

[dokumenty-09] Matematická olympiáda 1951-1981

Jozef Moravčík (editor); Antonín Vrba (editor): [dokumenty-09] Matematická olympiáda 1951-1981. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1981.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405353>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MATEMATICKÁ

OLYMPIÁDA

1951–1981



MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

1951–1981

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYZIKŮ
ÚSTŘEDNÍ VÝBOR MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

N i e k o ľ k o s l o v ú v o d o m

Zostavovatelia jubilejnej brožúry k 20. výročiu vzniku matematickej olympiády /MO/ v ČSSR nepredpokladali, že sa jej vydanie naprieek skromnému hávu a neveľkému rozsahu stretne s toľkým záujmom v radoch spolupracovníkov MO. Je preto celkom pochopiteľné, že členovia predsedníctva ústredného výboru MO venovali zvýšené úsilie príprave zborníka "Dvacet pět let MO v Československu", ktorý r. 1976 vydala Mladá fronta už v honosnejšom rúchu a svojím obsahom sa stal kronikou štvrtstoročného diania okolo súťaže v riešení matematických úloh pre žiakov stredných a základných škôl. Blížiac sa ďalšie okružhle výročie vzniku MO pomúka opäť príležitosť k rekapitulácii, ako táto najstaršia školská olympiáda v našej vlasti plní základnú úlohu, ktorú dostala do vienka od svojich zakladateľov: pomáhať pri vyhľadávaní a odbornom vedení matematicky nadaných žiakov. V tom treba vidieť hlavný dôvod vzniku zborníka, ktorý sa vám práve dostáva do rúk. Jeho z technických príčin znovu iba skromnejší odev sme sa usilovali vyvážiť bohatším obsahom. Ponechávame na posúdenie čitateľom, ako sa nám tento zámer podarilo uskutočniť.

Ponúkame vám predovšetkým bilanciu výsledkov tých ročníkov MO, ktoré sa konali od vyjdenia predchádzajúceho jubilejného zborníka. Nájdete tu ďalej stručnú charakteristiku všetkých doterajších 21 medzinárodných matematických olympiád s hodnotením výsledkov, ktoré v nich zaznamenali československí účastníci. Pokúsili sme sa o anketu medzi víťazmi a najúspešnejšími účastníkmi doterajších ročníkov MO a z množstva podnetných odpovedí, ktoré sme na otázky ankety dostali, sme vybrali za priehrstie najzaujímavejších. Viacerí bývalí účastníci MO a organizační spolupracovníci olympiády prispeli do zborníka niekoľkými článkami hodnotiaceho a spomienkového charakteru.

Z podnetu dlhoročného predsedu ústredného výboru MO doc. J. Vyšína, CSc. a z potrieb cieľavedomejšej starostlivosti o rozvoj matematických talentov vznikli r. 1974 gymnáziá so zameraním na matematiku, ktorých žiaci dosahujú v MO v posledných rokoch stále výraznejšie úspechy. Považovali sme preto za vhodné podeliť sa s vami o poznatky z činnosti týchto gymnázií.

Jednou z foriem práce s matematickými talentami, ktorá sa osvedčila a v posledných rokoch zaznamenala výrazný kvalitatívny vzostup, je celoštátny korešpondenčný seminár. Vznikol taktiež r. 1974 a

postupne našiel nasledovníkov i vo viacerých krajocho. Prinášame stručné hodnotenie jeho doterajších ročníkov a prehľad úloh, ktoré dostávali na riešenie jeho účastníci. Domnievame sa, že sa môžu stať pre učiteľov, ktorí vedú matematické krúžky či krúžky MO, užitočnou pomôckou a pre žiakov riešiteľov MO vhodným cvičným materiálom.

S rovnakým zámerom sme do zborníka zaradili prehľad úloh celoštátneho kola kategórie A doterajších 29 ročníkov MO. Vzhľadom na to, že celoštátne kolo je každoročne obsahovým i organizačným vyvrcholením súťaže, ukazuje zároveň tento prehľad, ako sa menila tématika súťažných úloh a vyvíjala ich náročnosť a odborná úroveň. Iste by bolo bývalo užitočné priniesť tiež riešenia týchto úloh. Stanovený rozsah zborníka to však v plnom rozsahu nedovoľuje a tak sme boli nútení pristúpiť na kompromis spočívajúci v uverejnení riešení aspoň niekoľkých vybraných úloh.

Ako tento prierez obsahom zborníka ukazuje, snažili sme sa, aby si v ňom každý, kto sa zaujíma o MO, našiel aspoň niečo, čo ho dokáže zaujať. Tých, ktorých očakávania sme aj napriek tomu nesplnili, prosíme o prepáčenie.

Ďakujeme ministerstvám školstva ČSR a SSR za podporu pri vydaní zborníka a Jednote československých matematikov a fyzikov za porozumenie a ochotu, s akou sa jeho vydania ujala.

Jubilujúcej MO želáme do ďalších rokov veľa úspechov pri plnení stanovených cieľov, stovky obetavých a nezištných organizátorov a tisíce úspešných riešiteľov, ktorí svoj dobrý vzťah k matematike povzbudený úspechmi v MO budú vytrvale rozvíjať ďalším štúdiom a prácou na prospech rozvoja československej matematiky a vedeckotechnického pokroku v socialistickom Československu.

Zostavovatelia

V Prahe v novembri 1980

Trochu statistiky k posledním deseti ročníkům
matematické olympiády

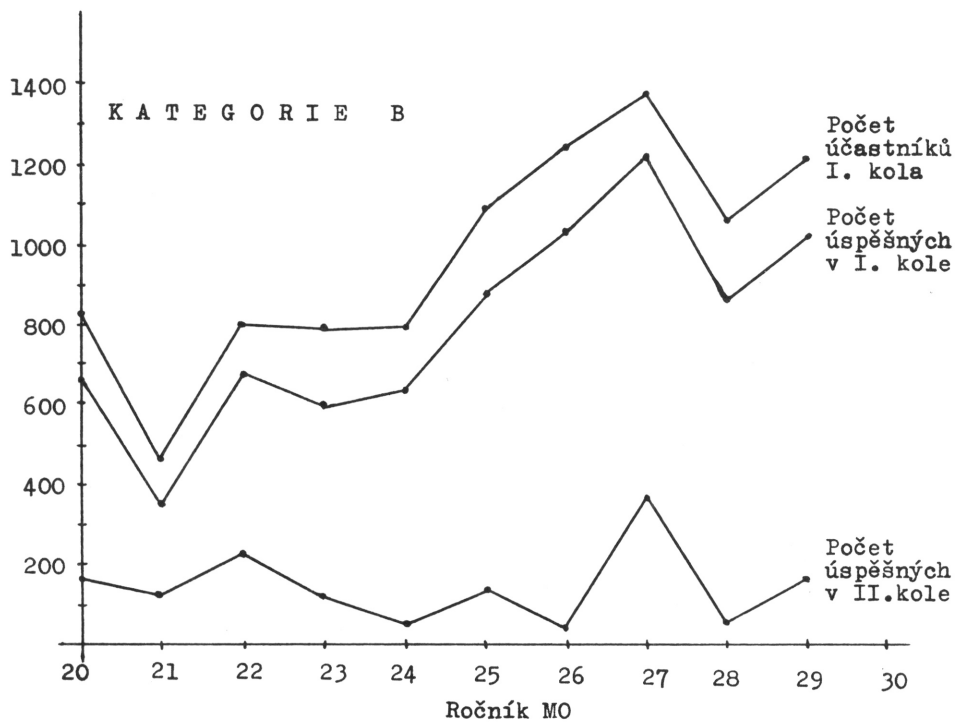
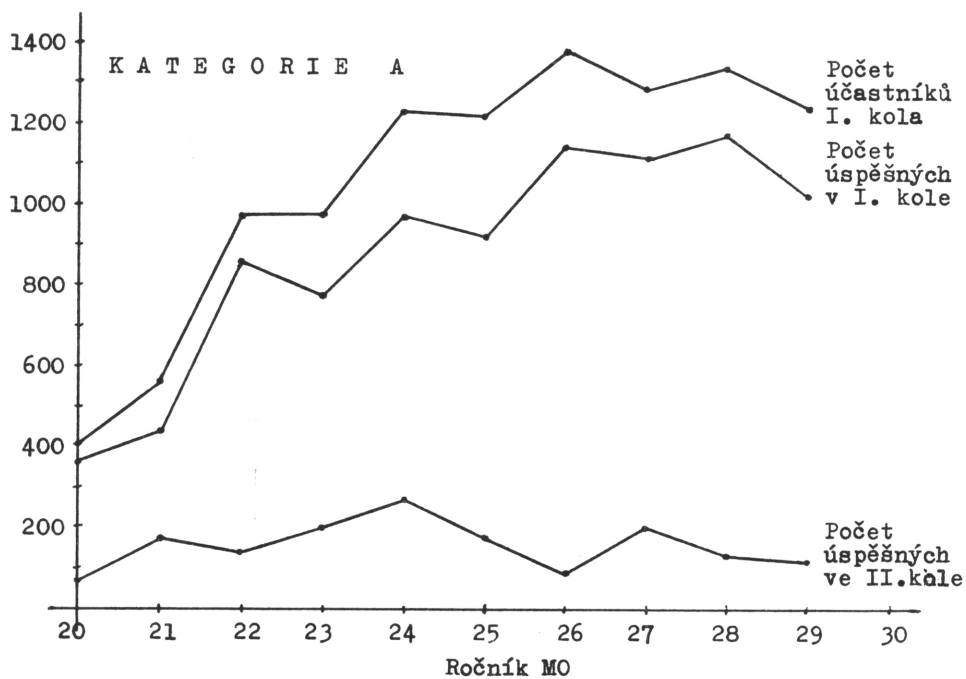
Leo B o ě k

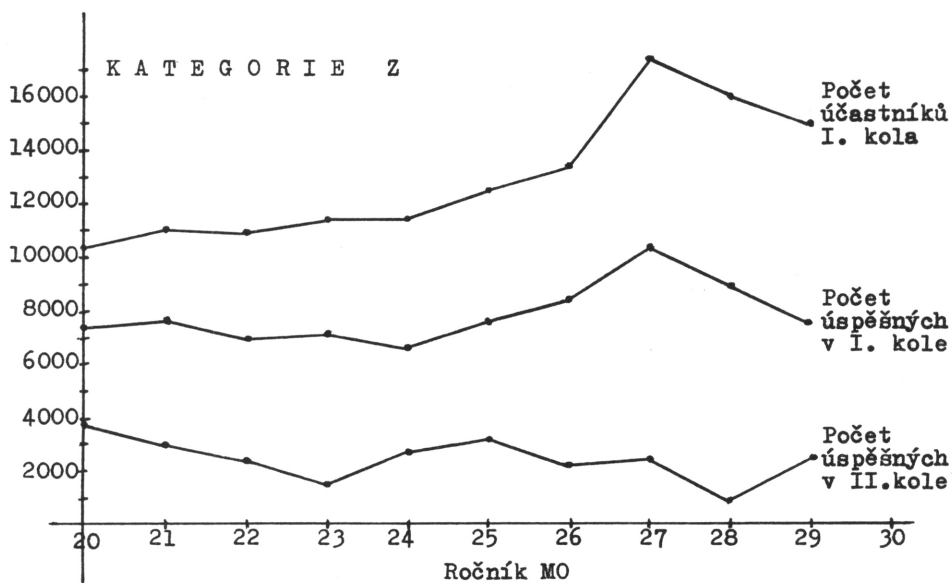
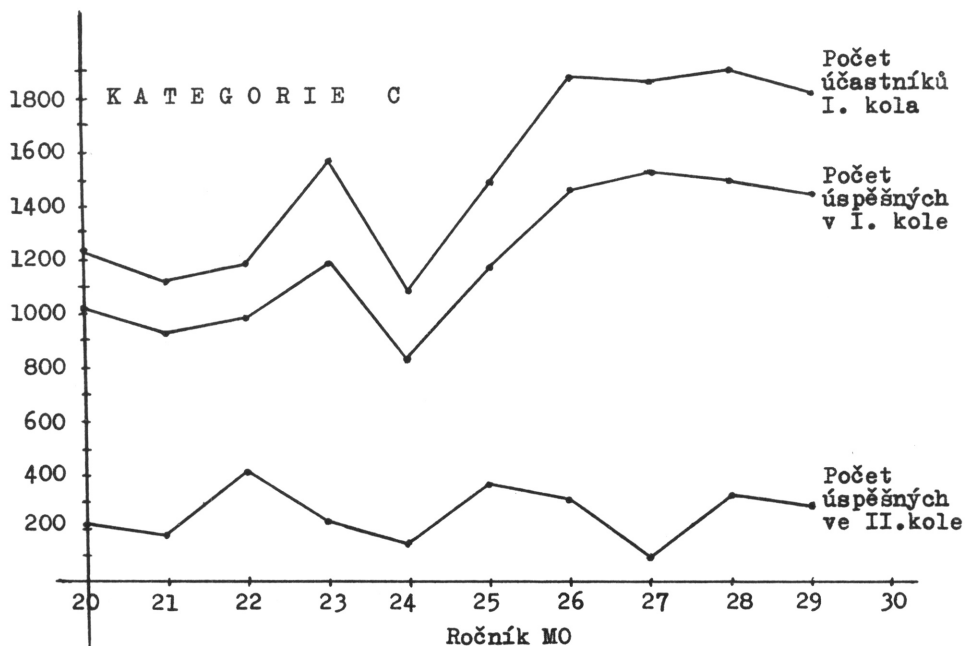
Počty soutěžících v 20.-29. ročníku MO

Ročník	Kategorie A				Kategorie B			
	I. kolo		II. kolo		I. kolo		II. kolo	
	S	Ů	S	Ů	S	Ů	S	Ů
20.	399	352	341	58	843	656	613	162
21.	554	445	429	170	467	354	342	122
22.	979	858	802	152	808	667	637	225
23.	976	775	730	198	798	601	554	120
24.	1226	981	872	272	799	635	564	66
25.	1210	925	849	183	1090	892	838	142
26.	1373	1134	960	89	1245	1033	873	50
27.	1298	1111	974	201	1375	1211	1137	360
28.	1330	1166	1080	146	1058	858	745	76
29.	1237	1017	916	132	1205	1018	889	154

Ročník	Kategorie C				Kategorie Z			
	I. kolo		II. kolo		I. kolo		II. kolo	
	S	Ů	S	Ů	S	Ů	S	Ů
20.	1242	1008	954	220	10366	7376	6770	3807
21.	1115	926	844	180	11090	7870	7275	3063
22.	1194	975	897	418	10965	6989	6226	2423
23.	1564	1192	1021	230	11333	7049	6412	1561
24.	1063	822	728	141	11363	6618	5973	2737
25.	1480	1155	1056	355	12505	7725	7033	3157
26.	1870	1452	1249	300	13431	8446	7193	2121
27.	1855	1514	1352	85	17398	10459	8451	2471
28.	1885	1481	1351	307	16022	8812	6918	925
29.	1803	1421	1301	288	14956	7788	6322	2509

S . . . počet všech soutěžících
Ů . . . počet úspěšných řešitelů





Počty úspěšných řešitelů v celostátním kole MO kategorie A
(od 20. do 29. ročníku)

Ročník Kraj	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	Celkem
Praha	7	10	15	12	8	12	5	8	14	13	104
Středočeský	0	1	1	1	3	3	2	0	1	0	12
Jihočeský	1	2	3	2	2	1	0	1	0	1	13
Západočeský	0	2	1	0	1	0	0	0	1	1	6
Severočeský	0	1	2	0	1	3	1	1	2	1	12
Východočeský	0	1	1	1	6	5	9	6	2	1	32
Jihomoravský	5	4	2	1	2	4	4	2	2	0	26
Severomoravský	1	5	1	2	8	4	6	5	5	5	42
Bratislava	4	3	6	2	2	3	2	6	5	7	40
Západoslovenský	0	1	1	1	0	1	3	1	1	2	11
Středoslovenský	2	2	1	1	4	5	5	1	2	2	25
Východoslovenský	0	1	3	0	0	0	1	2	5	7	19
Celkem	20	33	37	23	37	41	38	33	40	40	342

Poznámky: K porovnání úspěšnosti jednotlivých krajů by bylo třeba srovnat uvedené výsledky s celkovými počty studentů v krajích.

Více než polovina úspěšných řešitelů z Prahy byla z gymnázia v Praze 2, tř. W. Piecka, a to i v době, kdy ještě neexistovala gymnázia se zaměřením na matematiku.

Celkem pocházeli úspěšní řešitelé III. kola MO kategorie A asi ze 110 škol a kromě gymnázií se zaměřením na matematiku (W. Piecka v Praze, M. Koperníka v Bílovci, A. Markuša v Bratislavě a gymnázia v Košicích, Šmeralova ul.) byla dobře zastoupena gymnázia J. Hronce v Bratislavě, Praha 3 - Sladkovského náměstí, Praha 2 - Štěpánská ul., Pardubice, Brno - tř. kpt. Jaroše, Ostrava - Šmeralova ul. a také gymnázia v Prievidzi a J. K. Tyla v Hradci Králové. Více úspěšných řešitelů bylo též z gymnázií v Praze 6, Arabská ul., v Brně, Koněvo-va ul. a z gymnázia J. Fučíka v Plzni.

Počty soutěžících v 27.- 29. ročníku MO - kategorie A

Kraj:	I. kolo		II. kolo		III. kolo		
	S	Ů	S	Ů	S	Ů	
Praha	136	113	102	44	22	8	27. roč.
	100	98	87	30	19	14	28. roč.
	92	76	64	29	17	13	29. roč.
Středočeský	168	160	117	15	2	0	
	150	122	104	11	4	1	
	120	101	88	2	1	0	
Jihočeský	65	57	55	5	1	1	
	71	65	54	6	3	0	
	84	72	71	5	1	1	
Západočeský	55	47	41	7	2	0	
	49	39	34	8	4	1	
	53	37	34	4	1	1	
Severočeský	90	74	60	11	5	1	
	118	96	93	12	3	2	
	92	75	66	3	2	1	
Východočeský	75	69	65	19	8	6	
	83	65	59	10	5	2	
	78	59	53	14	5	1	
Jihomoravský	189	142	128	29	7	2	
	102	89	82	8	3	2	
	150	132	120	5	2	0	
Severomoravský	75	63	63	19	10	5	
	118	115	111	19	13	5	
	120	103	99	18	12	5	
Bratislava	94	82	79	29	13	6	
	167	153	142	15	8	5	
	93	82	76	15	8	7	
Západoslovenský	162	131	130	2	1	1	
	193	168	159	6	4	1	
	182	133	128	13	5	2	
Středoslovenský	94	90	83	12	3	1	
	98	83	82	9	6	2	
	75	66	58	8	4	2	
Východoslovenský	95	83	51	9	6	2	
	81	73	73	12	8	5	
	98	81	59	16	10	7	
C e l k e m	1298	1111	974	201	80	33	
	1330	1166	1080	146	80	40	
	1237	1017	916	132	68	40	

Počty soutěžících v 27.- 29. ročníku MO - kategorie B, C

Kraj:	Kategorie B				Kategorie C			
	I. kolo		II. kolo		I. kolo		II. kolo	
	s	ř	s	ř	s	ř	s	ř
Praha	141	113	113	50	146	100	100	19 27.roč.
	73	50	47	12	95	86	81	52 28.roč.
	81	69	65	26	125	91	85	36 29.roč.
Středočeský	133	120	115	28	117	98	90	1
	75	66	56	2	127	107	98	18
	97	83	76	6	156	124	117	14
Jihočeský	83	72	68	14	97	83	80	5
	87	59	49	3	125	101	79	10
	81	74	72	4	127	117	108	35
Západočeský	45	39	37	15	90	47	46	5
	37	28	27	2	123	59	48	12
	64	39	39	5	87	49	47	11
Severočeský	130	119	119	16	148	133	133	2
	85	76	70	5	122	104	93	11
	80	66	62	3	134	98	84	13
Východočeský	72	58	56	20	132	96	94	11
	57	45	39	12	198	115	101	15
	94	80	74	19	138	94	88	23
Jihomoravský	168	139	124	31	211	181	161	4
	141	115	110	9	204	162	141	20
	80	72	70	11	130	120	120	30
Severomoravský	140	113	110	75	131	122	121	9
	81	72	63	6	121	119	115	32
	110	100	95	14	168	142	118	40
Bratislava	98	91	89	37	157	103	96	12
	76	29	29	6	115	91	85	36
	69	46	46	9	62	40	38	14
Západoslovenský	161	157	152	11	280	260	162	1
	139	134	124	4	278	220	199	24
	172	161	154	18	240	190	178	20
Středoslovenský	95	94	94	41	157	142	131	5
	81	73	70	9	117	107	104	31
	91	75	72	16	135	106	103	29
Východoslovenský	109	96	60	22	189	149	138	11
	126	111	61	6	260	210	207	46
	186	153	64	23	301	250	215	23
C e l k e m	1375	1211	1137	360	1855	1514	1352	85
	1058	858	745	76	1885	1481	1351	307
	1205	1018	889	154	1803	1421	1301	288

Počty soutěžících v 27.- 29. ročníku MO - kategorie Z

Kraj:	I. kolo		II. kolo		III. kolo		
	S	Ů	S	Ů	S	Ů	
Praha	1394	908	788	288			27.roč.
	1231	862	612	148	34	26	28.roč.
	1065	675	477	243	34	24	29.roč.
Středočeský	1114	602	515	147			
	1012	488	443	84	27	18	
	799	433	381	150	35	17	
Jihočeský	1023	832	357	91			
	1150	542	378	47	36	25	
	904	419	342	147	40	22	
Západočeský	1096	459	367	84			
	1204	468	360	21	13	9	
	1150	517	337	133	24	12	
Severočeský	1533	608	510	179			
	1252	504	359	63	24	16	
	1236	446	342	160	33	14	
Východočeský	1232	688	562	247			
	1169	792	529	86	38	21	
	1155	622	448	214	52	16	
Jihomoravský	2326	1507	1110	375			
	2063	1107	872	103	40	36	
	1699	1008	856	319	62	29	
Severomoravský	1537	832	598	184			
	1210	594	492	67	65	30	
	1099	565	448	186	60	15	
Bratislava	584	453	440	133			
	754	417	396	36	33	10	
	818	335	334	137	37	19	
Západoslovenský	1814	1346	1289	285			
	1715	1162	993	97	40	29	
	1681	1022	959	282	40	23	
Středoslovenský	1698	1000	935	133			
	1353	825	715	39	18	8	
	1449	750	628	215	33	14	
Východoslovenský	2047	1224	980	325			
	1909	1051	769	134	46	17	
	1901	996	770	323	61	13	
C e l k e m	17398	10459	8451	2471			
	16022	8812	6918	925	414	245	
	14956	7788	6322	2509	511	218	

Poznámka: III. (krajské) kolo 27. ročníku MO nebylo statisticky zachyceno.

III. kolo (celostátní) kategorie A

Ročník MO	Školní rok	Místo konání	P o č e t			Vítěz, ročník, škola
			účast- níků	vítězů	dalších úspěšných řešitelů	
20	1970/71	Pardubice	58	8	12	Jan Brychta, 3. roč. G Praha 3 Pražacka
21	1971/72	Kladno	74	19	14	Miroslav Kmošek, 3. roč. G Brno, tr. kpt. Jaroše
22	1972/73	Žilina, Bratislava	75	20	17	Jaromír Šimša, 3. roč. G Ostrava 1, Smeralova ul.1
23	1973/74	Strakonice	79	11	12	Jiří Navrátil, 1. roč. G Olomouc-Hejčín
24	1974/75	Ústí n. L.	79	18	19	Jiří Navrátil, 2. roč. G Olomouc-Hejčín
25	1975/76	Bratislava	80	20	21	Jiří Navrátil, 3. roč. G Olomouc-Hejčín
26	1976/77	Plzeň	77	16	22	Jan Kratochvíl, 3. roč. G Pardubice
27	1977/78	Jihlava	80	19	14	Jan Kratochvíl, 4. roč. G Pardubice; Ilja Turek, 4.roč. G Hradec Králové; Zdeněk Vavřín, 4. roč. G Praha 2 Štěpánská
28	1978/79	Trnava	80	19	21	Josef Tkadlec, 4.roč. G Bílovec
29	1979/80	Bílovec	68	16	24	Jozef Bednárík, 3. roč. G Brati- slava, Červenej armády; Petr Couf, 2.roč. G Praha 2, W. Piecka; Ctirad Klimčík, 4.roč. G Prešov, Konštantinova; Jiří Mejzlík, 4. roč. G Bílovec; Miroslav Ploščica 4.roč. G Stará Lubovna

G ... gymnázium

Mezinárodní matematické olympiády

František Zítek

Mezinárodní matematické olympiády /MMO/ vznikly koncem padesátých let z iniciativy rumunských matematiků. V té době existovaly již ve většině evropských socialistických zemí matematické olympiády nebo obdobné soutěže žáků středních škol v řešení matematických úloh - MMO měly být jejich vyvrcholením. Od počátku však MMO sledovaly i další cíle: propagovat matematiku mezi školní mládeží, umožňovat osobní setkání a přátelské kontakty mladých matematiků ze zemí socialistického tábora, poskytovat pedagogům příležitost k výměně zkušeností z práce s mladými matematickými talenty.

Přes určité počáteční nesnáze se myšlenka pořádání pravidelných mezinárodních soutěží v matematice rychle ujala a záhy rozšířila daleko za své původní hranice. Projevilo se to mj. stále rostoucím počtem soutěžících žáků i počtem zemí vysílajících na MMO své delegace. O MMO lze dnes již hovořit jako o akci celosvětového měřítka, jejíž prestiž v mezinárodních odborných kruzích nelze podceňovat.

Československo se zúčastnilo všech dosud konaných MMO a sehrálo na nich svou pozitivní úlohu, ať už výkony svých reprezentantů - soutěžících žáků - nebo po stránce odborné přípravy soutěže a její organizace. Stručný přehled historie MMO a československých úspěchů na nich je podán v dalším textu. Na vysvětlenou jen dodejme, že se MMO konají střídavě v různých zemích, při čemž organizace jednotlivých ročníků se může v detailech lišit podle propozic pořadatelů a podle rozhodnutí mezinárodní poroty /jury/, která je složena ze zástupců jednotlivých delegací. Jury vybírá úlohy pro soutěž, schvaluje hodnocení řešení předložených žáků /z každé země může soutěžit nejvýše osm žáků/ a rozhoduje o udělení cen. Obvykle je na MMO uděleno několik cen prvních, o něco více cen druhých a ještě více cen třetích, tak, aby přibližně polovina soutěžících byla odměněna cenami. Někdy se též odměňují speciálními cenami zvláště elegantní či originální řešení.

P r v n í MMO se konala v červenci 1959 v rumunském Brašově. Zúčastnily se jí delegace sedmi zemí: Bulharska, Československa, Maďarska, NDR, Polska, Rumunska a SSSR. Soutěžilo tu celkem 52 žáků, mezi něž byly rozděleny tři první ceny, tři druhé ceny a pět třetích cen. Deset dalších soutěžících dostalo čestná uznání.

Českoslovenští žáci byli na této první MMO velmi úspěšní: Bohu-

slav Diviš z Prahy se stal absolutním vítězem celé soutěže a získal jednu z prvních cen. Čtyři další žáci, Z. Kovářík z Hodonína, J. Moudrý z Pardubic, K. Šmuk z Ostravy a J. Votava z Prahy obdrželi čestná uznání.

Také d r u h o u MMO uspořádalo Rumunsko v červenci 1960 ve známém karpatském letovisku Sinaia. Na druhou MMO přijely delegace jen z pěti zemí: Bulharska, Československa, Maďarska, NDR a Rumunsko, celkem bylo 40 soutěžících.

Českoslovenští žáci si vedli dobře i na této druhé MMO a získali zde jednu ze čtyř udělených prvních cen /Ivan Korec z Partizánského/, jednu ze čtyř druhých cen /J. Souček z Prahy/, dvě ze čtyř třetích cen /P. Tomšů z Kopřivnice a J. Veselý z Ostravy/ a dále i dvě ze sedmi udělených čestných uznání /L. Baran ze Žiliny, P. Nosek z Hradce Králové/.

Pořadatelem t ř e t í MMO bylo Maďarsko. Konala se v červenci 1961 ve městě Veszprému za účasti 48 soutěžících ze šesti zemí: Bulharska, Československa, Maďarska, NDR, Polska a Rumunsko. Soutěžícím byly rozděleny tři první, čtyři druhé a čtyři třetí ceny a dále deset čestných uznání prvního a devět čestných uznání druhého stupně.

Úspěchy československých žáků na třetí MMO byly dobré, i když už ne tak vynikající: I. Jech z Prahy získal třetí cenu, M. Kretschmer z Prahy dostal čestné uznání prvního stupně a K. Příkrý z Vyškova a P. Svoboda z Roudnice nad Labem dostali čestné uznání druhého stupně.

Č t v r t á MMO je pro nás zvlášť významná - byla totiž uspořádána v Československu v r. 1962. Dějištěm MMO bylo město České Budějovice a zámek Hluboká. Soutěžilo tu 56 žáků ze sedmi zemí: Bulharska, Československa, Maďarska, NDR, Polska, Rumunsko a SSSR. Byly uděleny čtyři první ceny, dvanáct druhých a patnáct třetích cen; čestná uznání se od tohoto ročníku již na MMO neudělují.

Z československých žáků dosáhl nejlepšího výsledku P. Hatala z Bratislavy, který získal druhou cenu, třetí ceny pak dostali J. Daneš z Dolních Počernic, J. Ježek z Prahy a K. Veselý z Prahy.

P á t o u MMO uspořádalo v r. 1963 Polsko; její hlavní část se konala ve Vratislavi. Soutěžilo 64 žáků z osmi zemí: Bulharska, Československa, Jugoslávie, Maďarska, NDR, Polska, Rumunsko a SSSR. Bylo uděleno sedm prvních, jedenáct druhých a sedmáct třetích cen.

Jednu z prvních cen získal i československý žák Josef Daneš z Prahy; další, třetí cenu dostal J. Zemánek ze Slaného.

