní družstvo, které doprovázel RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc., z Univerzity Palackého v Olomouci, bylo jmenováno na základě výsledků ústředního kola 56. ročníku MO ve Zlíně a následného týdenního výběrového soustředění v Kostelci nad Černými lesy. Tvořili je *Miroslav Klimoš* z 2. ročníku Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bilovci, *Michal Rolínek* ze 4. ročníku Gymnázia Johanna Keplera v Praze 6, *Lenka Slavíková* ze 4. ročníku Gymnázia v Mnichově Hradišti a trojice studentů z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně: *Zbyněk Konečný* a *Jiří Řihák* ze 4. ročníku a *Hana Šormová* z 2. ročníku.

Soutěžící jednotlivci jako obvykle řešili ve dvou půldnech vždy tři soutěžní úlohy po dobu 4,5 hodiny; za každou ze šesti úloh mohli získat nejvýše 7 bodů. Výběr soutěžních úloh nebyl pro porotu složenou z vedoucích jednotlivých zemí ani letos jednoduchý. V současnosti prožívají různé národní i nadnárodní matematické soutěže velký rozmach; je proto stále obtížnější posoudit, které z navrhovaných přibližně 30 úloh jsou dostatečně původní a nepodobné těm, které už na nějaké soutěži kdy byly. Diskuse o těchto otázkách jednání poroty znesnadňují a časově protahují. Také snaha poroty zařadit do výsledné šestice dvě extrémně náročné úlohy, které by určily vítěze celého klání, letos nevedla k příliš šťastnému řešení. Z celého pole účastníků třetí úlohu vyřešili pouze tři a šestou úlohu pouze čtyři soutěžící! Proto si mnozí vedoucí kladli otázku: mělo smysl naplnit třetinu zadání soutěže pro 520 účastníků úlohami, které 515 účastníků nemělo vůbec šanci vyřešit? Po soutěži se navíc ukázalo, že šestá úloha ani tolik originální nebyla, protože se přesně kryla s obsahem jednoho článku, který v roce 1993 vyšel v *European Journal of Combinatorics*. Pro nás je ovšem potěšitelné, že po deseti letech byla do soutěže vybrána česká úloha. Jejím autorem je *Marek Pechal*, držitel bronzové medaile z předloňské 46. MMO v Mexiku.

Absolutním vítězem 48. MMO se stal *Konstantin Matvejev* z Ruska, který získal 37 bodů ze 42 možných. Zařadil se tak do čela 39 nejlepších soutěžících, kterým byly za zisk nejméně 29 bodů uděleny zlaté medaile. Stříbrné medaile si z Hanoje odvezli 83 účastníci ohodnocení alespoň 21 bodem. Na bronzovou medaili letos stačilo 14 bodů; potěšilo nás, že mezi 131 držiteli tohoto kovu je i pět reprezentantů České republiky (Konečný, Klimoš, Slavíková, Rolínek a Řihák). Ani šestá naše soutěžící Šormová nevyšla úplně naprázdno, když spolu se 148 dalšími soutěžícími bez medailí získala čestné uznání za úplné vyřešení jedné ze šesti sou-

těžních úloh. Podrobné výsledky našich soutěžících ukazuje následující tabulka:

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
197.–225. Miroslav Klimoš	7	0	0	6	2	0	15	III.
171.–196. Zbyněk Konečný	7	0	0	7	2	0	16	III.
226.–253. Michal Rolínek	7	0	0	6	1	0	14	III.
226.–253. Jiří Řihák	7	0	0	7	0	0	14	III.
197.–225. Lenka Slavíková	6	0	0	7	2	0	15	III.
365.–401. Hana Šormová	0	1	0	7	0	0	8	HM
Celkem	34	1	0	40	7	0	82	

Pro srovnání uvádíme i tabulku s výsledky slovenských reprezentantů, kteří sice získali o jednu medaili méně, v celkovém bodovém součtu nás však o čtyři body předstihli:

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
197.–225. Samuel Hapák	7	1	0	7	0	0	15	III.
226.–253. Ondrej Mikuláš	6	0	0	6	2	0	14	III.
161.–170. Tomáš Rusin	3	7	0	6	1	0	17	III.
322.–343. Michal Spišiak	7	1	0	0	2	0	10	HM
123.–132. Michal Szabados	6	7	0	7	0	0	20	III.
322.–343. Vladislav Ujházi	0	1	0	7	2	0	10	HM
Celkem	29	17	0	33	7	0	86	

S radostí můžeme konstatovat, že naše družstvo podalo na 48. MMO lepší výkon, než se očekával podle výsledků přípravných soustředění. V neoficiálním žebříčku zúčastněných států, které uvádíme tabulce na další straně, nám náš výsledek oproti loňské MMO přinesl skok o 10 míst nahoru (případná čísla v závorce uvádějí nižší počet reprezentantů než obvyklých 6). Za povšimnutí stojí, že s výjimkou Polska a Švýcarska podala nečekaně vyrovnaný výkon družstva všech ostatních států, které se pak v září 2007 zúčastnily prvního ročníku *Středoevropské matematické olympiády* (kromě Polska a Švýcarska to bylo pořádající Rakousko, dále pak Slovensko, Slovinsko, Chorvatsko a Česká republika, o účasti v dalších ročnících uvažují i představitelé Německa a Maďarska). Věříme, že nová soutěž vždy na počátku školního roku bude pro její per-

spektivní účastníky dobrým stimulem k intenzivní celoroční přípravě na následující celosvětovou matematickou olympiádu.

	I	II	III	body		I	II	III	body
Rusko	5	1	0	184	Arménie	0	1	1	73
ČLR	4	2	0	181	Macao	0	1	1	73
Korea	2	4	0	168	Izrael	0	0	3	71
Vietnam	3	3	0	168	Nový Zéland	0	0	3	71
USA	2	3	1	155	Ázerbájdžán	0	0	3	69
Japonsko	2	4	0	154	Bosna a Hercegovina	0	1	0	69
Ukrajina	3	1	2	154	Indonézie	0	1	0	69
KLDR	1	4	0	151	Makedonie	0	0	3	68
Bulharsko	2	3	1	149	Nizozemsko	0	0	1	65
Tchaj-wan	2	3	1	149	Estonsko	0	0	1	64
Rumunsko	1	4	1	146	Albánie	0	0	1	59
Hongkong	0	5	1	143	<i>Švýcarsko</i>	0	0	1	59
Írán	1	3	2	143	Lotyšsko	0	0	0	58
Thajsko	1	3	2	133	Finsko	0	1	0	55
Německo	1	3	1	132	Portugalsko	0	0	1	52
Maďarsko	0	5	0	129	Irsko	0	0	1	51
Turecko	1	2	2	124	Turkmenistán	0	0	0	51
<i>Polsko</i>	1	2	2	122	Dánsko	0	0	1	50
Bělorusko	1	1	4	119	Španělsko	0	0	2	48
Moldavsko	0	3	2	118	Kirgizie (5)	0	0	1	43
Itálie	1	1	3	116	JAR	0	0	0	42
Austrálie	0	1	4	110	Kypr	0	0	0	41
Srbsko	1	0	4	107	Trinidad a Tobago	0	0	0	39
Brazílie	0	2	3	106	Tádžikistán	0	0	1	37
Indie	0	3	0	103	Kostarika (5)	0	0	1	36
Gruzie	1	1	1	102	Island	0	0	0	35
Kanada	0	1	3	98	Ekvádor	0	0	1	34
Kazachstán	0	1	3	95	Lucembursko (3)	0	0	1	34
Velká Británie	1	0	3	95	Malajsie	0	0	1	34
Kolumbie	0	1	3	93	Salvádor (4)	0	0	0	34
Litva	1	0	2	92	Pákistán	0	0	1	32
Peru	0	1	2	91	Paraguay (4)	0	0	0	32
Recko	0	1	3	89	Bangladéš (5)	0	0	0	31
Mongolsko	0	2	1	88	Maroko	0	0	0	28
Uzbekistán	0	1	3	88	Kambodža (4)	0	0	0	26
Singapur	0	0	5	87	Srí Lanka	0	0	0	25
Mexiko	0	0	4	86	Filipíny	0	0	0	21
<i>Slovensko</i>	0	0	4	86	Nigérie	0	0	0	20
<i>Slovinsko</i>	0	0	5	85	Mongolsko (3)	0	0	0	17
<i>Česká republika</i>	0	0	5	82	Kuba (1)	0	0	1	16
Švédsko	0	0	4	81	Lichtenštejnsko (2)	0	0	1	14
<i>Rakousko</i>	0	1	3	80	Venezuela (3)	0	0	0	14
Francie	1	0	2	79	Portoriko (3)	0	0	0	7
Norsko	0	1	1	79	Saudská Arábie	0	0	0	5
Belgie	0	0	3	78	Chile (4)	0	0	0	4
<i>Chorvatsko</i>	0	0	2	76	Bolívie (2)	0	0	0	2
Argentina	0	1	1	75					

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

1. Jsou dána reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$. Pro každé i ($1 \leq i \leq n$) definujeme

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}.$$

Nechť

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ platí nerovnost

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Ukažte, že existují reálná čísla $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, pro něž v $(*)$ nastane rovnost. (Nový Zéland)

2. Uvažujeme pět bodů A, B, C, D, E takových, že $ABCD$ je rovnoběžník a čtyřúhelník $BCED$ je tětíkový. Přímka l prochází bodem A , přičemž protíná úsečku DC v jejím vnitřním bodě F a přímku BC v bodě G . Předpokládejme, že platí $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokažte, že přímka l je osou úhlu DAB . (Lucembursko)

3. Někteří účastníci matematické soutěže jsou přátelé. Přátelství je vzájemné. Skupinu soutěžících nazveme *klika*, jsou-li každý dva z nich přátelé. (Speciálně libovolná skupina složená z méně než dvou soutěžících je *klika*.) Počet členů kliky nazveme jejím *rozměrem*.

Víme, že největší rozměr kliky složené z účastníků soutěže je sudé číslo. Dokažte, že všechny soutěžící je možno rozesadit do dvou místností tak, aby největší rozměr kliky v jedné místnosti se rovnal největšímu rozměru kliky v druhé místnosti. (Rusko)

4. Osa úhlu BCA trojúhelníku ABC protíná jeho opsanou kružnici v bodě R různém od bodu C , osu strany BC v bodě P a osu strany AC v bodě Q . Střed strany BC označme K a střed strany AC označme L . Dokažte, že obsahy trojúhelníků RPK a RQL se rovnají.

(Česká republika)

5. Kladná celá čísla a, b jsou taková, že číslo $(4a^2 - 1)^2$ je dělitelné $4ab - 1$. Dokažte, že $a = b$. (Velká Británie)

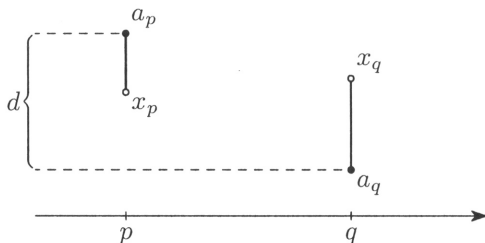
6. Nechť n je kladné celé číslo. Uvažujeme množinu

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

složenou z $(n+1)^3 - 1$ bodů třírozměrného prostoru. Určete nejmenší možný počet rovin, jejichž sjednocení obsahuje všechny body z S , neobsahuje však bod $(0, 0, 0)$. (Nizozemsko)

Řešení soutěžních úloh

1. Každé z čísel $d_1, d_2, \dots, d_n$, a tedy i jejich maximum d se rovná rozdílu některých dvou členů posloupnosti $a_1, a_2, \dots, a_n$. Existují proto indexy p, q takové, že $p \leq q$ a $d = a_p - a_q$. (Tyto indexy nejsou obecně určeny jednoznačně, např. pro neklesající posloupnost (a_i) je zřejmě $d = 0$ a rovnost $a_p = a_q$ může splňovat více dvojic členů takové posloupnosti.)



Obr. 51

Nechť $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ jsou libovolná reálná čísla. K důkazu části (a) stačí pracovat s hodnotami x_p, x_q (obr. 51). Máme totiž $x_q \geq x_p$, a tedy

$$(a_p - x_p) + (x_q - a_q) = (a_p - a_q) + (x_q - x_p) \geq a_p - a_q = d.$$

Proto platí aspoň jedna z nerovností $a_p - x_p \geq \frac{1}{2}d$, $x_q - a_q \geq \frac{1}{2}d$, odkud dostáváme

$$\begin{aligned} \max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} &\geq \max\{|x_p - a_p|, |x_q - a_q|\} \geq \\ &\geq \max\{a_p - x_p, x_q - a_q\} \geq \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Tím je dokázána část (a).

Položme nyní

$$x_k = \max\left\{a_i - \frac{d}{2} : 1 \leq i \leq k\right\} \quad \text{pro } 1 \leq k \leq n.$$

Taková posloupnost je zřejmě neklesající, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Ukážeme, že pro takto zvolené hodnoty x_i platí

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} = \frac{d}{2}.$$

Protože x_1 jsme zvolili tak, že $|x_1 - a_1| = \frac{1}{2}d$, stačí ukázat, že pro každé $i = 2, \dots, n$ je $|x_i - a_i| \leq \frac{1}{2}d$.

Přímo z definice hodnoty x_i plyne $x_i - a_i \geq -\frac{1}{2}d$, ukážeme tedy, že pro libovolné i je také $x_i - a_i \leq \frac{1}{2}d$. Je-li $j \leq i$ nejmenší index, pro který $x_j = x_i$, je buď $j = 1$, nebo $j \geq 2$ a zároveň $x_{j-1} < x_j$. V obou případech zřejmě platí $x_j = a_j - \frac{1}{2}d$. Máme tedy

$$x_i = x_j = a_j - \frac{d}{2}.$$

Z definice hodnoty d samozřejmě plyne, že $a_j - a_i \leq d$. Celkem tudíž platí

$$x_i - a_i = a_j - \frac{d}{2} - a_i \leq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}.$$

Ukázali jsme, že pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ platí $-\frac{1}{2}d \leq x_i - a_i \leq \frac{1}{2}d$, tedy opravdu $|x_i - a_i| \leq \frac{1}{2}d$.

Jiné řešení. Kdyby pro některou neklesající posloupnost (x_i) bylo $\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} < \frac{1}{2}d$, dostali bychom pro každé i , $1 \leq i \leq n$, nerovnost $x_i - \frac{1}{2}d < a_i < x_i + \frac{1}{2}d$, neboli

$$d_i < \left(x_i + \frac{d}{2}\right) - \left(x_i - \frac{d}{2}\right) = d.$$

To odporuje definici čísla d .