Š e s t á MMO se konala v r. 1964 v Moskvě, kam přijelo 72 soutěžících z devíti zemí: Bulharska, Československa, Jugoslávie,

Maďarska, Mongolska, NDR, Polska, Rumunska a SSSR. Prvních cen tu bylo uděleno sedm, druhých devět, třetích devatenáct.

Českoslovenští žáci získali na šesté MMO čtyři ceny, dvě druhé /P. Bureš z Brna a T. Marcisová z Bratislavy/ a dvě třetí /J. Zemánek ze Slaného a M. Znojil z Prostějova/.

S e d m á MMO uspořádaná v NDR v Berlíně v létě 1965 přinesla hned dvě novinky. Jednak se tu po první objevila delegace z jiné než socialistické země, jednak byly zavedeny speciální ceny za elegantní řešení. Soutěžilo již 80 žáků z Bulharska, Československa, Finska, Jugoslávie, Maďarska, Mongolska, NDR, Polska, Rumunska a SSSR. Bylo rozděleno osm prvních, dvanáct druhých, sedmnáct třetích cen a šest cen speciálních.

Z československých žáků získal druhou cenu D. Preiss z Jindřichova Hradce, třetí ceny pak získali T. Marcisová z Bratislavy, M. Řezníček z Hradce Králové a B. Sivák ze Zvolena. B. Sivák byl nejmladším soutěžícím na sedmé MMO, byl tehdy ještě žákem ZDŠ.

Následující o s m á MMO se konala v červenci 1966 v Sofii. Počet soutěžících poklesl na 72, reprezentovali tyto země: Bulharsko, Československo, Jugoslávie, Maďarsko, Mongolsko, NDR, Polsko, Rumunsko a SSSR. Bylo uděleno třináct prvních, patnáct druhých a dvanáct třetích cen.

Českoslovenští žáci měli tu opět průměrné úspěchy: B. Sivák ze Zvolena získal druhou cenu a P. Kůrka z Prahy a P. Mederly z Prievidzy získali třetí ceny. Navíc dostal B. Sivák ještě jednu speciální cenu.

D e v á t á MMO uspořádaná v Jugoslávii v černohorském městě Cetinji byla významná především rozšířením okruhu zúčastněných zemí, přijely sem delegace ze třinácti zemí: Bulharska, Československa, Francie, Itálie, Jugoslávie, Maďarska, Mongolska, NDR, Polska, Rumunska, SSSR, Švédsko a Velké Británie. Vedle vlastní soutěže zorganizovali pořadatelé deváté MMO také malé symposium, kde si vedoucí delegací vyměnili zkušenosti z pořádání matematických soutěží pro žáky a z práce s matematickými talenty.

Soutěže se zúčastnilo 99 žáků, mezi něž bylo rozděleno 11 prvních, 14 druhých a 26 třetích cen. Z našich žáků získal opět druhou cenu B. Sivák ze Zvolena a třetí cenu P. Polcar z Velkého Meziříčí, T. Mašek z Prahy a R. Gregor z Prahy.

N a d e s á t o u MMO, která se konala v červenci 1968 v Moskvě, vyslalo své delegace dvanáct zemí: Bulharsko, Československo, Itálie, Jugoslávie, Maďarsko, Mongolsko, NDR, Polsko, Rumunsko, SSSR, Švédsko a Velká Británie; Rakousko bylo zastoupeno pozorovate-

lem. Soutěžilo 96 žáků, udělených cen bylo poměrně velice mnoho: 22 prvních, 22 druhých, 20 třetích a 5 speciálních.

Zde získali po letech opět dva českoslovenští žáci první ceny, byli to Tomáš Mašek z Prahy a Bohuš Sivák ze Zvolena. Čtyři další žáci, P. Polcar z Velkého Meziříčí, L. Polák z Brna, V. Müller z Prahy a J. Vinárek z Prahy získali druhé ceny.

Na j e d e n á c t é MMO, kterou uspořádalo Rumunsko v r. 1969 v Bukurešti, se opět zvýšil počet účastníků. Bylo tu 112 soutěžících ze čtrnácti zemí: Belgie, Bulharska, Československa, Francie, Holandska, Jugoslávie, Maďarska, Mongolska, NDR, Polska, Rumunsko, SSSR, Švédsko a Velké Británie; opět byl přítomen rakouský pozorovatel. Byly uděleny tři první ceny, 20 druhých a 21 třetích.

Jen tři českoslovenští žáci, P. Hadrava, T. Mašek a J. Vinárek, všichni z Prahy, získali tu třetí ceny. T. Mašek dostal navíc i jednu z devíti udělených speciálních cen.

Maďarsko bylo pořadatelem d v a n á c t é MMO, konala se ve známém balatonském středisku Keszthely za účasti 112 soutěžících ze 14 zemí: Bulharska, Československa, Francie, Holandska, Jugoslávie, Maďarska, Mongolska, NDR, Polska, Rakouska, Rumunsko, SSSR, Švédsko a Velké Británie. Mezi ně bylo rozděleno 7 prvních, 11 druhých a 40 třetích cen.

Českoslovenští žáci tu získali čtyři třetí ceny: H. Husová z Prahy, Š. Sakáloš z Prievizy, R. Švarc z Plzně a J. Tůma z Písku. Navíc dostal A. Černý z Bratislavy jednu ze sedmi speciálních cen.

Následující, t ř i n á c t o u MMO uspořádalo opět Československo, a to v SSR, hlavním dějištěm byla Žilina. Počet účastníků byl rekordní: 115 soutěžících z 15 zemí: Bulharska, Československa, Francie, Holandska, Jugoslávie, Kuby, Maďarska, Mongolska, NDR, Polska, Rakouska, Rumunsko, SSSR, Švédsko a Velké Británie. Výsledky žáků v tentokrát velice obtížné soutěži byly ohodnoceny 7 prvními, 12 druhými a 29 třetími cenami; bylo též uděleno pět speciálních cen.

Československé úspěchy na domácí půdě byly hubené - pouze J. Brychta z Prahy dostal jednu z třetích cen.

K další, č t r n á c t é MMO se v červenci 1972 sjely do polské Toruně delegace ze 14 zemí: Bulharska, Československa, Holandska, Jugoslávie, Kuby, Maďarska, Mongolska, NDR, Polska, Rakouska, Rumunsko, SSSR, Švédsko a Velké Británie; NSR vyslala pozorovatelku. Mezi 108 soutěžících bylo rozděleno 8 prvních, 16 druhých a 30 třetích cen a dále tři ceny speciální.

Ani zde nezískali českoslovenští žáci lepší ceny než třetí;

úspěšní byli čtyři: J. Brychta z Prahy, M. Kmošek z Brna, J. Šimša z Ostravy a I. Vrto z Rimavské Soboty.

P a t n á c t á MMO se konala v r. 1973 v Moskvě za účasti 125 soutěžících ze 16 zemí: Bulharska, Československa, Finska, Francie, Holandska, Jugoslávie, Kuby, Maďarska, Mongolska, NDR, Polska, Rakouska, Rumunska, SSSR, Švédsko a Velké Británie. Bylo uděleno 5 prvních, 15 druhých a 48 třetích cen. Speciální ceny nebyly žádné.

Úspěchy československých žáků tu byly poněkud lepší: P. Ferst z Prahy získal druhou cenu a čtyři další žáci, T. Chrz z Prahy, P. Kindlmann z Českých Budějovic, M. Kmošek z Brna a J. Šimša z Ostravy dostali třetí ceny.

Durynské město Erfurt bylo dějištěm **š e s t n á c t é** MMO, kterou zde NDR uspořádala v červenci 1974. Počet zúčastněných se opět rozšířil: soutěžilo 140 žáků z osmnácti zemí: Bulharska, Československa, Finska, Francie, Holandska, Jugoslávie, Kuby, Maďarska, Mongolska, NDR, Polska, Rakouska, Rumunska, SSSR, Švédsko, USA, Velké Británie a Vietnamu. Bylo mezi ně rozděleno 10 prvních, 24 druhých a 37 třetích cen a dále tři ceny speciální.

Jen dva českoslovenští žáci, A. Vencovská z Prahy a P. Kindlmann z Českých Budějovic, dokázali tu získat po jedné třetí ceně.

N a s e d m n á c t o u MMO uspořádanou v červenci 1975 v bulharském Burgasu, přijelo 135 soutěžících ze 17 zemí: Bulharska, Československa, Francie, Holandska, Jugoslávie, Maďarska, Mongolska, NDR, Polska, Rakouska, Rumunska, Řecko, SSSR, Švédsko, USA, Velké Británie a Vietnamu. Bylo uděleno 8 prvních, 25 druhých, 36 třetích cen a tři ceny speciální.

Z československých žáků získali třetí ceny M. Valášek z Prahy a J. Navrátil z Olomouce.

Pořadatelem **o s m n á c t é** MMO bylo Rakousko; hlavní část soutěže se odehrála ve východotyrolském městě Lienz. Přijely sem delegace z devatenácti zemí: Bulharska, Československa, Finska, Francie, Holandska, Jugoslávie, Kuby, Maďarska, NDR, NSR, Polska, Rakouska, Rumunska, Řecko, SSSR, Švédsko, USA, Velké Británie a Vietnamu. Celkem soutěžilo 141 žáků a bylo uděleno 9 prvních, 28 druhých a 45 třetích cen a jen jedna cena speciální.

Českoslovenští žáci získali jednu druhou cenu /J. Kratochvíl z Pardubic/ a tři třetí ceny /J. Navrátil z Olomouce, M. Šedivý z Jevíčka a P. Takáč z Šafárikova/.

Růst počtu účastníků MMO pokračoval na **d e v a t e n á c t é** MMO, kterou zorganizovala Jugoslávie v r. 1977 v Bělehradě. Jednadvacet zemí - Alžírsko, Belgie, Bulharsko, Československo, Finsko,

Francie, Holandsko, Itálie, Jugoslávie, Kuba, Maďarsko, Mongolsko, NDR, NSR, Polsko, Rakousko, Rumunsko, SSSR, Švédsko, USA a Velká Británie - sem vyslalo 155 soutěžících žáků, Brazílie byla zastoupena pozorovatelkou. Stejně jako při deváté MMO v r. 1967 bylo i na této devatenácté MMO uspořádáno malé symposium na téma "Mládež a matematika". V soutěži pak bylo uděleno 13 prvních, 29 druhých a 35 třetích cen.

Účast československých žáků byla poměrně úspěšná, neboť získali tři druhé ceny /Z. Kalousek z Jablonce n. Nisou, J. Navrátil z Olomouce a P. Quittner z Prievidze/ a dvě třetí ceny /M. Čadek z Brna a I. Turek z Hradce Králové/. Navíc dostal ještě M. Čadek jednu ze šesti udělených speciálních cen.

Jubilejní d v a c á t o u MMO uspořádalo v r. 1978 Rumunsko, kde MMO vůbec začínaly. Sjely se sem do Bukurešti delegace ze sedmnácti zemí: Bulharska, Československa, Finska, Francie, Holandska, Jugoslávie, Kuby, Mongolska, NSR, Polska, Rakouska, Rumunska, Švédska, Turecka, USA, Velké Británie a Vietnamu. Celkem soutěžilo 132 žáků. Bylo uděleno 5 prvních, 20 druhých a 32 třetích cen a 4 ceny speciální.

Dvě druhé ceny získali českoslovenští žáci J. Kratochvíl z Pardubic a J. Nekovář z Prahy, další tři - P. Filakovszky z Banské Štiavnice, Z. Vavříň z Prahy a M. Veščičík z Bratislavy - dostali třetí ceny.

J e d e n a d v a c á t á MMO uspořádaná v Londýně v červenci 1979 byla zatím poslední. Účast na ní překonala všechny dřívější - v Londýně soutěžilo 166 žáků z 23 zemí: Belgie, Brazílie, Bulharska, Československa, Finska, Francie, Holandska, Israele, Jugoslávie, Kuby, Lucemburska, Maďarska, NDR, NSR, Polska, Rakouska, Rumunska, Řecka, SSSR, Švédska, USA, Velké Británie a Vietnamu. Mezi ně bylo rozděleno 8 prvních, 32 druhých a 42 třetích cen a jen jedna cena speciální.

Československo se po dlouhých jedenácti letech konečně dočkalo plného úspěchu: jednu z prvních cen získal i Jan Nekovář z Prahy, a to se ziskem maximálního počtu bodů. Další čtyři žáci - M. Chlebík z Čadce, J. Jirásek z Košic, R. Kučera z Brna a J. Tkadlec z Bílovce - dostali třetí ceny.

V r. 1980 se MMO nekonala.

Bývalí víťazi a úspešní riešitelia MO
o svojich učiteľoch a vplyve MO na voľbu štúdia a povolania

Jozef M o r a v č í k

Pri príležitosti jubilea MO, ktorým sa táto súťaž dostáva obrazne rečeno do zrelého veku, sme sa obrátili na niekdajších absolútnych víťazov i viacerých ďalších úspešných riešiteľov, ktorých dnešné adresy sa nám podarilo získať, s niekoľkými otázkami. Chceli sme sa dozvedieť, komu vďačia za svoj úspech v olympiáde, aké vysokoškolské štúdium a životné povolanie si zvolili. Zaujímalo nás tiež, aký vplyv na túto ich voľbu mala MO a úspešná účasť v nej. Ďalšie otázky smerovali k spoznaniu ich terajšieho názoru na MO a na to, ako plní podľa nich svoju základnú úlohu vo vyhľadávaní a ďalšom rozvoji matematických talentov.

Na naše otázky odpovedala necelá polovica opýtaných, ale ich odpovede boli veľmi zaujímavé a v mnohých smeroch podnetné. Potvrdili naše dlhoročné poznatky o prvoradej a nezastupiteľnej úlohe učiteľa matematiky v procese podchytenia matematického talentu. Takmer každý z odpovedajúcich dáva svoju voľbu štúdia a povolania do priamej či nepriamej súvislosti s účasťou v MO. V celom rade listov sa objavuje dobre mienená pripomienka k zlepšeniu obsahu či organizácie MO, resp. vo všeobecnosti práce s talentami. Za všetky odpovede touto cestou ďakujeme a najzaujímavejšie odpovede na niektoré otázky predkladáme čitateľom.

K o m u v Ď a č í t e z a s v o j ú s p e c h v M O ?
N a k t o r é h o z o s v o j i c h s t r e d o š k o l -
s k ý c h p r o f e s o r o v m a t e m a t i k y s i n a j -
l e p š i e s p o m í n a t e ?

Na to, že sa zrodila Matematická olympiáda /zúčastnil som sa na nej v jej prvom ročníku/ ma upozornil moj profesor matematiky Peter Uhlík, ktorý ma povzbudzoval riešiť úlohy MO a v tejto činnosti ma všestranne podporoval. Exaktnému mysleniu ma však učila aj moja triedna profesorka Jelena Frečerová na hodinách deskriptívnej geometrie.
/RNDr. Juraj Bosák, CSc., MÚ SAV Bratislava/

V době, kdy jsem přecházel do 9. třídy jedenáctiletky, jsem ve skutečnosti přeskočil jeden ročník. Dostal jsem se do kolektivu spolužáků, kteří do této třídy přišli ze 4. ročníku střední školy; já

jsem přecházel ze 3. ročníku střední školy. Opakování látky proběhlo rychle, a tak mě stálo půl roku velmi intenzivní domácí přípravy, abych se vyrovnal svým starším spolužákům. Se stejným úsilím jsem se snažil řešit domácí úlohy z matematiky i ve vyšších třídách gymnázia. Mým profesorem matematiky byl v 9. - 11. třídě jedenáctiletky prof. Vincenc Maršálek /mimořádně, patřil k žákům akademika E. Čecha/. Prof. Maršálek patří k těm středoškolským učitelům, kteří na mne měli největší vliv. Byl nejen výborný matematik a vynikající pedagog, ale především všechny studijní problémy řešil z obecně lidského hlediska. Sám byl veselé povahy, nezkazil žádnou legraci. Nikdy se neuchyloval k žádným postihům studentů za jejich občasnou recese nebo vybočení z běžných studijních povinností, a přesto měl ve třídě velikou autoritu.

/Doc. RNDr. Jiří Anděl, CSc., MFF UK Praha/

Na začátku osmé třídy tehdejší jedenáctiletky mě nejvíce ze všeho zajímala fyzika; matematika mi sice šla výborně, nejevil jsem však o ni žádný speciální zájem. O existenci MO jsem se dověděl od své učitelky matematiky E. Fořtové, která mě také vybídla, abych se MO zúčastnil. Zkusil jsem to a shledal, že řešit soutěžní úlohy je docela zajímavá činnost. Začal jsem se o matematiku zajímat hlouběji a byl jí přitahován stále více a více. Znalosti, které mi umožnily úspěšné umístění v MO, jsem nabyl v podstatě samostatným studiem, za nutné solidní základy i za mnohé další však vděčím svému učiteli matematiky na jedenáctiletce prof. Jaroslavu Fořtovi, který středoškolskou matematiku /a nejen tu/ výborně ovládal a co hlavně, dovedl ji též výborně a zajímavě učit. /RNDr. Jiří Durdil, CSc., MŮ UK Praha/

Za úspěch v MO vděčím zajímavě položeným příkladům v přípravných kolech MO; s povděkem si připomínám profesory Bílkovou, Krále a Šídla, kteří mi dali poznat krásu matematiky.

/Doc. RNDr. Ladislav Beran, MFF UK Praha/

Prof. Zdeněk Ungermann z hradeckého gymnázia, tenkrát SVVŠ, byl přísný a náročný. Matematiku sám výborně znal a navíc ji uměl se zaujetím učit. Také vedl dobrovolný kroužek, vzpomínám si, že se konal od sedmi ráno. Lákal mě něco nového se dozvědět, ač to znamenalo chodit na vlak brzo po šesté. Prostě jsem byl nenásilně zatažen do krásného dobrodružství poznání a těšilo mě učit se něco, co "se nemusí"; četl jsem, co mi přišlo do ruky, a hlavně mě bavilo řešit úlohy - olympijské a jiné. Matematika mi jako koníček zůstala, jen se stala později také povoláním.

/Doc. RNDr. Ivan Netuka, CSc., MFF UK Praha/

Za úspěch bych měl vděčit všem lidem, kteří nějak probudili můj zájem o matematiku. První byl asi můj otec, který si, jako laik, kupoval a později mi dal též číst knížky o matematice, jež jsou z přísného hlediska jediné zavrženíhodné. Vzpomínám na dva profesory na gymnáziu. První byl Jaroslav Konopásek, již zemřel, při jehož hodinách matematiky jsem začal chápat, co vlastně matematika je. Druhým byl Stanislav Horák, jenž nás učil deskriptivní geometrii, ale staral se o MO na škole, vedl kroužek účastníků a odevzdávali jsme mu řešené úlohy. Později působil na ČVUT, také byl redaktorem Rozhledů a dnes je více než sedmdesátiletý důchodce, ale ještě aktivně pracuje jako redaktor ve Státním pedagogickém nakladatelství.

/RNDr. Jan Hejman, CSc., MÚ ČSAV Praha/

Tak teda, komu vďačím za svoj úspech v MO. Širšie vzaté všetkým, ktorí sa podieľali na mojej výchove, a to ako v oblasti matematiky tak aj v ostatných oblastiach. Chcem pri tom zdôrazniť, že podstatnú úlohu tu asi zohráva to, či je človek od prvých rokov školy vedený k systematickej práci. U mňa tomu tak bolo najmä vďaka mojim ročičom. Z ľudí, ktorí mali na moje vzdelanie z matematiky bezprostredný vplyv /myslím na vzdelanie základné a stredoškolské/ by som menoval p. učiteľku Šimovú, prof. Havaldu a v najväčšej miere profesora Miloša Franeka.

/RNDr. Peter Mederly, CSc., MFF UK Bratislava/

Vďečne vzpomínám prof. Frant. Vejsady v Českých Budějovicích. Přihlásil mne a několik spolužáků do MO, do níž bych si byl sám netroufal. Tím, že nás bez našeho souhlasu přihlásil, mě vlastně přivedl k matematice, za což mu budu vždy vděčný. Za hluboké postřehy z matematiky však více než svým profesorům matematiky vděčím profesorům deskriptivy. Z nich si na jméno vzpomínám jen u prof. Cihláře, ale i ostatním - byla jich řada - vděčím za mnohé.

/Petr Liebl, MÚ ČSAV Praha/

Po celou dobu svého středoškolského studia na JSŠ v Telči jsem měl jedinou profesorku matematiky Miladu Jurkovou, které velice záleželo na účasti jejích žáků v MO, podněcovala je k ní a účast vysoce hodnotila. Proto bývaly výsledky studentů této školy v krajském kole obvykle velmi dobré.

/RNDr. Jaroslav Nadrchal, CSc., PÚ ČSAV Praha/

Měl jsem to štěstí, že po celou dobu studia na střední škole mě učil stejný profesor matematiky - prof. Emil Calda. Systematicky nás ve třídě vedl k řešení matematických úloh, přičemž se zdaleka neomezoval na školské příklady. Během svého působení na střední ško-

le na tř. W. Piecka v Praze 2 vychoval řadu úspěšných olympioniků a není jistě náhodou, že např. na XI. MMO byli tři nejúspěšnější účastníci z československého družstva právě z třídy vedené prof. Caldou. Velkou zásluhu na tomto umístění měli pochopitelně i všichni pracovníci ÚV MO, kteří obětavě vedli semináře pro olympioniky během školního roku i na přípravných soustředěních před MMO.

/RNDr. Jiří Vinárek, CSc., MFF UK Praha/

Střední školu - tehdy jedenáctiletku - jsem navštěvoval v Praze na Kavalírce. Chci zde vzpomenout jednak prof. Nováka, jednak prof. fyziky, známého J. Linharta, který vlastně MO na škole propagoval a byl jejím důvěrníkem, jak se, myslím, říkalo. Za skutečnou celoživotní inspiraci ke studiu matematiky a fyziky však vděčím svému otci, prof. B. Velickému, který vystudoval na Karlově a přenesl na mne mnoho z názorů K. Petra, B. Bydžovského, F. Závíšky. Nikdo z jmenovaných není bohužel již mezi námi.

/RNDr. Bedřich Velický, CSc., FÚ ČSAV Praha/

Domnívám se, že hlavní vliv na můj úspěch v MO měl profesor Jaroslav Novák na JSŠ v Praze 5 Na Santošce. Po celá tři léta /9.-11. třída/ jsme měli pravidelně matematický kroužek, kde nám prof. Novák vykládal řadu zajímavostí z matematiky. Tento kroužek měl velký úspěch a chodili na něj i studenti, kteří neměli speciální zájem o matematiku. Toto také rozhodlo, že jsem se přihlásil na MFF.

/RNDr. M. Hušek, CSc., MÚ UK Praha/

Po celou střední školu mě učil matematiku profesor František Ledabyl z Opavy. Tomuto mimořádně schopnému učiteli vděčím nejen za svůj úspěch na MO, ale i za celý svůj vztah k matematice, který ve mně vznikl pod jeho vedením a trvá dodnes. Profesor Ledabyl si svými znalostmi, svými pedagogickými schopnostmi a svým přístupem k mladým lidem získal úctu a sympatie i u těch mých spolužáků, pro něž byla jinak matematika postrachem.

/Čestmír Losert, Vědecko-výzkumný uhelný ústav Ostrava/

Za svoje úspěchy v MO /hoci nijak zvlášť prenikavé, ale predsa aké-také/ vděčím najmä svojej učiteľke matematiky z gymnázia p. prof. Kornélii Kropilákovéj a p. prof. Vladimírovi Jodasovi, ktorý nám viedol matematický seminár. Títo dvaja majú vo veľkej miere na svedomí aj to, že som sa rozhodol pre štúdium matematiky.

/Pavol Zlatoš, MFF UK Bratislava/

MO jsem se začal účastnit od 9. třídy ZDŠ a myslím, že mi k tomu významně pomohl dobrý základ, který jsem měl od pí učitelky

Horké z Prahy 6. Také na gymnáziu u pí prof. Adamové jsem měl možnost rozvíjet si jakousi základní matematickou techniku. V tom ostatním, tj. jakémsi vtipu, mi už pomáhala MO sama svými soustředěními.

/Zdeněk Vavřín, MFF UK Praha/

Zde jsem přímo nucen jmenovat RNDr. Josefa Kubáta, který mě nejprve v I. ročníku gymnázia přemluvil, abych zkusil kategorii A, a v dalších letech mi v přípravě velmi pomáhal.

/Jan Kratochvíl, MFF UK Praha/

Veľmi peknú spomienku dr. T. Marcisovej, CSc. z MFF UK v Bratislave na svoju stredoškolskú profesorku matematiky uverejňujeme na inom mieste.

A k ý v p l y v m a l a ú s p e š n á ú č a s ť
v M O n a v o ľ b u V á š h o v y s o k o š k o l s k é h o
š t ú d i a a t e r a j š i e h o p o v o l a n i a ?

Na voľbu môjho vysokoškolského odboru štúdia i povolania mala rozhodujúci vplyv Matematická olympiáda i rada môjho profesora Uhlíka. Nebyť olympiády, pravdepodobne by som študoval niektorý technický odbor a ani by som nepomyslel na štúdium matematiky, ktorá sa mi predtým zdala príliš abstraktná. Svoje rozhodnutie som však nikdy neoľutoval a s povolaním matematika som spokojný.

/J. Bosák/

Úspěšná účast v MO byla činitelem, který se spolupodílel na rozhodnutí studovat matematiku na vysoké škole. Zejména úspěšné absolvování celostátního kola se zdálo být určitou zárukou vhodnosti budoucího matematického povolání.

/J. Anděl/

Podstatnou. Nikoliv vzhľadom k získaní pro matematiku - to jsem byl rozhodnut dříve. Spíše pro získání přesnější představy, co to matematika vlastně je, logická výstavba, důkazy atp. Jak jsme to psali s J. Morávkem ve sborníku k 25. výročí MO - výchova z víry Vojtěcha Jana na víru Vojtěcha Jarníka.

/Doc. Dr. Břetislav Novák, CSc., MFF UK Praha/

Moje účast v MO a dobré výsledky - pokud si vzpomínám, byl jsem vždy vítězem krajského kola - znamenaly, že jsem změnil svůj původní úmysl věnovat se studiu klasické filologie a rozhodl jsem se pro čistou matematiku. Absolvoval jsem Matematicko-fyzikální fakultu UK v Praze, obor matematická analýza, v letech 1956-61, nicméně již v r. 1958 jsem se rozhodl se věnovat tomu, co se dnes nazývá informatika, computer science apod. Proto jsem na doporučení svých učitelů na fakultě začal spolupracovat s tehdejší Ústavem technické fy-

ziky ČSAV při používání počítačů, protože specializace tohoto druhu ještě na fakultě zavedena nebyla a jen pionýrské přednášky dr. J. Raichla dovolovaly nakouknout do této oblasti. Tomuto ústavu jsem zůstal věren dosud, absolvoval jsme vědeckou aspiranturu u prof. M. Fiedlera v MÚ a nyní pracuji jako vedoucí vědeckého oddělení pro zpracování fyzikálních informací, které jsem v r. 1970 založil.

/J. Nadrchal/

Vliv mé účasti na MO, jakož i vliv mého vztahu k matematice vůbec spočívá v tom, že při své pracovní činnosti se vždy snažím jasně vymezit matematickou podstatu problému, který mi je k řešení předložen, a tento vyřešit v pokud možno obecném tvaru s ohledem na případné jiné varianty řešení.

/Č. Losert/

Jistě rozhodující. Vyzkoušel jsem si, co mě opravdu baví a rozhodnutí nelituji. Z těch "olympijských" dob mi leccos zůstalo - např. rád řeším nejružnější matematické problémy dodnes.

/I. Netuka/

Myslím, že rozhodující: upozornila mě, že umím něco, co většina ostatních neumí, a ukázala mi některé pěkné problémy. Nesmím zapomenout na to, že jsme dostali knihy a brožury /např. 1. díl Jarníka/, z nichž jsem poznal, co je matematika. Jistě by mě bylo nenapadlo si knihy sám koupit; ani jsem ostatně o jejich existenci nevěděl.

/P. Liebl/

Nebýt MO, věnoval bych se asi fyzice /nejspíš elektrotechnice/; za svoji orientaci na matematiku vděčím právě MO a svým již zmíněným učitelům matematiky E. a J. Fořtovým. Co se týče vlivu MO, nejedná se zde však o moje úspěchy v ní, ale o to, že jejím prostřednictvím jsem poznal, jak může být matematika krásná.

/J. Durdil/

Myslím, že docela významný. Ještě na začátku střední školy jsem chtěl studovat medicínu a pak postupně biochemii, fyzikální chemii a skončil jsem na teoretické fyzice na MFF UK. O matematiku - na rozdíl od jiných oborů - jsem se na střední škole nezajímal více než v rámci učebních osnov, na MO se vůbec nepřipravoval a výsledky dosažené v MO mne docela překvapovaly. Matematika mne ovšem začala opravdu zajímat na vysoké škole.

/RNDr. Jiří Bičák, CSc., MFF UK Praha/

Matematika se mi původně zdála být vědou poněkud suchou /alespoň sušší než fyzika a chemie/. Díky MO jsem si potom matematiku oblíbil, takže rozhodně nelituji, že jsem si ji vybral jako životní povolání.

/RNDr. Bohdan Zelinka, CSc., VŠST Liberec/

Volbu studia rozhodně ovlivnila moje účast v MO, též však

vhodná propagace ze strany fakulty i informace mých profesorů. Ještě rok před maturitou jsem o MFF ani nevěděl a mlhavě jsem uvažoval o studiu na technice.

/J. Hejzman/

Účast na MO měla zásadní vliv na volbu studia - na střední škole chyběly objektivní informace o druhu studia na matematicko-fyzikální fakultě.

/L. Beran/

Úspěšná účast v MO byla vedle obecného zájmu o matematiku jedním z hlavních podnětů při volbě mého vysokoškolského studia, a vedla tedy jako jeden z faktorů ve svém důsledku i k mému nynějšímu povolání.

/J. Vinárek/

Myslím, že úspechy v MO boli pre voľbu mojho povolania rozhodujúce.

/RNDr. Anton Černý, MFF UK Bratislava/

Podľa všetkého MO bola jedným z hlavných faktorov, ktoré určili smer mojho štúdia a povolania. Práve v tomto období sa vo mne prebudil záujem o matematiku a začal som v nej nachádzať krásu.

/P. Zlatoš/

Asi bych v každém případě šel studovat matematiku, i kdybych se MO neúčastnil. Ale ono se to všechno podmiňuje, s mým vztahem k matematice bylo těžké se MO neúčastnit.

/J. Kratochvíl/

Myslím, že MO mi pomohla vytýčiť medzi různými zájmy ten, který se nejlépe shoduje s mými schopnostmi, a po celou dobu studia na gymnáziu mě k němu přitahovala, takže jsem se zákonitě musil rozhodnout pro další studium matematiky.

/Z. Vavříň/

A k o p o d ľ a V á š h o n á z o r u p l n í M O s v o j u ú l o h u p r i v y h ľ a d á v a n í a o d b o r n o m v e d e n í m a t e m a t i c k y n a d a n ý c h ž i a k o v ?

Dnešná Matematická olympiáda plní pomerne dobre funkciu vyhľadávania študentov, ktorí budú raz schopní riešiť matematicky formulované problémy v podniku, na výskumných ústavoch apod. Sú to úlohy s pevne stanoveným cieľom /napr. vyrieš tú a tú rovnicu!/. Možno by stálo za pokus umožniť aj priamym matematickým talentom na vedeckú prácu v matematike, aby sa mohli prejaviť i v Olympiáde - napr. zaradiť v každom kole po jednej úlohe s neurčitým cieľom /prípadne s voľbou z 2-3 daných tém/, kde by sa žiaci mohli zahrať na "tvorcov teórie" /napr. vyjsť z niektorého problému zábavnej matematiky a hľadať jeho zovšeobecnenia, súvislosti s inými problémami a vety, ktoré

platia v takejto teórii/. Tu by sa uplatnili najmä žiaci s bohatou fantáziou. /J. Bosák/

Hlavní význam MO spatřuji v probouzení zájmu nadaných žáků o matematiku a v poskytnutí možnosti dalšího rozvíjení školních znalostí na speciálních seminářích MO. Dobrý učitel matematiky, možnost účasti na seminářích MO a dostatek přiměřené literatury /Rozhledy, Škola mladých matematiků/ by pro odborné vedení matematicky nadaných žáků mělo být postačující. Bohužel, úroveň středoškolských učitelů matematiky je značně rozdílná, ne každý žák má možnost semináře MO navštěvovat - a samotný fakt existence MO jako soutěže v mnoha případech zřejmě nestačí. /J. Durdil/

MO má bezesporu kladný vplyv pri hľadaní matematicky nadaných žiakov. Pritom akcie spojené s touto súťažou, akými sú napr. rôzne krúžky na pomoc MO, korešpondenčné semináre, sústreďenia apod. majú podľa mojho názoru veľmi veľký vplyv na formovanie mladých matematikov. /P. Mederly/

Já jsem si z MO odnesl, myslím, hlavně dvojí. Zprvce jsem se utvrdil v tom, že estetická stránka matematiky je velmi důležitá, jak heuristicky, tak i při volbě nejefektivnějšího řešení. Zadruhé jsem pozoroval, že úlohy z geometrie jsou pro mne obtížnější, a to mne přivedlo k hlubšímu samostatnému studiu geometrie, z jehož zisků jsem později mnohokrát těžil, ať přímo v krystalografii, v teorii relativity, nebo poněkud abstraktněji při používání funkcionální analýzy apod. /B. Velický/

Myslím, že význam MO je nesmírný. Již fakt, že MO motivuje stovky studentů si důkladně promyslet desítky těžších příkladů, má neocenitelný význam nejen pro výběr talentů a prohloubení jejich zájmu, ale i o celkové zvýšení matematické kultury.

/RNDr. Luděk Zajíček, CSc., MFF UK Praha/

MO plní svou úlohu bezesporu dobře. Uvedu několik drobných zkušeností s našimi studenty - úspěšnými řešiteli MO. Někteří přicházejí s představou, že matematika je řešení úloh /dokonce někdy úloha ve smyslu hádanky, hříčky/. Občas se setkáváme se studenty, kteří si /oslnění úspěchem z MO/ připadají již při příchodu na fakultu "matematicky zcela vyzrálí". Následující poznatek považuji za závažnější. Na fakultu přicházejí většinou nadaní studenti - často na střední škole nepoznali konkurenci. Na fakultě se pak sejdou se stejně úspěšnými a často lepšími kolegy. A někteří, nedostatečně psychologicky připravení, nemají dost bojovnosti a nesmíří se s takto změněnou

situací. Výše řečené ovšem je výjimka, která potvrzuje toto pravidlo: úspěšní řešitelé MO jsou úspěšnými studenty fakulty. Všem profesorům, kteří na tom mají zásluhu, patří upřímný dík učitelů naší fakulty.

/I. Netuka/

MO by se měla stát hlavní formou péče o matematické talenty a vyhnout se každé formě masovosti, protože matematické talenty nepatří mezi hromadné jevy.

/J. Nadrchal/

Pojetí MO při vyhledávání a odborném vedení matematicky nadaných žáků je velmi plodné; osobně se domnívám, že by zde neškodilo zvýšit okruh propagace a dále soustavně zvyšovat informovanost středoškoláků na všech školách. Není vhodné, když příklady MO jsou zadávány učitelem jen těm žákům, kteří jsou jím vybráni jako jediní vhodní pro jejich řešení.

/L. Beran/

Myslím, že velmi závisí od postoja učitele k MO. Niektorí žiaci robia MO len z "donútenia" - tým si nevytvoria dobrý vzťah k MO a môže sa stať, že si aj pokazia svoj kladný vzťah k matematike. Vysoko hodnotím edíciu ŠMM ako aj rôzne sústreďenia MO. Vynikajúce sú tábory mladých matematikov pre menšie deti.

/A. Černý/

Myslím, že MO již získala mnoho nadaných žáků pro matematiku. Mám však dojem /čistě subjektivní/, že z řešitelů MO vyrůstají ponejvíce teoretičtí matematici. Naproti tomu znám mimořádně nadané studenty, kteří se MO neúčastnili, ale zato se větší měrou vzdělávali samostatně a dospěli spíše k praktické orientaci, k aplikaci matematiky.

/Zd. Vavřín/

Č o b y s t e d o p o r u č o v a l i p r e z l e p š e n í s t a r o s t l i v o s t i o m a t e m a t i c k é t a l e n t y ?

Ze svých středoškolských let si vzpomínám na matematické semináře pro středoškolyáky pořádané jednou měsíčně libereckou pobočkou JČMF. Vedl je profesor František Dušek, pozdější docent PF v Ústí nad Labem. Nevykládal nám žádné vysokoškolské učenosti, ale dával nám úlohy, které byly náročné na přemýšlení, přičemž nepřekračovaly podstatně rámec středoškolských osnov. Nezapomínal ani na naše žaludy; vždy obstaral koš loupáčeků nebo koblih, které zdarma rozdával. /Věřte nebo nevěřte, ale opravdu jsme tam nechodili kvůli těm koblihám! Semináře se konaly pro žáky z celého tehdejšího Libereckého kraje, přesporním se hradilo jízdné. Myslím, že toto je vhodná forma péče o nadané žáky. Semináře se ovšem nesmějí prohlašovat za povinné;

mají smysl pouze tehdy, mají-li všichni účastníci opravdový zájem o matematiku.

/B. Zelinka/

Myslím, že recepty na vyhľadávanie a pestovanie matematických talentov sú známe. Treba len vytvoriť podmienky pre učiteľov a žiakov, aby sa tejto činnosti mohli venovať a nerozptyľovali sa množstvom iných povinností, ktoré by sa mohli prenechať tým, ktorí sa v olympiádach neangažujú.

/J. Bosák/

M á t e n e j a k ú z a u j í m a v ú o s o b n ú
s p o m i e n k u s ú v i s i a c u s M O ? Č o e š t e
p o v a Ź u j e t e z a v h o d n é p o v e d a Ź k M O
p r i p r í l e Ź i t o s t i 3 0 . v ý r o č i a j e j
v z n i k u ?

Ve čtvrtém ročníku MO jsem na popud prof. Langpaula počítal svou kategorii B a navíc i kategorii A. V krajském kole se mi povedlo počítat také obě kategorie a tak jsem se dostal do kola celostátního. Zde mne čekalo nepříjemné překvapení. ÚV MO se rozhodl, že bude tentokrát zadávat příklady vždy po jednom, řešení se budou sbírat a hned opravovat, aby mohl být na odpolední besedě vyhlášen vítěz. Byl jsem vždy spíše zaměřen negeometricky a příklady z geometrie mně obvykle trvaly déle. Tak jsem trochu pohořel, neúspěch u prvního příkladu mně trochu narušil klid a popletl jsem toho dost. Chuť jsem si spravil až na posledním příkladu, který jsem odevzdal první - přesně za šest minut. Však také jeden z čekajících opravovatelů /tehdejší posluchač MFF UK/ se se mnou okamžitě vsadil, že mám příklad špatně. Sázku jsem vyhrál, ale byla to slabá náplast na pokažené příklady jiné. Později jsem ani nemohl věřit, že jsem byl celkově šestý. Zřejmě zvolený systém nebyl příjemný ani ostatním.

Za rok - v pátém ročníku MO - jsem se v kategorii A opět zařadil do celostátního kola a již první minuty, které jsem strávil v posluchárně M1 /dříve Velká posluchárna/, mne přesvědčily o tom, že jsem "ostře sledován". Seděl jsem v poslední lavici u dveří a kolem mne se "procházelo" několik činitelů MO a i pracovníků fakulty a sledovali, jak jsem daleko. Protože jsem již v té době kouřil, odcházel jsem čas od času za dveře. Moje ojedinělé počínání vzbudilo nedůvěru a tak jsem dostal nenápadné hlídače, kteří mně doprovázeli při každém podlehnutí kuřácké vášni.

Moje "neláska" ke geometrii se projevila výrazně také na řešení úloh. Kde jsem se mohl /v tehdejší představě/ vyhnout geometrickému řešení, snažil jsem se o to. V paměti mně zůstala pěkná úloha prvního

kola, kterou stále trápím své posluchače: Na dvou přímkách p a p' buďte dány po řadě body A, B, C, D a A', B', C', D' tak, že $ABB'A', BCC'B'$ a $CDD'C'$ tvoří shodné čtverce. Ukažte, že součet úhlů $B'AB, C'AC$ a $D'AD$ je pravý úhel. Úloha předpokládala geometrické řešení. Moje řešení bylo toto:

Umístíme-li dané body vhodně do roviny komplexních čísel a uvažíme-li, že

$$(a + ai)(2a + ai)(3a + ai) = \dots = 10ia^3$$

je tvrzení dokázáno.

Při krajských a celostátních kolech jsem se seznámil s řadou stejně zapálených nadšenců pro matematiku a MO a bylo nám líto, když jsme se v r. 1956 setkali skoro všichni na MFF UK, že je již s olympiádou pro nás konec. Nevzpomenu si již při jaké příležitosti jsme se o tom zmínili akademiku J. Novákovi, tehdejšímu předsedovi ÚVMO. Myslím si, že jsme se nabízeli k opravování úloh. Akademik Novák si nás pozval k delší besedě do své pracovny a překvapil nás námětem: pořádat pravidelné besedy pro olympioniky z Prahy a okolí o úlohách prvního kola MO. Pokusili jsme se o to a skutečně po celý rok vždy po odevzdání čtveřice jsme se scházeli se zájemci ze středních škol, předváděli řešení úloh, nechali je referovat jejich řešení. Pamatuji si, že častými návštěvníky, kteří nám pomáhali, byli známí činovníci MO prof. R. Zelinka a prof. J. Holubář. Nevzpomenu si již asi, proč tato setkání asi po roce skončila. Snad jsme se neúspěšně snažili předat štafetu dalšímu ročníku posluchačů MFF UK, snad jsme v té době začali pořádat na fakultě matematické besedy. /B. Novák/

Mám jednu osobní vzpomínku na MO, pro mne bohužel smutnou. Při závěrečném kole MO, které se konalo v posluchárně Ml Ke Karlovu, jsem seděl vpravo dole. Bylo krásné slunečné počasí a mně se velmi dobře pracovalo, příklady se mně zdály poměrně jednoduché a tak jsem už 3/4 hodiny před koncem odevzdal vyřešené příklady a do konce jsem se jen spokojeně rozhlížel po posluchárně. Když jsem ale odcházel z posluchárny a naposled se ve dveřích ohlédl, padl můj pohled na tabuli a rázem mne polil studený pot, neboť jsem uviděl, že na tabuli má příklad 3 dvě části a já jsem udělal jen tu první a tu druhou část zadání jsem vůbec neviděl, protože z místa kde jsem seděl se tabule leskla právě tam, kde bylo napsáno příslušné zadání. Odjížděl jsem z Prahy velmi smutný a o to větší překvapení mne pak čekalo, když jsem se dozvěděl, že jsem se umístil na 8.- 12. místě. Jen jsem si pak povzdechl, jak by to asi dopadlo, kdybych neměl takovou smůlu. Nakonec bych chtěl dodat, že mám i spoustu příjemných vzpomínek na

svoji účast v MO.

/RNDr. Alois Klíč, CSc., VŠCHT Praha/

Chtěl bych všem pracovníkům MO popřát, aby jejich náročná a obětavá práce měla co největší úspěch zejména v tom smyslu, aby co nejvíce mladých lidí získalo přesvědčení, že matematika není nudným souborem definicí a vět, ale že je to živá věda, která se neustále vyvíjí a s kterou se dnes setkáváme téměř na každém kroku při řešení ryze praktických problémů. Věřím, že právě MO má zásluhu na tom, když takový nadšený mladý člověk pozná, že matematika může být zdrojem nepopsatelné radosti a uspokojení nad vtipně vyřešeným problémem.

/Č. Losert/

V prvom rade chcem zaželať do ďalších rokov matematickej olympiáde veľa úspechov. Z vlastnej skúsenosti viem, že snáď rozhodujúcu úlohu pri utváraní môjho vzťahu k matematike mali učitelia matematiky, s ktorými som prišiel do styku. Na mojom terajšom pôsobisku prichádzam často do styku so študentmi, z ktorých budú po skončení školy učitelia matematiky. Je medzi nimi veľa takých, o ktorých si myslím, že u svojích budúcich žiakov budú vedieť vytvárať správny vzťah k matematike. Podľa mojho názoru, ak chceme, aby sa zvýšila úroveň vyučovania matematiky, je dôležité, aby takýchto učiteľov bolo stále viac.

/P. Mederly/

Korešpondenčný seminár MO na východnom Slovensku

Martín G a v a l e c

Keď spomínam na začiatky nášho seminára, vynára sa mi v myslí Ružínska priehrada na jeseň roku 1976. Mojou úlohou bolo vtedy privítať účastníkov sústredenia, najlepších matematických olympionikov kraja. Tridsať poväčšine známych chlapcov a dievčat hľadelo na mňa v očakávaní. Pocítil som, že toto stretnutie s nimi bude iné, že musí byť iné, než bolo predchádzajúce.

Príčinu možno vyjadriť tromi slovami, či písmenami: tábory mladých matematikov, skrátené TMM. Matematické pionierske tábory prežívali vtedy na Slovensku obdobie vzniku. Úspech prvého TMM Tatranské Mlyny 1975 pod vedením docenta Hejného podnietil v nasledujúcom roku vytvorenie štyroch táborov. Spolu so skupinkou nadšencov z košických vysokých škôl som viedol jeden z nich. Nezabudnuteľná atmosféra TMM, plná aktivity, vtipu a vzájomného porozumenia zaznievala vo mne pod pohľadmi tridsiatich tvárí na Ružíne.

A sústredenie naozaj bolo iné. Siahli sme do zásoby hier, hlavolamov a príkladov, prepracovali sme prednášky a usporiadali sme matematické i nematematické súťaže. Hlavne sa však zmenila psychická klíma sústredenia. Zásada dobrovoľnosti a spolupráce účastníkov s vedúcimi nás nesklamala. Naši mladí priatelia pociťovali novú atmosféru veľmi silne. Večer pred rozchodom bolo všetkým jasné, že s najbližším stretnutím nemôžeme čakať do budúceho roka, že nadšenie pre matematiku, ktoré v tomto kolektíve vzniklo, treba rozvíjať ďalej.

Nastalo obdobie problémov. Len ten, kto niekedy organizoval podobné sústredenie vie, čo to znamená dať dohromady v priebehu školského roka šesť dvoj až trojdňových sústredení. Nič nebolo naplánované - objekty, prednášatelia ani financie. Pomohlo nám mimoriadne porozumenie krajského odboru školstva a zväzu mládeže, pomohlo nadšenie mladých matematikov z prírodovedeckej a zo strojníckej fakulty, pomohlo matematické gymnázium v Košiciach. Sústredenia sa konali, kolektív pracoval a formoval sa.

Zbierali sa skúsenosti a s nimi prišla potreba zmeny. Zásady, ktoré sme vtedy prijali pre rodiaci sa korešpondenčný seminár, platia s malými zmenami dodnes. Seminár sa stal otvoreným pre všetkých záujemcov z radov stredoškolákov a prebieha korešpondenčnou formou. Počet sústredení v roku sa zmenšil na tri, ich dĺžka však vzrástla na päť dní. Účasť na sústredeniach prestala byť automatická, treba si

ju zakaždým vybojovať v korešpondenčnej časti a výsledky krajských kôl sú príspevkami do celkového súčtu bodov. Korešpondenčná časť sústredenia je spoločná pre všetky kategórie s určitým zvýhodnením mladších účastníkov.

Takto, písomným aj osobným stykom, náš kolektív žije naďalej. Prichádzajú noví členovia, ktorí sa so staršími navzájom poznajú podľa mena prv, než sa stretnú. Dlhoroční členovia odchádzajú na vysoké školy, do Košíc, Prahy, Bratislavy, Moskvy, Leningradu. I potom však prichádzajú na sústredenia, pomáhajú vedúcim a stretávajú sa s priateľmi. Tí, ktorí študujú v Košiciach, prevzali takmer úplne vedenie korešpondenčnej časti. Medzi členmi seminára sú aj hostia z iných krajov. Sú veľkým prínosom, bez nich by seminár nebol takým, aký je.

Aký vlastne je východoslovenský korešpondenčný seminár? Počínajúc 25. ročníkom MO v školskom roku 1975/76, bol počet účastníkov z východného Slovenska v celoštátnom kole MO: 1, 2, 6, 8, počet úspešných riešiteľov /resp. víťazov/: 0 /0/, 1 /0/, 2 /2/, 5 /2/. V 28. ročníku sme sa dočkali hneď dvoch medzinárodných reprezentantov. Na MMO vo Veľkej Británii úspešne súťažili štvrták Jozef Jirásek z matematického gymnázia na Šmeralovej ulici v Košiciach a tretiak Ladislav Kubíni gymnázia v Bardejove, obaja členovia seminára od jeho vzniku.

Doterajšie výsledky sú tedy presvedčivé. A plány do budúcnosti? Rozvíjať neustále sa obnovujúci kolektív seminára, udržiavať kontakt s jeho najlepšími absolventami na vysokej a po jej ukončení i kontakty so seminármi v ostatných krajoch. Náš základný cieľ možno sformulovať slovami: vzbudzovať a rozvíjať v mladých ľuďoch citovú klímu priaznivú pre rozvoj tvorivého myslenia. Verím, že vytváraním takejto klímy v seminároch i mimo nich, na školách i na pracoviskách, môžeme podstatne prispieť k rozvoju kultúry našich národov.

Naša pani profesorka
Tamara Marcisová

Veľmi rada využívam príležitosť napísať niekoľko riadkov o svojej stredoškolskej profesorky matematiky - Viere Šimčískovej. Za všetky svoje úspechy v súťaži MO totiž vďačím jej. Na MMO mala viacerých študentov /medzi inými i Petra Hatalu, ktorý získal na IV. MMO druhú cenu/. Nielen ja, ale všetci, ktorých kedy učila /hoci iba niekoľko hodín pri suplovaní/ a s ktorými som o nej hovorila, sme presvedčení, že profesorka Šimčísková bola medzi stredoškolskými profesorami matematiky skutočne mimoriadnym zjavom.

Venovala svoju pozornosť rovnako slabším žiakom ako tým talentovaným, ktorým požičiavala brožúrky "Školy mladých matematikov" a viedla pre nich hodiny nepovinnnej matematiky. Na jej hodinách sa od najlepších po najslabších nikto nikdy v triede nenudil - vedela zamestnať všetkých. Vysvetľovala perfektne - tak, aby v ničom nezostal ani tieň nejasnosti alebo pochybnosti, ako to vlastne má byť. Pokiaľ ide o známkovanie, u nej sme poznali kritéria na kvalitu práce, s akými sme sa dovtedy nestretli. Keď nás v prvom ročníku začala učiť, dala nám hneď na začiatku dôkladnú písomnú previerku z učiva ZDŠ. Priemerná známka triedy z tejto písomky bola štvorka, a to ja som mala ešte 1-. Všetky nedostatky zo ZDŠ v krátkom čase celú triedu doučila popri výklade novej látky. Mala na nás skutočne veľmi vysoké nároky, ale nikto proti tomu nič nenamietal, pretože klasifikovala absolútne spravodlivo. Keďže sa k nám doniesli chýry o jej prísnosti, boli sme veľmi zvedaví, ako bude známkovať. Na jednej z prvých hodín vyvolala spolužiaka a dala mu upravovať akýsi výraz. Mierne pri tom zaváhal, ale nakoniec ho upravil správne. Všetci sme s napätím čakali, akú dostane známku. "Mohol by dostať aj jednotku" - myslela som si, "ale keďže je prísna, asi mu za to váhanie dá dvojku". Profesorka Šimčísková však povedala: "Pomaly počítate - štyri". Neskôr sme však začali dostávať aj dobré známky, ale ona svoje kritériá nezmenila - zmenili sa naše vedomosti a počtárske zručnosti.

Vraťme sa však k práci prof. Šimčískovej v súvislosti s MO. Pomocné príklady k úlohám MO si sama vyhľadávala a pripravovala ešte v časoch, keď túto činnosť neorganizovalo vedenie olympiády. V škole na chodbe visela nástenka MO, na ktorej vyznačovala, kto už odovzdal koľko prípravných úloh a úloh I. kola MO a vždy na nej boli čerstvé

správy. Riešenia úloh MO, ktoré sme doma urobili, sme jej museli najskôr odovzdať "na nečisto", dôkladne ich prezrela, vyznačila chyby a až vtedy, keď žiadnych nenašla, napísala: "Píšte načisto!" Musela mať s nami skutočne nekonečnú trpezlivosť. Napr. riešiť rovnice s parametrom, ktoré sa vyskytli v kategórii C, keď sme boli v prvom ročníku, nám vôbec nedovolila, kým s nami neprebrala, ako má také riešenie vyzeráť. Povedala, že by sme tam narobili toľko chýb, že to vôbec nemá zmysel - a mala pravdu.

Sama osobne za to, že som sa na MMO dostala už v druhom ročníku SVŠ vďaka taktiež výlučne jej. Naša trieda bola síce špecializovaná so zameraním na počítače a mali sme preto viac hodín matematiky ako iné triedy, ale zďaleka nebolo toho toľko, aby sme už v druhom ročníku stačili na tretiakov. K tomu nám chýbali predovšetkým vedomosti z geometrie. Preto prof. Šimčísková prebrala toto učivo s nami vopred na hodinách nepovinnej matematiky, aby sme sa MO v kategórii A mohli zúčastniť o rok skôr. Len vďaka tomu sa stalo, že som sa už v druhom ročníku dostala na VI. MMO do Moskvy, kde som získala druhú cenu.

Celostátní kolo ve Strakonických

Lada V a ň a t o v á

V r. 1974 byl jihočeský kraj pověřen organizací celostátního kola MO. Funkci předsedkyně KVMO jsem vykonávala krátce, v práci mi vydatně pomáhal s. Alois Terš z KPÚ České Budějovice. Poněvadž tento obětavý pracovník odešel do důchodu, zůstala starost o organizaci hlavně na mně.

Rozhodla jsem se uspořádat celou akci v místě svého bydliště v Strakonících. Po řadě potíží se mi hlavně zásluhou OV KSČ především s. Macha podařilo zajistit celý program.

Stalo se již tradicí, že pro účastníky MO se při této příležitosti pořádá výlet s návštěvou různých pamětihodností kraje. Protože celostátní kolo se koná vždy začátkem května, rozhodla jsem se uspořádat výlet na Šumavu autobusem a spojit jej s procházkou podél řeky Vydry z Antiglu na Čenkovu pilu. Tuto cestu jsem zvolila proto, že

nabízí účastníkům mnoho romantické krásy a není při tom fyzicky náročná. Počasí nám přálo, bylo právě jarní povětrí, v lese sem tam leželo ještě trochu sněhu. Ten mne právě inspiroval k akci, která měla trochu rozveselit vážnost sboru matematiků. Začala jsem po nich házet sněhové koule, ostatní se přidávali, a tak se z toho vyvinula menší koulovačka. Ta pak přispěla k dobré náladě všech. Rozjařenost u mne trvala až do chvíle, kdy jsem zjistila již téměř před cílem naší procházky, že nemám zlatý prsten, který jsem dostala od manžela k 20. výročí naší svatby a velmi ráda jsem ho nosila. Několik kolegů se nabídl, že mi pomohou prsten hledat. Vydali jsme se na zpáteční cestu, ale prsten jsme samozřejmě nenašli. Malá naděje, že jsem prsten zapomněla doma, se úplně rozplynula hned po návratu.

Ztráty a zapomenutí jsou pro naše povolání legendární a náleží k nám jako nemoc z povolání a ani já nejsem žádnou výjimkou. Přesto tato ztráta mi pokazila uspokojení ze zdárného průběhu celé akce a ani velmi příznivé hodnocení všech zúčastněných ji nemohlo plně vyvážit. Všichni mne upřímně litovali, předsedkyně KVMO východoslovenského kraje z Košic s. Kveta Hončarivová mne neustále přesvědčovala, abych na Šumavu jela znovu, že prsten určitě najdu.

V sobotu po obědě, když všichni účastníci odjeli, svěřila jsem se svým dvěma synům. I když se to zdálo úplně nesmyslné, hledat prsten na Šumavě, usnesli jsme se hlavně pod vlivem s. Hončarivové, že se na Šumavu rozjedeme. Zaparkovali jsme na místě, kde nás v pátek autobus vypustil ze svých útrob, a vyšli jsme po stopách výpravy. Došli jsme k prvním sněhovým ostrůvkům a mladší syn Jan se rozhodl vzít trochu sněhu, abychom ho dem sněhové koule zjistili, v jaké šíři od cesty by prsten mohl být. Při prvním nabrání se ve sněhu objevil malý kroužek. Začal opatrně hrabat a najednou mi ukázal ztracený prsten. Skákala jsem radostí a hlasitě jákala. Starší syn Dušan komentoval mé projevy větou: "Mami, takovou radost jsem ještě nikdy u nikoho neviděl".

Napsala jsem členům ÚVMO o svém šťastném nálezu a všichni měli radost se mnou, moc hezký dopis mi napsal tehdejší předseda ÚVMO s. doc. J. Vyšín.

Poznámky vrstevníka matematické olympiády

Jiří V i n á r e k

Matematika je jedním z předmětů, s nimiž se člověk setkává již od prvních školních let. Obvykle ještě nezná slova "fyzika", "biologie", "chemie" apod., ale má již na vysvědčení známku z matematiky. A je-li tato známka jednička, je žák patřičně hrdý, že umí počítat a že tedy /podle jeho představ/ ovládá základy matematiky. Zejména při dřívějším pojetí vyučování matematice však mohli mnozí žáci základní školy získat dojem, že matematika spočívá pouze v řešení rovnic, případně slovních úloh na rovnice, a v konstrukci geometrických útvarů /především trojúhelníků/ z daných prvků.

Matematická olympiáda má velkou zásluhu v tom, že již po třicet let poskytuje žákům a studentům možnost řešit náročnější /a přitom zajímavější/ úlohy a rozvíjí tak logické a matematické myšlení. Dnes již existuje olympiáda fyzikální, chemická, biologická a existují i další předmětové soutěže. Avšak historický primát patří matematické olympiádě, která přivedla řadu studentů na matematickou dráhu.

Narodil jsem se právě v roce založení MO, a proto jsem si dovolil označit se za "vrstevníka" MO. V době, kdy jsem přišel do 8. třídy ZDŠ, byla již MO soutěží zaběhanou. Řešení úloh MO bylo pro mne vhodným zpestřením posledních dvou let ZDŠ. Navíc jsem za odměnu dostal mj. brožury s příklady MO, kde byly i řešené úlohy vyšších kategorií spolu se jmény nejlepších řešitelů kategorie A. Mezi nimi bylo po několik let jméno Bohuše Siváka ze Zvolena. Značně mě pak překvapilo, když jsem zjistil, že tento borec je z mého ročníku a že jezdil na mezinárodní olympiády již jako žák ZDŠ.

Na střední škole je již větší konkurence a mnozí úspěšní olympionici ze základní školy zjistí, že zdaleka nejsou tak výjimečnými matematiky, jak se domnívali. Chce-li se řešitel MO udržet nadále ve špičce, musí již olympiádě věnovat více času. Je nesmírnou zásluhou všech středoškolských profesorů matematiky, kteří věnují studentům a řešitelům MO velkou péči, aby co nejvíce z nich udrželi v matematické dráze. Osobně bych chtěl ocenit práci prof. Emila Caldy /nyní odborného asistenta MFF UK/, který na SVVŠ na třídě W. Piecka v Praze 2 /nyní Gymnázium W. Piecka/ vychoval řadu úspěšných olympioniků, z nichž mnozí jsou dnes činnými matematiky. V matematicky zaměřených třídách dbal vždy na to, aby se nikdo nenudil - nejnadanějším stu-

dentům dával např. řešit úlohy ze sovětského časopisu Kvant.