Označme pro každé i , $1 \leq i \leq n$,

$$M_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} \quad \text{a} \quad m_i = \min\{a_j : i \leq j \leq n\}.$$

Obě posloupnosti (m_i) i (M_i) jsou zřejmě neklesající, přičemž $m_i \leq a_i \leq M_i$. Položme nyní $x_i = \frac{1}{2}(m_i + M_i)$, výsledná posloupnost je rovněž neklesající, a protože $d_i = M_i - m_i$, platí

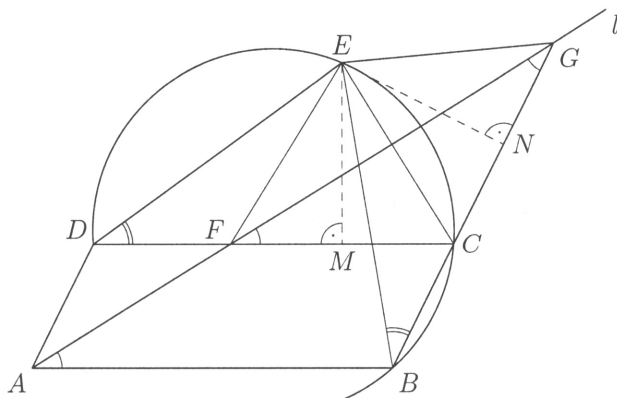
$$-\frac{d_i}{2} = \frac{m_i - M_i}{2} = x_i - M_i \leq x_i - a_i \leq x_i - m_i = \frac{M_i - m_i}{2} = \frac{d_i}{2}.$$

Je tudíž

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \max\left\{\frac{d_i}{2} : 1 \leq i \leq n\right\} = \frac{d}{2}.$$

A protože jsme už dokázali opačnou nerovnost pro libovolnou neklesající posloupnost (x_i) , musí pro takto zvolenou posloupnost platit rovnost.

2. Zřejmě stačí ukázat, že $|CF| = |CG|$, protože z rovnosti souhlasných a střídavých úhlů příslušných přímce l rovnoběžek AD, BG (obr. 52) dostaneme $|\sphericalangle BAG| = |\sphericalangle CFG| = |\sphericalangle CGF| = |\sphericalangle CGA| = |\sphericalangle DAG|$.



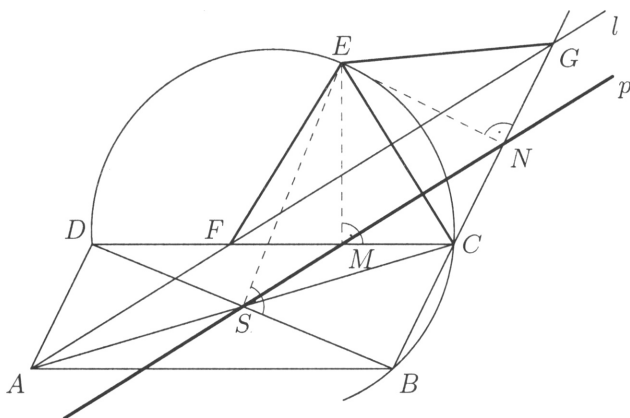
Obr. 52

Předpokládejme naopak, že je např. $|CF| < |CG|$. Označme M a N středy úseček CF a CG . Zřejmě pak platí také $|MF| < |NC|$, $|ME| > |NE|$ (pravoúhlé trojúhelníky FME a CNE mají shodnou přeponu), a protože pravoúhlé trojúhelníky DEM a BEN jsou podobné (to plyne z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou EC kružnice k opsané čtyřúhelníku $BCED$), je také $|DM| > |BN|$ a $|DF| = |DM| - |MF| > |BN| - |NC| = |BC| = |DA|$. Trojúhelníky ADF a GCF jsou podobné, takže poslední nerovnost $|DF| > |DA|$ je ekvivalentní nerovnosti $|CF| > |CG|$. To je opačná nerovnost, než jakou jsme předpokládali.

Začneme-li naopak s opačnou nerovností, dojdeme samozřejmě naprosto stejným postupem opět ke sporu. Tím je dokázána rovnost $|CF| = |CG|$, a tedy i tvrzení úlohy.

Jiné řešení. Označme postupně S, M, N středy úseček CA, CF, CG . Tyto tři body zřejmě leží na přímce p , jež je obrazem přímky l ve stejnolehlosti se středem C a koeficientem $\frac{1}{2}$ (obr. 53). Úsečky EM, EN jsou výškami rovnoramenných trojúhelníků EFC, ECG , jsou tedy kolmé na odpovídající přímky CD, BC . Takže přímka p je Simsonovou přímkou¹ bodu E a trojúhelníku BCD .

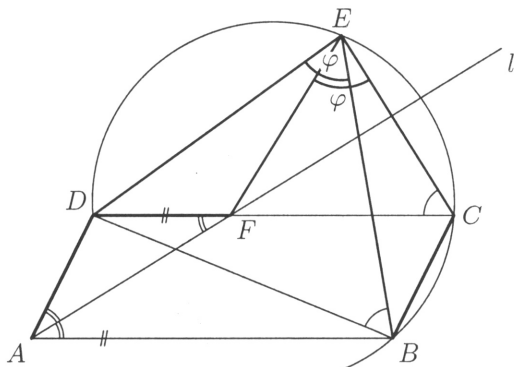
¹ Věta o Simsonově přímce říká, že v jedné přímce leží paty tří kolmic spuštěných z libovolného bodu Q kružnice opsané danému trojúhelníku XYZ na přímky jeho stran; uvedená přímka se nazývá Simsonova přímka bodu Q a trojúhelníku XYZ .



Obr. 53

Úhlopříčky rovnoběžníku se půlí, proto je bod S středem úsečky BD , a protože leží na Simsonově přímce p , musí být zároveň patou kolmice z bodu E na stranu BD . Bod E je tak nutně středem oblouku BD kružnice opsané těživovému čtyřúhelníku $BCED$ a platí $|ED| = |EB|$.

Z obvodových úhlů nad tětivou ED plyne $|\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle DCE|$, takže rovnoramenné trojúhelníky DBE , FCE jsou podobné (jejich ramena EB , EC svírají se základnami DB , FC shodné úhly, obr. 54). V otočení



Obr. 54

okolo bodu E o úhel $\varphi = |\sphericalangle DEB| = |\sphericalangle FEC|$ se bod D zobrazí na B a F na C , proto $|DF| = |BC|$. Zároveň však $|BC| = |AD|$, odkud vyplývá, že trojúhelník AFD je rovnoramenný. Odtud opět využitím shodnosti

střídavých úhlů snadno dostaneme, že $|\sphericalangle DAF| = |\sphericalangle DFA| = |\sphericalangle FAB|$, tedy přímka l je opravdu osou úhlu DAB .

Poznámka. K důkazu tvrzení o Simsonově přímce stačí využít vlastnosti obvodových úhlů. Při daném označení ukažme, že bod S , v němž přímka MN protíná stranu BD trojúhelníku BCD , je patou kolmice z bodu E opsané kružnice na tuto stranu, tj. že úhel ESB je pravý: Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou DE plyne, že $|\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle DCE|$. Navíc $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle MCE| = |\sphericalangle SNE|$, neboť body M, C, N, E leží na Thaletově kružnici. To ale znamená, že i body S, B, N, E leží na (Thaletově) kružnici s průměrem EB .

Jiné řešení. Z podobnosti trojúhelníků ADF a GCF plyne

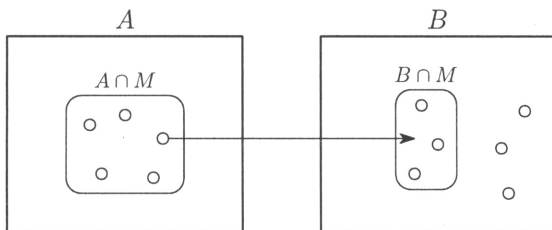
$$\frac{|FC|}{|FD|} = \frac{|CG|}{|AD|} = \frac{|CG|}{|BC|}.$$

Existuje proto spirální podobnost, která zobrazí úsečku DC na úsečku BG , přičemž bod F přejde do bodu C a střed M úsečky FC do středu N úsečky CG . Úhel přímek DC a BG určuje úhel příslušného otočení, vidíme tedy, že střed uvedené spirální podobnosti musí ležet na kružnici opsané trojúhelníku DBC (úsečku DB je z něj vidět pod úhlem $|\sphericalangle DCB|$) a také na kružnici opsané trojúhelníku MCN (i úsečku MN je z něj vidět pod úhlem $|\sphericalangle DCB| = 180^\circ - |\sphericalangle MCN|$). Společným bodem (různým od bodu C) obou kružnic je právě bod E , a protože $|EM| = |EN|$, jde o shodnost, takže je také $|DC| = |BG|$. Je tudíž i $|AB| = |BG|$ a odtud, jak už víme, snadno plyne, že přímka l je osou úhlu BAD .

3. Uvedeme algoritmus, jak rozdělit účastníky do místností. Dvě místnosti, do nichž budeme účastníky rozdělovat, označme A a B . Začneme s určitým rozdělením, které budeme postupně upravovat posíláním účastníků z jedné místnosti do druhé. Během algoritmu budeme označovat A, B i množiny účastníků, kteří právě jsou v daných místnostech, a $c(A), c(B)$ velikost největší kliky v příslušné místnosti.

1. krok. Nechť $2m$ je rozměr největší kliky a M je jedna z klik s tímto rozměrem, tj. $|M| = 2m$. Začneme tím, že všechny soutěžící z M dáme do místnosti A a všechny ostatní do místnosti B . Zřejmě platí $c(A) = |M| \geq c(B)$.

2. krok. Dokud je $c(A) > c(B)$, posíláme účastníky po jednom z A do B (obr. 55). (Je-li $c(A) > c(B)$, místnost A určitě není prázdná.)



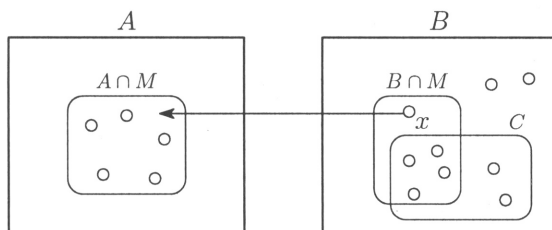
Obr. 55

Po každém přesunu se $c(A)$ zmenší o 1 a $c(B)$ se nejvýše o 1 zvětší. Po konečném počtu přesunů tak dosáhneme toho, že $c(A) \leq c(B)$, a zároveň bude $c(B) \leq c(A) + 1$, protože dosud záporný rozdíl $c(B) - c(A)$ nemůže vzrůst o více než o 2. Pokud je nyní $c(A) = c(B)$, náš postup úspěšně skončil.

Pokud $c(B) = c(A) + 1$, budeme pokračovat dalším krokem. Zatím je stále ještě $A \subset M$ klika, proto $c(A) = |A|$, a dokonce platí $|A| \geq m$, protože kdyby bylo $c(A) = |A| \leq m - 1$, bylo by $c(B) \geq |B \cap M| \geq m + 1$, a tudíž i $c(B) - c(A) \geq (m + 1) - (m - 1) = 2$.

3. krok. Označme $k = c(A)$, takže $c(B) = k + 1$ a podle předchozí úvahy platí $k \geq m$ a zároveň $|B \cap M| \leq m$.

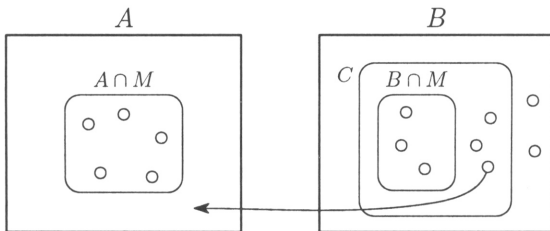
Nechť C je některá klika v B , pro kterou platí $|C| = k + 1$. Pokud existuje účastník $x \in (B \cap M) \setminus C$ (obr. 56), tak ho pošleme zpět do místnosti A . V ní teď bude $k + 1$ členů M , takže $c(A) = k + 1$, přičemž velikost kliky C v B se nezmenšila, tudíž $c(B) = k + 1 = c(A)$ a náš algoritmus úspěšně končí.



Obr. 56

Pokud pro žádnou kliku C velikosti $k + 1$ takového účastníka x v $(B \cap M) \setminus C$ nenajdeme, znamená to, že v místnosti B obsahuje každá klika s rozměrem $k + 1$ jako podmnožinu celý průnik $B \cap M$.

4. krok. Dokud je $c(B) = k + 1$, volíme některou kliku $C \subset B$ velikosti $k + 1$ a pošleme jednoho člena z $C \setminus M$ do místnosti A (obr. 57). (Množina $C \setminus M$ nemůže být prázdná, protože $|C| = k + 1 > m \geq |B \cap M|$.)



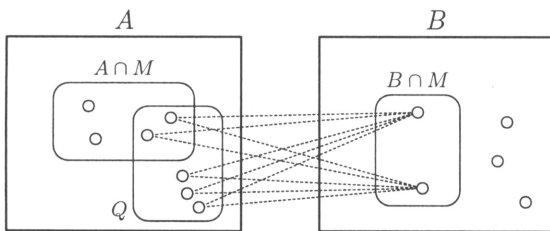
Obr. 57

Pokaždé, když pošleme jednoho účastníka z B do A , zmenší se $c(B)$ nejvýše o 1. Nakonec tak dosáhneme toho, že $c(B) = k$. Přitom v místnosti A máme kliku $A \cap M$ velikosti $|A \cap M| = k$, takže $c(A) \geq k$. Ukážeme, že v A už není klika s větším rozměrem a že jsme tím pádem hotovi.

Nechť Q je libovolná klika v A . Dokážeme, že $|Q| \leq k$. V místnosti A , a tedy i v množině Q mohou být dva typy účastníků:

- ▷ Členové M ; protože M je klika, jsou to přátelé všech členů $B \cap M$.
- ▷ Účastníci, které jsme do A poslali ve 4. kroku; každý z nich byl v klíce, která obsahovala $B \cap M$, proto je přítelem všech členů $B \cap M$.

Všichni členové Q jsou tedy přátelé všech členů $B \cap M$ (obr. 58), navíc



Obr. 58

množiny Q a $B \cap M$ samotné jsou kliky, takže i jejich sjednocení $Q \cup (B \cap M)$ je klika. A protože M je klika s největším rozměrem, máme

$$|M| \geq |Q \cup (B \cap M)| = |Q| + |B \cap M| = |Q| + |M| - |A \cap M|,$$

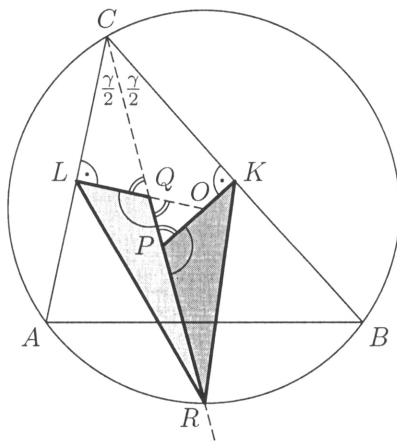
odkud $|Q| \leq |A \cap M| = k$.

Nakonec jsme tedy i po 4. kroku dostali rovnost $c(A) = c(B)$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

4. Pokud je $|AC| = |BC|$, je trojúhelník ABC rovnoramenný a souměrný podle osy úhlu při vrcholu C , je tedy $P = Q$ a není co dokazovat. Předpokládejme proto (samozřejmě bez újmy na obecnosti), že $|AC| < |BC|$.