Velký vliv na prohloubení znalostí i tréninku v řešení příkladů mají semináře pro matematické olympioniky, které obětavě vedli a vedou pracovníci vysokých škol i vědeckých institucí. /Z doby svého studia na střední škole vzpomínám na kvalitní semináře vedené doc. Vyšínem, dr. Zítkem, prof. Fiedlerem, dr. Fukou, dr. Sedláčkem aj./ Třebaže hlavním cílem těchto seminářů je "výcvik" řešitelů MO, rozvíjejí logické myšlení a schopnost řešit matematické problémy a umožňují olympionikům nahlédnout i za hranice středoškolské matematiky.

Účastník matematické olympiády nejenže rozšiřuje svůj matematický obzor, ale při účasti ve vyšších kolech se podívá na jiné školy ve svém městě či okrese, případně i do vysokoškolské posluchárny, kam bude za několik let chodit na přednášky. /Občas v těchto neznámých budovách i zabloudí, jak se mně to jednou stalo při 2. kole ve škole Nad štolou v Praze 7, kde jsem se s několika dalšími účastníky zdržel diskusí o řešení úloh. Hlavní vchod zatím zavřeli a my jsme museli vylézt oknem ze šatny./

Celostátní kolo je pak již určitou společenskou událostí, kdy se vedle řešení úloh zúčastní řešitelé i kulturního představení a výletu. Rozhodne-li se olympionik zůstat věrný matematice a studovat ji pak na vysoké škole, je mile překvapen, když se při zápisu ve vysokoškolské posluchárně setká se známými tvářemi - účastníky 3. kola MO.

Pro osm nejlepších olympioniků je každoročně odměnou účast na mezinárodní matematické olympiádě. Členství v družstvu MMO však znamená i velkou důvěru k účastníkovi, že nezkłame po stránce odborné ani společenské reprezentace ČSSR. A konkurence je čím dál větší! Vždy si proto s radostí přečtu o novém úspěchu našeho družstva a jsem rád, že bilance posledních let je již lepší než v roce 25. výročí založení MO. Kéž by získalo naše družstvo v příštích letech ještě lepší pozici!

Matematictí olympionici mohou přispět k popularizaci matematiky mezi širokou veřejností. V posledních letech jsou stále častěji nejúspěšnější z nich podrobováni rozhovorům v tisku a občas se objevují i na televizní obrazovce /třebaže opravdovým olympionikům sportovním pochopitelně v popularitě konkurovat nemohou/. Velkým problémem je účast matematických olympioniků v soutěžích, kde na řešení úloh je mnohem kratší doba /byť jde o úlohy lehčí s formulací srozumitelnou televizním divákům/.

Vzpomínám na televizní pořad "Setkání s talenty", v němž sou-

těžili čtyři nejlepší olympionici 3. kola MO a kde jsem se podílel na výběru úloh a působil jako porotce. Musely se vybrat úlohy, kde mohou olympionici v krátké době přijít na vtipné /a široké divácké veřejnosti srozumitelné/ řešení. Jedna z úloh zněla takto: "Máte k dispozici 10 sáčků po 10 mincích. V jednom sáčku jsou všechny mince falešné. Pravá mince váží 10 gramů, falešná 11 gramů. Zjistěte jedním vážením na vahách se závažími, v kterém sáčku jsou falešné mince." Řešení je velice jednoduché - vzít z prvního sáčku jednu minci, z druhého dvě atd. až z desátého všech deset. Kdyby byly všechny mince pravé, měly by vybrané mince hmotnost $1 + 2 + \dots + 10 = 55$ gramů. Počet gramů nad 55 při vážení udává číslo sáčku, v němž jsou falešné mince. Ten, kdo přijde na uvedený nápad, vyřeší úlohu bez dlouhého počítání v krátké době, ale bez vtipu se s ní může potýkat dlouho. V televizním studiu tehdy předloženou úlohu vyřešili dva ze čtyř zkušených olympioniků, ale vzhledem ke krátkosti doby na řešení to není nic divného. Snad si z tohoto pořadu /jakož i z jiných/ diváci vzali to, že matematictí olympionici jsou lidé, a ne počítací stroje. K tomu ostatně přispělo i vystoupení bývalé účastnice MMO Aleny Vencovské, která přišla do televizního studia se psem, kterého dostala doma za umístění mezi vítězi MO.

V závěru bych chtěl popřát, aby matematická olympiáda dále upevnila své postavení na školách i v nejširší veřejnosti, aby pomohla vychovat řadu nových nadějných matematiků a aby i po třicítce byla stále mladá.

Z venkovského řešitele tajemníkem ústředního výboru

Antonín V r b a

S olympiádou jsem se setkal v 8. třídě. Otec, který byl učitelem, přišel domů s matematickou úlohou, jež tehdy vyvolávala ve sborovně o přestávkách vášnivé spory bez ohledu na aprobaci. Snad každý, kdo se do ní pustil, dostal jiný výsledek. Měl se spočítat povrch kváдру proděravělého několika navzájem se pronikajícími otvory. Úloha mě zaujala a hned večer jsem ji vyřešil. Výsledek se pochopitelně lišil od všech učitelských. Když se pak ukázalo, že je dobře, rázem jsem se proslavil a byl jsem vyzván k účasti v matematické olympiádě.

Šlo tehdy totiž o jednu z úloh kategorie D /dnešní Z/. Olympiáda mě bavila, v dalších letech jsem postupně dělal kategorie C, B, a A. Šel jsem na to důsledně a v plzeňském antikvariátu si koupil několik starších olympiádních ročenek. Naučil jsem se z nich hlavně formulovat řešení. V mých pracech se to pak hemžilo obraty jako "budiž dále bez újmy na obecnosti $a \leq b$ ", "rozlišujeme tři navzájem se vylučující případy", "úmluva: necht' velká písmena značí body, nebude-li řečeno jinak" apod. To pochopitelně dělalo dobrý dojem na opravovatele a deprimovalo soupeře. Není divu, že jsem se v krajském měřítku dobře umisťoval a získával hodnotné ceny. Volejbalový míč už dávno dosloužil, batoh už dávno ztratil barvu vlivem horského úpalu a lijádků, v kožené aktovce už jen přechováváme domácí náradí. Jen logaritmické pravítko je stále jako nové, toho jsem moc neužil. V kategorii A jsem se pak dostal až do celostátního kola. Taktika "raději méně, ale dobře", která se osvědčila v krajských kolech, stačila však jen k umístění v hlavním peletonu úspěšných řešitelů. Soutěžil jsem i v celostátním kole fyzikální olympiády, ale výsledek jsem se dodnes nedozvěděl, asi jsem nevyhrál. Bylo to pěkné, tenkrát v Praze, pro venkovského studenta, zejména na taneční zábavu na přírodním parketu Slovanského ostrova, které jsme s několika neukázněnými kolegy dali tehdy přednost před hromadnou návštěvou Armádního divadla, rád vzpomínám. Ředitelé naší jedenáctiletky má nominace do celostátního kola dvou olympiád také potěšila. To jsem posledního června, už jako svobodný člověk s maturitním vysvědčením dávno doma v šupletí, jel na kole kolem sokolovny, kde na hřišti zrovna probíhal obvyklý ceremoniál slavnostního ukončení školního roku. Sentiment způsobil, že jsem tam zabočil a chvíli dojatě z povzdálí sledoval nešťastníky, kteří to ještě neměli za sebou jako my. Ředitel mne spatřil, pohotově zaimprovizoval a dal mne ve svém slavnostním projevu nastoupenému žactvu za příklad. Na tu ostudu nikdy nezapomenu. Ujížděl jsem honem zase pryč, ale žactvo poslechlo a příklad si vzalo. Jeden mrňous ze třetí třídy to za sedm let dotáhl až na olympiádu mezinárodní, byl to ředitelův syn.

Když jsem byl ve třetím ročníku matematicko-fyzikální fakulty, všiml jsem si na nástěnce vývěsky, že Matematický ústav ČSAV hledá pomocnou vědeckou sílu. Přihlásil jsem se a byl jsem přijat, jak se pak ukázalo, přímo do kuchyně, kde se vaří olympiáda. Formality se mnou vyřídil legendární průkopník olympiády prof. Zelinka a až do konce studia jsem pomáhal dalším členům předsednictva, dr. Sedláčkovi a prof. Fiedlerovi. Vyhledával jsem úlohy ze zahraničních časopi-

sů, prohlížel korektury apod. V Matematickém ústavu jsem také vypracoval diplomovou práci, pak absolvoval aspiranturu a stal se jeho zaměstnancem. O olympiádu jsem se stále zajímal a pravidelně jsem přednášel na soustředěních. Když se r. 1971 konala mezinárodní olympiáda v Žilině, působil jsem tam jako jeden z tzv. koordinátorů při úpravě klasifikace. Vzpomínám si, jak v době mezi vybráním úloh a soutěží vozili celou skupinu vedoucích delegací a rozhodčích po výletech, abychom byli izolováni od soutěžících. Bylo to zajímavé pozorovat mentalitu jednotlivých národů. Nejvíce na mne zapůsobili Francouzi neumdlévajícím smyslem pro vyvolávání zmatků a Angličané příslovečnou zdvořilostí. Když jsme byli na Lomnickém štítě, poslali mě pro Angličany, kteří se stále kochali vyhlídkou, ačkoliv se už odcházelo na prohlídku observatoře. Sebral jsem své chatrné znalosti angličtiny a - samozřejmě nevhodným způsobem - jsem pravil k Angličanům: "Let's go to the observatory." "Oh, that's a good idea", odpověděli rezervovaně a pokračovali v rozhlížení.

Na podzim 1978 jsem se stal jednatelem ústředního výboru matematické olympiády spolu s dr. Bočkem z matematicko-fyzikální fakulty, který tuto funkci převzal o rok dříve. /Shodou okolností byl dr. Boček první učitel z fakulty, se kterým jsem se blíže seznámil - jako začínající asistent nás ráno vyháněl z postelí na chmelové brigádě./ Hned, jak jsme zabalili a rozeslali 120 balíků s komentáři k úlohám I. kola, vyvstal před námi další problém. Veškerá korespondence a další písemnosti byly generacemi předchozích jednatelů pečlivě ukládány do dvou velkých registratur. Právě nastala situace, že se tam už nic nevešlo. Bylo nutno celý archiv přebrat a nepotřebné papíry zlikvidovat. Ve sběrně tenkrát jistě vysoko překročili plán. Mezi strohými úředními a matematickými materiály jsme našli i několik hezkých dopisů, které si nezasloužily, aby skončily ve stoupě. Rád bych se závěrem se čtenáři rozdělil o potěšení, které jsme při jejich čtení měli. /V prvním dopise jsem pozměnil jméno i adresu./

Milý UVMO!

Tak, ako sa deň začína úsvitom, aj ja začínam srdečným pozdravom. Volám sa Viera Mokrošová a som žiačka 9. C triedy ZDŠ v Churani-
ciach. Ako povolanie som si vybrala učiteľku do materskej škôlky. Chcela by som si urobiť matematickú olympiádu, hoci dobre viem, že hlavne slovné príklady mi robia ťažkosti, pretože nemám vôbec dobrý úsudok a naučiť sa nedajú. Tuším, že neurobím ani príklady I. a nie ešte II. a III. kola. Prosím Vás o dobrú radu. Čo mi odporúčate, aby som to zvládla? Nehnevajte sa, že sa Vás toľko vypytujem, ale mala

by som ešte niekoľko otázok. Je možné urobiť matematickú olympiádu tak, aby som nemusela robiť skúšky z matematiky? Sú súťažné príklady kategórie Z také isté v tomto roku, ako v minulom? Za priaznivé odpovede Vám vopred ďakujem.

Moja presná adresa !??

Viera Mokrošová

Churanice č. d. 217, okres Topoľčany, SSR

Paličkovým písmom:

VIERA MOKROŠOVÁ

CHURANICE Č. D. 217, OKRES TOPOĽČANY, SSR

Tit.

Ústřední výbor matematické olympiády

Žitná 25

Praha

V příloze dovoluji si zaslat dvojmo návrh úloh pro M. O. Jsem praktický stavební inženýr 78 roků starý a získal jsem již za Rakouska v roce 1911 a 1912 ceny za řešení úloh v příloze Časopisu českých matematiků a fysiků určených pro středoškoláky.

K první úloze mám zvláštní osobní vztah: V roce asi 1913 byla tato úloha toliko konstruktivní předmětem jednoho příkladu obsaženého v příloze k Časopisu. Pokoušel jsem se /septimán/ velmi úsilovně o její řešení, avšak bez úspěchu. Výsledek jsem neměl možnost shlédnout, ale vedl jsem úlohu stále v patrnosti. Pamatuji se, že jsme se s jedním profesorem matematiky ze Štýrského Hradce v kavernách na italské frontě o této úloze bavili, avšak než jsem se vrátil z předsunuté polní stráže, došlo k plnému zásahu, při kterém zmíněný profesor zahynul /prý během počítání/. Když jsem v roce 1919 absolvoval zvláštní kurs projektivní geometrie u prof. Kadeřávka na pražské technice, byl to opět můj zkušební příklad, který jsem na podkladě teorie involucí vyřešil. Neznal jsem zklaubení tohoto postupu s analytickým řešením, a to se mi právě předkládaným řešením podařilo.

Druhý příklad byl vzat z technické praxe. Jde o řešení složeného oblouku /smýčky/. Asi podobně jsme vytyčovali a vyměřovali Telgártský tunel u Švermova. Jsem jeden z posledních žijících inženýrů, kteří se na této stavbě podíleli. Stavba byla námětem pro více románů a filmů. Při prorážce tunelu jsme oslavili vpravdě triumf inženýrského umění - při setkání činila směrová diference 3 mm a výšková 4 mm. Ve skutečnosti byl veden polygon po povrchu. Záleželo hlavně

na přesném měření délek. Měřilo se 5m latěmi. Docílili jsme diferenci $\pm 1,5$ cm na 300 m délky. Vyžadovalo to zručnost a trpělivost.

Svémi návrhy příkladů chci se přiblížit životu kolem nás. Přitom sleduji vývoj matematiky. Jako stařec jsem si osvojil počítání nerovností, parametrické rovnice, matematickou indukci, zpřesněnou matematickou analýsu a rozšířený vektorový počet, jak se dnes středoškolská matematika vyvinula od dob za Rakouska.

Znamenám se s pozdravem

Ing. Ladislav Blumenschein, Brno

Malé zamyšlení nad masovostí v matematické olympiádě

Bohdan Z e l i n k a

Tempora mutantur et nos mutamur in illis. Ze studentů, kteří před pětadvaceti lety smolili svá řešení úloh Matematické olympiády, se stali vážní dospělí mužové a ženy. Někteří z nich zůstali této soutěži věrni; samozřejmě dnes již neřeší, ale rádí červenou tužkou v oněch pracně sesmolených řešeních. Jsem jedním z nich; proto bych zde chtěl sdělit čtenářům některé úvahy, které mě při tom napadají.

Když takový opravovatel dostane první zásilku řešení z krajského kola, nechce věřit svým očím. Ten objemný balík, to že jsou řešení pouze jediné úlohy z jediné kategorie? Vždyť je toho nejméně padesát kusů! Opravovatel maně vzpomene na svá olympijská léta, kdy měl v krajském kole ve své kategorii pouhé čtyři soupeře. Pravda, tehdy bylo jiné krajské zřízení a kraje byly menší; desetkrát menší však přece nebyly. Že by za těch pětadvacet let tak prudce stouply matematické schopnosti mladých lidí? A ještě si soukromě povzdechne: To bude tedy práce!

Takto uvažuje opravovatel, dokud nezačne v řešeních listovat. Pak přijde další překvapení. Většina papírů obsahuje pouze více či méně krasopisně opsaný text úlohy. U řady dalších jsou pod tímto textem ještě nějaké nesmyslné čmáry. A těch správných řešení není o mnoho více než pět. Situace je tedy v podstatě stejná jako před těmi pětadvaceti lety; tehdy bývalo jen asi pět řešitelů krajského kola, zato však všichni nebo skoro všichni úspěšní.

Je tu nasnadě otázka: Jak je možné, že taková spousta úspěšných řešitelů prvního kola v krajském kole tak beznadějně pohoří? To je už další otázka po oné otázce, proč těch úspěšných řešitelů prvního kola je tak mnoho.

Domnívám se, že podstata věci je ve snaze o masovost za každou cenu. Je-li učitel matematiky na střední škole hodnocen podle toho, kolik jeho žáků úspěšně zvládne Matematickou olympiádu, nezbyvá mu zřejmě nic jiného než své žáky do krajského kola "dostřkat". Nechci rozhodně učitele obviňovat z toho, že by snad řešení byla jejich dílem a nikoliv žáků, ale přesto si myslím, že při řešení s o u t ě ž n í c h úloh by se nemělo pomáhat vůbec. Rozhodně to neznamená, že by učitel neměl povzbuzovat u žáků zájem o matematiku a těm nadaným se věnovat. Například šachisté mají také své trenéry. Ti je učí hrát šach, ale bylo by rozhodně nepřipustné, kdyby jim při turnaji radili, jak mají táhnout. U jiných sportů by to přirovnání bylo ještě absurdnější; představte si trenéra skoku vysokého, který by svého svěřence přehazoval přes laťku!

Je totiž podstatný rozdíl mezi soutěží a zkouškou. Například u maturity může klidně učitel zkoušenému pomáhat natolik, že zkoušený dostane výbornou, ačkoliv jinak by se mu to stěží podařilo. Budiž mu ta výborná přána; nikomu není ukřivděno, ti, kteří zvládli maturitu na výbornou bez pomoci, tím nejsou ošizeni. Jestliže se však v soutěži někdo umístí jako první ne zcela zaslouženě, znamená to, že někdo jiný nezaslouženě o první místo přijde. Lze namítnout, že v prvním kole Matematické olympiády se ještě o prvním místě nerozhoduje; v zájmu sportovního ducha však by i zde měl pracovat každý samostatně. Vždyť nedokáže-li někdo vlastní silou uspět v prvním kole, co je mu platné, že se dostane do krajského kola? Má tam snad naději na úspěch?

Vyskytují se i případy, že řada řešitelů postoupivších do krajského kola se prostě nedostaví bez řádné omluvy. Působí to pak potíže pořadatelům, kteří například objednájí zbytečně mnoho občerstvení. A může se snad mluvit o vážném zájmu o matematiku u lidí, kterým je líto obětovat sobotu na cestu /zdarma/ do místa konání krajského kola? Zřejmě tito lidé mají oprávněnou nedůvěru ve své schopnosti, a to přes svůj úspěch v prvním kole.

V souvislosti s tím bych uvedl ještě jeden příběh, který se udál před lety. Jistá pobočka JČSMF začala pořádat matematické semináře pro studenty středních škol příslušného kraje. První z těchto seminářů překonal veškeré očekávání. Místnost praskala ve švech, ži-

dlí bylo podstatně méně než účastníků. Vedoucí semináře byl však příliš zkušeným pedagogem na to, aby nad tím jásal. Dobře si všiml řady znuděných tváří a po krátkém úvodu ohlásil přestávku. Přitom prohlásil, že ti, které seminář nebaví, mohou během přestávky po anglicku, to jest bez loučení a omlouvání, odejít. Po přestávce se náhle ukázalo, že židle bohatě stačí pro všechny. A začal seminář, jaký má být - s poměrně malým počtem účastníků, kteří však zato byli všichni nadšenými zájemci o matematiku. Brzy se také ukázala příčina původního "zájmu" - na jisté škole v zájmu masovosti byl seminář prostě prohlášen za povinný pro všechny studenty nejvyššího ročníku. To byly tedy ty davy, které před přestávkou zaplňovaly místnost a o přestávce rychle zmizely.

Něco podobného se zřejmě projevuje dnes i u Matematické olympiády. Na druhé straně ovšem víme o stále stoupajícím významu matematiky pro společenský pokrok a tedy i o stále rostoucí potřebě matematicky vzdělaných lidí. Co tedy dělat?

Zájem studentů o matematiku by se povzbuzovat měl a učitel, který jej zdárně povzbuzuje, by měl být za to oceňován. Otázkou je, co má být měřítkem tohoto zájmu. Nemyslím, že by to byly výsledky Matematické olympiády. V ní totiž nerozhoduje jen zájem, ale především nadání. Jestliže žáci toto nadání nemají, pak neuspějí a sebelepší učitel na tom p o c t i v ý m způsobem nemůže nic změnit. Naopak talentovaný žák může mít úspěch, i když má špatného učitele. Tím se také Matematická olympiáda liší od jiných školních olympiád, kde ve značné míře rozhoduje píle při osvojování mimoučebnicových poznatků.

Matematika jako královna věd má dnes na gymnáziích jedno privilegium - kromě jejích povinných hodin existuje i předmět zvaný nepovinná matematika. Zatím co jiné předměty mají své zájmové kroužky, u matematiky je zájmový kroužek povýšen na nepovinný předmět, z něhož je na vysvědčení řádná známka a který je učitelům započítán do úvazku. Je to správné a odpovídá to mimořádně velkému společenskému významu této vědy.

A toto je ten pravý prostředek k povzbuzování zájmu studentů o matematiku. Měřítkem tohoto zájmu pak může být počet žáků navštěvujících tento předmět a jejich výsledky v něm. Ovšem i zde je třeba se varovat nějakého tlaku na žáky a nemračit se příliš, pokud se jich nebude hlásit příliš mnoho - nezapomínejme, že matematika je pro mnohé žáky postrachem a že by si neradi kazili vysvědčení špatnou známkou z nepovinného předmětu. V žádném případě by účast či neúčast žáka v nepovinné matematice neměla ovlivnit jeho známku z povinné matematiky.

Zájemci o matematiku nechť tedy navštěvují hodiny nepovinné matematiky a jen ti nejlepší z nich nechť se pouštějí do Matematické olympiády. Ti ostatní ať se spíše pustí do jiné olympiády, kde rozhoduje více zájem a píle. A ten, kdo se dá do Matematické olympiády, ať pracuje zcela samostatně a nelká nad případným neúspěchem - soutěž je soutěž. Ať se Matematická olympiáda stane skutečně olympiádou, to jest soutěží těch skutečně nejlepších! Pamatujme na slova Jana Amose Komenského:

"Kdo na sebe bere úkol nad své síly, nutně se unaví a pak podlehne nebo ustane na posměch jiným."

Matematická gymnázia

Jan V y š í n

V názvu článku by vlastně mělo stát "třídy gymnázia se zaměřením na matematiku". Ale domluvme se, že budeme užívat pro stručnost označení, které stojí v záhlaví. Snad je tato zkratka i trochu oprávněná, neboť třídy se zaměřením na matematiku dávají celému gymnáziu jistý specifický ráz: jejich předním úkolem totiž je rozvíjení matematických talentů, kteří jsou na nich soustřeďováni. Byly doby po osvobození naší vlasti, kdy se nesmělo hovořit o zvláštním nadání žáka; jeho vzdělávání bylo usměrňováno jen jeho zájmy. Toto falešné, nepravdivé hledisko jsme už dávno opustili. Dnes tak jako v Sovětském svazu a ostatních socialistických zemích uznáváme zvláštní nadání žáků pro různé oblasti, a to jak teoretické tak praktické práce právě tak, jako odedávna samozřejmě uznáváme různé fyzické dispozice v tělesné výchově a sportu. Máme však tak jako v jiných předmětech zjistit matematické nadání a účelně je rozvíjet. Oba tyto problémy souvisejí s tím, že jasně nevíme, co vlastně matematické nadání je. Beze sporu je to složitá kombinace mnoha složek, které jsou zastoupeny v různé míře; proto také dispozice, zvaná nadání pro matematiku, je různé kvantity a kvality. Jednota čs. matematiků a fyziků věnovala otázce nadání hodně času a pozornosti: jde zejména o to, v kterém věku mají být nadání žáci systematicky podchyceni a jakým způsobem. Soutěže zřejmě přitom hrají důležitou roli; proto se vynakládá tolik práce na naši celostátní řízenou soutěž - matematickou olympiádu. Je ovšem rozdíl mezi oběma olympiádami: domácí /zal. 1951/ a mezinárodní /zal. 1959/. Domácí ukazuje /ukazovala/ spíše stav vyučování matematice v našem státě, mezinárodní ukazuje péči státu o špičkové talenty.

V šedesátých, sedmdesátých letech klesala úroveň našeho družstva na mezinárodních olympiádách, i když do reprezentačního družstva byli vysíláni nejlepší účastníci domácí olympiády. Hledaly se příčiny; naši žáci přece nejsou méně schopní než žáci z jiných zemí. Ale ukázalo se, že za hranicemi vlastně bojují dobře připravení profesionálové s amatéry, tj. školsky připravenými žáky. Naším žákům chyběla řešitelská praxe a zkušenosti. Byl to nerovný boj. Veškeré pomocné akce pro účastníky matematické olympiády byly malá pomoc; mimo to na vedlejší akce mají žáci málo času. Usoudili jsme, že v naší situaci nic nemůže nahradit intenzivní, systematické vyučování ve specializovaných třídách, organizované a prováděné s vybranými

nadanými žáky a učiteli.

Ministerstva školství obou republik projevila tehdy před r. 1974 vzácné porozumění a po jistém malém průzkumu v zahraničí zřídila na čtyřech gymnáziích třídy se zaměřením na matematiku. Byla to gymnázia v Praze 2, třída W. Piecka /nyní gymnázium W. Piecka/, gymnázium M. Koperníka v Bílovci, gymnázium A. Markuše v Bratislavě na třídě Červenej armády a gymnázium v Košicích na třídě Šmeralově. Vybudování speciální výuky matematiky na těchto ústavech se děje v rámci resortního úkolu a organizací byl pověřen Výzkumný ústav pedagogický /dr. J. Müllerová/ a funkcí vedoucího koordinátorů a autorů učebních textů, kteří měli na starosti odbornou stránku výuky, byl jmenován prof. M. Fiedler. Všechna čtyři gymnázia otevřela první ročníky ve školním roce 1974/75, první maturity se na nich konaly v r. 1978.

Nebudeme podrobně vykládat o organizační stránce, uvedeme jen několik poznámek. Matematická gymnázia jsou vlastně pokusná, byla vybavena některými zařízeními, která už předem se zdála užitečná a slibovala dobré výsledky. Jiná věc ovšem je, jak všechna zařízení byla a mohla být v plném rozsahu realizována. Tak výběr žáků do 1. ročníků se děje na podkladě přijímací zkoušky, jejíž částí je i zkouška talentová. Obsah talentové zkoušky /jaká se koná např. ve speciálních školách jazykových, tělovýchovných a jinde/ není dosud uspokojivě stanoven z důvodů, o kterých jsme hovořili hned na začátku. Často se pronikavě rozcházejí výsledky talentové zkoušky s výsledky zkoušek z jiných předmětů; jde o jednostranně nadané jedince, pro jejichž posuzování se bude muset vypracovat speciální měřítko. Ale naopak někde ve snaze naplnit třídy se přijímají i žáci méně schopní.

Matematická gymnázia byla koncipována jako školy internátní, se zvláštním učebním plánem, osnovami a ovšem i učebními texty. Nynější učební plány jsou příliš atomizovány, obsahují řadu jednohodinových a dvouhodinových předmětů. Jsou to pravděpodobně dozvuky tradiční zásady, že všechno, co je "důležité", musí být v plánu "obligátní". Moderní charakter vzdělání nefotografického bude asi vyžadovat v mnohem větším měřítku zařazení alternativních předmětů.

V matematických gymnáziích si mají žáci zvykat na vysokoškolské seminární formy práce. Každé z gymnázií má patronátní fakultu univerzity /Karlovy, Palackého, Komenského a Šafárikovy/. Učitelé matematiky těchto univerzit částečně externě vyučují, vedou seminář a přednášejí o aplikacích matematiky. Styk a výměnu zkušeností mezi matematickými gymnázii organizuje VÚP v Praze. Ačkoli vyučování na matema-

tických gymnáziích už probíhá 6 let, stále ještě se nevyzulo z dětských střevíčků a má dost nedostatků. Osnovy se během jejich platnosti úplně nedodrží, výuka je někde příliš maximalistická, učební texty byly vypracovány a vydány často opožděně, seminářů se občas používá k přípravě na maturitní zkoušky, kapacita internátů v některých případech není postačující, vyučující profesori nemají optimální podmínky, nebylo dosud organizováno systematické sledování dalšího běhu života a pracovního uplatnění abiturientů matematických gymnázií.

Co jsem tu namátkou uvedl, jsou některé - doufám že přechodné a ne zásadní - zápory v práci matematických gymnázií; proti nim stojí klady, které lze stručně shrnout jedinou větou: tyto školy beze sporu přispívají k zvýšení matematické vzdělanosti středoškolské mládeže. Zatím není jasné, zda je to taková matematická vzdělanost, jakou bude potřebovat technická civilizace, nebo zda je to vzdělanost teoretického charakteru, k jaké směřují olympiády. Jsou to asi osnovy a skripta, která aspoň prozatím vedou cestou druhou, ovšem osnovy i učební texty se budou v nejbližší době předělávat. Je rozumné, že kurikulum matematických tříd je ovlivňováno jejich profesory, kteří jsou zváni na společné porady.

Vraťme se ke kladům práce matematických gymnázií. I když jejich působení je prozatím velmi krátké, je jejich vliv na výsledky matematických olympiád domácích i mezinárodních velmi patrný. Takové aktivity, jako jsou např. exkurze do matematického pavilonu fakulty bratislavské univerzity nebo vydávání studentského matematického časopisu v Bílovci aj. ukazují na samostatné, netradiční způsoby práce. Ze zpráv ředitelů je vidět, že žáci matematických gymnázií nejsou vychováni jako skleníkové primadony, ale že jsou vedeni k angažovanosti a otázky socialistické společnosti.

Veškerá práce na vybudování matematických gymnázií se řídí od počátku harmonogramem. Etapu do r. 1980 lze pokládat za pokusnou. Ve školním roce 1980/81 došlo k některým změnám. Byl zaveden předmět programování a posílen počet hodin fyziky. Byl zrušen předmět aplikovaná matematika a jeho učivo přešlo do učiva matematiky. Ve Slovenské socialistické republice vznikla na gymnázium v Žilině - zatím od 1. ročníku - další třída se zaměřením na matematiku. Počínaje r. 1981 se budou zpracovávat nové učební texty. Přitom se bude přihlížet ke všem poznatkům a zkušenostem z první etapy. Přihlédně se k rozsáhlosti dosavadních textů, uplatní se prvky světonázorové výchovy i marxistická zásada různých přístupů při řešení jedné úlohy, metoda problémového vyučování, motivování aj.

Zatím ještě nemůžeme uvést návrh nové osnovy. Pro porovnání uvádíme výpis matematických předmětů v učebních plánech z r. 1974 a 1980:

P ř e d m ě t	Plán z r. 1974				Plán z r. 1980			
Povinná matematika	6	6	5	6	6	6	6	6
Matematický seminář	0	0	2	2	0	0	0	3
Deskriptivní geom.	0	0	2	2	0	0	0	0
Aplikovaná matematika	0	0	0	2	0	0	0	0
Nepovinná matematika	2	2	2	2	2	2	2	2
Programování	0	0	0	0	0	0	2	2
Fyzika	3	3	4	4	3	4	4	4

Korespondenční seminář ÚV MO

Antonín V r b a

Už před mnoha lety vznikl v Praze a později v Bratislavě seminář pro mimořádně úspěšné řešitele z těchto měst, kteří vysoko vynikali nad průměr a běžné olympijské úlohy pro ně byly příliš snadné. Na těchto seminářích se pod vedením pracovníků vysokých škol a vědeckých ústavů řeší úlohy z elementární matematiky vysokého stupně obtížnosti a pracuje v nich každý rok 10 - 15 účastníků. Bezprostředním motivem pro jejich vznik byla snaha po kvalitní přípravě na mezinárodní matematickou olympiádu.

Mimořádní talenti ovšem žijí nejen v metropolích - bývají však handicapováni tím, že často nemají kontakt s jinými kolegy této úrovně a chybějí jim podněty k dalšímu rozvoji. Proto byl ve školním roce 1974/75 založen tzv. korespondenční seminář určený - řekněme - mimořádným venkovským talentům. Zprvu byl organizován tak, že vždy určitý pracovník připravil sérii obtížných úloh, rozeslal ji účastníkům a došlá řešení pak zhodnotil. Časem se však ukázalo, že pro pracovníka, který určité téma připravil, bylo neúnosné pečlivě prohlédnout několik set řešení jednotlivých úloh celé série, takže zpětná vazba někdy fungovala s velkým zpožděním a nedostatečně. Od školního roku 1978/79 byl proto systém zreorganizován. Recenzováním řešení se pravidelně zabývá tým složený převážně z mladých pracovníků a aspirantů MÚ ČSAV, mezi nimi i bývalí vynikající olympionici. Každý si vždy vezme na starost jednu úlohu, došlá řešení doprovází svými poznámkami a připraví koncept textu, v němž je úloha vyřešena a ze všech stran podrobně komentována. Účastník dostane během měsíce zpět svá opravená řešení spolu s rozmnoženým komentářem.

V současné době je k účasti v korespondenčním semináři zváno každý rok 40 - 50 studentů, účastní se pak asi polovina; sérií bývá během školního roku pět zpravidla po sedmi úlohách. Je potěšitelné sledovat vzrůst kvality řešení mnohých účastníků během průběhu semináře, zejména pokud jde o formulování myšlenek. Jak účastníci, tak pracovníci MO vesměs hodnotí korespondenční seminář ÚV MO vysoce kladně. Připomeňme ještě, že korespondenční semináře standardní obtížnosti s poněkud jinými cíli pořádají i některé KV MO. Zejména korespondenční seminář ve Východoslovenském kraji je velmi úspěšný. Je mu věnován samostatný příspěvek M. Gavalce.

Uvádíme znění všech úloh prvních šesti ročníků korespondenčního semináře ÚV MO. Zvláště upozorňujeme na úlohu 3.7 ročníku 1979/80. Tu se nepodařilo vyřešit žádnému účastníku a v publikaci, odkud byla převzata, je, jak se ukázalo, vyřešena chybně. Ani v okruhu vedení semináře nenašla řešitele, pátrání v literatuře bylo také bezvýsledné. Představuje tedy otevřený problém, a to velmi zajímavý. Zvláště cenným materiálem pro práci matematických kroužků jsou tři série úloh z kombinatoriky ročníku 1976/77. Úlohy jsou komponovány tak, že druhá série jsou vlastně návody k úlohám první série určené řešitelům kteří neuspěli, třetí série pak napovídá ještě více.

1974/75

Číselná teória (zostavil doc. dr. J. Moravčík, CSc.).

1. Určte posledné dve cifry čísla $77^{77} - 77^7$

2. Vyšetrite, pre ktoré cifry a ($0 \leq a \leq 9$, celé číslo) možno nejaké číslo

$$\frac{n(n+1)}{2} > 10$$

(n prír. číslo) zapísať v desiatkovej sústave len ciframi a .

3. Nájdite všetky prirodzené čísla x , pre ktoré platí

$$\left[\sqrt[3]{1} \right] + \left[\sqrt[3]{2} \right] + \dots + \left[\sqrt[3]{x^3 - 1} \right] = 400.$$

4. Dokážte, že pre každé prvočíslo p je číslo

$$\underbrace{11 \dots 1}_{p} \underbrace{22 \dots 2}_{p} \underbrace{233 \dots 3}_{p} \dots \underbrace{99 \dots 9}_{p} - 123456789$$

deliteľné číslom p .

5. Nech a, b, m, n sú prirodzené čísla, $d(a, b) = 1$, $a > 1$. Dokážte, že ak $a^m + b^m$ je deliteľné číslom $a^n + b^n$, potom m je deliteľné číslom n .

6. Nech a, b sú prirodzené čísla, pre ktoré platí: $0 \leq b < a$. Nech ďalej $z_n = an + b$, $n = 0, 1, 2, \dots$, je daná postupnosť prirodzených čísel taká, že pre nejaké m je $d(z_m, a) = d$. Presvedčte sa, či potom pre všetky n platí $d(z_n, a) = d$.

7. Nech $P(x)$ je mnohočlen s celočíselnými koeficientami. Dokážte, že ak číslo d je deliteľom každého z čísel $a_n = 3^n + P(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, potom d je mocnina čísla 2 s celočíselným ex-

ponentom.

8. Dokážte, že súčet $\sum_{k=0}^s \binom{n}{2k+1} (1973)^k$, $s = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, je pre každé prirodzené n deliteľný číslom 2^{n-1} .

9. Dokážte, že číslo $\sum_{k=1}^n \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ nie je pre žiadne prirodzené číslo n deliteľné číslom 5.

10. Nech $x_n = (p + \sqrt{q})^n - [(p + \sqrt{q})^n]$ pre $n = 1, 2, \dots$. Dokážte, že ak p, q sú prirodzené čísla vyhovujúce nerovnosti $p - 1 < \sqrt{q} < p$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Poznámka: Symbol $[a]$ v úlohách 3, 8 a 10 znamená celú časť čísla a , t.j. celé číslo c také, že $c \leq a < c + 1$.

Stereometria (zostavili prof. dr. M. Fiedler, DrSc. a J. Zemánek).

1. Ak je odchýlka každých dvoch stien štvorstena ostrý uhol, potom všetky steny štvorstena sú ostrouhlé trojuholníky. Dokážte.

2. Dokážte, že zo šiestich vnútorných uhlov, ktoré zvierajú steny štvorstena, sú vždy aspoň tri ostré.

3. Body $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú všetky vrcholy konvexného mnohostena, $d = \max A_i A_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Dokážte, že vzdialenosť každých dvoch bodov tohto telesa je menšia alebo rovná d .

4. V priestore je daný bod P a množina bodov M taká, že jej prienik s každou rovinou prechádzajúcou bodom P je kruh. Dokážte, že M je guľa.

5. V priestore je daná konečná množina bodov taká, že každá priamka prechádzajúca dvoma jej bodmi obsahuje ešte aspoň jeden ďalší bod tejto množiny. Dokážte, že všetky body danej množiny ležia v jednej priamke.

6. Nech M je množina bodov v priestore taká, že ku každému bodu priestoru možno v množine M nájsť práve jeden najvzdialenejší bod. Dokážte, že množina M je jednobodová.

Rovnice a sústavy rovníc (zostavil dr. J. Hojdar).

1. Riešte rovnicu $a(x^2 - a^2) = b(x^2 - b^2)$, kde a, b sú dané reálne čísla. Má táto rovnica vždy reálne riešenie?

2. Určte všetky reálne riešenia sústavy rovníc $x - |y + 1| = 1$, $x^2 + y = 10$.

3. Riešte sústavu rovníc $\cos x + \frac{1}{\cos x} = 9 \operatorname{tg} y$,

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \cotg y,$$

kde x, y sú neznáme.

4. V rovnici $(m+2)^2 x^2 - 2(m^3 - 4)x + n = 0$ s neznámou x sú m, n reálne čísla.

a) Určte všetky čísla m, n , pre ktoré má daná rovnica jediný koreň.

b) Stanovte všetky čísla m, n , pre ktoré sú korene danej rovnice navzájom prevrátené čísla.

5. Určte všetky reálne čísla p , pre ktoré rovnica

$$x^2 - 2(p+4)x + p^2 + 6p = 0$$

s neznámou x má:

a) oba korene rôzne a záporné;

b) jeden koreň záporný, druhý nezáporný.

6. Riešte sústavu rovníc

$$x + y + z = a,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$

$$xy = z^2,$$

kde a, b sú dané čísla.

Udajte podmienky, ktorým musia vyhovovať čísla a, b , aby čísla x, y, z vyhovujúce danej sústave boli kladné a navzájom rôzne.

7. Je daná rovnica $x^2 + 2px + 2p^2 - 1 = 0$ s neznámou x , kde p je reálne číslo. Nájdite všetky čísla p , pre ktoré má daná rovnica reálne korene, z ktorých žiadny nemá absolútnu hodnotu väčšiu než jedna.

Kombinatorika a kombinatorická geometria (zostavil dr. M. Koman,

CSc.).

1. (úloha o deviatkách) Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre to, aby k danému prirodzenému číslu existoval násobok, ktorý možno v desiatkovej sústave napísať len pomocou deviatok, tj. má tvar 999 ... 99.

2. (úloha o prirodzených číslach) Zistite, či je medzi ľubovoľnými za sebou nasledujúcimi desiatimi prirodzenými číslami vždy aspoň jedno nesúdeliteľné so zostávajúcimi číslami.

3. (úloha o letiskách) Na každom z 12 letísk štartuje lietadlo

a odlietava na najbližšie susedné letisko. Vzdialenosti medzi letiskami sú navzájom rôzne čísla. Určte maximálny počet lietadiel, ktoré môžu pristáť na jednom letisku.

4. (úloha o lodiach) Na voľnom mori plávajú rozptýlene tri lode L_1, L_2, L_3 , ktoré majú rovnakú maximálnu rýchlosť. Na admirálov rozkaz sa majú čo najskôr stretnúť na jednom mieste. Určte najvýhodnejšiu polohu miesta stretnutia S .

Poznámka: Pokúste sa úlohu riešiť tiež pre prípad väčšieho počtu lodí alebo pre prípad rôznych maximálnych rýchlostí.

5. (úloha o červenej ceste) Štvorec C je rozdelený na $4n^2$ zhodných štvorcových polí, ktoré sú biele a čierne, pričom každé dve polia súmerne položené podľa stredu S štvorca C sú rôznej farby. Strany polí zafarbíme červene práve vtedy, keď patria rôzne zafarbeným poliam. Dokážte, že existuje červená cesta spájajúca niektoré dva body ležiace na protiľahlých stranách štvorca C .

6. (1. úloha o šachovnici) Všetky polia ľubovoľnej šachovnice $n \times n$ sú očíslované nezápornými reálnymi číslami tak, že číslo ľubovoľného poľa sa rovná aritmetickému priemeru čísel napísaných na všetkých susedných poliach. Charakterizujte všetky prípustné očíslovania. (Pojem susedného poľa možno chápať dvoma rôznymi spôsobmi.)

7. (2. úloha o šachovnici) Všetky polia šachovnice so 100×100 poliami sú očíslované prirodzenými číslami tak, že čísla na každých dvoch susedných poliach sa líšia najviac o 50. Zistite, či môžu byť všetky polia šachovnice očíslované navzájom rôznymi číslami.

8. (úloha o koľajniciach vláčika) Dráhu pre elektrický vláčik možno zostaviť z úsekov, ktoré majú tvar štvrtkružnice. Bola postavená okružná rovinná dráha (bez križovatiek a nadjazdov). Pri zvolenom zmysle obiehania tvorí n_1 dielcov ľavotočivú zákrutu a n_2 dielcov pravotočivú zákrutu. Dokážte, že čísla n_1 a n_2 sú párne a číslo $n_1 + n_2$ je násobkom čísla 4.

9. (úloha o n bodoch) V rovine je daných n ($n > 4$) bodov, z ktorých žiadne tri neležia v priamke. Dokážte, že existuje aspoň $\binom{n-3}{2}$ konvexných štvrouholníkov, ktorých vrcholmi sú niektoré z daných bodov.

10. (úloha o n -uholníku) Konvexný n -uholník P_n neobsahuje žiadne tri uhlopriečky, ktoré by prechádzali jediným spoločným vnútorným bodom. Koľko trojuholníkov ohraničujú jeho uhlopriečky?

Poznámka: Pokúste sa túto úlohu riešiť pre štvoruholníky; stačí odhad.

Funkcie a mnohočleny (zostavil doc. dr. J. Moravčík, CSc.).

1. Nech f je funkcia definovaná pre všetky reálne x predpisom $f(x) = \frac{1-x^2}{x^6+4}$. Zistite, či funkcia f nadobúda najväčšiu a najmenšiu hodnotu a v kladnom prípade ich nájdite.

2. Kvadratický trojčlen $f(x) = ax^2 + bx + c$ je taký, že rovnica $f(x) = x$ nemá reálne korene. Dokážte, že rovnica $f(f(x)) = x$ tiež nemá reálne korene.

3. Nájdite prirodzené čísla p, q také, aby koreňmi mnohočlenov $P(x) = x^2 - qx + p$ a $Q(x) = x^2 - px + q$ boli len prirodzené čísla.

4. Dokážte, že mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými koeficientami, ktorého absolútna hodnota v troch rôznych celých číslach sa rovná 1, nemá celočíselné korene.

5. Nájdite najmenšie reálne číslo A také, že pre každý kvadratický trojčlen $f(x)$, pre ktorý platí $|f(x)| \leq 1$, ak $0 \leq x \leq 1$, je splnená nerovnosť $f'(0) \leq A$.

6. Určte reálne čísla a, b, c také, že $|f(x)| = |ax^2 + bx + c| \leq 1$ pre $|x| \leq 1$ a súčet $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ je maximálny.

7. Nech f je reálna funkcia reálnej premennej x taká, že nie je identicky rovná nule a pre každé reálne čísla x, y platí: $f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$. Nájdite všetky také funkcie f .

8. Nájdite všetky usporiadané dvojice f, g funkcií reálnej premennej x , ktoré sú definované pre všetky reálne čísla x okrem $-1; 0; 1$ a pre ktoré v každom bode x ich definičného oboru platí: $x f(x) - \frac{1}{x} g(\frac{1}{x}) = 1, \frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x}) = x^2 g(x)$.

9. Nech $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$. Dokážte, že pre každé $x \in (0; \pi)$ platí: $f(x) > 0$.

10. Nech f a g sú reálne funkcie definované v intervale $(-\infty, \infty)$, pre ktoré platí $f(x+y) + f(x-y) = 2 f(x) \cdot g(y)$ pri každom reálnom x a y . Dokážte, že ak f nie je identicky rovná 0 a $|f(x)| \leq 1$ pre každé x , potom tiež $|g(y)| \leq 1$ pre každé y .

Číselná teória (zostavil M. Kaukič).

1. Nech a, b sú celé čísla také, že $a^2 + b^2$ je deliteľné číslom 21. Potom $a^2 + b^2$ je deliteľné tiež číslom 441. Dokážte.

2. Súčet piatich celých čísel je rovný nule. Dokážte, že súčet piatich mocnín týchto čísel je deliteľný číslom 15.

3. Nájdite všetky dvojice celých čísel x, y , ktoré vyhovujú rovnici $x^2 - y^3 = 1$.

4. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, z ktorého zámenou jeho niektorej cifry nemôžeme dostať prvočíslo. (Skúste riešiť analogickú úlohu pre dve cifry.)

5. Nájdite všetky prirodzené čísla n tej vlastnosti, že ciferný súčet čísla n^2 je rovný 4.

6. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel tvaru $m^2 + n^2$, kde m, n sú prirodzené čísla. (Návod: Každé prvočíslo tvaru $4k + 1$ možno aspoň jedným spôsobom rozložiť na súčet druhých mocnín dvoch prirodzených čísel.)

7. Je dané $a_1 = 1, a_k = \left[\sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}} \right]$; určte a_{1975} . ($[c]$ znamená celú časť čísla c .)

8. Nech $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť pozostávajúca zo všetkých prvočísel. Nech $S(k)$ je súčet všetkých súčinov pozostávajúcich z rôznych prvočísel menších najviac rovných p_k , k prirodzené číslo.

Dokážte, že v rozklade čísla $S(k) + 1$ na prvočinitele sa vyskytuje aspoň k prvočísel.

9. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel taká, že prirodzené číslo k je jej členom práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný siedmimi. Nájdite

$$\max_{1 \leq n < \infty} (a_n - a_{n-1}).$$

10. Označme na číselnej osi všetky čísla tvaru $81m + 100n$ (m, n prirodzené čísla) zelenou farbou a ostatné celé čísla červenou farbou. Nájdite na číselnej osi taký bod x , aby ľubovoľné dva celočíselné body symetrické vzhľadom na x boli zafarbené rôznou farbou.

Geometria (zostavili prof. dr. M. Fiedler, DrSc. a J. Zemánek).

1. V priestore je daná množina bodov, ktorej pravouhlými priemetmi do dvoch rovín sú kruhy. Dokážte, že tieto kruhy majú rovnaké polomery.

2. V štvorci je daných deväť bodov, z ktorých žiadne tri neležia v jednej priamke. Dokážte, že tri z týchto bodov sú vrcholmi trojuholníka, ktorého obsah neprevyšuje $\frac{1}{8}$ obsahu štvorca.

3. V priestore sú dané štyri polpriamky p_1, p_2, p_3, p_4 so spoločným začiatočným bodom, ktoré neležia v žiadnom polpriestore. Dokážte, že platí $\angle p_1 p_2 + \angle p_2 p_3 + \angle p_3 p_4 + \angle p_4 p_1 > 360^\circ$.

4. V rovine je dané nekonečne mnoho bodov, ktorých všetky vzájomné vzdialenosti sú prirodzené čísla. Dokážte, že všetky tieto body ležia v jednej priamke.

5. V rovine sú dané dve bodové množiny M_1, M_2 , z ktorých každá má párny počet prvkov a žiadne tri z bodov $M_1 \cup M_2$ neležia v jednej priamke. Dokážte, že v tejto rovine existuje priamka, ktorá neprechádza žiadnym z daných bodov a taká, že po oboch jej stranách leží práve polovica bodov každej z oboch daných množín.

6. Dokážte, že počet hrán mnohostena nemôže byť rovný siedmim.

Funkcie a mnohočleny (vybral doc. dr. J. Moravčík, CSc.).

1. Pre funkciu $f(x) = ax^2 + bx + c$ v intervale $\langle -1; 1 \rangle$ platí: $|f(x)| \leq 1$. Potom pre funkciu $g(x) = cx^2 + bx + a$ v tom istom intervale platí: $|g(x)| \leq 2$. Dokážte.

2. Dokážte, že funkcia $P(x) = x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ má v každom bode $x \in (-\infty, \infty)$ kladnú hodnotu.

3. Nech $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ je mnohočlen s celočíselnými koeficientami. Nech a, b, c, d sú navzájom rôzne celé čísla, pre ktoré platí: $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Dokážte, že neexistuje celé číslo k tak, že $P(k) = 8$.

4. Je daný mnohočlen $P(x)$ s a) prirodzenými koeficientami, b) celými koeficientami. Označme a_n ciferný súčet čísla $P(n)$ v dekadickom zápise pre každé prirodzené číslo n . Dokážte, že existuje číslo, ktoré sa v postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyskytuje nekonečne mnoho ráz.

5. Postupnosť mnohočlenov $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná reku-

rentne takto: $P_0(x) = 2$, $P_1(x) = x$, $P_{n+1}(x) = x P_n(x) - P_{n-1}(x)$,
 $n = 1, 2, \dots$. Dokážte, že existujú reálne čísla a, b, c tak, že
 pre každé prirodzené číslo n platí:

$$(x^2 - 4) [P_n^2(x) - 4] = [a P_{n+1}(x) + b P_n(x) + c P_{n-1}(x)]^2.$$

6. Dokážte, že ak funkcia $f(x) = \sin x + \cos ax$ je perio-
 dická, potom a je racionálne číslo.

7. Nájdite najmenšiu kladnú hodnotu súčtu $x + y$, ak
 $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2$.

8. Je dané číslo $\alpha > 1$. Dokážte, že neexistuje funkcia
 $f(x) \neq \text{konšt.}$ definovaná pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$ tak, aby pre
 každé reálne a, b platilo $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|^\alpha$.

9. Funkcia f definovaná na intervale $\langle 0; 1 \rangle$ má nasledujú-
 ce vlastnosti: Pre všetky $x \in \langle 0; 1 \rangle$ je $f(x) \geq 0$, $f(1) = 1$. Pre
 každé x_1, x_2 také, že $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 1$ platí
 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.

a) Pre každé $x \in \langle 0; 1 \rangle$ platí: $f(x) \leq 2x$. Dokážte.

b) Platí pre každú funkciu f uvedených vlastností tiež
 $f(x) \leq 1,9x$ v intervale $\langle 0; 1 \rangle$?

10. Nájdite všetky spojité reálne funkcie f definované na
 intervale $\langle 1; \infty \rangle$, ktoré vyhovujú rovnici

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y}$$

pre všetky $x, y \in \langle 1; \infty \rangle$.

Kombinatorika (zostavil dr. M. Koman, CSc.).

1. Známa hra "námočná bitka" sa hrá na štvorcoch zložených
 z $N = 10 \times 10$ jednotkových štvorčekov. Lietadlová loď je znázorne-
 ná ako obdĺžnik zložený zo 4 štvorčekov (obdĺžnik 1×4). Môže byť
 umiestená na ľubovoľnom mieste.

Určte najmenší počet "striel", ktoré zabezpečia a) zasiahnu-
 tie, b) potopenie lietadlovej lode. (Predpokládame, že na hracej
 ploche je len lietadlová loď.)

Doplňok. Riešte úlohu pre ľubovoľnú štvorcovú hraciu plochu
 zloženú z $N = k \times k$ štvorčekov ($k \geq 4$).

2. Určte najväčší počet kráľov, ktorých možno rozmiestniť na
 štvorcovej šachovnici zloženej z N^2 polí tak, aby každý kráľ suse-
 dil nanajvýš s jedným ďalším kráľom.

Doplňok. Riešte analogickú úlohu pre iné šachové figúry.

3. Usporiadajte množinu všetkých prirodzených čísel $1, 2, 3, \dots, N$ tak, aby aritmetický priemer žiadnych dvoch čísel sa nerovnal niektorému číslu umiestnenému medzi nimi. Napríklad pre $N = 8$ je prípustné poradie $1, 5, 3, 7, 8, 4, 6, 2$ a neprípustné poradie $1, 5, 8, 7, 6, 3, 2, 4$ (napr. $6 = (8 + 4) : 2$).

4. Zistite, či existuje taká postupnosť P prirodzených čísel (nemusia to byť všetky prirodzené čísla), že každé prirodzené číslo sa dá vyjadriť ako rozdiel práve dvoch členov postupnosti P .

5. V štvorcovej tabuľke s n^2 poliami je zapísaných n^2 čísel (tieto čísla sú tedy usporiadané do tzv. štvorcovej matice), ktorých súčet je kladné číslo. Dokážte, že stĺpce tabuľky možno permutovať tak, aby súčet čísel na uhlopriečke vedúcej z ľavého dolného rohu do pravého horného rohu bol tiež kladný.

6. V každom poli pravouholníkovej tabuľky $m \times n$ je zapísané niektoré prirodzené číslo (tj. celé kladné číslo). Sú dovolené dva druhy operácií:

a) Zdvojenie všetkých čísel niektorého riadku.

b) Odčítanie jedničky od všetkých čísel niektorého stĺpca.

Dokážte, že po konečnom počte operácií možno vždy získať tabuľku, v ktorej všetky čísla sú nuly.

7. V rovine je daných niekoľko červených a niekoľko modrých bodov. Niektoré z nich sú spojené úsečkami. Bod nazveme "labilným", ak viac než polovica bodov, s ktorými je spojený úsečkami, má inú farbu než je farba uvažovaného bodu. Ak existuje aspoň jeden labilný bod, zvolíme niektorý z nich a zmeníme jeho farbu (červenú na modrú alebo obrátene). Dokážte, že po konečnom počte krokov nezostane žiadny labilný bod.

8. V rovine je daných n červených a n modrých bodov, z ktorých žiadne tri neležia v priamke. Dokážte, že je vždy možno zostrojiť n úsečiek, ktoré spájajú dvojice bodov rôznych farieb a sú po dvoch disjunktné.

9. Je daný konvexný mnohoúhelník M . a) Pre každú trojicu po sebe idúcich vrcholov mnohoúhelníka M zostrojíme kružnicu prechádzajúcu týmito bodmi. Z nich vyberieme tú, ktorá má najväčší polomer. Dokážte, že mnohoúhelník M je časťou kruhu ohraničeného touto kružnicou.

b) Pre každú trojicu po sebe idúcich strán mnohoúhelníka M

zostrojíme kružnicu, ktorá sa dotýka týchto troch úsečiek. Z nich vyberieme tú, ktorá má najmenší polomer. Dokážte, že celá táto kružnica je časťou mnohoúhelníka M .

10. Je daný konvexný mnohoúhelník, ktorého časťou nie je žiadny trojuholník s obsahom 1. Dokážte, že tento mnohoúhelník možno umiestniť do trojuholníka s obsahom 4.

Rovnice a sústavy rovníc (vybral dr. J. Hojdar):

1. Nech a, b, c sú navzájom rôzne reálne čísla. Potom rovnica

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

má vždy reálne riešenie. Dokážte.

2. Rozhodnite, pre ktoré x má zmysel rovnica

$$\log_x 10 + \log_x 100 + \log_x 1000 = \frac{\log_{10} x^3}{1 + \log_{10} x}$$

a nájdite všetky jej riešenia.

3. Určte všetky reálne riešenia rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} = x - p,$$

kde p je dané reálne číslo. Urobte diskusiu vzhľadom na číslo p .

4. Riešte rovnicu

$$x^2 - 6(k-1)x + 9(k^2 - 2) = 0$$

s neznámou x , ak k je dané reálne číslo.

5. Sú dané rovnice

$$x^2 + px + 1 = 0,$$

$$x^2 + x + p = 0,$$

kde p je dané reálne číslo. Určte všetky čísla p také, pre ktoré obe rovnice majú spoločný reálny koreň.

6. Sú dané dve kvadratické rovnice

$$x^2 + ax + b = 0,$$

$$x^2 + cx + d = 0$$

s reálnymi koeficientami. Nájdite nutné a postačujúce podmienky medzi koeficientami daných rovníc pre to, aby obe rovnice mali jeden spoločný kladný koreň a aby zostávajúci koreň prvej rovnice bol väčší než zostávajúci koreň druhej rovnice.

7. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 2x - 1} = p,$$

kde p je dané reálne číslo. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na číslo p .

8. Je daná sústava rovníc $|1 - x| = a$, $|x - y| = b$, $|y - 1| = c$, kde a, b, c sú dané prirodzené čísla. Dokážte, že sústava má buď dve riešenia alebo je neriešiteľná. Určte podmienku riešiteľnosti.

1976/77

Kombinatorika (zostavil dr. M. Koman, CSc.).

1.1. Kocka s hranou k (k je celé kladné číslo) je rozdelená na k^3 jednotkových kociek. Zistite, či možno všetky jednotkové kocky zafarbiť červenou a modrou farbou tak, aby vždy každá kocka susedila práve s dvoma ďalšími kockami tej istej farby. (Kocky sú susedné, ak majú spoločnú stenu.)

1.2. V nekonečnej sieti zhodných štvorcov je zafarbených práve n štvorcov čiernou farbou, ostatné sú biele. To je tzv. nultá generácia. Z k -tej generácie ($k = 0, 1, 2, \dots$) vznikne $(k + 1)$ -tá generácia týmto prefarbením: Každý štvorec $[a, b]$ (a je číslo stĺpca, b číslo riadku, v ktorom štvorec leží) z $(k + 1)$ -tej generácie má rovnakú farbu ako väčšina zo štvorcov $[a, b]$, $[a + 1, b]$, $[a, b + 1]$ v k -tej generácii.

a) Dokážte, že v istej generácii zostanú len biele štvorce.

b) Dokážte, že v n -tej generácii sú vždy všetky štvorce biele.

c) Charakterizujte všetky nulté generácie s n čiernymi štvorcami, pre ktoré sa samé biele štvorce po prvý raz vyskytnú v n -tej generácii.

1.3. Hra. Na stole je daných N gúl, z ktorých je a bielych, b červených a c modrých ($N = a + b + c$). Ťahom rozumieme túto výmenu: Zvolíme ľubovoľné 2 gule rôznych farieb, ktoré vymeníme za jedinou guľu zostávajúcej farby. (Napríklad pre $a = 3$, $b = 5$, $c = 8$ môžeme zvoliť guľu bielu a modrú, ktoré odstránime a namiesto nich pridáme červenú guľu. Vznikne nová pozícia $a_1 = 2$, $b_1 = 6$, $c_1 = 7$.) Partia končí, keď už nemožno vykonať žiadnu výmenu.

a) Dokážte, že vo všetkých partiách, ktoré končia tým, že na

stole zostane jediná guľa, má táto guľa vždy rovnakú farbu.

b) Určte farbu poslednej guľe v závislosti na číslach N, a, b, c .