Protože CR je osa úhlu, jsou pravoúhlé trojúhelníky QLC a PKC podobné (obr. 59). Kromě jiného to znamená rovnost úhlů $|\sphericalangle CQL| = |\sphericalangle CPQO| = |\sphericalangle QPO|$, takže trojúhelník QPO je rovnoramenný a platí $|PO| = |QO|$. Ze zmíněné podobnosti pak ještě plyne

$$\frac{|PK|}{|QL|} = \frac{|PC|}{|QC|}.$$



Obr. 59

Vzhledem k rovnosti úhlů RPK a RQL tak pro obsahy uvažovaných trojúhelníků dostáváme

$$\frac{S(RPK)}{S(RQL)} = \frac{\frac{1}{2} \sin |\sphericalangle RPK| \cdot |RP| \cdot |PK|}{\frac{1}{2} \sin |\sphericalangle RQL| \cdot |RQ| \cdot |QL|} = \frac{|RP| \cdot |PC|}{|RQ| \cdot |QC|} = 1,$$

neboť tětiva CR je zřejmě souměrná podle stejné osy jako rovnoramenný trojúhelník QPO , takže je $|RP| = |QC|$ a $|PC| = |RQ|$. Tím je rovnost $S(RPK) = S(RQL)$ dokázána.

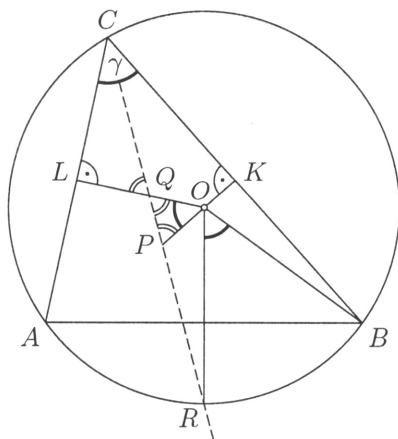
Jiné řešení. Podobně jako v prvním řešení budeme rovnou předpokládat, že $|AC| < |BC|$. Označme γ velikost vnitřního úhlu při vrcholu C . Z pravoúhlých trojúhelníků QLC a PKC (obr. 60) plyne, že

$$|\sphericalangle CQL| = |\sphericalangle CPK| = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\gamma,$$

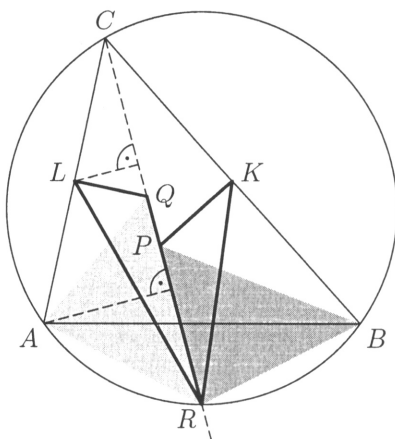
takže trojúhelník QPO je rovnoramenný s úhlem velikosti γ při hlavním vrcholu O . Středový úhel stejné velikosti zřejmě přísluší i shodným tětívám AR a BR opsané kružnice (tětivy jsou shodné, protože CR je osou úhlu ACB). Uvažujme proto otočení se středem O o úhel γ . V něm se bod A zobrazí do bodu R , bod R do bodu B a bod Q do bodu P . Uvedené otočení tak převádí trojúhelník ARQ na trojúhelník RBP (obr. 61), oba trojúhelníky jsou tudíž shodné a mají stejné obsahy. Nyní si stačí uvědomit, že

$$S(ARQ) = 2S(RQL) \quad \text{a} \quad S(RBP) = 2S(RPK),$$

protože vzdálenosti vrcholů A a B od přímky CR jsou rovny dvojnásobkům vzdáleností odpovídajících středů L a K stran AC a BC od téže přímky.



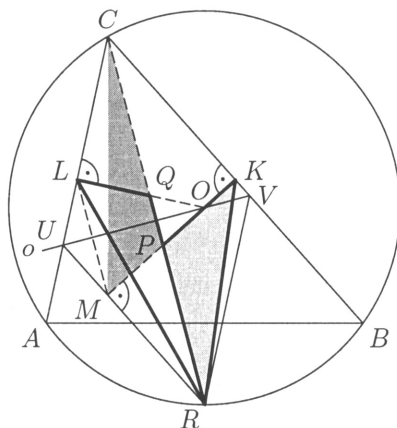
Obr. 60



Obr. 61

Jiné řešení. Jak jsme zjistili už v prvním řešení, procházejí středem O opsané kružnice jak osy KP , LQ stran BC , resp. AC , tak i osa o tětivy CR (obr. 62). Průsečíky osy o s přímkami AC , BC označme po řadě

U a V . Z vlastnosti osy úsečky plyne $|CU| = |RU|$ a $|CV| = |RV|$. Platí i $|CU| = |CV|$, neboť v trojúhelníku CUV je strana UV kolmá k ose úhlu při vrcholu C , kterou je polopřímka CR . Čtyřúhelník $CURV$ je tedy kosočtverec nebo čtverec. V osové souměrnosti podle přímky UV tak přejde dvojice rovnoběžek CU, RV v dvojici rovnoběžek RU, CV ; přímka LQ jdoucí samodružným bodem O kolmo k první dvojici přímek



Obr. 62

proto přejde v přímku jdoucí bodem O kolmo k druhé dvojici přímek, tedy v přímku KP . Tato přímka tudíž protne přímku RU v bodě M , který je souměrně sdružený s bodem L . Ze stejného důvodu jsou souměrně sdružené i body P, Q (a samozřejmě i body C, R), takže jsou souměrně sdružené i trojúhelníky CPM a RQL . Ještě si povšimněme dvojice trojúhelníků MRC, MRK ; také ty mají stejný obsah, neboť $CK \parallel MR$. Platí tedy

$$\begin{aligned} S(PRK) &= S(MRK) - S(MRP) = S(MRC) - S(MRP) = \\ &= S(MPC) = S(RQL). \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov.

5. Jestliže $(4a^2 - 1)^2$ je dělitelné číslem $4ab - 1$, je jím dělitelný i výraz

$$\begin{aligned} (4a^2 - 1)^2 - 2(4a^2 - 1)(4ab - 1) + (4ab - 1)^2 &= \\ = ((4a^2 - 1) - (4ab - 1))^2 &= (4a)^2(a - b)^2. \end{aligned}$$

A protože čísla $4a$ a $4ab - 1$ jsou nesoudělná, dostáváme, že $(a - b)^2$ je rovněž dělitelné číslem $4ab - 1$. To znamená, že

$$(a - b)^2 = m(4ab - 1) \quad (1)$$

pro vhodné přirozené číslo m . Pro $m = 0$ dostáváme $a = b$. Ukážeme, že pro libovolné $m > 0$ rovnici (1) žádná dvojice přirozených čísel a, b nevyhovuje.

Předpokládejme naopak, že takové dvojice čísel a, b existují, a vyberme mezi nimi dvojici (a_0, b_0) s nejmenším b_0 . Protože vztahu (1) zároveň vyhovuje i symetrická dvojice (b_0, a_0) , plyne odtud $b_0 < a_0$.

Vztah (1) pro $a = a_0, b = b_0$ nyní přepíšeme do tvaru

$$a_0^2 - (2 + 4m)b_0a_0 + (b_0^2 + m) = 0, \quad (2)$$

z něhož vidíme, že přirozené číslo $x_1 = a_0$ vyhovuje kvadratické rovnici

$$x^2 - (2 + 4m)b_0x + (b_0^2 + m) = 0$$

s celočíselnými koeficienty. Proto i její druhý kořen $x_2 = (b_0^2 + m)/a_0 > 0$, který dostaneme z Viètova vztahu, je přirozený. Zřejmě tedy i dvojice (b_0, x_2) vyhovuje rovnosti (1), takže vzhledem k volbě čísla b_0 platí $x_2 > b_0$ neboli $m > a_0b_0 - b_0^2 = b_0(a_0 - b_0)$. Dosazením čísel a_0, b_0 do (1) tak máme

$$(a_0 - b_0)^2 > b_0(a_0 - b_0)(4a_0b_0 - 1),$$

odkud za uvedených předpokladů vychází nerovnost $4b_0^2 < 1$, což nemůže pro žádné přirozené číslo b_0 platit.

Jiné řešení. Z podmínky $4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$ a rovnosti pro rozdíl čtverců

$$b^2(4a^2 - 1)^2 - (a - b)^2 = a(4ab - 1)(4a^2b + a - 2b)$$

plyne

$$4ab - 1 \mid (a - b)^2. \quad (3)$$

Připustíme, že nalezený vztah splňuje nějaká dvojice (a, b) přirozených čísel s vlastností $a \neq b$. S ohledem na symetrii vztahu (1) můžeme předpokládat, že $a > b$. Pak rovnost $(a - b)^2 = m(4ab - 1)$, kde m je vhodné přirozené číslo, přepíšeme do tvaru

$$(a - b - 2mb)^2 = 4m^2b^2 + 4mb^2 - m,$$

z něhož plyne, že $4m^2b^2 + 4mb^2 - m = t^2$ pro vhodné celé číslo $t > 2mb$, neboť $4mb^2 - m > 0$. S ohledem na $t^2 < 4m^2b^2 + 4mb^2 < (2mb + b)^2$ však musí zároveň být $t < 2mb + b$, dohromady tedy $t = 2mb + b - s$, kde celé číslo s splňuje nerovnosti

$$0 < s < b (< a). \quad (4)$$

Rovnost $4m^2b^2 + 4mb^2 - m = (2mb + b - s)^2$ upravíme do tvaru

$$m(4bs - 1) = (b - s)^2, \quad \text{odkud} \quad 4bs - 1 \mid (b - s)^2.$$

Dvojice (b, s) proto splňuje stejně jako výchozí dvojice (a, b) vztah (3). Podle (4) je ovšem nová dvojice (b, s) v každé z obou složek menší než původní dvojice (a, b) . Protože složky uvažovaných dvojic jsou přirozená čísla, můžeme celou proceduru zmenšování složek zopakovat pouze několikrát; po určitém počtu kroků proto dojdeme ke dvojici různých přirozených čísel, k níž už není možné proceduru uplatnit, a to je spor. Žádná dvojice *různých* přirozených čísel splňující vztah (3) proto neexistuje.²

6. Nejmenší možný počet rovin je $3n$. Snadno najdeme $3n$ rovin, jež dané podmínky splňují. Můžeme například vzít roviny s rovnicemi $x = i$, $y = i$, $z = i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ anebo roviny s rovnicemi $x + y + z = k$ pro $k = 1, 2, \dots, 3n$. Ukážeme, že méně než $3n$ rovin nestačí.

Nejprve dokážeme následující tvrzení:

Nechť $P = P(x_1, \dots, x_k)$ je nenulový mnohočlen k proměnných. Jestliže $P(0, \dots, 0) \neq 0$ a zároveň $P(x_1, \dots, x_k) = 0$ pro libovolná $x_1, \dots, x_k \in \{0, 1, \dots, n\}$ taková, že $x_1 + \dots + x_k > 0$, je $\text{st } P \geq kn$, kde $\text{st } P$ označuje stupeň mnohočlenu P , tj. exponent nejvyšší mocniny x ve výrazu $P(x, \dots, x)$.

Tvrzení dokážeme matematickou indukcí vzhledem k počtu proměnných k . Pro $k = 1$ je jeho platnost zřejmá: jestliže nenulový mnohočlen jedné proměnné má n kořenů (v našem případě jsou kořeny P čísla $1, 2, \dots, n$), má stupeň aspoň n .

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k = m$. Dokážeme, že potom platí i pro $k = m + 1$. Kvůli přehlednosti označme $y = x_{m+1}$. Jestliže P chápeme jako mnohočlen proměnné y , můžeme ho vydělit mnohočlenem

² O objevu klíčového vztahu dělitelnosti (1) a skutečnosti, že i za druhým řešením se skrývá manipulace s kořeny kvadratické rovnice (2) z prvního řešení se dočtete v článku Jaromíra Šimši v Rozhledech matematicko-fyzikálních 83 (2008), č. 1, str. 14.

$Q(y) = y(y-1) \dots (y-n)$. Přitom jako zbytek dostaneme mnohočlen R . Přesněji,

$$P(x_1, \dots, x_m, y) = Q(y) \cdot S(x_1, \dots, x_m, y) + R(x_1, \dots, x_m, y),$$

kde $\text{st}_y R \leq n$ (tj. stupeň zbytku R , pokud ho chápeme jako mnohočlen jedné proměnné y , je menší než stupeň mnohočlenu Q). Protože $Q(y) = 0$ pro $y = 0, 1, \dots, n$, máme $R(x_1, \dots, x_m, y) = P(x_1, \dots, x_m, y)$ pro libovolná $x_1, \dots, x_m, y \in \{0, 1, \dots, n\}$, neboli R splňuje podmínky našeho tvrzení. Zřejmě $\text{st} R \leq \text{st} P$, stačí tedy dokázat, že $\text{st} R \geq (m+1)n$.

Rozepíšme R podle mocnin y :

$$R(x_1, \dots, x_m, y) = R_n(x_1, \dots, x_m)y^n + R_{n-1}(x_1, \dots, x_m)y^{n-1} + \dots + R_0(x_1, \dots, x_m).$$

Ukážeme, že na mnohočlen $R_n(x_1, \dots, x_m)$ můžeme použít indukční předpoklad.

Uvažujme mnohočlen $T(y) = R(0, \dots, 0, y)$ stupně nejvýše n . Tento mnohočlen má n kořenů $y = 1, 2, \dots, n$. Na druhé straně T není konstantní nulový mnohočlen, neboť $T(0) \neq 0$. Je tedy $\text{st} T = n$ a jeho vedoucí koeficient $R_n(0, \dots, 0)$ je nenulový.

Vezmeme-li libovolná čísla $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1, \dots, n\}$, kde $a_1 + \dots + a_m > 0$, a dosadíme $x_i = a_i$ do $R(x_1, \dots, x_m, y)$, dostaneme mnohočlen proměnné y . Tento mnohočlen je nulový ve všech bodech $y = 0, 1, \dots, n$ (tj. má aspoň $n+1$ kořenů) a má stupeň nejvýše n . Proto musí být nulový, neboli $R_i(a_1, \dots, a_m) = 0$ pro všechna $i = 0, 1, \dots, n$. Speciálně $R_n(a_1, \dots, a_m) = 0$.

Mnohočlen $R_n(x_1, \dots, x_m)$ tak splňuje předpoklady našeho tvrzení a podle indukčního předpokladu dostáváme $\text{st} R_n \geq mn$, pročež

$$\text{st} P \geq \text{st} R \geq \text{st} R_n + n \geq (m+1)n.$$

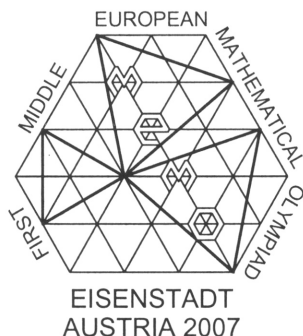
Teď už řešení snadno dokončíme. Předpokládejme, že máme N rovin pokrývajících všechny body z S , ale neobsahujících bod $(0, 0, 0)$. Nechť rovnice těchto rovin jsou $a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$ (pro $i = 1, 2, \dots, N$). Uvažujme mnohočlen

$$P(x, y, z) = (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1)(a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) \dots (a_N x + b_N y + c_N z + d_N),$$

jehož stupeň je zřejmě N . Tento mnohočlen pro libovolné $(x_0, y_0, z_0) \in S$ splňuje rovnost $P(x_0, y_0, z_0) = 0$ a zároveň $P(0, 0, 0) \neq 0$. Podle dokázaného tvrzení je tedy $N = \text{st} P \geq 3n$.