1.4. Vrcholy pravidelného N -uholníka ($N > 3$) sú ohodnotené číslami $+1$ a -1 . (Každému vrcholu je priradené práve jedno z týchto čísel.) Cieľom je určiť súčin všetkých ohodnotení. Je dovolené klásť otázky: Čomu sa rovná súčin ohodnotení zvolených m vrcholov ($N \geq 2m$).

Určte najmenší možný počet P otázok, ktorý dovoľuje určiť hľadaný súčin všetkých ohodnotení.

1.5. Na množine všetkých postupností zložených z 3000 cifier, z ktorých každá je 1 alebo 2, sú dovolené výmeny ľubovoľných dvoch za sebou nasledujúcich trojíc. Napr. postupnosť

112 122 212 11....

možno zmeniť na postupnosť novú

112 212 122 11.... .

Dve postupnosti nazveme ekvivalentnými, ak jednu možno konečným počtom dovolených výmen zmeniť na druhú.

Určte počet všetkých neekvivalentných postupností.

1.6. Dokážte, že v nekonečnom desatinnom rozvoji Ludolfovho čísla π možno pre každé prirodzené číslo n nesúdeliteľné s číslom 10 nájsť aspoň jeden taký úsek, že prirodzené číslo zapísané v danom poradí číslicami z tohto úseku je deliteľné číslom n .

Napr. pre $n = 17$ je jeden taký úsek v zápise čísla

3, 141 592 653 ,,,

podčiarknutý.

1.7. Medzi všetkými n -cifernými číslami ($n \geq 2$), v ktorých zápise se nevyskytuje nula, určte také číslo, aby rozdiel tohto čísla a jeho ciferného súčinu bol čo najväčší.

1.8. Je daný ľubovoľný mnohočlen k -teho stupňa

$$(1) \quad a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$$

s nezápornými celočíselnými koeficientami $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Postupnosť funkčných hodnôt mnohočlena (1) pre $n = 0, 1, 2, \dots$ označíme

$$(2) \quad A_0, A_1, A_2, \dots$$

Postupnosť ciferných súčtov všetkých členov postupnosti (2) označíme

(3) $C_0, C_1, C_2, \dots$

Dokážte, že v postupnosti (3) existuje nekonečne mnoho sebe rovných členov.

1.9. Na množine všetkých nezáporných celých čísel je daná operácia ".", ktorá má pre všetky a, b, c nasledujúce vlastnosti:

(1) $a . b = b . c ;$

(2) $a . b = c \Rightarrow b . c = a ;$

(3) $a . b > c \Rightarrow b . c < a$ alebo $a . c < b .$

a) Určte hodnoty $0 . 0; 0 . 1; 1 . 1; 0 . 2.$

b) Dokážte, že pre všetky a platí: $0 . a = a; 1 . a = a + 1$ pre párne $a; 1 . a = a - 1$ pre nepárne $a.$

c) Dokážte, že pre všetky a, b, c platí:

$$a . b = a . c \Rightarrow b = c .$$

d) Určte všetky hodnoty $a . b$ pre $a \leq 7, b \leq 7.$

e) Ukážte, že existuje najviac jedna operácia s vlastnosťami (1) - (3).

f) Ukážte, že taká operácia existuje, a uďte predpis pre výpočet ľubovoľnej hodnoty $a . b.$ Špeciálne vypočítajte $1976 . 366.$

g) Dokážte, že operácia "." je grupovou operáciou na množine všetkých nezáporných celých čísel.

1.10. Je daná ľubovoľná funkcia $y = F(x)$ definovaná pre všetky reálne čísla. Dokážte, že možno určiť také dve funkcie $y = f(x)$ a $y = g(x)$, že

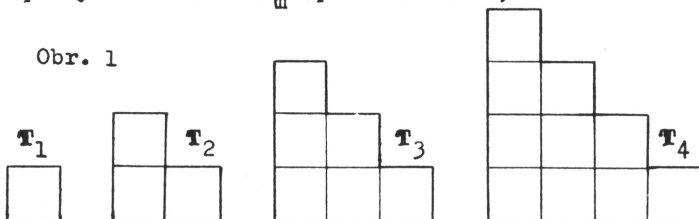
a) $F(x) = f(x) + g(x)$ pre všetky $x;$

b) graf každej z funkcií $y = f(x)$ a $y = g(x)$ je stredove súmerný. (Stredy súmernosti oboch grafov môžu byť rôzne.)

2.1. Zafarbenie vyhovujúce vlastnostiam z úlohy 1.1 možno uskutočniť práve vtedy, keď je k párne číslo. Dokážte.

2.2. Nech všetky čierne štvorce nutej generácie (pozri úlohu 1.2) možno pokryť obrazcom T_m (pozri obr. 1; obrazce možno v sieti

Obr. 1



štvorcov ľubovoľne posúvať, ale nemožno ich otáčať).

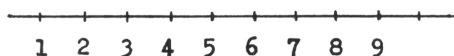
Potom v m -tej generácii sú všetky štvorce biele. Dokážte.

2.3. a) Dokážte tvrdenie z úlohy 1.3a) matematickou indukciou.

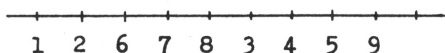
b) Vyhľadajte pre všetky $N \leq 8$ všetky východiskové trojice a, b, c , pre ktoré partie končiacie jedinou guľou dávajú bielu guľu.

2.4. Riešte úlohu 1.4 pre prípad $m = 3$. Dokážte, že v tomto prípade je výsledok: $n = 3k \Rightarrow P = k$; $n = 3k + 1 \Rightarrow P = k + 1$, $n = 3k + 2 \Rightarrow P = k + 2$. (Napr. pre $n = 3k$ musíte dokázať: $P \leq k$ a $P \geq k$.)

2.5. Je daná postupnosť 3000 bodov (napr. obrazy čísel 1, 2, 3, ..., 3000 na číselnej osi; obr. 2).



Obr. 2



Obr. 3

Na tejto postupnosti je dovolená operácia výmeny ľubovoľných dvoch za sebou nasledujúcich trojíc bodov. Napr. z vyššie uvedenej postupnosti môžeme získať postupnosť na obr. 3.

Určte množinu všetkých bodov danej postupnosti, s ktorými možno stotožniť povolenými výmenami ľubovoľne zvolený bod. (Kam možno napr. presunúť z výchozieho postavenia bod 7?)

2.6. Z číslíc 0, 1, 2, ..., 9 je zostavená ľubovoľná konečná postupnosť

(1) $a_1, a_2, a_3, \dots$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n nesúdeliteľné s číslom 10 možno nájsť v postupnosti (1) taký úsek

$$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+m},$$

že prirodzené číslo zapísané týmito číslami v uvedenom poradí je deliteľné číslom n .

2.7. Rozdiel čísla N a jeho ciferného súčinu označme $r(N)$. Sú dané dve päťciferné čísla $A = 99911$, $B = 77799$.

Určte čísla $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ tak, aby boli splnené podmienky:

a) $C_0 = B, C_5 = A$;

b) dvojice susedných čísel C_i, C_{i+1} ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) sa líšia len v jednej číslici;

$$c) r(C_0) \leq r(C_1) \leq r(C_2) \leq r(C_3) \leq r(C_4) \leq r(C_5).$$

2.8. Ciferný súčet čísla

a) $13n + 24$;

b) $2n^2 + 13n + 124$

označíme $C_n (n = 0, 1, 2, \dots)$.

Dokážte, že medzi číslami

(4) $C_0, C_1, C_2, \dots$

možno nájsť nekonečne mnoho čísel, ktoré sa sebe rovnajú.

2.9. Ak operácia "." má vlastnosti (1) - (3) z úlohy 1.9, potom pre všetky kladné a, b platí

$$a . b = c ,$$

kde c je najmenšie nezáporné číslo, ktoré sa nevyskytuje medzi číslami

$$0 . b, 1 . b, 2 . b, \dots, (a - 1) . b,$$

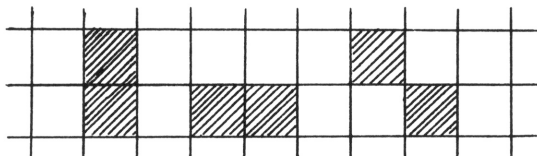
$$a . 0, a . 1, a . 2, \dots, a . (b - 1);$$

dokážte. Dokážte, že obe nerovnosti $a . b > c$, $a . b < c$ vedú k sporu.

2.10. Ukážte, že funkciu $y = |x|$ možno vyjadriť ako súčet dvoch funkcií $y = f(x)$, $y = g(x)$ tak, že každá z funkcií f a g má graf stredovo súmerný.

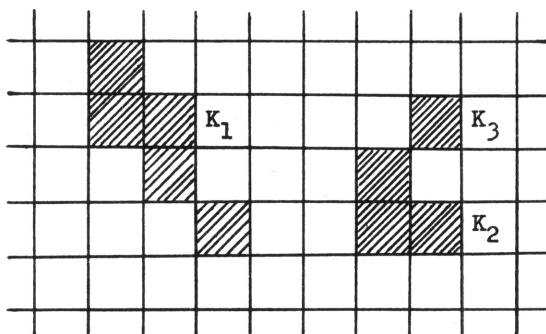
3.1. Ak zafarbenie danej vlastnosti (pozri úlohu 1.1) existuje, potom modrých a červených kociek je párny počet. Dokážte.

3.2. V nekonečnej sieti štvorcov (pozri úlohu 1.2) nazveme dva štvorce susednými práve vtedy, ak nastane niektorá z možností na obr. 4 .



Obr. 4

Množinu M všetkých čiernych štvorcov nultej generácie rozdelíme na komponenty $K_1, K_2, \dots$ tejto vlastnosti: Dva štvorce $A, B \in M$ patria tomu istému komponentu práve vtedy, ak možno dojsť od jedného k druhému postupným prechodom po susedných poliach. Napr. na obr. 5 sa množina čiernych štvorcov rozpadne na tri komponenty.



Obr. 5

Dokážte: Ak množina M obsahujúca n štvorcov sa skladá z jedného komponentu, ktorý nemožno pokryť žiadnym z obrazcov $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ (pozri úlohu 2.2), potom sa v n -tej generácii po prvý raz vyskytnú samé biele štvorce.

3.3. Dokážte (pozri úlohu 1.3):

a) Ak je N párne číslo, potom sú buď všetky a, b, c párne, alebo len jedno párne. V prvom prípade partia nemôže končiť jedinou guľou. V druhom prípade je farba výslednej gule rovnaká ako farba guľí, ktorých je párny počet.

b) Ak je N nepárne číslo, potom sú buď všetky čísla a, b, c nepárne, alebo len jedno je nepárne. V prvom prípade partia nemôže končiť jedinou guľou. V druhom prípade je farba výslednej gule zhodná s farbou guľí, ktorých je nepárny počet.

3.4. Dokážte, že výsledok úlohy 1.4 je tento: Nech $N = m \cdot d + r$, $0 \leq r < m$. Ak je m nepárne číslo, potom $r = 0 \Rightarrow P = d$; $r \neq 0$, r párne $\Rightarrow P = d + 2$; r nepárne $\Rightarrow P = d + 1$.

Ak je m párne číslo, potom $r = 0 \Rightarrow P = d$; $r \neq 0$, r párne $\Rightarrow P = d + 1$, r nepárne číslo $\Rightarrow P$ neexistuje.

3.5. Dokážte: Nech $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ sú dve n -členné ($n \geq 1$) postupnosti číslíc 1 a 2. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby postupnosti α, β boli ekvivalentné (pozri úlohu 1.5), je splnenie týchto podmienok:

$$a_1 + a_4 + a_7 + \dots = b_1 + b_4 + b_7 + \dots,$$

$$a_2 + a_5 + a_8 + \dots = b_2 + b_5 + b_8 + \dots,$$

$$a_3 + a_6 + a_9 + \dots = b_3 + b_6 + b_9 + \dots.$$

3.6. Z číslíc 0, 1, 2, ..., 9 je zostavená ľubovoľná postupnosť

$$(1) \quad a_1, a_2, a_3, \dots$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n možno nájsť medzi $n + 1$ číslami zapísanými v uvedenom poradí číslícami $a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \dots a_{n+1}, a_2 a_3 a_4 \dots a_{n+1}, a_3 a_4 \dots a_{n+1}$, atď., a_{n+1} aspoň dve, ktoré pri delení číslom n dávajú ten istý zvyšok.

3.7. Hľadané číslo (pozri úlohu 1.7) má tvar

$$A = 999 \dots 9 \text{ lll } \dots \text{ l }.$$

Určte počet deviatok a počet jedničiek a ukážte, že $r(A)$ (pozri úlohu 2.7) je najväčšie možné číslo, tj. pre ľubovoľné n -ciferné číslo B , v ktorého dekadickom zápise

$$B = b_n b_{n-1} \dots b_3 b_2 b_1$$

nie sú žiadne nuly a $B \neq A$, je $r(A) > r(B)$. Dokážte! (Použite napr. postup naznačený v úlohe 2.7.)

3.8. Dve čísla M, N nazveme podobnými, ak po vyškrtnutí núl v dekadických zápisoch oboch čísel dostaneme to isté číslo. (Např. 3 074, 3 700 40 sú podobné čísla.)

Dokážte, že medzi funkčnými hodnotami mnohočlenov

$$a) 13n + 24 ;$$

$$b) 2n^2 + 13n + 124$$

pre $n = 0, 1, 2, \dots$ je nekonečne mnoho navzájom podobných čísel.

3.9. Zostavte si tabuľku operácie "." pre všetky $a \leq 7$, $b \leq 7$ použitím výsledku úlohy 2.9. Všetky čísla v tejto tabuľke vyjadrite v dvojkovej sústave. Vyjde např.

$$3 \cdot 5 = 6 \quad \text{čiže} \quad (11)_2 \cdot (101)_2 = (110)_2.$$

Na základe tabuľky vyslovte hypotézu o možnosti výpočtu hodnoty $c = a \cdot b$, ak sú a, b vyjadrené v dvojkovej sústave. Hypotézu dokážte.

3.10. Ukážte, že funkciu $y = |x|$ možno vyjadriť ako súčet dvoch funkcií $y = f(x)$ a $y = g(x)$ tak, že

a) graf funkcie f je stredovo súmerný podľa bodu $[0, 0]$ a graf funkcie g je stredovo súmerný podľa bodu $[1, 0]$.

b) Pre $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je $f(x) = |x|$ a $g(x) = 0$.

Načrtnite grafy funkcií f a g v intervale $\langle -3, 3 \rangle$.

Algebra (zostavil RNDr. M. Šisler, CSc.).

1. Riešte rovnicu

$$\frac{a_1 - a_2}{(x - a_1)(x - a_2)} + \frac{a_2 - a_3}{(x - a_2)(x - a_3)} + \dots + \frac{a_n - a_1}{(x - a_n)(x - a_1)} = x,$$

kde $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$.

2. Pre ktoré celé čísla x a y platí $x(y^2 + 1) + y^2 = (x + y)^2$?

3. Nech z_i sú komplexné čísla, $|z_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.
Potom

$$\left| \prod_{i=1}^n z_i - 1 \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i - 1|;$$

dokážte.

4. Nájdite všetky hodnoty parametra p , pre ktorý platí nerovnosť

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz \geq p(x^2 + y^2 + z^2)$$

pre všetky x, y, z .

5. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať koeficient a v rovnici

$$x^3 - ax^2 + bx - 8 = 0,$$

aby všetky korene tejto rovnice boli kladné?

6. Ukážte, že rovnica

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n = 0$$

nemá pre párne n žiadny reálny koreň.

7. Nech z je komplexný koreň rovnice $x^3 + 3 = 0$, w koreň rovnice $x^2 + x + 1 = 0$. Nech $Q(z) = \{az + b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $Q(w) = \{aw + b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, kde $\mathbb{Q}$ je množina racionálnych čísel. Ukážte, že existujú práve dve zobrazenia T množiny $Q(z)$ na množinu $Q(w)$ také, že platí:

a) $T(x + y) = T(x) + T(y)$,

b) $T(xy) = T(x)T(y)$ pre ľubovoľné $x, y \in Q(z)$,

c) existuje aspoň jedno číslo $a \in \mathbb{Q}$ tak, že $T(a) \neq 0$.

Školská teória čísel (zostavil M. Kaukič).

1. Je daná rovnica

(1) $x^2 - ny^2 = 1$,

kde n je prirodzené číslo.

a) Rovnica (1) je riešiteľná v obore prirodzených čísel; dokažte.

b) Ak usporiadaná dvojica (x_0, y_0) prirodzených čísel vyhovuje rovnici (1) a neexistuje také prirodzené $\bar{x} < x_0$, že pre niektoré prirodzené $\bar{y}$ je $(\bar{x}, \bar{y})$ riešením rovnice (1), potom všetky riešenia v prirodzených číslach rovnice (1) sa dajú určiť zo vzťahu

$$x + y \sqrt{n} = (x_0 + y_0 \sqrt{n})^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

a to porovnaním "racionálnej" a "iracionálnej" časti oboch strán poslednej rovnosti. Dokažte.

2. Nech $f_0(x) = \frac{x}{2}$, $f_1(x) = 3x + 1$ sú funkcie definované na množine všetkých reálnych čísel. Reťazcom čísla x nazveme každú konečnú postupnosť

$$a_0 = x, a_1 = f_{i_1}(x), a_2 = f_{i_2}(f_{i_1}(x)), \dots,$$

$$a_k = f_{i_k}(f_{i_{k-1}}(\dots(f_{i_2}(f_{i_1}(x)) \dots)),$$

kde $i_m \in \{0, 1\}$ pre $m = 1, 2, \dots, k$, pričom v postupnosti $i_1, i_2, \dots, i_k$ nie sú nikde za sebou dve jedničky.

Ak sú čísla a_0, a_k prirodzené, potom všetky čísla v reťazci čísla x sú prirodzené. Dokažte.

3. Nech n je prirodzené číslo. Binomické koeficienty $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ sú všetky nepárne práve vtedy, keď $n = 2^m - 1$, kde m je prirodzené číslo; dokažte.

4. Pokúste sa nájsť netriviálne postačujúce podmienky pre to, aby v postupnosti prirodzených čísel $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ k ľubovoľnej usporiadanej skupine dekadických cifier existoval člen v_n taký, že jeho dekadický zápis začína zvolenou skupinou cifier.

5. Vo vrcholoch pravidelného šesťuholníka sú napísané celé čísla $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ také, že ich súčet sa rovná nule. Prenosom nazveme odčítanie jedničky od čísla stojaceho v niektorom vrchole a jej pričítanie k číslu stojacemu v niektorom zo susedných vrcholov. Aký minimálny počet prenosov treba urobiť, aby čísla vo všetkých vrcholoch šesťuholníka boli rovné nule?

6. Existujú také prirodzené čísla x, y , aby $x^2 + y$ aj $x + y^2$ boli druhými mocninami prirodzených čísel?

7. Všetky prirodzené čísla m , pre ktoré je číslo $m^m + 1$ deliteľné číslom 30, tvoria aritmetickú postupnosť; dokažte. Nájdite túto postupnosť.

8. Na každej z 20 kartičiek je napísaná práve jedna z cifier od 0 do 9 tak, že každá z cifier sa vyskytuje práve na dvoch kartičkách.

Rozhodnite, či tieto kartičky možno usporiadať do radu tak, aby kartičky s nulami boli vedľa seba, medzi kartičkami s jednotkou bola práve jedna kartička, medzi kartičkami s dvojkou práve dve kartičky, atď., až medzi kartičkami s deviatkou bolo práve 9 kartičiek.

Postupnosti a rady (zostavil RNDr. J. Kubát):

1. Je daná postupnosť:

$$a_1 = 0, a_2 = 1, (n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n = 0.$$

Vyjadrite n -tý člen postupnosti.

2. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická postupnosť s diferenciou d .

Potom

$$\begin{aligned} a_0 a_1 a_2 \dots a_{k-1} + a_1 a_2 a_3 \dots a_k + a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k-1} = \\ = a_0 a_1 a_2 \dots a_k + \frac{a_n a_{n+1} \dots a_{n+k} - a_0 a_1 \dots a_k}{(k+1)d}; \end{aligned}$$

dokážte.

3. Nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú korene rovnice

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0.$$

Vypočítajte hodnotu súčtu

$$\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \frac{1}{x_3 - 1} + \dots + \frac{1}{x_n - 1}.$$

4. Ak označíme $S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$, potom platí $n \cdot S_k(n) = S_{k+1}(n) + S_k(n-1) + \dots + S_k(2) + S_k(1)$; dokážte.

5. Vypočítajte súčet:

a) $S_n = 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + \dots + n \cdot x^n$;

b) $S_n = 1 + 4 \cdot x + 9 \cdot x^2 + \dots + n^2 \cdot x^{n-1}$.

6. Postupnosť $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ je určená rekurentne takto:

$$u_0 = 2, u_1 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - \frac{5}{2}.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$[u_n] = 2 \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

(Poznámka. Symbol $[c]$ znamená celú časť čísla c .)

7. Fibonacciho postupnosť $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$ je rekurentne definovaná takto: $a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Ak uvažujeme o ľubovoľných štyroch za sebou idúcich členoch Fibonacciho postupnosti, pričom budeme považovať súčin krajných členov a dvojnásobok súčinu stredných členov za dĺžky odvesien pravo- uhlého trojuholníka, potom bude dĺžka jeho prepony jedným z členov tejto postupnosti; dokážte.

8. Dokážte, že pre n -tý člen Fibonacciho postupnosti platí:

$$a_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-k-1}{k}.$$

1977/78

Nerovnosti v algebre a geometrii (zostavil M. Kaukič, VŠD Žilina):

1. Ak $abc > 0$, potom

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3};$$

dokážte.

2. Dokážte, že nerovnosť $pa^2 + (1-p)(b^2 - pc^2) > 0$, kde p je reálne číslo, a, b, c sú kladné reálne čísla, je správna práve vtedy, keď súčasne platia nerovnosti

$$a + b - c > 0, \quad a + c - b > 0, \quad b + c - a > 0.$$

3. Dané sú dve kružnice rovnakej dĺžky 1977. Na jednej z nich je daných 1977 bodov a na druhej niekoľko oblúkov, ktorých súčet dĺžok je menší než 1. Dokážte, že tieto kružnice možno tak "položiť na seba", že žiadny z daných bodov nebude ležať na niektorom z daných oblúkov.

4. Ak m, n sú kladné racionálne čísla a $x > 0$, potom platí

$$mx^n + \frac{n}{x^m} \geq m + n.$$

Dokážte.

5. Dokážte, že pre $y = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ a všetky reálne čísla x platí

$$\frac{a+c}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2} \leq y \leq \frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2},$$

kde $D = b^2 + (a-c)^2$.

6. Ak a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka, x, y, z reálne

čísla a platí $ax + by + cz = 0$, potom $ayz + bzx + cxy < 0$; dokážte.

7. Daná je konečná postupnosť celých kladných čísel, ktorej žiadny člen nie je menší než dané číslo M . Okrem toho každý člen tejto postupnosti začínajúc tretím je rovný absolútnej hodnote rozdielu dvoch predchádzajúcich členov. Aký najväčší počet členov môže mať taká postupnosť?

8. Čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú také, že $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 2a_1$; $a_2 \leq a_3 \leq 2a_2, \dots, a_{n-1} \leq a_n \leq 2a_{n-1}$. Dokážte, že v súčte $S = a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_n$ možno vždy vybrať znamienka tak, že $0 \leq S \leq a_1$.

Množina bodov v priestore (zostavil doc. J. Vyšín, CSc.).

1. V priestore sú dané dva útvary U_1, U_2 a priamka s . Označíme X_1, X_2 dva body týchto vlastností: $X_1 \in U_1 \wedge X_2 \in U_2, X_1 \neq X_2, X_1 X_2 \parallel s$.

Vyšetrite množinu všetkých stredov všetkých takých úsečiek $X_1 X_2$ v týchto prípadoch:

- U_1, U_2 sú dve mimobežky,
- U_1 je priamka rôznobežná s rovinou U_2 ,
- U_1, U_2 sú dve rôznobežné roviny.

2. V priestore je daný trojuholník ABC a útvar U . Vyšetrite množinu všetkých stredov guľových ploch opísaných všetkým štvorstenom $ABCX$, kde $X \in U$, a to v prípadoch:

- U je priamka rôznobežná s rovinou ABC ,
- U je rovina rôznobežná s rovinou ABC a prechádzajúca bodom A .

3. V priestore je daný útvar U , rovina ρ a trojuholník ABC .

Vyšetrite množinu všetkých vrcholov Z všetkých trojuholníkov XYZ , kde $X \in U \wedge Y \in \rho \wedge XY \parallel AB \wedge YZ \parallel BC \wedge ZX \parallel CA$, a to v prípadoch:

- U je priamka rôznobežná s rovinou ρ ,
- U je rovina rôznobežná s rovinou ρ .

4a. V priestore sú dané dve rôzne roviny ρ, σ a bod A , ktorý neleží v žiadnej z nich. Vyšetrite množinu všetkých bodov všetkých priamok, z ktorých každá prechádza bodom A a má rovnakú odchýlku od roviny ρ i roviny σ .

4b. V priestore sú dané dva rôzne body A, B a rovina ρ , ktorá neobsahuje žiadny z nich. Vyšetrite množinu všetkých bodov X

roviny ρ , pre ktoré majú priamky AX, BX rovnakú odchýlku od roviny ρ .

5. V priestore je daný bod A , priamka q a útvar U . Ďalej je dané kladné číslo k . Vyšetrite množinu všetkých bodov X týchto vlastností: $X \in q$, podiel vzdialeností bodu X od útvaru U a od bodu A je rovný k , a to v týchto prípadoch:

- U je priamka mimobežná s q ,
- U je rovina rôznobežná s q .

Matematická analýza (zostavil RNDr. J. Jarník, CSc., MÚ ČSAV Praha).

1. Nech $0 < a < b$ sú reálne čísla, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$, $n = 2, 3, \dots$.

Nájdite číslo c také, že platí $x_{2n} > c > x_{2n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, a dokažte, že platí:

Ak je $d \neq c$, potom existuje prirodzené číslo p také, že

$$|x_p - c| < |d - c|.$$

2. Nech postupnosť $\{x_n\}$ kladných čísel je rastúca a nie je ohraničená. Označme $s_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$, $n = 1, 2, \dots$.

Dokažte, že postupnosť $\{s_n\}$ je taktiež rastúca a nie je ohraničená. Zostane toto tvrdenie správne aj v prípade, keď vynecháme predpoklad, že čísla x_n sú kladné?

3. Nech $a_0 > 1$, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}})$, $n = 1, 2, \dots$.

Dokažte: Postupnosť $\{a_n\}$ je klesajúca a pre všetky prirodzené n platí $a_n > 1$. Ak je $c > 1$, potom existuje také prirodzené číslo p , že platí $a_p < c$ (a teda $a_n < c$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq p$).

Vyšetrite tiež prípad $0 < a_0 \leq 1$.

4. Nech $\{a_n\}$ je klesajúca postupnosť nezáporných čísel. Označme $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $t_n = 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2n}$, $n = 1, 2, \dots$.

Dokažte, že postupnosť $\{s_n\}$ je ohraničená práve vtedy, keď je ohraničená postupnosť $\{t_n\}$. Nájdite príklad, ktorý ukáže, že tvrdenie vo všeobecnosti neplatí, ak vynecháme predpoklad, že postupnosť $\{a_n\}$ je klesajúca.

5. Určte všetky funkcie f, g definované pre všetky reálne čísla x a vyhovujúce pre všetky reálne čísla x, y rovnosti

$$f(x - y) = f(x)g(y) + f(y)g(x).$$

6. Nech n je prirodzené číslo, a, b reálne čísla. Určte všetky funkcie f definované pre všetky reálne čísla x a vyhovujúce pre všetky reálne čísla x rovnici

$$af(x^n) + f(-x^n) = bx.$$

7. Nech f je zobrazenie eukleidovského priestoru do seba.

Dokážte: Ak je f izometria, ktorá nemá pevný bod, potom ani zložené zobrazenie $f \circ f$ /tj. zobrazenie g , ktoré priraďuje každému bodu A bod $g(A) = f(f(A))$ /, nemá pevný bod.

Poznámka: Zobrazenie F eukleidovského priestoru do seba sa volá izometriou, ak zachováva vzdialenosť bodov, tj. ak A, B sú ľubovoľné dva body priestoru, je vzdialenosť bodov $F(A), F(B)$ rovná vzdialenosti bodov A, B .

Nech F je zobrazenie množiny M do množiny M . Prvok $x \in M$ sa nazýva pevným bodom zobrazenia F , ak platí $F(x) = x$.

8. Nech M je neprázdna množina funkcií f tvaru $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, ktorá má tieto vlastnosti:

a/ Ak $f \in M$, $g \in M$, potom $g \circ f \in M$ kde $h = g \circ f$ je funkcia definovaná vzťahom $h(x) = g(f(x))$.

b/ Ak $f \in M$, potom $f_{-1} \in M$, kde f_{-1} je funkcia definovaná vzťahom $f_{-1}(x) = y$, kde $x = f(y)$.

c/ Ak $f \in M$, potom existuje pevný bod zobrazenia f , tj. reálne číslo x_f také, že platí $f(x_f) = x_f$.

Dokážte, že existuje také reálne číslo t , že platí $f(t) = t$ pre všetky funkcie $f \in M$.

Udajte príklady množiny M obsahujúcej: a/ konečne mnoho, b/ nekonečne mnoho prvkov.

Kombinatorika (zostavil RNDr. F. Zítek, CSc., MÚ ČSAV Praha):

O konečnej postupnosti celých čísel tvaru

$$(1) \quad c_0 = 0, c_1, c_2, \dots, c_n = c$$

budeme hovoriť, že má dĺžku n a končí číslom c .

Hovoríme, že postupnosť (1) je málo rastúca, ak pre $j = 1, 2, \dots, n$ platí $0 \leq c_j - c_{j-1} \leq 1$. Postupnosť (1) nazveme alternatívnou, ak pre $j = 1, 2, \dots, n$ platí $|c_j - c_{j-1}| = 1$. Ktoré postupnosti sú zároveň málo rastúce aj alternatívne?