1. střeoevropská matematická olympiáda

Z podnětu organizačního výboru rakouské matematické olympiády (ÖMO) byly v během 47. mezinárodní matematické olympiády ve Slovinsku delegace devíti střeoevropských zemí (Švýcarska, Rakouska, Německa, Slovinska, Chorvatska, České republiky, Slovenska, Polska a Maďarska) seznámeny s návrhem vytvořit pro matematicky talentované střeoškoláky uvedených zemí novou soutěž. Snahou iniciátorů vzniku soutěže bylo umožnit dalším studentům zemí střední Evropy porovnat své znalosti z matematiky v mezinárodním měřítku. Na tomto jednání byly také předběžně stanoveny cíle a pravidla této nové mezinárodní soutěže. Iniciátoři jejího vzniku přitom vycházeli z pravidel dvojstranné mezinárodní matematické soutěže střeoškoláků „Polsko – Rakousko“, která existovala až do roku 2006 plných 29 let.



První ročník Střeoevropské matematické olympiády (MEMO — Middle European Mathematical Olympiad) se uskutečnil 20.–26. září 2007 v rakouském Eisenstadtu — hlavním městě spolkové země Burgenland. Soutěže se však v jejím prvním ročníku zúčastnilo pouze sedm (z devíti) střeoevropských zemí (soutěže se nezúčastnilo Německo a Maďarsko).

Každou zemi mělo právo reprezentovat šest soutěžících, kteří se nezúčastnili uplynulé MMO ve Vietnamu a ve školním roce 2007/08 byli studenty středních škol. Úvodního ročníku soutěže se nakonec zúčastnilo 40 studentů (slovinské družstvo přicestovalo do Eisenstadtu pouze se čtyřmi účastníky).

Ústřední komise české MO vybrala pro Střeoevropskou matematickou olympiádu šestici střeoškoláků sestavenou z vítězů, resp. těch úspěšných řešitelů ústředního kola 56. ročníku MO kategorie A, kteří splňovali podmínky soutěže. České reprezentační družstvo tak v abecedním pořadí tvořili tito soutěžící: *Jan Máca* (G v Třebíči), *Matěj Pe-*

terka (G v Praze 6, Nad Alejí), Alena Peterová (G Dobruška), Samuel Říha (G v Brně, tř. Kpt. Jaroše), Tomáš Toufar (GMK v Bílovci) a Jan Vaňhara (GLJ v Holešově). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., z Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl Mgr. Martin Panák, Ph.D., z brněnského pobočky Matematického ústavu AV ČR.

Vlastní soutěž se konala ve dvou soutěžních dnech, a to v sobotu 22. září (soutěž jednotlivců) a v neděli 23. září (soutěž družstev). Po oba soutěžní dny řešili jednotlivci, resp. reprezentační družstva po 4 úlohách, na jejichž vypracování byl vždy vyhrazen čas 5 hodin. Každá úloha byla přitom hodnocena (podle předem schváleného systému hodnocení) celočíselným počtem bodů v rozpětí 0–8 bodů.

Podobně jako na MMO měly jednotlivé země možnost zaslat s jistým časovým předstihem organizačnímu výboru návrhy úloh pro soutěž. Z nich pak mezinárodní jury vybrala dvě čtveřice úloh, jednu pro soutěž jednotlivců a druhou pro soutěž družstev. Mezi vybranými soutěžními úlohami byly také dvě české úlohy. Jedna z nich byla použita v soutěži jednotlivců (autor Marek Pechal) a druhá v soutěži družstev (autor doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.).

Koordinace žakovských řešení probíhala stejným způsobem jako na MMO. Na závěrečném jednání jury (24. září) byly stanoveny hranice pro udělení zlatých, stříbrných a bronzových medailí a dále bylo potvrzeno oficiální pořadí v soutěži družstev. O tom, že úlohy v 1. ročníku soutěže byly poměrně náročné, svědčí i poměrně nízké hranice pro udělení medailí v soutěži jednotlivců. Pro zlatou medaili bylo stanoveno bodové rozpětí 23–32 bodů, pro stříbrnou 13–22 bodů a pro bronzovou medaili 8–12 bodů. Celkově byly uděleny 2 zlaté, 8 stříbrných a 10 bronzových medailí. Nejlepšího výsledku v soutěži jednotlivců přitom dosáhla Joanna Bogdanowicz z Polska. Výsledky našich žáků byly následující:

Umístění	Body za úlohu				Cena
	1	2	3	4	
26.–29. Jan Máca	1	0	1	3	5
30.–32. Matěj Peterka	0	2	1	1	4
26.–29. Alena Peterová	0	0	0	5	5
14.–16. Samuel Říha	0	3	0	7	10 bronz
17.–19. Tomáš Toufar	0	0	8	1	9 bronz
39.–40. Jan Vaňhara	0	0	0	0	0
Celkem	1	5	10	16	33

O něco lépe si vedli naši soutěžící v soutěži družstev. Díky dobře promyšlené strategii řešení všech čtyř úloh obsadili po zásluze pěkně 3. místo a domů si tak všichni přivezli bronzové medaile. Lépe dopadlo Polsko s celkovým ziskem 31 bodů (ze 32 možných) a Chorvatsko s 25 body. Družstva na 3.–5. místě dosáhla shodně zisku 21 bodů, ale české družstvo (jako jediné z nich) vyřešilo bezchybně — bez ztráty bodu — dvě soutěžní úlohy (2. a 3.), proto v konečném pořadí obsadilo 3. příčku před Slovenskem a Rakouskem. Celkové výsledky soutěže družstev jsou uvedeny v následující tabulce.

Umístění	Body za úlohu				Body	Cena
	1	2	3	4		
1. Polsko	8	7	8	8	31	zlato
2. Chorvatsko	8	6	8	3	25	stříbro
3. Česká republika	3	8	8	2	21	bronz
4. Slovensko	3	7	8	3	21	
5. Rakousko	6	4	8	3	21	
6. Švýcarsko	3	3	8	5	19	
7. Slovinsko	3	6	6	3	18	

Pro soutěžící a ostatní účastníky 1. středoevropské MO připravili pořadatelé na poslední dva dny jednodenní výlety, a to k Neziderskému jezeru (Neusiedler See) a do Vídně, kde si účastníci soutěže měli možnost prohlédnout pamětihodnosti hlavního města Rakouska.

Slavnostní zakončení soutěže se konalo za přítomnosti zástupců politického života země Burgenland a ministerstva školství Rakouska v kongresovém sále hotelu Ohr v Eisenstadtu. Předseda mezinárodní jury 1. středoevropské matematické olympiády Univ. Prof. Dr. *Gerd Baron* předal všem oceněným medaile a rovněž poděkoval předsedovi organizačního výboru 1. středoevropské MO Mag. *Thomasi Mühlgassnerovi*, který se výrazným způsobem zasloužil o zdárný průběh celé soutěže.

Texty soutěžních úloh

(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

Soutěž jednotlivců

1. Nechť a, b, c, d jsou kladná reálná čísla splňující rovnost $a+b+c+d = 4$. Dokažte, že

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leq 4.$$

(Švýcarsko)

2. Je dáno k sad míčů (k je celé číslo větší než 1). Každá sada obsahuje n míčů, které jsou označeny čísly $1, 2, \dots, n$. Každý míč obarvíme jednou ze dvou barev (bílou nebo černou) tak, že

- a) míče označené stejným číslem mají stejnou barvu,
- b) žádná $(k + 1)$ -prvková množina míčů, které jsou označeny (ne nutně různými) čísly $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ tak, že platí $a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_{k+1}$, není jednobarevná.

V závislosti na k určete největší možné číslo n , pro něž takové obarvení míčů existuje. (Slovensko)

3. Je dána kružnice k a čtyři menší kružnice k_1, k_2, k_3 a k_4 se středy po řadě O_1, O_2, O_3 a O_4 , jež leží na kružnici k . Pro $i = 1, 2, 3, 4$ se kružnice k_i a k_{i+1} ($k_5 = k_1$) protínají ve dvou bodech A_i a B_i , přičemž body A_i leží na kružnici k . Předpokládejme že body $O_1, A_1, O_2, A_2, O_3, A_3, O_4, A_4$ jsou navzájem různé a leží na kružnici k v tomto pořadí. Dokažte, že $B_1B_2B_3B_4$ je pravoúhelník. (Švýcarsko)

4. Určete všechny dvojice (x, y) kladných celých čísel, která vyhovují rovnici

$$x! + y! = x^y.$$

(Česká republika)

Soutěž družstev

5. Nechtě a, b, c, d jsou libovolná reálná čísla z uzavřeného intervalu $\langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$, která vyhovují podmínce $abcd = 1$. Určete největší možnou hodnotu výrazu

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{d}\right) \left(d + \frac{1}{a}\right).$$

(Česká republika)

6. Pro libovolnou množinu P pěti bodů v rovině (v obecné poloze) označme $a(P)$ počet všech ostroúhlých trojúhelníků s vrcholy v množině P . Určete největší možnou hodnotu $a(P)$.

(Pět bodů v rovině je v obecné poloze, jestliže žádné tři z nich neleží na téže přímce.) (Švýcarsko)

7. Označme $s(T)$ součet délek všech hran čtyřstěnu T . Uvažujme všechny čtyřstěny, jejichž délky hran jsou navzájem různá kladná celá čísla, přičemž jedno z nich je 2 a jedno 3. Takové čtyřstěny budeme nazývat MEMO-čtyřstěny.

- a) Určete všechna kladná celá čísla n , pro něž existuje MEMO-čtyřlístěn T s vlastností $s(T) = n$.
- b) Určete počet navzájem *různých* MEMO-čtyřlístěňů T , pro něž platí $s(T) = 2007$.

Dva čtyřlístěny považujeme za *různé*, jestliže jeden nelze převést na druhý pomocí složení souměrností podle roviny, posunutí nebo otočení.

(Není nutno dokazovat, že dotyčné čtyřlístěny nejsou degenerované, tj. že mají kladný objem.) (Rakousko)

8. Určete všechna kladná celá čísla k s vlastností: existuje celé číslo a takové, že $(a + k)^3 - a^3$ je násobkem čísla 2007. (Rakousko)

Řešení úloh

1. Nechť $p \geq q \geq r \geq s$ je nerostoucí uspořádání prvků uvažované množiny $\{a, b, c, d\}$ kladných reálných čísel, jež vyhovují dané podmínce $a + b + c + d = 4$. Protože $pqrs = abcd = 1$, je také $pqr \geq pqs \geq prs \geq qrs$. Užitím *permutační nerovnosti*³ tak dostaneme

$$\begin{aligned} a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab &= a \cdot abc + b \cdot bcd + c \cdot cda + d \cdot dab \leq \\ &\leq p \cdot pqr + q \cdot pqs + r \cdot prs + s \cdot qrs = (pq + rs)(pr + qs). \end{aligned}$$

Dvojím užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem kladných reálných čísel p, q, r, s dále obdržíme

$$\begin{aligned} (pq + rs)(pr + qs) &\leq \left(\frac{pq + rs + pr + qs}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} ((p + s)(q + r))^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{p + s + q + r}{2} \right)^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{a + b + c + d}{2} \right)^4 = 4, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Levou stranu dokazované nerovnosti upravíme na tvar

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab = ac(ab + cd) + bd(bc + ad) \quad (1)$$

a všimneme si, že se nezmění pro žádnou cyklickou permutaci uspořádané čtveřice (a, b, c, d) . Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že

³ Jsou-li $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ dvě posloupnosti reálných čísel, platí pro libovolné uspořádání $z_1, z_2, \dots, z_n$ čísel $y_1, y_2, \dots, y_n$ nerovnost $x_1z_1 + \dots + x_nz_n \leq x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

$a \geq c$. Podobně lze předpokládat, že $b \geq d$: pokud by totiž platilo $b \leq d$, dostaneme cyklickou záměnou uspořádané čtveřice (a, b, c, d) čtveřici $(a', b', c', d') = (d, a, b, c)$, v níž $a' = d \geq b = c'$ a současně $b' = a \geq c = d'$.

Pro $a \geq c$ a $b \geq d$ platí $(a-c)(b-d) \geq 0$. Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$ab + cd \geq bc + ad.$$

Pomocí této nerovnosti a užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvojice kladných reálných čísel odhadneme pravou stranu rovnosti (1) následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} ac(ab + cd) + bd(bc + ad) &\leq \\ &\leq ac(ab + cd) + bd(ab + cd) = (ab + cd)(ac + bd) \leq \\ &\leq \left(\frac{(ab + cd) + (ac + bd)}{2} \right)^2 = \left(\frac{(a + d)(b + c)}{2} \right)^2 \leq \\ &\leq \left(\frac{\frac{1}{4}(a + b + c + d)^2}{2} \right)^2 = 4. \end{aligned}$$

Tím je požadovaná nerovnost dokázána.

2. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že míče označené číslem 1 mají bílou barvu. Předpokládejme nejprve, že míče označené číslem 2 jsou černé. Protože

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_k = k,$$

mají případné míče označené číslem k podle podmínky b) černou barvu. Z analogických důvodů jsou případné míče označené číslem $2k$ bílé, neboť

$$\underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_k = 2k.$$

Případné míče označené číslem $k + 1$ jsou pak podle podmínky b) černé, neboť

$$(k + 1) + \underbrace{1 + \dots + 1}_{k-1} = 2k.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_{k-1} + 2k = 3k - 1 = \underbrace{2 + \dots + 2}_{k-1} + (k + 1),$$

nemohou být míče označené číslem $3k - 1$ obarveny ani jednou z obou barev (bílou nebo černou). Odtud $n \leq 3k - 2$.

Předpokládejme nyní, že míče označené číslem 2 mají bílou barvu. Z rovností

$$\begin{aligned} 1 + 1 + \dots + 1 + 1 &= k, \\ 1 + 1 + \dots + 1 + 2 &= k + 1, \\ 1 + 1 + \dots + 2 + 2 &= k + 2, \\ &\vdots \\ 1 + 2 + \dots + 2 + 2 &= 2k - 1, \\ 2 + 2 + \dots + 2 + 2 &= 2k \end{aligned}$$

vyplývá, že případné míče označené čísly $k, k+1, \dots, 2k$ jsou černé. Z rovností

$$\underbrace{k + k + \dots + k}_k = k^2$$

dále plyne, že případné míče označené čísly k^2 jsou bílé. Protože však

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_{k-1} + k^2 = k^2 + k - 1 = k + \underbrace{(k+1) + \dots + (k+1)}_{k-1},$$

nemohou mít míče označené číslem $k^2 + k - 1$ ani černou, ani bílou barvu. Je tudíž $n \leq k^2 + k - 2$.

Protože $k^2 + k - 2 \geq 3k - 2$ (nerovnost je ekvivaletní s nerovností $k^2 - 2k = k(k - 2) \geq 0$), vidíme, že uvažované sady mohou obsahovat nejvýše $k^2 + k - 2$ míčů.

Nyní ukážeme, že pro $n = k^2 + k - 2$ má k sad n míčů, v nichž míče s čísly $k, k+1, \dots, k^2 - 1$ jsou černé a ostatní bílé (bílých míčů je aspoň k), požadované vlastnosti:

Součet čísel na libovolných k černých míčích je aspoň $k + k + \dots + k = k^2 > k^2 - 1$, takže množina černých míčů splňuje podmínku b).

Uvažujme nyní součet čísel na libovolných k bílých míčích. Jsou-li na nich pouze čísla menší než k , je jejich součet aspoň k a zároveň nejvýše

$$(k-1) + (k-1) + \dots + (k-1) = k^2 - k < k^2.$$

Je-li však aspoň na jednom z k bílých míčů číslo alespoň k^2 , je jejich součet roven nejméně

$$k^2 + 1 + 1 + \dots + 1 = k^2 + k - 1 > n.$$

Proto i libovolná množina k bílých míčů splňuje podmínku b).