1. Odvoďte vzorec pre počet $p_n(y)$ / n prirodzené, y celé/ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y . Vyšetrite vlastnosti funkcií p_n , $n = 1, 2, 3, \dots$.

2. Odvoďte vzorec pre počet $\pi_n(y)$ všetkých rôznych málo rastúcich postupností dĺžky n končiacich číslom y . Vyšetrite vlastnosti funkcií π_n , $n = 1, 2, 3, \dots$.

3. Odvoďte vzorec pre počet $p_n(y, b)$ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \dots, n$ je $c_j \leq b$ / b celé/.

4. Odvoďte vzorec pre počet $\pi_n(y, k)$ všetkých rôznych málo rastúcich postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \dots, n$ platí $c_j \leq kj$ / $k \geq 0$ reálne/.

5. Odvoďte vzorec pre počet $\pi_n^*(y, k)$ všetkých rôznych málo rastúcich postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 1, 2, 3, \dots, n$ platí $c_j < kj$ / $k > 0$ reálne/.

6. Odvoďte vzorec pre počet $p_n(y, a, b)$ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \dots, n$ platí $a \leq c_j \leq b$ / a, b celé/.

7. Odvoďte vzorec pre počet $p_n^*(y, k)$ všetkých rôznych alternatívnych postupností dĺžky n končiacich číslom y a takých, že pre všetky $j = 0, 1, 2, \dots, n$ platí $c_j \leq kj$ / $k > 0$ reálne/.

8. Pri pokladni kina s jednotným vstupným 5 Kčs stojí N záujemcov, z ktorých p platí päťkorunou, ostatných $d = N - p$ desaťkorunou.

Koľkými rôznymi spôsobmi možno usporiadať frontu N kupujúcich tak, aby pokladník, ktorý na začiatku predaja nemá v pokladni žiadne peniaze, mohol každému kupujúcemu s desaťkorunou ihneď vydať naspäť?

Ako sa tento počet zmení, ak pokladník má na začiatku v pokladni k päťkorún? /Predpokladáme samozrejme, že nikto nekupuje viac než jeden lístok./

Školská teória čísel (zostavil dr. Š. Sakáloš, MFF UK Bratislava) :

1. Napíšte za sebou všetky čísla od 100 do 999. Vznikne tak dekadický zápis nejakého čísla N .

a/ Dokážte, že N nie je štvorcom žiadneho prirodzeného čísla.

b/ Dokážte, že N nie je prvočíslo.

c/ Určte najväčšieho spoločného deliteľa čísel N a 27000.

d/ Určte najväčšieho spoločného deliteľa čísel N a 27 027 000.

e/ Dokážte, že N nie je /vyššou než prvou/ mocninou žiadneho prirodzeného čísla.

2. Nájdite najväčšie prirodzené číslo x také, že

$$x^{x^x} < 4^{4^4}.$$

3. Akým najväčším číslom možno krátiť zlomok

$$\frac{7^{3000} - 3^{3000}}{5^{3000}} ?$$

4. Dokážte, že existuje $3 \cdot 10^9$ za sebou nasledujúcich zložených prirodzených čísel menších než $10^{10^{10}}$.

5. Dokážte, že číslo

$$1001^{4000} + 4 \cdot 1000^{1000}$$

je zložené.

6. Dokážte, že kvadratická rovnica

$$8^8 x^2 + 10^{10^{10}} x + 9^9 = 0$$

má dva reálne rôzne korene, ktoré sú iracionálne.

7. a/ Dokážte, že exponent čísla 2 v rozklade čísla $n!$ na súčin prvočísel je $n - k$, kde k je počet jednotiek v dvojkovom zápise čísla n .

b/ Dokážte, že exponent prvočísla p v rozklade čísla $n!$ na súčin prvočísel je $\frac{n - k}{p - 1}$, kde k je ciferný súčet v p -adickom zápise čísla n .

1978/79

1. Nerovnosti

1.1 Dokážte, že pre kladné čísla a, b, c platí

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c).$$

1.2 Nech α, β, γ sú uhly ostrouhlého trojuholníka. Ak $\alpha < \beta < \gamma$, potom $\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma$; dokážte!

1.3 Súčet druhých mocnín piatich reálnych čísel a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 je 1. Dokážte, že najmenšia z hodnôt $(a_i - a_j)^2$, pre $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, i \neq j$ nie je väčšia ako $\frac{1}{10}$.

1.4 Nájdite celú časť čísla

$$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

1.5 Na jednotkové kružnici, v prvém kvadrantu, sú dané také oblúky $\widehat{AM}_1 = X_1$, $\widehat{AM}_2 = X_2$, ..., $\widehat{AM}_k = X_k$, $A \equiv (1, 0)$, že $X_1 < X_2 < \dots < X_k$. Dokážte, že

$$\sin 2X_1 + \sin 2X_2 + \dots + \sin 2X_{k-1} - \sin (X_1 - X_2) - \sin (X_2 - X_3) - \dots - \sin (X_{k-1} - X_k) < \frac{\pi}{2} + \sin (X_1 + X_2) + \sin (X_2 + X_3) + \dots + \sin (X_{k-1} + X_k).$$

1.6 Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ platí

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{n}{4}.$$

1.7 Nech $x_0 = 5$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Potom

$$45 < x_{1000} < 45,1; \quad \text{dokážte.}$$

2. Geometrické nerovnosti

2.1 Je dán pravidelný 25-úhelník $A_1A_2\dots A_{25}$ se středem O . Z vektorů $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_{25}}$ jich vyberte několik tak, aby velikost součtu vybraných vektorů byla co největší. Určete tuto maximální velikost.

2.2 V konvexním n -úhelníku jsou sestaveny všechny úhlopříčky a dělí ho tak na mnohoúhelníčky. Určete maximální možný počet stran mnohoúhelníčku.

2.3 Obdélníkové pole o rozměrech 300×400 je rozděleno pěšinami na čtverce 100×100 , po obvodu pole vedou také pěšiny. Po pěšině jde chodec rychlostí v , přes pole rychlostí u . Poraďte chodci, jak se dostane z jednoho rohu pole do opačného rohu nejrychleji a určete, za jak dlouho.

2.4 Je dáno n jednotkových úseček v rovině tak, že mají společný bod a jejich koncové body jsou vrcholy $2n$ -úhelníka. Dokážte, že alespoň jedna jeho strana není menší než strana pravidelného $2n$ -úhelníka vepsaného do kružnice o průměru 1.

2.5 Do daného trojúhelníka vepište trojúhelník s co nejmenším obvodem. (Uvnitř každé strany daného trojúhelníka leží jediný vrchol vepsaného trojúhelníka.)

2.6 Mezi všemi trojúhelníky vepsanými do dané kružnice najděte

ten, který má největší součet čtverců stran.

2.7 Poloměr kružnice opsané trojúhelníku označme R , vepsané r . Dokažte, že $R \geq 2r$. Pro které trojúhelníky platí rovnost? Dokažte, že pro každá dvě čísla $R \geq 2r$ existuje příslušný trojúhelník.

3. Mnohočleny

3.1 Součin dvou mnohočlenů s celými koeficienty má všechny koeficienty dělitelné pěti. Dokažte, že alespoň jeden z mnohočlenů má všechny koeficienty dělitelné pěti.

3.2 Je dáno číslo $a \neq 0$ a nenulový mnohočlen $P(x)$. Dokažte, že mnohočlen $(x - a)^n P(x)$ má alespoň $n + 1$ nenulových koeficientů.

3.3 Je dán mnohočlen 7. stupně s komplexními koeficienty. Leží-li v rovině komplexních čísel všechny jeho kořeny uvnitř /ne na hranici/ úhlu velikosti 60° s vrcholem v počátku, jsou všechny jeho koeficienty nenulové. Dokažte.

3.4 Najděte nejmenší reálné číslo a , které má následující vlastnost: Pro každý mnohočlen $f(x)$ druhého stupně, pro který $|f(x)| \leq 1$ pro všechna $0 \leq x \leq 1$, platí $f'(0) \leq a$.

3.5 Napište mnohočlen $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ jako rozdíl čtverců dvou mnohočlenů různého stupně s reálnými koeficienty.

3.6 Buď r přirozené číslo. Dokažte, že trojčlen $x^2 - rx - 1$ není dělitelem žádného nenulového mnohočlenu s celými koeficienty v absolutní hodnotě menšími než r .

3.7 Mají-li dva mnohočleny 3. stupně s celými koeficienty společný iracionální kořen, pak mají ještě další společný kořen. Dokažte.

4. Kombinatorika

4.1 Dřevěnou krychli natřeli na červenou a pak ji rozřezali na n^3 stejně velkých krychliček. Kolika způsoby je možno z krychliček složit červenou krychli původních rozměrů?

4.2 Je dáno prvočíslo $p > 2$ a přirozené číslo n . Kolika způsoby lze obarvit vrcholy pravidelného p -úhelníka pomocí n barev? Způsoby, při nichž se po otočení p -úhelníka barvy shodují, nepokládejte za různé.

4.3 Uvažujme všechna slova složená z n písmen X a n písmen Y . Diferencí slova budeme rozumět číslo, které udává, kolikrát

v něm jsou vedle sebe různá písmena. Dokažte, že pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ je počet slov s diferencí $n - k$ roven počtu slov s diferencí $n + k$.

4.4 Je dáno přirozené číslo $n > 2$. Uvažujme všechna slova složená z n písmen X a n písmen Y . Slovům, která lze rozdělit na dvě slova, z nichž každé obsahuje stejně X i Y , budeme říkat slova 1. druhu. Slovům, která lze takto rozdělit jediným způsobem, budeme říkat slova 2. druhu. Dokažte, že slov 2. druhu je dvakrát tolik jako slov 1. druhu.

4.5 Je dáno přirozené číslo $n > 2$ a množina M , jejíž prvky jsou slova složená z písmen X a Y , přičemž každé slovo má právě n písmen a jakákoliv dvě různá slova se liší alespoň na třech místech. Dokažte nerovnost

$$|M| \leq \frac{2^n}{n+1}.$$

4.6 Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$2^{4n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{4n}{4i+1}.$$

4.7 Řekneme, že systém $\mathcal{P}$ podmnožin nějaké množiny je dokonalý, jestliže pro žádné dvě podmnožiny $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ neplatí $A \subset B$. Jaký je největší možný počet podmnožin tvořících dokonalý systém podmnožin n -prvkové množiny?

5. Geometrie

5.1 V prostoru jsou dány dva různé body A , B . Najděte množinu všech bodů X , pro které se $|XA|^2 - |XB|^2$ rovná danému kladnému číslu k .

5.2 V prostoru je dána rovina ρ a body A , B v opačných poloprostorech určených rovinou ρ . Najděte v rovině ρ všechny body X , pro které je $||XA| - |XB||$ maximální.

5.3 V prostoru je dán klín K /průnik dvou poloprostorů, jejichž hraniční roviny nejsou rovnoběžné/ a uvnitř něho polopřímka p , jejíž počátek náleží hraně klínu K . Najděte rovinu ρ , která prochází polopřímkou p tak, že p je osou úhlu $\rho \cap K$.

5.4 Bod X se pohybuje po přímce p konstantní rychlostí danou vektorem $\vec{u}$, bod Y se pohybuje po přímce q konstantní rychlostí danou vektorem $\vec{v}$. Přímky p a q jsou mimoběžné a v jednom okamžiku je X v bodě A , Y v bodě B . Najděte polohu bodů X , Y , při které je vzdálenost $|XY|$ minimální.

5.5 V trojbokém jehlanu $ABCV$ je $|AV| = |BV|$ a hrana AC je kolmá ke stěně ABV , $|CV| = p$. Koule o poloměru r se dotýká stěny ABV v jejím těžišti, hrany CV a základny ABC . Vypočtete objem jehlanu pomocí veličin p, r .

5.6 V rovině je dán trojúhelník ABC a bod P . Paty kolmic vedených bodem P k stranám trojúhelníka ABC označíme K, L, M . Udejte nutnou a postačující podmínku pro to, aby

a/ body K, L, M, P ležely na kružnici,

b/ body K, L, M ležely na přímce.

5.7 V rovině je dán trojúhelník ABC . Kružnice k_A prochází bodem A a dotýká se strany BC v bodě B , kružnice k_B prochází bodem B a dotýká se strany CA v bodě C a kružnice k_C prochází bodem C a dotýká se strany AB v bodě A . Dokažte, že se kružnice k_A, k_B, k_C protínají v jednom bodě Q . Co platí o úhlech $\sphericalangle QAB, \sphericalangle QBC, \sphericalangle QCA$?

5.8 V prostoru jsou dány přímky p, q a rovina ρ , dále je dána délka $d > 0$. Sestrojte úsečku délky d rovnoběžnou s rovinou ρ , jejíž jeden krajní bod náleží p a druhý q .

1979/80

1. Velká čísla

1.1 Najděte největší přirozené číslo x takové, že

$$(x!)! < 10^{10^{10}}$$

a nejmenší přirozené číslo y takové, že $y!$ je násobkem čísla $10^{10^{10}}$.

1.2 Dokažte, že kvadratická rovnice

$$8^{8^8} \cdot x^2 + 10^{10^{10}} \cdot x + 9^{9^9} = 0$$

má dva různé reálné iracionální kořeny.

1.3. Napíšeme-li za sebou všechna čísla od 100 do 999, vznikne dekadický zápis jistého čísla N . Dokažte, že N není prvočíslem ani mocninou /s přirozeným exponentem větším než 1/ žádného přirozeného čísla.

1.4 Dokažte, že existuje mocnina dvou /s přirozeným exponentem/, jejíž dekadický zápis začíná číslicemi

197919801981 .

1.5 Najděte poslední dvě nenulové číslice čísla $1000!$.

1.6 Dokažte, že při žádné volbě znamének není číslo

$$\pm 1^1 \pm 2^2 \pm 3^3 \pm \dots \pm 59^{59} \pm 60^{60}$$

druhou, třetí, čtvrtou, pátou ani šestou mocninou žádného celého čísla.

1.7 Dokažte, že mezi přirozenými čísly menšími než $10^{10^{10}}$ existuje 10^{10} po sobě následujících složených čísel.

2. Goniometrie

2.1 Najděte všechna reálná x , pro která platí

$$26 \sin^2 x + 12 \cos 2x + 5 \sin 2x = 13 .$$

2.2 Najděte všechny trojúhelníky, pro jejichž vnitřní úhly A, B, C platí

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2} .$$

2.3 Najděte všechna reálná a , pro něž je funkce

$$f(x) = \cos ax + \cos x$$

periodická.

2.4 Jsou dána lichá přirozená čísla m, n . Najděte všechna reálná x , pro která platí

$$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} = \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x} .$$

2.5 Bez pomoci tabulek, počítačky a logaritmického pravítka vypočtete

$$\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ - \sin 83^\circ .$$

2.6 Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin (2x\sqrt{1-x^2})$$

v intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2.7 Najděte všechna reálná x , pro něž platí

$$\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2 .$$

3. Obsahy

3.1 V rovině je dáno několik pásů, žádné dva nejsou rovnoběžné. Posuňte pásy tak, aby zachovaly své směry a obsah jejich průniku byl do největší. /Pásem rozumíme část roviny mezi dvěma rovnoběžkami. Dané pásy nemusejí mít stejnou šířku./

3.2 Dva shodné obdélníky jsou v rovině umístěny tak, že jejich obvody mají 8 společných bodů. Dokažte, že obsah jejich průniku je větší než polovina obsahu každého z nich.

3.3 Dokažte, že každý trojúhelníkový řez čtyřstěnu má obsah menší než některá stěna.

3.4 Jakou polohu má krychle, vrhá-li na rovinu kolmou ke směru světla stín s největším možným obsahem?

3.5 Je dán trojúhelník.

a/ Umístěte do něho středově souměrný mnohoúhelník s co největším obsahem.

b/ Umístěte ho do konvexního středově souměrného mnohoúhelníku s co nejmenším obsahem.

V obou případech extrémní obsahy vyjádřete pomocí obsahu daného trojúhelníka.

3.6 V jednotkovém čtverci je obsažen útvar U /ne nutně souvislý/. Pokud v U neexistují dva body vzdálené $0,001$, je obsah U menší než $0,3$. Dokažte.

3.7 V jednotkovém čtverci je 102 bodů, žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že jisté tři z nich jsou vrcholy trojúhelníka s obsahem nejvýše $0,005$.

4. Obdélníková schémata

4.1 Čísla $1, 2, \dots, n^2$ jsou zapsána ve čtvercové tabulce, jejíž řádky jsou očíslovány indexy $1, 2, \dots, n$ a sloupce také. Číslo 1 je na libovolném místě; číslo 2 je v řádku, který má stejný index jako sloupec, obsahující číslo 1; číslo 3 je v řádku, který má stejný index jako sloupec obsahující číslo 2 atd. Určete rozdíl součtu čísel v řádku obsahujícím číslo 1 a součtu čísel ve sloupci obsahujícím číslo n^2 .

4.2 V obdélníkové tabulce jsou zapsána reálná čísla. Je dovoleno současně změnit znaménka všech čísel v řádku nebo ve sloupci. Je možno každou tabulku převést postupným prováděním těchto změn na

tabulku obsahující samá nezáporná čísla?

4.3 Do čtvercové tabulky 8×8 je zapsáno 64 nezáporných čísel, jejichž součet je 1956. Součet všech 16 čísel ležících na úhlopříčkách je 112. Čísla umístěná souměrně podle některé úhlopříčky jsou si rovna. Dokažte, že součet čísel je v každém řádku i v každém sloupci menší než 518.

4.4 Ve čtvercové tabulce $n \times n$ je zapsáno n^2 čísel x_{pq} /tak značíme číslo v p -tém řádku a q -tém sloupci/. Dokažte, že je-li $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0$ pro libovolné tři indexy $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, existují čísla $t_1, t_2, \dots, t_n$ tak, že $x_{ij} = t_i - t_j$ pro všechny $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

4.5 Ve čtvercové tabulce $n \times n$ je zapsáno n^2 čísel. Vynecháme-li jakoukoliv podmnožinu řádků, která neobsahuje všechny řádky /včetně prázdné/, bude ve zbylé tabulce vždy nějaký sloupec obsahovat jedinou nulu. Dokažte, že ať pak vynecháme jakoukoliv podmnožinu sloupců, která neobsahuje všechny sloupce, bude ve zbylé tabulce vždy nějaký řádek obsahovat jedinou nulu.

4.6 Ve čtvercové tabulce 8×8 je zapsáno 64 nenulových čísel. Jediné z nich je záporné a není umístěno v rohu. Je dovoleno změnit znaménka všech čísel nějakého řádku nebo sloupce nebo řady rovnoběžné s úhlopříčkou /sem patří i změna znaménka rohového čísla/. Dokažte, že postupným prováděním těchto změn nemůžeme nikdy dostat tabulku obsahující samá kladná čísla.

4.7 Ve čtvercové tabulce 8×8 je zapsáno 64 čísel. Je dovoleno změnit znaménka všech čísel v libovolné její souvislé části 3×3 nebo 4×4 . Je možno každou takovou tabulku převést postupným prováděním těchto změn na tabulku obsahující samá nezáporná čísla?

5. Posloupnosti

5.1 Dokažte, že pro každou posloupnost $\{a_n\}$, jejíž členy jsou navzájem různá přirozená čísla, která nemají ve svém dekadickém zápise číslici 0, platí:

Pro každé přirozené číslo k je

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k} < 29.$$

5.2 Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$. Dokažte, že ke každému přirozenému číslu m existuje přirozené číslo k tak, že

$$\left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=k+1}^m a_i \right| \leq \max_{1 \leq i \leq m} |a_i| .$$

5.3 Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$, která má tuto vlastnost: Existuje přirozené číslo m takové, že

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = 0$$

a pro každé přirozené číslo k je

$$a_{m+k} = a_k .$$

Dokažte, že existuje přirozené číslo p tak, že pro každé celé nezáporné číslo k platí

$$a_p + a_{p+1} + \dots + a_{p+k} \geq 0 .$$

5.4 Uvažujme čtyři posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ takové, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n + b_n , \quad c_{n+1} = c_n + d_n ,$$

$$b_{n+1} = b_n + c_n , \quad d_{n+1} = d_n + a_n .$$

Dokažte, že pokud existují přirozená čísla k, m tak, že

$a_{k+m} = a_m$, $b_{k+m} = b_m$, $c_{k+m} = c_m$, $d_{k+m} = d_m$,
pak je

$$a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 0 .$$

5.5 Pro posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ platí, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_n + a_{n+2} \geq 2a_{n+1} .$$

Dokažte, že pak pro každé přirozené číslo n je

$$\frac{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n+1}}{n+1} \geq \frac{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}}{n} .$$

5.6 Jsou dána přirozená čísla a_1, a_2 . Pro přirozená čísla $n > 2$ položme $a_n = |a_{n-2} - a_{n-1}|$. Tak jsme definovali posloupnost nezáporných celých čísel $\{a_n\}$. Je-li největší člen této posloupnosti 1980, jaký je největší možný index prvního nulového členu?

5.7 Je dána posloupnost číslic $\{a_n\}$ neobsahující číslici 9. Ta určuje posloupnost $\{b_n\}$, jejíž členy mají dekadické zápisy

$$b_1 = (a_1) , \quad b_2 = (a_1 a_2) , \quad b_3 = (a_1 a_2 a_3) \text{ atd.}$$

Dokažte, že posloupnost $\{b_n\}$ obsahuje nekonečně mnoho složených čísel.

O třetím kole

Jozef M o r a v č í k , Jan V y š í n

Účastníci třetího celostátního kola kategorie A měli každý rok reprezentovat matematickou špičku středoškoláků. Jejich úroveň, zejména jejich zručnost a nápaditost při řešení úloh, snad nejpřesvědčivěji ukazovaly soutěžní úlohy třetího kola i když je vybírali podle svého odhadu pracovníci ÚVMO. Odráží se v nich však tematika, která byla v jednotlivých ročnících preferována, rostoucí odborná náročnost soutěže a výrazný teoretický charakter.

První ročník měl skutečně komorní ladění: ze 76 účastníků druhého kola kategorie A /tehdy byly jen dvě kategorie, A a B/ bylo 47 úspěšných řešitelů, a ti postoupili do třetího kola; z nich bylo 22 vítězů. Soutěžní úlohy v prvních letech olympiády byly většinou solidní složitější úlohy, které mohli řešitelé rozřešit pomocí znalostí, kterým se naučili ve škole; trikových úloh bylo mezi nimi málo. To platilo i o úlohách třetího kola kategorie A. Ačkoli v těch letech byli účastníci kategorie A žáci jen jedenáctileté školy, objevovaly se mezi úlohami třetích kol ne právě nejjednodušší "ryze geometrické" úlohy stereometrické i úlohy z aritmetiky komplexních čísel, lépe řečeno z analytické geometrie v rovině s jednou komplexní souřadnicí. Od X. ročníku pronikají mezi tradiční geometrické i negeometrické úlohy poctivé řemeslné práce i některé úlohy méně tradiční. Nové úlohy vyžadují nové přístupy k řešení, popř. i nový aparát. V posledních ročnících MO přichází dosti úloh o maximech a minimech, a to nejen úloh řešených postupy funkční teorie /derivací/, ale i úloh geometrických, které se řeší syntetickými úvahami. Na první pohled je patrné, že tematika úloh v posledních ročnících olympiády je pestřejší a méně školská než v ročnících počátečních. Téměř všechny úlohy jsou zajímavé jak svým obsahem tak způsobem řešení.

Uvádíme znění všech úloh třetího kola kategorie A z 1. - 29. ročníku MO. K úlohám označeným * jsou na konci článku připojena stručná řešení.

I. ročník 1951/52

1. Jsou-li a, b kladná racionální čísla, dokažte, že ze vztahu

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = c,$$

kde c je racionální číslo, plyne, že $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ jsou rovněž racionální čísla.

2*. Tabulka čísel

	a_1	b_1	c_1				
	a_2	b_2	c_2	d_2	e_2		
	a_3	b_3	c_3	d_3	e_3	f_3	g_3
	...	...	...	...	...	...	...

je sestavena takto: První řádek obsahuje tři lichá čísla; každé číslo dalších řádků je rovno součtu tří sousedních čísel předcházejícího řádku, z nichž prostřední je nad uvažovaným číslem. Schází-li v tabulce některé z těchto tří čísel, doplní se nulou. Dokažte, že počínaje druhým řádkem každý řádek obsahuje aspoň jedno sudé číslo.

3. Budiž ABCD vypuklý různoběžník, v němž je $AB = CD$ a buďtež R, S středy stran AD, BC . Sestrojte polopřímky AU, DV souhlasně rovnoběžné s polopřímkou RS . Dokažte, že platí vztah

$$\angle B A U = \angle C D V.$$

4. Rozměry obdélníka jsou přirozená čísla p, q ; obdélník je rozdělen na pq jednotkových čtverců. Určete počet těch jednotkových čtverců, jejichž vnitřkem prochází úhlopříčka AC , a to v případě, že čísla p, q jsou a/ nesoudělná, b/ soudělná.

II. ročník 1952/53

1.* V rovině komplexních čísel určete útvar, který vyplní obrazy čísel Z vyhovujících vztahu

$$Z + \bar{Z} = a |Z|,$$

kde $\bar{Z}$ je komplexní číslo sdružené s číslem Z a kde a je dané reálné číslo. Proveďte diskusi pro všechny hodnoty čísla a .

2. α, β, γ sú uhly trojuholníka. Dva z nich sú vyjadrené pomocným uhlom φ , takže

$$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{4}, \quad \beta = \pi - 3\varphi.$$

Dokažte, že potom platí $\alpha > \gamma$.

3.* Jsou-li čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ kladná, platí

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

Dokažte. Kedy nastane rovnosť?

4. Sú dané mimobežky a , b , z ktorých je každá rôznobežná s danou rovinou ρ . Zvolme bod X na priamke a , bod Y na priamke b tak, aby bolo $XY \parallel \rho$. Aký geometrický útvar vyplní stred S úsečky XY , ak X prebieha priamku a ?

III. ročník 1953/54

1. Nech a je reálne číslo. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$ax^2 + 2(a - 1)x + a - 5 = 0.$$

Urobte diskusiu vzhľadom na číslo a .

2.* Nechť a , b jsou komplexní čísla. Jestliže obrazy kořenů rovnice $Z^2 + aZ + B = 0$ v rovině tvoří spolu s obrazem čísla 0 pravouhlý rovnoramenný trojúhelník s pravým úhlem při počátku, potom platí $a^2 = 2b \neq 0$.

Dokažte a zjistěte, zda lze větu obrátit.

3. Bez upotrebenia logaritmických tabuliek dokažte správnosť vzťahu

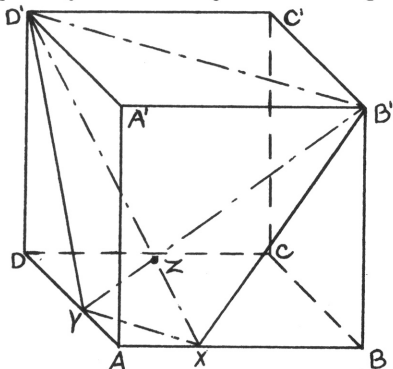
$$\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}.$$

/Pritom $\log_A B$ značí logaritmus čísla B při základe logaritmov A ./

4.* Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$ / $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ /. Nechť bod X leží uvnitř úsečky AB , průsečík hrany AD s rovinou $B'D'X$ označme Y /obr. 6 /.

a/ Jaký útvar vyplní průsečík úhlopříček čtyřúhelníka $B'D'YX$, probíhá-li bod X vnitřek hrany AB ?

b/ Určete mezi těmito čtyřúhelníky $B'D'YX$ takový, že jeho úhlopříčky se navzájem dělí v poměru $1 : 2$.



Obr. 6

IV. ročník 1954/55

1. Buď dán lichoběžník $ABCD$, o jehož základnách platí $AB > CD$. Označme E průsečík přímek AC , BD a F průsečík přímek AD , BC . Dále označme GH přímkou procházející bodem E a rovnoběžnou se základnami, přičemž G leží na přímce AD a H na přímce BC . Označme po řadě K , L středy základů AB , CD . Dokažte, že
- a/ přímkou EF prochází body K , L ;
 - b/ existuje průsečík M přímek AC , KH a průsečík N přímek BD , KG ;
 - c/ body F , M , N leží v jedné přímce.

2. Buďte dány dvě soustředné kulové plochy K_1 s poloměrem a a K_2 s poloměrem b ; přitom je $a < b$. Označme $ABCD A'B'C'D'$ kolmý hranol se čtvercovou podstavou $ABCD$ /přičemž je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ /, jehož vrcholy A , B , C , D leží na ploše K_2 a přitom rovina $A'B'C'D'$ se dotýká plochy K_1 . Nechť dále platí, že

$$\frac{AB}{AA'} = \frac{a}{b}.$$

Vypočítejte rozměry tohoto hranolu. Kolik takových hranolů /až na shodnost/ existuje?

- 3* V rovině komplexních čísel je vepsán jednotkové kružnici se středem $[0; 0]$ pravidelný sedmnáctiúhelník s jedním vrcholem v bodě $[1; 0]$. Určete počet jeho vrcholů, které leží uvnitř kružnice se středem v bodě $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ a s poloměrem $r = 1$.

- 4* Buďte a , b , c daná reálná čísla vesměs navzájem různá. Potom rovnice

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

má vždy reálné řešení. Dokažte.

V. ročník 1955/56

1. Určte všechny dvojice ostrých úhlů x , y , které vyhovují soustavě rovnic

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 2 \cos^2 y,$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = 2 \sin^2 y.$$

2. V dané rovině ρ buď dán vypuklý čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky se protínají v bodě E . Mimo rovinu ρ buď dán bod V . Uvnitř polopřímek VA , VB , VC , VD sestrojte po řadě body A' , B' , C' , D' tak, aby ležely s bodem E v téže rovině σ a aby čtyřúhel-

ník $A'B'C'D'$ byl rovnoběžník. Rozhodněte o řešitelnosti úlohy. Náčrt konstrukce: proveďte ve volném rovnoběžném promítání.