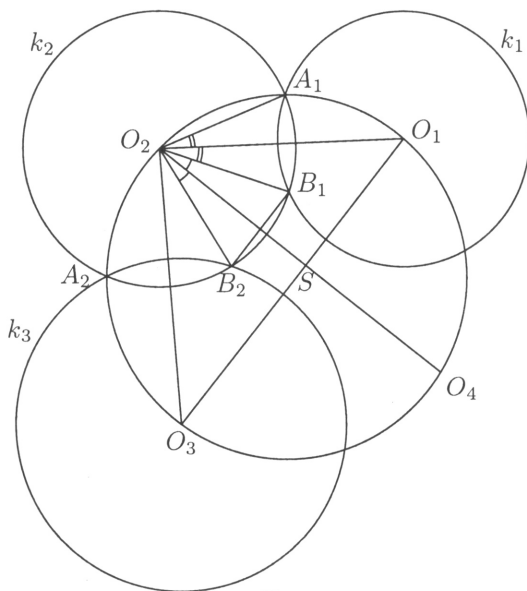
Pro libovolné $k > 1$ je řešením úlohy číslo $n = k^2 + k - 2$.

3. Označme O střed kružnice k a $\alpha_i = |\sphericalangle O_i O A_i| = |\sphericalangle O_i O A_{i-1}|$ velikosti středových úhlů příslušných tětivám $O_i A_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$, $A_0 = A_4$). Pro jejich součet zřejmě platí $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 180^\circ$.

Nejprve ukážeme, že úsečky $O_1 O_3$ a $O_2 O_4$ (jejich průsečík označme S) jsou navzájem kolmé. To plyne z rovnosti (obr. 63)

$$|\sphericalangle O_1 O_3 O_2| + |\sphericalangle O_4 O_2 O_3| = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} = 90^\circ,$$

kterou dostaneme z odpovídajících středových úhlů. Trojúhelník $O_2 O_3 S$ je tudíž pravoúhlý.



Obr. 63

Nyní ukážeme, že $B_1 B_2 \parallel O_1 O_3$. Vzhledem k tomu, že $|O_2 B_1| = |O_2 B_2|$, stačí ukázat, že přímka $O_2 O_4$ je osou úhlu $B_1 O_2 B_2$. Ze souměrnosti kružnic k_1, k_2 dle středné $O_1 O_2$ ovšem plyne

$$\begin{aligned} |\sphericalangle O_4 O_2 B_1| &= |\sphericalangle O_4 O_2 O_1| - |\sphericalangle B_1 O_2 O_1| = \\ &= |\sphericalangle O_4 O_2 O_1| - |\sphericalangle A_1 O_2 O_1| = \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} - \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\alpha_4}{2}. \end{aligned}$$

Úplně stejně ukážeme (vlastně jen prohodíme role kružnic k_1 a k_3), že také $|\sphericalangle O_4 O_2 B_2| = \frac{1}{2}\alpha_4$, a tedy $B_1 B_2 \parallel O_1 O_3$. Podobně dostaneme, že $B_2 B_3 \parallel O_2 O_4$, $B_3 B_4 \parallel O_1 O_3$ a $B_4 B_1 \parallel O_2 O_4$. Tím je důkaz uzavřen.

4. Předně si všimněme, že pro každou hledanou dvojici přirozených čísel x, y platí $x^y = x! + y! \geq 2$, z čehož plyne $x \geq 2$.

Uvažujme nejprve případ $x = 2$. Hledáme tedy všechna přirozená čísla y , která vyhovují rovnici $2 + y! = 2^y$. Z té plyne, že $y!$ je sudé, proto $y \geq 2$ a $2 + y! = 2^y$ je dělitelné 4, což znamená, že $y!$ dává při dělení 4 zbytek 2. Může tedy být jedině $y \in \{2, 3\}$. Vzhledem k tomu, že $2! + 2! = 2^2$ a $2! + 3! = 2^3$, jsou $(2, 2)$ a $(2, 3)$ dvojice přirozených čísel, jež dané rovnici vyhovují.

Nyní uvažujme případ $x \geq 3$. Číslo $x - 1$ je dělitelem čísla $x!$, není však dělitelem čísla x^y , neboť čísla $x - 1$ a x jsou nesoudělná. Ze zadání tak plyne, že $x - 1$ nemůže být dělitelem čísla $y!$, proto $y \leq x - 2$.

Pro jakákoli přirozená čísla $y < x$ přitom platí

$$x! + y! = y!(1 + x \dots (y + 1)),$$

což nemůže být mocnina přirozeného čísla x s přirozeným mocnitelem, protože činitel v závorce na pravé straně je přirozené číslo větší než 1, které je s číslem x nesoudělné.

Závěr. Daná rovnice má právě dvě řešení (x, y) v oboru přirozených čísel, a to $(2, 2)$ a $(2, 3)$.

5. Vzhledem k podmínce $abcd = 1$ platí

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right) &= \frac{(ab + 1)(bc + 1)(cd + 1)(da + 1)}{abcd} = \\ &= (2 + ab + cd)(2 + bc + da) = \\ &= 4 + 2(ab + bc + cd + da) + (a^2bd + b^2ca + c^2bd + d^2ac) = \\ &= 4 + 2 \frac{(a + c)(b + d)}{\sqrt{abcd}} + \frac{a^2bd + b^2ca + c^2bd + d^2ac}{abcd} = \\ &= 4 + 2\left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{d}} + \sqrt{\frac{d}{b}}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{d} + \frac{d}{b}\right). \end{aligned}$$

Uvažujme nyní funkci $f(x) = x + 1/x = f(1/x)$, která je rostoucí na intervalu $\langle 1; \infty \rangle$. Vzhledem k tomu, že $a, b, c, d \in \langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$, a s ohledem na tvar posledního součtu dostáváme pro daný součin odhad

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right) \leq 4 + 2f(2)^2 + 2f(4),$$

přičemž této největší hodnoty nabývá např. pro $a/c = b/d = 4$. Volbou $a = b = 2$ a $c = d = \frac{1}{2}$ je pak splněna jak předešlá podmínka, tak i podmínka $abcd = 1$ ze zadání úlohy.

Největší možná hodnota daného výrazu je tedy $4 + 2(2 + \frac{1}{2})^2 + 2(4 + \frac{1}{4}) = 25$. Maximální hodnoty lze přitom dosáhnout pro následující čtveřice (a, b, c, d) reálných čísel: $(2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$, $(\frac{1}{2}, 2, 2, \frac{1}{2})$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2)$.

Poznámka. Nejmenší možná hodnota uvažovaného výrazu je přitom $4 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 16$. Tato hodnota je dosažena pro $a = c$ a $b = d$, kde $ab = 1$, tj. pro každou čtveřici $(a, b, c, d) = (t, 1/t, t, 1/t)$, kde $t \in \langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$.

6. Libovolných pět bodů (v obecné poloze) vytvoří v rovině deset trojúhelníků. Ukážeme, že aspoň tři z nich nejsou ostroúhlé.

Uvažujme nejprve libovolné čtyři ze zvolené pětice bodů v rovině. Mezi všemi trojúhelníky, které tvoří uvažovaná čtveřice bodů, je vždy aspoň jeden, který není ostroúhlý. Pokud uvažované čtyři body jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku, má aspoň jeden z vnitřních úhlů takového čtyřúhelníku velikost aspoň 90° . Trojúhelník určený rameny tohoto úhlu očividně není ostroúhlý.

V opačném případě, kdy jeden z uvažovaných čtyř bodů leží uvnitř trojúhelníku s vrcholy ve zbývajících třech bodech, existují dokonce dva trojúhelníky, jež nejsou ostroúhlé. Zřejmě nejvýše jeden ze tří úhlů, jejichž společným vrcholem je vnitřní bod tohoto trojúhelníku, má velikost menší než 90° . Zbýlým dvěma pak odpovídají dva tupoúhlé trojúhelníky.

Protože v libovolné čtveřici bodů v rovině lze vždy najít aspoň tři, jež tvoří trojúhelník, který není ostroúhlý, platí totéž i pro pět navzájem různých bodů roviny. Zvolme jednu takovou trojici bodů a uvažme čtveřici bodů, která jeden z nich neobsahuje. Mezi nimi zase existuje trojice bodů, jež tvoří trojúhelník, který není ostroúhlý. Obě nalezené trojice mají společný aspoň jeden vrchol (nikoliv však všechny tři). Uvažujme konečně čtyřúhelník, jehož vrcholy tvoří čtveřice bodů bez vrcholu, který je oběma nalezeným neostroúhlým trojúhelníkům společný. Tři jeho vrcholy tvoří vrcholy dalšího (třetího) trojúhelníku, který není ostroúhlý a od předešlých dvou se liší přinejmenším jedním vrcholem.

Nakonec ukážeme, že v rovině existuje pětice bodů, jež tvoří právě sedm ostroúhlých trojúhelníků. Zvolme v kartézské soustavě souřadnic např. body $A[0; -1]$, $B[3; 0]$, $C[1; 3]$, $D[-1; 3]$ a $E[-3; 0]$. Tato pětice bodů tvoří vrcholy konvexního pětiúhelníku $ABCDE$, který je osově souměrný podle osy strany CD . Trojúhelníky ABE , BCD a CDE jsou tupoúhlé, zatímco všechny ostatní trojúhelníky jsou ostroúhlé. Trojúhelník ACD zřejmě ostroúhlý je, a využijeme-li souměrnosti uvedeného pětiúhelníku, stačí ukázat, že i trojúhelníky ACE (s nejdelsí stranou CE), ADE

(s nejdelší stranou AD) a BDE (s nedelší stranou BE) jsou ostroúhlé, tj. stačí ukázat, že úhly EAC , DEA a BDE proti nejdelším stranám odpovídajících trojúhelníků jsou ostré. Podle kosinové věty tak stačí dokázat následující tři nerovnosti

$$\begin{aligned} |EA|^2 + |AC|^2 &> |CE|^2, \\ |DE|^2 + |EA|^2 &> |AD|^2, \\ |BD|^2 + |DE|^2 &> |BE|^2, \end{aligned}$$

které snadno ověříme výpočtem:

$$\begin{aligned} |EA|^2 + |AC|^2 &= (3^2 + 1^2) + (1^2 + 4^2) = 27 > 25 = 4^2 + 3^2 = |CE|^2, \\ |DE|^2 + |EA|^2 &= (2^2 + 3^2) + (3^2 + 1^2) = 23 > 17 = 1^2 + 4^2 = |AD|^2, \\ |BD|^2 + |DE|^2 &= (4^2 + 3^2) + (2^2 + 3^2) = 38 > 36 = 6^2 + 0^2 = |BE|^2. \end{aligned}$$

Největší možná hodnota funkce a je tedy $a(\{A, B, C, D, E\}) = 7$.

7. Pokud některá ze stěn uvažovaného čtyřstěnu obsahuje hranu délky 2, liší se délky obou zbývajících hran této stěny (podle trojúhelníkové nerovnosti) o 1. Protože hrana délky 2 je společná dvěma stěnám čtyřstěnu, plyne odtud, že množina délek všech šesti hran uvažovaného čtyřstěnu obsahuje dvě (různé) dvojice po sobě jdoucích přirozených čísel.

Pokud některá ze stěn uvažovaného čtyřstěnu obsahuje hranu délky 3, liší se délky obou zbývajících hran o 1 nebo o 2.

Uvažujme nejprve případ, kdy obě hrany délek 2 a 3 leží v téže stěně čtyřstěnu. Z předchozích úvah plyne, že délka třetí hrany této stěny je 4 a délky tři zbývajících hran tohoto čtyřstěnu můžeme označit jako a , $a+1$ a b , kde a a b jsou přirozená čísla, $a \geq 5$. Ze všech čtyř trojúhelníkových nerovností, které pro stěny se společnou hranou délky b můžeme sestavit, vychází, že číslo b může nabývat jen některou z hodnot $a-2$, $a-1$, $a+2$ nebo $a+3$. Označme vrcholy zkoumaného čtyřstěnu A , B , C , D tak, aby bylo $|AB| = 2$, $|BC| = 3$ a $|CA| = 4$. Pro délky zbývajících tří hran se společným vrcholem D tak máme následující možnosti: A) a , $a+1$, $a+2$, B) $a-2$, a , $a+1$, C) a , $a+1$, $a+3$, D) $a-1$, a , $a+1$, přičemž poslední možnost D) je zřejmě ekvivalentní možnosti A).

A) a , $a+1$, $a+2$. Jak jsme již zmínili v úvodu, musí být délky hran AD , BD dvě po sobě jdoucí přirozená čísla, proto volbou délky hrany AD jako a či $a+2$ jsou už délky zbývajících dvou hran určeny jednoznačně, jen pro $|AD| = a+1$ dostaneme dvě možnosti. Celkem tedy pro každé

$a \geq 5$ dostaneme čtyři různé MEMO-čtyřstěny T se součtem $s(T) = 3a + 12 \geq 27$, přičemž $s(T) \equiv 0 \pmod{3}$ (tento poznatek se nám bude hodit v závěru řešení úlohy).

B) $a - 2, a, a + 1$. V tomto případě je možné (s ohledem na úvodní pozorování) jediné uspořádání délek hran, a to $|AD| = a + 1$, $|BD| = a$, $|CD| = a - 2$, $a - 2 \geq 5$ neboli $a \geq 7$, a pro takový MEMO-čtyřstěn T vychází součet $s(T) = 3a + 8 \geq 29$, přičemž $s(T) \equiv 2 \pmod{3}$.

C) $a, a + 1, a + 3$. I v tomto případě dostáváme jedinou možnost, a to $|AD| = a$, $|BD| = a + 1$ a $|CD| = a + 3$, $a \geq 5$, s odpovídajícím součtem $s(T) = 3a + 13 \geq 28$, přičemž $s(T) \equiv 1 \pmod{3}$.

Zjistili jsme, že pro libovolné $n \geq 27$ dokážeme sestrojit MEMO-čtyřstěn, jehož jedna stěna má hrany délek 2, 3 a 4 a zbylé tři hrany určíme podle toho, jaký zbytek při dělení třemi dává číslo n ; podle tohoto zbytku zvolíme jednu z možností A), B) nebo C) a hodnotu čísla a tak, aby bylo $s(T) = n$.

Pokud hrany délek 2 a 3 neleží v téže stěně uvažovaného čtyřstěnu, leží na mimoběžných hranách. Vzhledem k podmínce o velikostech hran ve dvou stěnách se společnou hranou délky 2 musí být délky hran v jedné z těchto stěn a a $a + 1$, ve druhé pak b a $b + 1$, kde a a b jsou vhodná přirozená čísla (obě větší než 3). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $b > a$, což s ohledem na podmínku o délkách hran ve stěně s hranou délky 3 znamená, že $b = a + 2$ (nemůže být $b = a + 1$, protože ve čtyřstěnu by existovaly dvě hrany téže délky). Zbývající hrany uvažovaného čtyřstěnu mají tudíž délky $a, a + 1, a + 2, a + 3$, $a \geq 4$. Zvolíme-li označení vrcholů tak, aby $|AB| = 2$, $|AC| = a$ a $|BC| = a + 1$, vyjde pro zbylé hrany $|CD| = 3$, $|AD| = a + 2$ a $|BD| = a + 3$. Existuje proto jediný typ MEMO-čtyřstěnu T , pro jehož součet $s(T)$ platí $s(T) = 4a + 11 \geq 27$, přičemž $s(T) \equiv 3 \pmod{4}$.

Zjistili jsme, že pro každé $n \geq 27$, které dává při dělení čtyřmi zbytek 3, dovedeme najít ještě jeden (odlišný) MEMO-čtyřstěn T se součtem $s(T) = n$.

Nyní dovedeme odpovědět i na otázku b) úlohy. Protože číslo $2007 = 3^2 \cdot 223$ je dělitelné třemi a zároveň dává při dělení čtyřmi zbytek 3, existuje celkem $4 + 1 = 5$ MEMO-čtyřstěnů T s vlastností $s(T) = 2007$. (Čtyři z nich odpovídají možnostem A z úvodního rozboru a mají kromě stěny s hranami 2, 3, 4 hrany délek 665, 666, 667 a pátý čtyřstěn má kromě mimoběžných hran délek 2 a 3 hrany délek 501, 502, 503 a 504.)

Závěr. Dané úloze vyhovují všechna přirozená čísla $n \geq 27$ a existuje právě pět MEMO-čtyřstěnů T s vlastností $s(T) = 2007$.

8. Předně si uvědomme, že $2007 = 9 \cdot 223$, kde 223 je prvočíslo. Daný výraz upravme na tvar

$$(a + k)^3 - a^3 = 3ak(a + k) + k^3,$$

z něhož je zřejmé, že pro dělitelnost číslem 2007 je nutné, aby číslo k bylo dělitelné třemi. V takovém případě je ovšem uvažovaný rozdíl zároveň dělitelný i devíti.

Nyní ukážeme, že pro každé k tvaru $k = 3m$, kde m je libovolné přirozené číslo, existuje celé číslo a takové, že daný rozdíl je dělitelný prvočíslem 223. Protože

$$(a + k)^3 - a^3 = 9m(a^2 + 3am + 3m^2),$$

stačí pro libovolné přirozené m najít a tak, že $a^2 + 3am + 3m^2$ je dělitelné 223.

Pro dané m uvažujme výraz

$$4(a^2 + 3am + 3m^2) = (2a + 3m)^2 + 3m^2.$$

Čísla 4 a 223 jsou nesoudělná, budeme proto hledat b takové, že

$$b^2 + 3m^2 \equiv 0 \pmod{223} \quad (1)$$

(protože 223 je prvočíslo, snadno pak k nalezenému číslu b určíme hledané číslo a tím, že vyřešíme kongruenci $b \equiv 2a + 3m \pmod{223}$). K tomu účelu využijeme následující rozklad čísla $223 = 196 + 27 = 14^2 + 3 \cdot 3^2$. Z uvedeného rozkladu plyne, že je

$$14^2 m^2 n^2 + 3m^2 \cdot 3^2 n^2 = (14mn)^2 + 3m^2 \cdot (3n)^2 \equiv 0 \pmod{223}.$$

Zvolíme-li nyní přirozené číslo n tak, že $3n \equiv 1 \pmod{223}$, vidíme, že pro $b = 14nm$ skutečně platí (1).

Tím jsme dokázali, že požadovanou vlastnost mají právě všechna kladná celá čísla k dělitelná třemi.

14. stredoevropská olympiáda v informatice

Stredoevropská olympiáda v informatice CEOI (Central European Olympiad in Informatics) je mladší a menší variantou celosvětové programátorské olympiády stredoškoláků. Účastní se jí pravidelně čtyřčlenná družstva reprezentující sedm zemí regionu střední Evropy — družstva z České republiky, Chorvatska, Maďarska, Německa, Polska, Rumunska a Slovenska. Těchto sedm zemí se také víceméně pravidelně střídá v jejím pořádání. Letos přišla řada opět na Českou republiku, a tak v pořadí 14. ročník Stredoevropské olympiády v informatice se konal ve dnech 1.–7. 7. 2007 v Brně.



Na zajištění soutěže se podílely dvě skupiny organizátorů. První z nich byla tvořena pracovníky Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně v čele s proděkanem fakulty RNDr. *Tomášem Pitnerem*, Ph.D. Tato brněnská skupina se starala o organizační stránku celé akce — zajistila ubytování a stravování na kolejích univerzity i prostory pro soutěž v počítačových učebnách Fakulty informatiky, připravila výlety a další doprovodný program, zorganizovala celý průběh týdenního pobytu delegací v Brně, přípravu tištěných i webových prezentací soutěže a mnoho další potřebných věcí. V průběhu akce pomohly také studentky brněnského gymnázia na tř. Kpt. Jaroše, které působily po celý týden v roli průvodkyň jednotlivých soutěžních týmů.

Druhá skupina organizátorů pocházela z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze a tvořila tzv. scientific committee soutěže v čele s předsedou výboru RNDr. *Danilem Králem*, Ph.D. Členové pražské skupiny předem připravili soutěžní úlohy i testovací data, softwarové prostředí pro vlastní soutěž i pro následné vyhodnocení úloh, na místě při soutěži pak koordinovali upřesnění formulací úloh podle požadavků vedoucích jednotlivých družstev a prováděli hodnocení odevdaných řešení. Obě pracovní skupiny organizátorů odvedly výbornou

práci a dokonale se podělily o všechny úkoly, takže soutěž proběhla zcela bez závad a k plné spokojenosti všech zahraničních delegací.

Olympiády se zúčastnilo sedm čtyřlenných soutěžních družstev reprezentujících jednotlivé členské země CEOI, mimo soutěž dále druhé družstvo České republiky tvořené mladšími studenty a také dva místní studenti z Brna. Účast mladších soutěžících z pořadající země bývá na CEOI obvyklá, dává více studentům příležitost získat cenné mezinárodní zkušenosti, aniž by to znatelněji zvýšilo finanční náklady akce. Tito domácí soutěžící pozvaní navíc se samozřejmě nezahrnují do výsledného pořadí. Obě česká družstva byla vybrána na základě výsledků naší vrcholné národní programátorské soutěže, tedy podle výsledků ústředního kola 56. ročníku Matematické olympiády — kategorie P (programování).

Souběžně s hlavní soutěží CEOI probíhala také on-line soutěž po Internetu, do níž se mohl zapojit kterýkoliv zájemce z celého světa. Konala se ve stejném čase a se stejnými úlohami jako vlastní olympiáda. Také tato soutěž měla velký ohlas, zúčastnilo se jí více než dvě stovky soutěžících, nejvíce z Asie. Úroveň řešení odevzdaných v on-line soutěži byla srovnatelná s kvalitou řešení samotné olympiády CEOI.

Soutěž probíhala ve dvou soutěžních dnech, v každém z nich účastníci řešili tři úlohy. Vytvořené programy se testují pomocí předem připravených vstupních dat, přičemž úspěšnost výpočtu je vázána i na dodržení stanovených časových limitů. Různě velká vstupní data použitá při jednotlivých testech a nastavené časové limity umožňují odlišit vedle správnosti výpočtu také efektivitu zvoleného algoritmu. Program založený na pomalém algoritmu stihne vykonat celý výpočet pouze pro malá vstupní data a je tak ohodnocen jen částečným počtem bodů, zatímco algoritmy rychlé zpracují v časovém limitu i rozsáhlé vstupy a získají vyšší ohodnocení.

V rámci doprovodného programu měli všichni účastníci CEOI příležitost seznámit se s městem Brnem a jeho okolím. Hned první den se konala půldenní prohlídka města v průvodcem, mezi oběma soutěžními dny navštívili účastníci zámek Lednice, v závěru pak druhý celodenní výlet vedl do oblasti Moravského krasu s prohlídkou Punkevní jeskyně a propasti Macocha. Zajímavá byla i večerní návštěva planetária a hvězdárny na Kraví hoře. Vyvrcholením doprovodného programu pak byl závěrečný společenský večer po vyhlášení výsledků obohacený o vystoupení kouzelníka.

Za každou z šesti soutěžních úloh bylo možné získat až 100 bodů. Vzhledem k náročnosti soutěžních úloh však skutečně dosaženým maxi-

mem v soutěži bylo pouze 475 bodů. Nejlepších 15 řešitelů s více než polovinou dosažitelných bodů obdrželo medaili za úspěšné vyřešení úloh olympiády. Celkem byly uděleny dvě zlaté, pět stříbrných a osm bronzových medailí. Výrazně nejúspěšnějším družstvem letošního ročníku CEOI se stalo Německo, které získalo jednu zlatou a tři stříbrné medaile. Rovněž absolutní vítěz soutěže byl členem německého družstva. Naši reprezentanti získali jednu stříbrnou medaili, Slovensko pouze jednu bronzovou.

Výsledky českých reprezentantů na CEOI 2007:

5. Josef Pihera, G Strakonice	394 bodů	stříbro
22. Roman Smrž, G E. Krásnohorské, Praha	210 bodů	–
27. Miroslav Klimoš, G M. Koperníka, Bílovec	163 bodů	–
28. Pavel Klavík, G J. Ressler, Chrudim	159 bodů	–

Naše druhé družstvo se účastnilo CEOI mimo soutěž a do oficiálního výsledného pořadí nebylo zařazeno. Jeho členové dosáhli těchto výsledků:

Lukáš Lánský, G J. K. Tyla, Hradec Králové	176 bodů
Libor Peltan, G České Budějovice, Česká	129 bodů
Libor Plucnar, G P. Bezruče, Frýdek-Místek	86 bodů
Jakub Kaplan, G J. K. Tyla, Hradec Králové	72 bodů

Celkovou výsledkovou listinu, znění soutěžních úloh i mnoho dalších informací o soutěži naleznete na Internetu na adrese

<http://www.fi.muni.cz/ceoi/>.

Příští, 15. ročník Středoevropské olympiády v informatice uspořádá Německo, místem konání bude město Drážďany. Přesný termín nebyl dosud stanoven, přesto již v Brně pozval vedoucí německé delegace všechny ostatní členské země k účasti na CEOI 2008. Hostitelem následujícího ročníku soutěže CEOI 2009 bude Rumunsko.

19. mezinárodní olympiáda v informatice

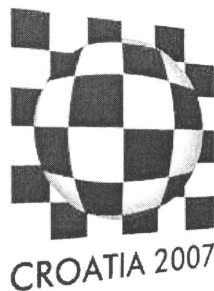
Ve dnech 15.–22. 8. 2007 se konal v chorvatském hlavním městě Zagreb 19. ročník Mezinárodní olympiády v informatice (IOI 2007 — International Olympiad in Informatics). Soutěže se zúčastnilo 285 studentů ze 77 zemí celého světa. Většina zemí využila možnosti vyslat na IOI maximální povolený počet čtyři soutěžící, z několika nových účastnických zemí přijela reprezentace menší.

Reprezentační družstvo České republiky bylo sestaveno na základě výsledků dosažených soutěžícími v ústředním kole 56. ročníku Matematické olympiády — kategorie P (programování). Naše družstvo pro IOI 2007 mělo následující složení:

Pavel Klavík, absolvent Gymnázia J. Ressla v Chrudimi,
Miroslav Klimoš, student Gymnázia M. Koperníka v Bílovci,
Josef Pihera, absolvent Gymnázia ve Strakonících,
Roman Smrž, student Gymnázia E. Krásnohorské v Praze.

Vedoucími české delegace byli jmenováni doc. RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc., a Bc. *Petr Škoda*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Vedle této oficiální šestičlenné delegace se 19. mezinárodní olympiády v informatice zúčastnil z České republiky ještě Mgr. *Martin Mareš*, rovněž pracovník MFF UK v Praze, a to z titulu své funkce člena Mezinárodního vědeckého výboru IOI.

Naši studenti měli možnost připravit se na soutěž nejen samostatným studiem, ale zúčastnili se i dvou přípravných akcí. V červnu jsme pro vybrané reprezentanty z České republiky, Polska a Slovenska uspořádali na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze tradiční týdenní společné česko-polsko-slovenské přípravné soustředění před IOI (CPSPC — Czech-Polish-Slovak Preparation Camp). Na začátku července jsme pak využili skutečnosti, že jsme letos byli pořadateli 14. ročníku Středoevropské olympiády v informatice (CEOI — Central European Olympiad in Informatics) a že jsme na ni mohli jakožto pořádající země pozvat dvě



soutěžní družstva. Vedle obvyklé účasti našeho „druhého“ reprezentačního družstva složeného z vybraných mladších studentů (nematurantů) jsme proto na CEOI 2007 do Brna pozvali i naše hlavní reprezentační družstvo připravující se v té době na účast v IOI 2007.

Hlavním pořadatelem letošní mezinárodní olympiády v informatice byla Chorvatská informatická společnost, záštitu nad akcí převzal osobně prezident Chorvatské republiky Mr. Stjepan Mesić. Na uspořádání se finančně podílelo Ministerstvo vědy, školství a sportu Chorvatské republiky a také mnozí sponzoři. Ubytování a stravování účastníků bylo zajištěno v prostorách studentských kolejí Univerzity v Zagrebu, na stejném místě probíhala také všechna jednání mezinárodní jury, vedoucích delegací a rovněž překlady soutěžních úloh do národních jazyků. Prostory pro vlastní soutěž, pro slavnostní zahájení a zakončení akce poskytl magistrát města Zagreb v halách místního veletržního areálu.

Vlastní soutěž byla jako obvykle rozdělena do dvou soutěžních dnů, v každém z nich studenti řešili tři soutěžní úlohy a na práci měli vymezen čas 5 hodin. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači s nainstalovaným soutěžním prostředím, které umožňuje vyvíjet a testovat programy a odesílat je k vyhodnocení. Výsledné programy jsou testovány pomocí připravené sady testovacích dat a se stanovenými časovými limity. Tím je zajištěna nejen kontrola správnosti výsledků, ale pomocí časových limitů se také odliší kvalita použitého algoritmu. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé, menší testy. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů.

Pořadatelé olympiády letos připravili soutěžní úlohy velmi pečlivě, takže celý proces přípravy úloh, upřesnění jejich formulací a překladu zadání úloh do národních jazyků večer před soutěží probíhal velmi rychle. Soutěžící měli jen minimum dotazů k zadání úloh a neobjevily se ani žádné oprávněné protesty proti hodnocení. Soutěžní úlohy byly dobře navrženy, byly věcně zajímavé, jejich obtížnost byla přiměřená úrovni této soutěže.

Pro všechny účastníky IOI připravují pořadatelé vždy také doprovodný program. Na IOI v Chorvatsku jsme se zúčastnili celodenního výletu do národního parku Plitvická jezera, vedle toho se všem nabízela možnost ve volných chvílích si prohlédnout město Zagreb, navštěvovat místní sportoviště a podnikat turistické výlety do blízkých hor v okolí města.

Večer před odjezdem se konalo slavnostní zakončení soutěže spojené s vyhlášením výsledků. Každá ze soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkově bylo teoreticky možné získat až 600 bodů. To se ovšem vzhledem k náročnosti úloh nikomu nepodařilo, celkový vítěz dosáhl výsledku 574 bodů. Podle pravidel IOI obdrží na závěr soutěže lepší polovina účastníků některou z medailí, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se udělují přibližně v poměru 1 : 2 : 3 (pochopitelně s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili). Letos bylo uděleno 25 zlatých, 48 stříbrných a 69 bronzových medailí.

Reprezentanti České republiky byli na letošní olympiádě velmi úspěšní, získali jsme tři stříbrné a jednu bronzovou medaili. Výsledky našich soutěžících:

42.	Josef Pihera	333 bodů	stříbrná medaile
53.	Miroslav Klimoš	316 bodů	stříbrná medaile
58.	Roman Smrž	310 bodů	stříbrná medaile
77.	Pavel Klavík	277 bodů	bronzová medaile

Mezinárodní olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců, žádné oficiální pořadí zemí se neurčuje. Z hlediska počtu a kvality získaných medailí bychom se v hodnocení národních delegací umístili přibližně kolem pěkného 15. místa z celkového počtu 77 zúčastněných zemí. Patříme tak do nejlepší čtvrtiny zemí, jejichž všichni reprezentanti obdrželi některou z medailí. Nejúspěšnějšími zeměmi letos byla Čína (4 zlaté medaile) a Rusko (3 zlaté a 1 stříbrná). Celkovým vítězem se stal reprezentant Polska, druhé a třetí místo obsadili Číňané. Soutěžícím ze Slovenska se tentokrát vedlo o něco hůře než nám, získali v soutěži dvě stříbrné a jednu bronzovou medaili.

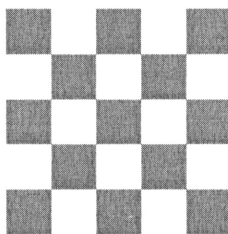
Veškeré informace o soutěži, texty soutěžních úloh i podrobné výsledky všech účastníků lze nalézt na Internetu na adrese

<http://www.hsin.hr/ioi2007/>.

Následující, v pořadí 20. ročník IOI se bude konat v srpnu 2008 v Egyptě. Tamní organizátoři již nyní předběžně pozvali všechny země zúčastněné na IOI v Chorvatsku k účasti v příštím ročníku soutěže. Byla již stanovena i místa konání několika dalších ročníků IOI: 2009 Bulharsko, 2010 Kanada, 2011 Thajsko.

1. Alieni

Roman je bohatý farmář a jeho poličko trávy (ano, není to jen obyčejná tráva) se rozrostlo do slušných rozměrů. Tím se stalo příležitostí pro Romanova kamaráda Myrega, aby předvedl své znalosti mimozemských civilizací a jejich vzorů ze slehlé trávy. Poslední dobou ho zaujaly krásy Chorvatska, a tak se rozhodl, že vytvoří v poli vzor podobný výsostnému znaku Chorvatska, což je šachovnice 5×5 se 13 červenými a 12 bílými poli (obr. 64).



Obr. 64. Šachovnice, která je částí chorvatského výsostného znaku.

Romanovo pole je rozděleno na $N \times N$ poliček. Poličko v levém dolním rohu označíme souřadnicemi $(1, 1)$ a poličko v pravém horním rohu má souřadnice (N, N) .

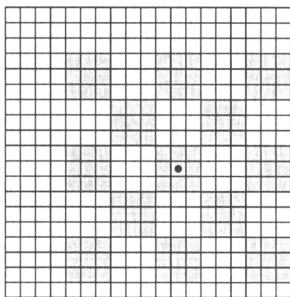
Myreg se rozhodl, že zvalí pouze trávu na červených čtvercích šachovnice a zbytek trávy nechá netknutý (přeci jen, kdyby se o tom Roman dozvěděl...). Protože je ale Romanovo pole hodně veliké a Myreg chtěl, aby jeho vzor byl vidět, zvolil si *liché přirozené číslo* $M \geq 3$ a zvalél trávu tak, že jeden čtverec šachovnice odpovídá ploše $M \times M$ poliček v Romanově poli. Celá šachovnice se přitom vejde do pole (obr. 65).

Jakmile však Myreg dokončil svoji práci (dělal ji samozřejmě za tmy), překvapil ho náhlý hlas.

„Co tu hledáš, Myregu!“ ozval se policista Pepa, kterého Myreg dobře znal.

„Nic, jen se procházím,“ bránil se Myreg, ale Pepa mu vůbec nevěřil. „Jestli zase ničíš Romanovu úrodu svými hloupými vzory, tak uvidíš!“

„To jsem nebyl já, to byli ALIENI,“ snažil se Myreg zachránit, co se dalo. Pepa se už ale dal na prohlídku pole. Bohužel jeho baterka mu moc dlouho nevydrží a tak ji může zapnout vždy jen na chvíli, aby zjistil, jestli *poličko, na kterém se právě nachází, je slehlé nebo ne*.



Obr. 65. Příklad Romanova pole a Myregova vzoru pro $N = 19$ a $M = 3$. Slehlá políčka jsou označena šedě. Střed vzoru má souřadnice $(12, 9)$ a je označen černou tečkou.

Pepa našel *jedno políčko se slehlou trávou* a potřebuje najít *prostřední políčko* celého Myregova obrazce, aby dokázal, že je to jeho výtvar. Neví ale, jakou zvolil Myreg *hodnotu M velikosti čtverce šachovnice*.

Úloha: Napište program, který pro danou velikost N Romanova pole ($15 \leq N \leq 2\,000\,000\,000$), souřadnice jednoho políčka slehlé trávy (X_0, Y_0) a s využitím možnosti zjistit stav trávy na políčku najde souřadnice prostředního políčka Myregova obrazce.

Pepova baterka ale může být použita maximálně 300krát v jednom běhu programu.

Interakce: Tato úloha je interaktivní. Váš program posílá na standardní výstup příkazy, kde má Pepa rozsvítit baterku, a čte odpovědi ze standardního vstupu.

- ▷ Na začátku program načte ze standardního vstupu tři celá čísla N , X_0 a Y_0 oddělená jednou mezerou. Číslo N je velikost Romanova pole a (X_0, Y_0) jsou souřadnice jednoho ze slehlých políček.
- ▷ Pokud chcete prozkoumat pomocí baterky políčko na souřadnicích (X, Y) , vypište na standardní výstup řádek ve tvaru „`examine X Y`“. Pokud nejsou souřadnice (X, Y) uvnitř Romanova pole (podmínky $1 \leq X \leq N$ a $1 \leq Y \leq N$ nejsou splněny) nebo pokud použijete baterku více než 300krát, váš program dostane 0 bodů za tento testovací vstup.
- ▷ Po použití baterky obdržíte na standardním vstupu jeden řádek obsahující slovo „`true`“, pokud je tráva na políčku (X, Y) slehlá, jinak obdržíte řádek se slovem „`false`“.
- ▷ Po nalezení prostředního políčka vypište na standardní výstup řádek

ve tvaru „solution $X_C Y_C$ “, kde (X_C, Y_C) jsou souřadnice prostředního políčka. Běh vašeho programu bude poté automaticky ukončen.

Aby interakce probíhala správně, program musí *nechat vypsat data z bufferu na standardní výstup (flush)* po každém zápisu na standardní výstup; vzorový kód pro každý jazyk je k dispozici.

Vzorové kódy: Vzorové kódy pro všechny tři programovací jazyky jsou k dispozici ke stažení na stránce „Tasks“ soutěžního prostředí. Účelem vzorového kódu je ukázat, jak probíhá interakce; není to správné řešení úlohy.

Hodnocení: V testovacích datech odpovídajících ohodnocení 40 body bude hodnota M nejvýše 100.

Pro každý testovací vstup existuje jediné správné řešení nezávislé na tom, jaké otázky pokládá váš program.

Příklad: V následujícím příkladu jsou příkazy zapsány v levém sloupci, na každém řádku jeden. Odpovědi jsou zapsány v pravém sloupci příslušného řádku.

<i>výstup (příkaz)</i>	<i>vstup (odpověď)</i>
	19 7 4
examine 11 2	True
examine 2 5	False
examine 9 14	False
examine 18 3	True
solution 12 9	

Testování: V průběhu soutěže máte tři možnosti, jak otestovat svoje řešení.

První možností je simulovat odpovědi manuálně.

Druhou možností je napsat si program, který simuluje odpovědi. Abyste připojili své řešení úlohy k tomuto programu, použijte program „connect“, který je k dispozici ke stažení v soutěžním prostředí. Program se používá příkazem „./connect./solution./device“ z konzole (místo „solution“ a „device“ uveďte jména vašich programů). Další parametry příkazu budou předány dále simulačnímu programu.

Třetí možností je použít funkci TEST ve vyhodnocovacím systému, kde si můžete otestovat svoje řešení na libovolných testovacích datech. Při použití této funkce je velikost N omezena hodnotou 100.

Testovací data musí obsahovat tyto tři řádky:

- ▷ První řádek obsahuje velikost Romanova pole N a velikost čtverce v šachovnici M ;
- ▷ Druhý řádek obsahuje souřadnice X_0 a Y_0 jednoho slehlého políčka, které budou předány vašemu programu;
- ▷ Třetí řádek obsahuje souřadnice X_C a Y_C středu šachovnice.

Vyhodnocovací systém vám poskytne podrobný popis výpočtu zahrnující chybové zprávy, pokud:

- ▷ N nevyhovuje omezením;
- ▷ M není liché přirozené číslo rovné nebo větší než 3;
- ▷ Obrazec se nevejde do Romanova pole;
- ▷ Tráva na políčku (X_0, Y_0) není slehlá.

Následuje příklad správných vstupních dat pro testovací funkci. Příklad odpovídá obr. 65.

19 3

7 4

12 9

Korektní vstup pro testovací funkci.

2. Plachty

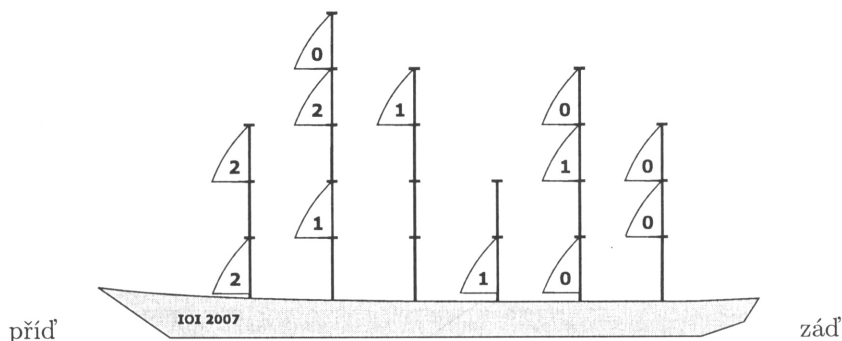
Piráta Pavel si staví novou loď. Loď má N stěžňů rozdělených na úseky jednotkové délky — výška stěžně je rovna počtu jeho úseků. Každý stěžň je vybaven několika plachtami, každá plachta je umístěna v právě jednom úseku stěžně. Plachty mohou být na stěžni rozmístěny libovolně, ale v každém úseku může být nejvýše jedna z nich.

Různá rozmístění plachet mají ve větru různou účinnost. K plachtám umístěným před jinými plachtami ve stejné výšce se dostává méně větru a jsou proto méně účinné. Pro každou plachtu definujeme její *ztráty* jako celkový počet plachet umístěných na stěžních *ve stejné výšce* za touto plachtou. Pojmy „před“ a „za“ jsou vztaženy k orientaci lodi: na obr. 66 „před“ znamená vlevo a „za“ znamená vpravo.

Celkové ztráty rozmístění plachet jsou rovny součtu ztrát všech plachet na lodi.

Úloha: Napište program, který dostane výšky jednotlivých stěžňů a počty plachet na každém z nich a určí *nejmenší* možné celkové ztráty rozmístění těchto plachet.

Vstup: První řádek vstupu obsahuje celé číslo N ($2 \leq N \leq 100\,000$, počet stěžňů na lodi. Každý z následujících N řádků obsahuje dvě celá čísla H a K ($1 \leq H \leq 100\,000$, $1 \leq K \leq H$), výšku a počet plachet na odpovídajícím stěžni. Stěžně jsou uvedeny v pořadí od přídě k zádi.



Obr. 66. Loď má 6 stěžňů, jejich výšky jsou 3, 5, 4, 2, 4 a 3 odpředu (zleva na obrázku) dozadu. Rozmístění plachet má celkové ztráty 10. Ztráty jednotlivých plachet jsou uvedeny uvnitř plachet.

Výstup: Na výstupu je jedno celé číslo určující minimální možné celkové ztráty plachet.

Poznámka. Při výpočtu používejte 64bitový celočíselný typ (long long v C/C++, int64 v Pascalu).

Hodnocení: V testovacích datech odpovídajících ohodnocení 25 body bude celkový možný počet rozmístění plachet roven nejvýše 1 000 000.

Příklad: vstup

6

3 2

5 3

4 1

2 1

4 3

3 2

výstup

10

Tento příklad odpovídá obr. 66.

3. Povodeň

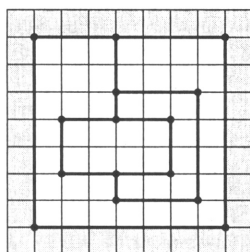
V roce 1964 zasáhla město Záhřeb katastrofická povodeň. Mnoho budov bylo zcela zničeno, když voda strhla jejich zdi. V této úloze dostanete zjednodušený model města před povodní a máte určit, které zdi zůstanou stát po povodni.

Model je tvořen N body v rovině a W zdi. Každá zeď spojuje dvojici zadaných bodů a neprochází žádným jiným bodem. Model má následující vlastnosti:

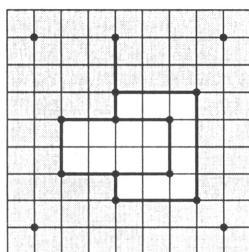
- ▷ Žádné dvě zdi se neprotínají ani nepřekrývají, mohou se však dotýkat svými koncovými body.
- ▷ Každá zeď je rovnoběžná buď se svislou, nebo s vodorovnou souřadnicovou osou.

Na začátku je všude sucho. V čase nula začne voda zaplavovat vnější oblast (tzn. prostor, který není uvnitř zdí). Přesně po hodině se pod tlakem vody zboří každá zeď, která měla na jedné své straně vodu a na druhé vzduch. Voda pak zaplaví další oblast, jež není zcela ohraničena zdi. Tím se mohou objevit nové zdi s vodou na jedné a vzduchem na druhé straně. Po další hodině tyto zdi také spadnou a záplava pokračuje dále. Tento proces se opakuje tak dlouho, dokud voda nezaplaví celé město.

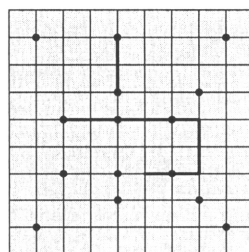
Následující obr. 67 ukazuje příklad průběhu záplavy.



Stav v čase nula. Šedé čtverečky představují zaplavenou oblast, bílé suchou (vzduch).



Stav po jedné hodině.



Stav po dvou hodinách. Voda zaplavila celé město a zůstaly stát 4 zdi.

Obr. 67

Úloha: Napište program, který dostane souřadnice N bodů a popis W zdí spojujících tyto body, a určí, které zdi zůstanou stát po povodni.

Vstup: První řádek vstupu obsahuje celé číslo N ($2 \leq N \leq 100\,000$), počet bodů v rovině.

Každý z následujících N řádků obsahuje dvě celá čísla X, Y (obě mezi 0 a 1 000 000, včetně), souřadnice jednotlivých bodů. Body jsou očíslovány od 1 do N v pořadí, ve kterém jsou zadány na vstupu. Žádné dva body neleží na stejných souřadnicích.

Další řádek vstupu obsahuje celé číslo W ($1 \leq W \leq 2N$), počet zdí.

Každý z následujících W řádků obsahuje dvě různá celá čísla A, B ($1 \leq A \leq N, 1 \leq B \leq N$) určující, že před povodní stála ve městě zeď spojující body A a B . Zdi jsou očíslovány od 1 do W v pořadí, ve kterém jsou zadány na vstupu.

Výstup: První řádek výstupu bude obsahovat jedno celé číslo K , počet zdí, které zůstanou stát po povodni. Na následujících K řádcích budou zapsány indexy těchto zdí, každý na samostatném řádku. Na jejich pořadí nezáleží.

Hodnocení: V testovacích datech odpovídajících ohodnocení 40 body budou souřadnice všech bodů v rozmezí od 0 do 500.

V těchto testovacích datech a v testovacích datech ohodnocených dalšími 15 body bude N nejvýše 500.

Podrobné informace o výsledcích testování

Během soutěže si můžete zvolit nejvýše 10 odevzdaných řešení této úlohy, která pak budou (co možná nejdříve) vyhodnocena na části oficiálních testovacích dat. Po vyhodnocení budete mít k dispozici přehled výsledků tohoto testování ve vašem soutěžním prostředí.

Příklad:

<i>vstup</i>	<i>výstup</i>
15	4
1 1	6
8 1	15
4 2	16
7 2	17
2 3	
4 3	
6 3	
2 5	
4 5	
6 5	
4 6	
7 6	
1 8	
4 8	
8 8	
17	
1 2	
2 15	

15 14
 14 13
 13 1
 14 11
 11 12
 12 4
 4 3
 3 6
 6 5
 5 8
 8 9
 9 11
 9 10
 10 7
 7 6

Tento příklad odpovídá situaci na obr. 67.

4. Horníci

Ve dvou dolech pracují skupiny horníků. Těžba uhlí je velmi namáhavá, a tak horníci potřebují stále jíst (podobně jako programátoři). Po každé, když do dolu přivezou nějaké jídlo, horníci vytěží jisté množství uhlí. Horníkům vozí tři druhy jídla: maso, fazole a brambory. Při každé dodávce však přivezou pouze jeden druh jídla.

Horníci (stejně jako programátoři) mají rádi pestrou stravu. Čím je jejich strava rozmanitější, tím více pracují (narozdíl od programátorů). Přesněji řečeno, jakmile dorazí nová dodávka jídla, množství vytěženého uhlí závisí na *této dodávce jídla a na dvou předchozích* (nebo na méně, pokud ještě tolik dodávek nedostali):

- ▷ Pokud byly všechny dodávky stejného druhu, horníci následně vytěží jeden vozík uhlí.
- ▷ Pokud se v uvažovaných dodávkách vyskytovaly dva druhy jídla, horníci následně vytěží dva vozíky uhlí.
- ▷ Pokud obsahovala každá dodávka jiný druh jídla, horníci následně vytěží tři vozíky uhlí.

Předem známe druhy všech dodávek jídla a pořadí, v němž budou odeslány do dolů. O každé dodávce jídla můžeme rozhodnout, do kterého dolu bude doručena. Tím můžeme ovlivnit celkové množství vytěženého uhlí. Jednotlivé dodávky jídla není možné dělit, každá musí být doručena vcelku do jednoho nebo druhého dolu.

Oba doly nemusí dostat stejný počet dodávek jídla (dokonce je dovoleno poslat všechno jídlo do jednoho dolu).

Úloha: Dostanete druhy dodávaného jídla v pořadí, v jakém budou do dolů posílány. Napište program, který určí *co největší množství uhlí*, které může být při vhodném rozdělení dodávek jídla mezi oba doly dohromady vytěženo.

Vstup: První řádek vstupu obsahuje jedno celé číslo N ($1 \leq N \leq 100\,000$) — počet dodávek jídla.

Druhý řádek je tvořen řetězcem N znaků, představujících druhy jednotlivých dodávek v pořadí, v jakém byly do dolů odeslány. Každý znak bude jedním z velkých písmen »M« (pro maso), »F« (pro fazole) nebo »B« (pro brambory).

Výstup: Na výstupu bude jedno celé číslo — největší možné celkové množství uhlí, které může být vytěženo.

Hodnocení: V testovacích datech odpovídajících ohodnocení 45 body bude počet dodávek N nejvýše 20.

Podrobné informace o výsledcích testování

Během soutěže si můžete zvolit nejvýše 10 odevzdaných řešení této úlohy, která pak budou (co možná nejdříve) vyhodnocena na části oficiálních testovacích dat. Po vyhodnocení budete mít k dispozici přehled výsledků tohoto testování ve vašem soutěžním prostředí.

Příklady:

<i>vstup</i>	<i>vstup</i>
--------------	--------------

6	16
---	----

MBMFFB	MMBMBBBBMMMMBMB
--------	-----------------

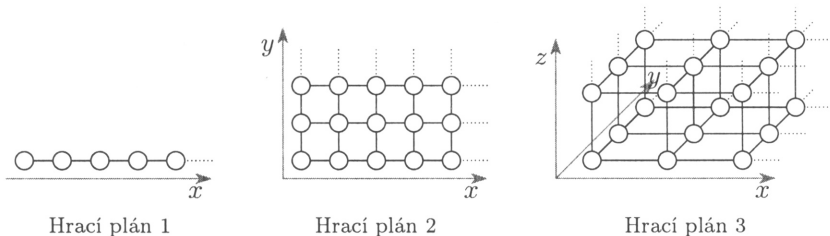
<i>výstup</i>	<i>výstup</i>
---------------	---------------

12	29
----	----

V levém příkladu můžeme rozdělit dodávky jídla do dolů v pořadí: důl 1, důl 1, důl 2, důl 2, důl 1, důl 2. V dolech budou postupně vytěženy 1, 2, 1, 2, 3 a 3 vozíky uhlí, tzn. celkem 12 vozíků. Tohoto výsledku lze dosáhnout i jinými způsoby.

5. Žvíátka

Pavel a Pepa si hrají s plyšovými zvířátky. Nejprve si zvolí jeden ze tří hracích plánů znázorněných na obr. 68. Každý hrací plán je tvořen políčky (na obrázku jsou zobrazena jako kolečka) uspořádanými do jedno-, dvou- nebo trojrozměrné mřížky.



Obr. 68

Pavel umístí N zvířátek na políčka hracího plánu.

Vzdálenost dvou políček je nejmenší počet tahů, které musí zvířátko provést, aby se dostalo z jednoho políčka na druhé. Jedním tahem se může zvířátko přesunout vždy na některé sousední políčko (na obrázku jsou sousední políčka spojena čarou).

Dvě zvířátka si spolu mohou povídat, pokud je vzdálenost jejich políček nejvýše D . Úkolem Pety je spočítat, kolik párů zvířátek je umístěno tak, že si zvířátka tvořící pár mohou spolu povídat.

Úloha: Napište program, který dostane typ hracího plánu, umístění zvířátek a číslo D a nalezne požadovaný počet párů.

Vstup: První řádek vstupu obsahuje čtyři celá čísla v tomto pořadí:

- ▷ Typ hracího plánu B ($1 \leq B \leq 3$);
- ▷ Počet zvířátek N ($1 \leq N \leq 100\,000$);
- ▷ Maximální vzdálenost D , na kterou si zvířátka mohou povídat ($1 \leq D \leq 100\,000\,000$);
- ▷ Velikost hracího plánu M (maximální hodnota souřadnice, která se může objevit na vstupu):
 - ⇒ Pro $B = 1$ bude M nejvýše 75 000 000.
 - ⇒ Pro $B = 2$ bude M nejvýše 75 000.
 - ⇒ Pro $B = 3$ bude M nejvýše 75.

Každý z následujících N řádků obsahuje B celých čísel oddělených mezerami — souřadnice jednotlivých zvířátek. Všechny souřadnice budou v rozmezí 1 až M (včetně).

Na jednom políčku může být více zvířátek.

Výstup: Výstup tvoří jedno celé číslo — počet párů zvířátek, která si spolu mohou povídat.

Poznámka. Při výpočtu používejte 64bitový celočíselný typ (long long v C/C++, int64 v Pascalu).

Hodnocení: V testovacích datech odpovídajících ohodnocení 30 body bude počet zvířátek N nejvýše 1000.

Pro každý hrací plán navíc platí, že program, který vyřeší úspěšně všechny testovací vstupy na tomto plánu, získá alespoň 30 bodů.

Příklady:

<i>vstup</i>	<i>vstup</i>	<i>vstup</i>
1 6 5 100	2 5 4 10	3 8 10 20
25	5 2	10 10 10
50	7 2	10 10 20
50	8 4	10 20 10
10	6 5	10 20 20
20	4 4	20 10 10
23	<i>výstup</i>	20 10 20
<i>výstup</i>	8	20 20 10
4		20 20 20
		<i>výstup</i>
		12

Vysvětlení levého příkladu. Předpokládejme, že zvířátka jsou očíslována od 1 do 6 v pořadí, ve kterém jsou uvedena na vstupu. Výsledné čtyři páry jsou:

- ▷ 1-5 (vzdálenost 5)
- ▷ 1-6 (vzdálenost 2)
- ▷ 2-3 (vzdálenost 0)
- ▷ 5-6 (vzdálenost 3)

Vysvětlení prostředního příkladu. Výsledných osm párů je:

- ▷ 1-2 (vzdálenost 2)
- ▷ 1-4 (vzdálenost 4)
- ▷ 1-5 (vzdálenost 3)
- ▷ 2-3 (vzdálenost 3)
- ▷ 2-4 (vzdálenost 4)
- ▷ 3-4 (vzdálenost 3)
- ▷ 3-5 (vzdálenost 4)
- ▷ 4-5 (vzdálenost 3)

6. Trénink

Mírek a Roman se připravují na výroční cyklistický maraton dvojic kolem Chorvatska. Potřebují si proto zvolit tréninkovou trasu.

Máme N měst a M silnic mezi nimi. Každá silnice spojuje dvě města a lze jí projet oběma směry. Přesně $N - 1$ z těchto silnic je *asfaltových*,

zatímco ostatní silnice jsou nezpevněné. Silniční síť byla naštěstí navržena tak, že každá dvojice měst je propojena cestou tvořenou pouze asfaltovými silnicemi. Jinými slovy řečeno, N měst a $N - 1$ asfaltových silnic tvoří stromovou strukturu.

Navíc platí, že každé město je koncovým bodem *nejvýše deseti silnic*.

Tréninková trasa začíná v nějakém městě, prochází některými silnicemi a končí ve stejném městě, kde začala. Mírek a Roman by při tréninku rádi viděli nová místa, a proto zavedli pravidlo, že *žádným městem ani žádnou silnicí* neprojedou dvakrát. Tréninková trasa může začínat ve kterémkoliv městě a nemusí procházet všemi městy.

Ve dvojici cyklistů jede vždy jeden vpředu a rozráží tak vzduch tomu druhému. Proto je jízda vpředu těžší a cyklisté se na této pozici pravidelně střídají. Mírek a Roman se chtějí střídat při průjezdu každým městem. Aby byl pro oba trénink stejně náročný, chtějí zvolit trasu tvořenou *sudým počtem silnic*.

Soupeři Mirka a Romana se rozhodli *zablokovat* některé nezpevněné silnice, aby Mírek s Romanem nemohli nalézt *žádnou* tréninkovou trasu podle výše uvedených požadavků. Pro každou nezpevněnou silnici je zadána *cena* (*kladné* celé číslo), která představuje poplatek za zablokování silnice. Je zakázáno blokovat asfaltové silnice.

Úloha: Napište program, který dostane popis sítě měst a silnic a určí *nejnižší možnou celkovou cenu* potřebnou na zablokování silnic takovým způsobem, aby *neexistovala žádná tréninková trasa* vyhovující uvedeným podmínkám.

Vstup: První řádek vstupu obsahuje dvě celá čísla N a M ($2 \leq N \leq 1\,000$, $N \leq 1 \leq M \leq 5\,000$), počet měst a celkový počet silnic.

Na každém z následujících M řádků jsou tři celá čísla A , B a C ($1 \leq A \leq N$, $1 \leq B \leq N$, $0 \leq C \leq 10\,000$), popisující vždy jednu silnici. Čísla A a B jsou různá a určují města spojená touto silnicí. Pokud je C rovno 0, jedná se o asfaltovou silnici, jinak jde o silnici nezpevněnou a C určuje cenu zablokování této silnice.

Každé město je koncovým bodem nejvýše deseti silnic. Žádné dvě silnice nespojují stejnou dvojici měst.

Výstup: Výstupem programu bude jedno celé číslo — nejmenší možná celková cena popsaná v zadání úlohy.

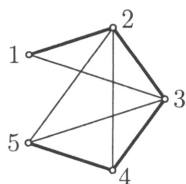
Hodnocení: V testovacích datech odpovídajících ohodnocení 30 body tvoří asfaltové silnice přímou cestu (tj. žádné město není koncovým bodem pro více než dvě asfaltové cesty).

Podrobné informace o výsledcích testování

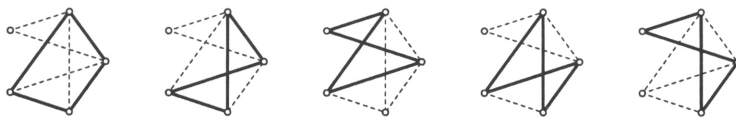
Během soutěže si můžete zvolit nejvýše 10 odevzdaných řešení této úlohy, která pak budou (co možná nejdříve) vyhodnocena na části oficiálních testovacích dat. Po vyhodnocení budete mít k dispozici přehled výsledků tohoto testování ve vašem soutěžním prostředí.

Příklady:

<i>Vstup</i>	<i>vstup</i>
5 8	9 14
2 1 0	1 2 0
3 2 0	1 3 0
4 3 0	2 3 14
5 4 0	2 6 15
1 3 2	3 4 0
3 5 2	3 5 0
2 4 5	3 6 12
2 5 1	3 7 13
<i>výstup</i>	4 6 10
5	5 6 0
	5 7 0
	5 8 0
	6 9 11
	8 9 0
	<i>výstup</i>
	48



Obr. 69. Silniční síť z prvního příkladu. Asfaltové silnice jsou vyznačeny tučně.



Obr. 70. Mirek a Roman mají pět možných tréninkových tras. Pokud jsou zablokovány silnice 1–3, 3–5 a 2–5, potom nemohou použít ani jednu z těchto pěti tras. Cena zablokování těchto tří silnic je 5. Je také možné zablokovat pouze dvě silnice, 2–4 a 2–5, ale cena je v takovém případě 6, tedy vyšší.

RNDr. Karel Horák, CSc., Mgr. Martin Mareš,
Mgr. Peter Novotný, doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.,
RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.,

**PADESÁTÝ ŠESTÝ ROČNÍK
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH**

Vydala Jednota českých matematiků a fyziků,
Žitná 25, 117 10 Praha 1
jako svou publikaci č. 57-552-08
Sazbu programem $\text{\TeX}$ připravil Karel Horák
Vytisklo Polygrafické středisko
Univerzity Palackého v Olomouci
1. vydání
Praha 2008

ISBN 978-80-7015-003-0

**matematická
olympiáda**

MO
M

ISBN 978-80-7015-003-0

ISBN 978-80-7015-003-0