3. Určete všechna reálná řešení soustavy rovnic

$$x - |y + 1| = 1$$

$$x^2 + y = 10.$$

4* Je dána polokružnice $\widehat{AB}$. Označme X vnitřní bod této polokružnice. Na polopřímce XA sestrojíme bod Y tak, aby platilo $XY = XB$. Jaký útvar vyplní bod Y , jestliže bod X probíhá všechny vnitřní body dané polokružnice $\widehat{AB}$?

VI. ročník 1956/57

1* Určete všechny reálné čísla p tak, aby rovnice

$$\sqrt{x^2 - 5p^2} = px - 1$$

mala kořen $x = 3$. Potom pre tieto čísla p danú rovnicu riešte.

2. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan o hlavním vrcholu V a o podstavě $ABCD$; označme $d = \frac{1}{2} AB$. Označme dále φ odchylku rovin VAD , ABC , takže je $0 < \varphi < 90^\circ$.

a/ Načrtněte konstrukci nejkratší příčky XY mimoběžek VA , BC , přičemž X je bodem přímky VA a Y bodem přímky BC . Vypočtete velikost příčky XY pomocí daných čísel d , φ .

b/ Vypočtete vzdálenost v bodů V , X pomocí čísel d , φ /všimněte si, pro která φ padne bod X dovnitř úsečky VA a pro která padne na její prodloužení za bod V /.

3* Určete všechny úhly α , pro něž jak $\cotg \alpha$ tak $\cotg 2\alpha$ jsou čísla celá.

4. Je daný dutý uhol $\angle POQ$ a vnútri tohto uhla bod M ; ďalej nech je dané kladné číslo m . Zostrojte lichobežník $ABCD$, ktorý má tieto vlastnosti:

/1/ Vrcholy A , D ležia na polpriamke OP a vrcholy B , C ležia na polpriamke OQ .

/2/ Bod M je priesečníkom uhlopriečok AC , BD .

/3/ Platí $AB = m$.

Dokážte správnosť urobenej konštrukcie a urobte diskusiu riešiteľnosti úlohy.

VII. ročník 1957/58

1* Určete všechna reálná řešení rovnice

$$x + \sqrt{2p - x^2} = 8$$

o neznámé x , přičemž p je dané reálné číslo. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k číslu p .

2. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dána velikost výšky v_c , velikost těžnice t_c a velikost úhlu γ .

3* Určete všechna reálná čísla x , která splňují nerovnost

$$\sqrt{2 + \frac{5}{2} \cos x} \leq \sin x.$$

4. Nech sú dané kladné čísla d, v , o ktorých platí $d > v$. Ďalej nech sú dané dve kolmé mimobežky p, q , ktorých najkratšia priečka má veľkosť v . Uvažujme o všetkých úsečkách veľkosti d takých, že jeden z krajných bodov leží na priamke p a druhý na priamke q .

a/ Čo vyplnia krajné body týchto úsečiek na priamke p ?

b/ Čo vyplnia stredy týchto úsečiek?

VIII. ročník 1958/59

1* Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC /kde $\angle ACB = 90^\circ$ /, jsou-li dány délky těžnic t_a, t_b . Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k daným číslům t_a, t_b .

2* Ak o reálnych číslach a, b, c platia tri nerovnosti

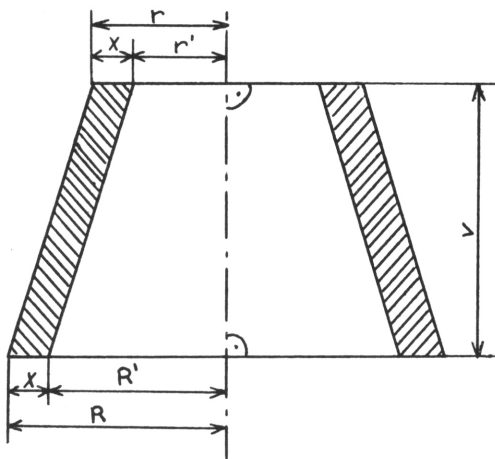
$$\begin{array}{ll} /x/ & a + b + c > 0 \\ /xx/ & ab + bc + ca > 0 \\ /xxx/ & abc > 0, \end{array}$$

potom sú a, b, c kladné čísla. Dokážte to.

3. Z polotovaru tvaru komolého rotačního kužele, jehož podstavy mají poloměry R, r , byla zhotovena součástka tak, že do něho byla vyvrtána dutina tvaru souosého komolého kužele, jak je vidět z nákresu osového řezu; tím se hmota kusu zmenšila na polovinu. Vypočítejte poloměry otvorů vzniklých v podstavách součástky. Rozhodněte, pro který poměr $\frac{R}{r}$ má úloha řešení. /Obr. 7/

4. Najděte všechny dvojice čísel x, y /ve stupních/, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned} \sin(x + 150^\circ) &= \cos(y - 75^\circ) \\ \cos x + \sin(y - 225^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} &= 0. \end{aligned}$$



Obr. 7

IX. ročník 1959/60

1. Najděte všechna reálná čísla x , pro něž platí nerovnost

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geq \frac{8}{3}.$$

2. Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$, kde $ABCD$ je čtverec a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Na přímce AA' leží bod P . Sestrojte střed S kulové plochy, která je souměrná podle roviny ABB' , prochází bodem P a dotýká se přímek $p = AB$, $q = A'D'$.

Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy pro různé polohy bodu P na přímce AA' .

3* V rovině jsou dány dva různé body A, M o vzdálenosti d . Dále je dáno kladné číslo v . V této rovině sestrojte kosočtverec $ABCD$ o výšce v tak, aby bod M byl středem jeho strany BC . Najděte podmínku řešitelnosti a zjistěte počet řešení. Může být řešením místo kosočtverce čtverec?

4* Zjistíte, pro které reálné čísla x je definovaná funkcia

$$y = \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x|} + \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|} - \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x|} - \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|}.$$

X. ročník 1960/61

1* Je dána posloupnost

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5,

Vypočítejte její tisícý člen.

2. Daný je pravouhlý rovnoramenný trojúhelník APQ s přeponou AP . Zostrojte štvorec $ABCD$ tak, aby priamky BC, CD prechádzali po

radě bodmi P, Q. Vyjadrite dĺžku strany štvorca ABCD pomocou dĺžky a odvesny daného trojuholníka.

3* Dva cyklisté vyjedou súčasne z téhož miesta kruhové dráhy a jezdí po této dráze v opačných smyslech, prvni stálou rychlostí c_1 m/sek, druhý stálou rychlostí c_2 m/sek. Kolikrát se potkají v době, v které prvni cyklista objede kruhovou dráhu n -krát? Proveďte výpočet pro $c_1 = 10$, $c_2 = 7$, $n = 11$.

4. Je dán čtverec ABCD, jehož strana má délku 1. Vrchol X proměnného rovnostranného trojúhelníka XYZ leží na polopřímce AB, vrchol Y na úsečce AD, vrchol Z na polopřímce DC. Zjistěte, jak závisí délka strany trojúhelníka XYZ na vzdálenosti AX. Odtud vypočtete, který z trojúhelníků XYZ má nejmenší a který má největší obsah.

XI. ročník 1961/62

1* Je daný trojčlen

$$2x^2 - x - 36.$$

Určte všetky celé čísla x , pre ktoré sa hodnota tohto trojčlena rovná druhej mocnine prvočísla.

2. V rovine je daná sústava pravouhlých súradníc x, y . Vyšetrite množinu všetkých bodov, ktorých súradnice x, y vyhovujú sústave nerovníc

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi,$$

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} \leq y \leq \sqrt{1 - \cos 2x} - \sqrt{1 + \cos 2x}.$$

Načrtnite obraz tejto množiny.

3. Sú dané dve navzájom kolmé mimobežky PM, QN, kde priamka PQ je kolmá ku každej z oboch mimobežiek. V rovine σ kolmej k úsečke PQ a prechádzajúcej jej stredom S je daná kružnica $k \equiv (S, r)$.

Dokážte, že každá úsečka XY, ktorej krajné body X, Y ležia v uvedenom poradí na mimobežkách PM, QN a ktorá obsahuje bod kružnice k , má tú istú dĺžku. Vyjadrite túto dĺžku pomocou polomeru r a dĺžky $v = |PQ|$.

Aký útvar vyplnia krajné body X všetkých takých úsečiek XY?

4* V rovine je daná kružnica $k \equiv (S, r)$. Okrem toho je daný bod $A \notin S$, ktorý leží vo vnútri kružnice k . Svetelný lúč vychádzajúci z daného bodu A sa odráža od kružnice k v určitom bode B, potom sa odráža od kružnice k v určitom bode C a stadiaľ sa vracia naspäť do bodu A.

Vypočítajte hodnotu funkcie sinus pre dutý uhol $\angle SAB$ pomocou čísel $r, d = |SA|$ a rozhodnite o riešiteľnosti úlohy.

XII. ročník 1962/63

1. V kvádri $ABCD A'B'C'D'$ /kde $ABCD$ je obdĺžnik a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ je $|AA'| = d$, $\angle ABD' = \alpha$, $\angle A'D'B = \beta$.

Vypočítajte zostávajúce dva rozmery kvádra, ak je dané číslo d a oba ostré uhly α, β . Určte podmienky riešiteľnosti.

2* Dané párne prirodzené číslo $2k$ rozložte na súčet dvoch nesúdeliteľných prirodzených čísel x, y tak, aby súčin xy bol najväčší možný.

3. V rovine je daná priamka MN . Uvažujme o dvojici kružníc k_1, k_2 , ktoré sa priamky MN dotýkajú v uvedenom poradí v bodoch M, N a pritom majú vzájomný vonkajší dotyk. Označme X stred úsečky PQ , kde P, Q sú dotykové body druhej spoločnej vonkajšej dotýčnice kružníc k_1, k_2 .

Nájdite množinu takých bodov X pre všetky dvojice kružníc uvedených vlastností.

4. Sú dané dve kvadratické rovnice

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + cx + d = 0$$

s reálnymi koeficientami. Nájdite nutné a postačujúce podmienky, ktorým majú vyhovovať koeficienty daných rovníc, aby obe rovnice mali jeden spoločný kladný koreň a aby zostávajúci koreň prvej rovnice bol väčší než zostávajúci koreň druhej rovnice.

XIII. ročník 1963/64

1* Dekadický zápis čísla $11^{100} - 1$ končí štvorčíslom 6000 a dané číslo je tiež deliteľné číslom 6000. Dokážte.

2. Sú dané dve mimobežky $p = PP', q = QQ'$. Bod X so začiatočnou polohou P sa pohybuje po polpriamke PP' konštantnou rýchlosťou c_1 a bod Y so začiatočnou polohou Q sa pohybuje po polpriamke QQ' konštantnou rýchlosťou c_2 . Oba body X, Y sa dajú do pohybu súčasne.

Dokážte, že stred Z úsečky XY leží stále na istej polpriamke RR' , kde R je stred úsečky PQ .

3* Určte všetky hodnoty parametra α z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, pre ktoré má rovnica

$$(2 \cos \alpha - 1)x^2 + 4x + 4 \cos \alpha + 2 = 0$$

kladný koreň x_1 , zatiaľ čo druhý koreň x_2 , pokiaľ existuje a je rôzny od x_1 , nie je kladný.

4. V rovine sú dané body A, S tak, že $a = |AS| > 0$. Ďalej sú dané kladné čísla b, c, pre ktoré platí $b < a < c$.

Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC tak, aby jeho vrcholy B, C mali od bodu S v uvedenom poradí vzdialenosti b, c. Udaťte podmienky riešiteľnosti pomocou čísel a, b, c.

XIV. ročník 1964/65

1* Ak je n celé nezáporné číslo, potom číslo

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

je deliteľné devätnástimi. Dokážte.

2. V rovine je daná úsečka AM dĺžky d. Ďalej je dané kladné číslo v. Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB, ktorého výška kolmá k prepone má dĺžku v a ktorého odvesnu BC rozdeľuje bod M v pomere $|MB| : |MC| = 2 : 3$. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na čísla d, v.

3* V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 2x - 1} = p,$$

kde p je dané reálne číslo. Urobte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na číslo p.

4. Nádobu tvaru dutej kocky je umiestnená tak, že jej telesová uhlopriečka AP je v zvislej polohe, pričom platí $|AP| = 1$. V nádobe je voda. Časť telesovej uhlopriečky AP, ktorá je ponorená vo vode, má dĺžku x. Vyjadrite objem y vody v nádobe pomocou čísla x pre tieto dva prípady:

$$a/ \quad 0 < x \leq \frac{1}{3};$$

$$b/ \quad \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}.$$

XV. ročník 1965/66

1. Je daná sústava nerovníc

$$y - x \geq |x + 1| - |x - 1|,$$

$$|y - x| - y + x \geq 2.$$

Znárodnite riešenie každej z daných nerovníc v rovine a určte všetky riešenia úlohy.

2* V rovine je daných n kružníc, z ktorých každé dve sa pretínajú práve v dvoch bodoch a žiadnym bodom neprechádzajú tri z týchto kružníc. Určte celkový počet častí, na ktoré delí daná sústava kružníc rovinu. /Např. 3 kružnice uvedených vlastností delia rovinu na 8 častí./

3. Je daný štvorec $ABCD$ so stredom S a stranou $s = |AB| = 1$. Ďalej sú dané body E, F ležiace v uvedenom poradí na priamkach BC, AD vo vnútri polroviny opačnej k CDA . Určte na základe výpočtu všetky také trojuholníky XYZ , ktorých vrcholy X, Y, Z ležia v uvedenom poradí na úsečkách CD, AD, BC a priamky XY, YZ, ZX prechádzajú v uvedenom poradí bodmi E, S, F .

4. V priestore sú umiestnené dva trojuholníky ABC a ABD so spoločnou stranou dĺžky c . Trojuholník ABC je pravouhlý s preponou AB , trojuholník ABD je rovnostranný, roviny ABC, ABD majú odchýlku φ .

a/ Vyjadrite vzdialenosť bodov C, D pomocou dĺžok strán oboch trojuholníkov a čísla φ . Určte túto vzdialenosť konštrukciou.

b/ Nájdite takú odchýlku φ , pre ktorú štvorsten $ABCD$ má štyri zhodné hrany.

XVI. ročník 1966/67

1. Určte všetky také trojice komplexných čísel a, b, c , aby rovnica

$$x^4 - ax^3 - bx + c = 0$$

mala korene a, b, c .

2* Ak pre dĺžky hrán štvorstena $ABCD$ platia vzťahy

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2,$$

potom aspoň jedna z jeho stien je ostroúhlý trojuholník. Dokážte.

3. V tabuľke cyklických permutácií

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & \dots, & n-1, & n & & \\ 2, & 3, & \dots, & n, & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n, & 1, & \dots, & n-2, & n-1 & & \end{array}$$

/ $n \geq 2$ / vynásobíme každé číslo prvého riadku tým číslom k -teho riadku, ktoré je v rovnakom stĺpci. Všetky takto získané súčiny sčítame a hodnotu súčtu označíme s_k /např. $s_2 = 1.2 + 2.3 + \dots + (n-1).n + n.1$ /.

a/ Odvoďte vzťah, ktorý platí medzi s_{k-1} a s_k a z neho

vzorec pre s_k .

b/ Zistite, pre ktoré k je pri danom n súčet s_k najmenší, a vypočítajte tento súčet.

4. Do kružnice k je vpísaný ostrouhlý trojuholník ABC . Priamka m je vonkajšou priamkou kružnice k , je rovnobežná s BC a pretína polpriamku AB v bode D .

a/ Ak bod X kružnice k leží vo vnútri toho oblúka BC , ktorý neobsahuje bod A a Y je priesečník priamok CX , m , potom body A , D , X , Y ležia na nejakej kružnici ω . Dokážte.

b/ Vyšetrite vzájomnú polohu kružnice ω a priamky m v prípade, keď body C , D , X ležia v priamke.

XVII. ročník 1967/68

1. Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ / $n > 2$ / sú reálne čísla, z ktorých najviac jedno sa rovná nule. Riešte v obore reálnych čísel sústavu

$$x_1 x_2 = a_1,$$

$$x_2 x_3 = a_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_{n-1} x_n = a_{n-1},$$

$$x_n x_1 = a_n.$$

2* Ak je n celé číslo, potom číslo

$$a_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

je celé. Dokážte a vyšetrite, pre ktoré n je a_n deliteľné tromi.

3. V rovine sú dané dve zhodné úsečky AB, CD ; priamky AB, CD sú rôznobežné. Vyšetrite množinu všetkých bodov S tejto vlastnosti: súmernosť podľa stredu S prevedie úsečku AB na úsečku súmerne združenú s úsečkou CD podľa vhodnej osi o .

4* V priestore sú dané štyri rôzne body A, B, C, D také, že $AC \perp BD$ a $AD \perp BC$. Potom existuje guľová plocha, ktorá prechádza stredmi všetkých úsečiek AB, AC, AD, BD, BC, CD . Dokážte.

XVIII. ročník 1969/70

1* Určte všetky dvojice racionálnych čísel x, y , pre ktoré platí

$$(x + y\sqrt{5})^2 = 7 + 3\sqrt{5}.$$

2. V rovine leží päť bodov O, A, B, C, D , pre vzdialenosti ktorých

platí $|OA| \leq |OB| \leq |OC| \leq |OD|$. Dokážte, že pre obsah P konvexného štvoruholníka, ktorého vrcholmi sú body A, B, C, D , vždy platí

$$P \leq \frac{1}{2} (|OA| + |OD|) (|OB| + |OC|)$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

3. Nech p je prvočíslo. Koľko existuje rôznych postupností prirodzených čísel

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

takých, že pre každé prirodzené číslo $n = 1, 2, 3, \dots$ platí

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \dots + \frac{a_0}{a_n} + \frac{p}{a_{n+1}} = 1 ?$$

4* Určte všetky komplexné čísla z , ktoré vyhovujú nerovnici

$$|z - |z + |z|| - |z| \sqrt{3} \geq 0$$

a zobrazte ich v rovine komplexných čísel.

5. V rovine sú dané priamky p, q na seba kolmé a bod A , ktorý neleží na žiadnej z nich. Označme vzdialenosti bodu X danej roviny od priamok p, q a bodu A v uvedenom poradí u, v, t . Určte množinu všetkých takých bodov X , pre ktoré platí $t = \sqrt{uv}$. /Návod: zvoľte osi daných dvoch rôznobežiek za osi súradníc./

6. Je daná guľová plocha s polomerom dĺžky 1. Na tejto guľovej ploche sú umiestnené zhodné kružnice $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n$ / $n \geq 3$ / s polomerom r . Kružnica k_0 sa dotýka každej z kružníc $k_i, i = 1, 2, \dots, n$ a vzájomne sa dotýkajú taktiež každé dve kružnice k_i, k_{i+1} , pričom kružnice k_{n+1} a k_1 sú totožné. /Pod dotykom dvoch kružníc, ktoré neležia v rovine rozumieme prípad, keď obe kružnice majú jediný spoločný bod a v ňom spoločnú dotýčnicu./

a/ Nájdite vzťah, ktorý platí medzi číslami r, n .

b/ Zistite, pre ktoré n môže nastať popísaná situácia a vypočítajte príslušný polomer r .

XIX. ročník 1970/71.

1* Nech pre prirodzené čísla a, b platí

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1},$$

kde p je prvočíslo väčšie než 2. Potom p je deliteľom čísla a . Dokážte.

2. Steny štvorstena $ABCD$ sú štyri navzájom podobné pravouhlé troj-

uholníky s pravými uhlami pri vrcholoch B, C. Najdlhšia hrana štvorstena má dĺžku 1.

a/ Zistite, či taký štvorsten existuje.

b/ Určte, ktorá jeho hrana je najdlhšia, ktorá hrana je najkratšia a akú má dĺžku.

3. Nájdite všetky reálne čísla x , pre ktoré platí

$$\frac{1}{x + \sqrt{p - x^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{p - x^2}} \geq \frac{1}{p},$$

kde p je dané kladné číslo. Urobte diskusiu riešiteľnosti.

4. Po mori /jeho hladinu považujeme za rovinu/ plávali dve lode konštantnými rýchlosťami pri stálych kurzoch. Ich vzájomná vzdialenosť bola o 09,00 hod. 20 námorných míľ, o 09,35 hod. 15 míľ a o 09,55 hod. 13 míľ.

a/ Zistite, akou funkciou času je druhá mocnina vzdialenosti oboch lodí.

b/ Zistite, kedy boli obe lode k sebe najbližšie a aká bola v tom čase ich vzdialenosť.

5. V rovine sú dané dva rôzne body S, A tak, že $|SA| = 1$ a je dané reálne číslo k . Bod A otočíme okolo stredu S o orientovaný uhol veľkosti φ do polohy A' , k bodu A' zostrojíme jeho obraz A'' v rovnováhlosti so stredom S a s koeficientom rovnováhlosti

$\frac{1}{\cos \varphi - k \sin \varphi}$. Keď nadobúda φ všetky hodnoty, pre ktoré $\cos \varphi - k \sin \varphi \neq 0$, vyplnia body A'' priamku prechádzajúcu bodom A . Dokážte.

6* Nájdite všetky reálne čísla x , pre ktoré platí

$$\sqrt{\lg x - 1} \left[\log_{\lg x} (2 + 4 \cos^2 x) - 2 \right] \geq 0.$$

XX. ročník 1971/72

1. Nech a, b, c sú dané reálne čísla. Dokážte, že existujú nezáporné čísla x, y, z nie všetky rovné nule, ktoré vyhovujú nerovniciam

$$cy - bz \geq 0,$$

$$az - cx \geq 0,$$

$$bx - ay \geq 0.$$

2* K trojuholníku ABC sú na priamke AB zostrojené body $D \neq B$ a $E \neq A$ tak, že $|DA| = |BE| = |AB|$. Určte nutnú a postačujúcu pod-

mienku pre dĺžky úsečiek $a = |BC|$, $b = |AC|$, aby existoval taký trojuholník ABC, že uhol DCE je pravý.

3. Sú dané prirodzené čísla $2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n$, kde $n \geq 96$. Ak ich ľubovoľným spôsobom rozdelíme na dve skupiny, potom vždy aspoň v jednej z nich možno nájsť dve /rôzne/ čísla a súčasne ich súčin. Dokážte. Nájdite príklad, ktorý ukazuje, že tvrdenie úlohy neplatí pre $n = 95$.

4. Dokážte, že existujú reálne čísla A, B tak, že rovnosť

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k-1) = A \operatorname{tg} n + Bn$$

platí pre každé prirodzené číslo n .

5. Je daný trojuholník ABC. Zvolíme bod X úsečky AB a bod $Y \neq X$ polpriamky AC a zostrojíme v rovine ABC rovnostranný trojuholník XYZ. Vyšetrite množinu M vrcholov Z všetkých takto zostrojených trojuholníkov XYZ, keď bod X prebieha úsečku AB a bod Y polpriamku AC. Vyšetrite tiež prípad, keď $\angle BAC = 60^\circ$.

6. Je daný štvorsten ABCD a ľubovoľný jeho vnútorný bod O . Bodom O vedieme priečky rovnobežné s hranami štvorstena, ktorých krajné body ležia v stenách štvorstena. Potom platí, že súčet pomerov dĺžok týchto priečok a dĺžok s nimi rovnobežných hrán štvorstena sa rovná 3. Dokážte.

XXI. ročník 1972/73

1. Dokážte, že pro všechna přirozená čísla $n > 1$ platí

$$\left(1 - \frac{1}{8}\right) \left(1 - \frac{1}{27}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) > \frac{1}{2}.$$

2* Je dána krychle ABCD A'B'C'D'. Budiž X obraz bodu C v některém otočení kolem osy, které převede vrchol A ve vrchol B . Určete množinu všech takových bodů X , které leží na povrchu dané krychle.

3. Nechť pro posloupnost mnohočlenů

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$$

platí

$$P_0(x) = 2, \quad P_1(x) = x$$

a pro všechna $n \geq 1$ vztah

$$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = x P_n(x).$$

a/ Najděte mnohočlen

$$Q_n(x) = P_n^2(x) - x P_n(x) P_{n-1}(x) + P_{n-1}^2(x).$$

pro $n = 1971$.

b/ Vyjádřete mnohočlen $[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)]^2$ pomocí mnohočlenů $P_n(x)$ a $Q_n(x)$.

4. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel a , která mají tuto vlastnost: Pro každé přirozené číslo n je $n^4 + a$ číslo složené. Udejte pět čísel a , která mají uvedenou vlastnost.

5* Kolik dvojic navzájem disjunktních podmnožin má množina o n prvcích?

6. V rovině ρ jsou dány dva různé body A, S . Dále jsou dána kladná čísla d, ω ; $\omega < 180^\circ$. Sestrojte všechny body X roviny ρ , které mají tuto vlastnost: Při otočení v rovině ρ okolo středu S v kladném smyslu o úhel velikosti ω° přejde bod X do takového bodu X' , že $XX' = d$ a bod A leží na úsečce XX' . Jakou podmínku musí splňovat čísla d, ω , aby takový bod X existoval?

XXII. ročník 1972/73

1. Platí-li pro velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2,$$

je tento trojúhelník pravoúhlý. Dokažte.

2. Je dán čtyřstěn. Označme v_i / $i = 1, 2, 3, 4$ / jeho výšky a ρ_i / $i = 1, 2, 3, 4$ / poloměry kulových ploch vně vepsaných tomuto čtyřstěnu. Pak platí

$$2\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}\right) = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4};$$

dokažte.

3. Je dána posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ taková, že pro každé $k > 1$ platí $a_{k-1} + a_{k+1} \geq 2a_k$. Pro $n = 1, 2, 3, \dots$ označme

$$A_n = \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Potom pro každé $n > 1$ platí také

$$A_{n-1} + A_{n+1} \geq 2A_n;$$

dokažte.

4* Je-li $n \geq 2$ přirozené číslo, určete

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}].$$

5* Je dána rovina ρ . Jsou-li P, Q dva body z ρ , označme $P + Q$ střed dvojice P, Q a $P.Q$ bod roviny ρ , který dostaneme otočením bodu Q okolo bodu P o 90° v kladném smyslu.

a/ Jsou tyto operace komutativní?

b/ Jsou dány dva pevné body A, B roviny ρ . Rovnice

$$Y . X = (A . X) + B$$

určuje zobrazení $X \mapsto Y$. Určete, o jaké zobrazení jde.

c/ Sestrojte všechny samodružné body tohoto zobrazení.

6* Ve čtverci, jehož strana má délku 50, je dána lomená čára L tak, že každý bod čtverce má od některého bodu lomené čáry L vzdálenost nejvýše 1. Dokažte, že délka čáry L je větší než 1248.

XXIII. ročník 1973/74

1. Je dána posloupnost kladných čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ s touto vlastností: Pro každé $n \geq 2$ platí

$$a_{n+1} \cdot a_{n-1} \geq a_n^2.$$

Označme

$$b_n = (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Potom platí pro každé $n \geq 2$

$$b_{n+1} \cdot b_{n-1} \geq b_n^2;$$

dokažte.

2* Je daný trojúhelník ABC . Pro každý bod X trojúhelníka ABC označme $m(X)$ nejmenší ze vzdáleností XA, XB, XC . Sestrojte všechny body X trojúhelníka ABC , pro které je $m(X)$ maximální.

3. Nechť pro každé přirozené číslo m , které je v dekadickém zápise aspoň dvojciferné a má číslice navzájem různé, znamená $f(m)$ součet všech přirozených čísel různých od m , které z čísla m dostaneme změnou pořadí jeho číslic /např. $f(302) = 320 + 023 + 032 + 230 + 203 = 808/$. Najděte všechna přirozená čísla x , pro která platí

$$f(x) = 138012.$$

4. Nechť M je množina všech polynomických funkcí f stupně nejvýše třetího

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

pro které platí

$$\forall x \in \langle -1, 1 \rangle ; |f(x)| \leq 1.$$

Dokažte, že existuje kladné číslo k tak, že

$$\forall f \in M ; |a| \leq k.$$

Určete nejmenší kladné číslo k této vlastnosti.

5. Je dána kružnice a do ní je vepsán šestiúhelník ABCDEF takový, že

$$AB = BC, \quad CD = DE, \quad EF = FA.$$

Dokažte, že obsah trojúhelníka ACE není větší než obsah trojúhelníka BDF. Kdy platí rovnost?

6. V rovině ρ je dán jednotkový čtverec Q . Označme Q_X čtverec, který vznikne otočením čtverce Q kolem bodu X roviny ρ o pravý úhel v kladném smyslu. Určete množinu všech takových bodů X roviny ρ , pro které je obsah sjednocení $Q \cup Q_X$ roven nejvýše 1,5.

XXIV. ročník 1974/75

1. Je-li T ostroúhlý trojúhelník o obsahu 1, pak existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož obsah nepřevyšuje $\sqrt{3}$ a který trojúhelník T obsahuje. Dokažte.

2*. Dokažte, že soustava rovnic

$$[x]^2 + [y] = 0 \quad 3x + y = 2$$

má nekonečně mnoho řešení a že pro všechna její řešení platí

$$0 < x < 4, \quad -9 \leq y \leq 1.$$

Přitom $[\alpha]$ /celá část z α / značí celé číslo, pro které platí

$$\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha.$$

3. Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$x_1(x_6 + x_2) = x_3 + x_5,$$

$$x_2(x_1 + x_3) = x_4 + x_6,$$

$$x_3(x_2 + x_4) = x_5 + x_1,$$

$$x_4(x_3 + x_5) = x_6 + x_2,$$

$$x_5(x_4 + x_6) = x_1 + x_3,$$

$$x_6(x_5 + x_1) = x_2 + x_4$$

s neznámými $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

4*. Najděte všechny takové hodnoty parametru p , aby rovnice

$$|x - 2| + |y - 3| + y = p$$

byla rovnicí nějaké polopřímky v rovině x, y .

5. Najděte množinu vrcholů A všech rovnoramenných trojúhelníků ABC s hlavním vrcholem B , jejichž strana BC je obsažena v daném čtverci $P_1P_2P_3P_4$.

6*. Nechť M je množina uspořádaných dvojic (x, y) reálných čísel těchto vlastností:

medzi nimi existuje päť takých, ktoré ležia vo vnútri gule s polomerom $\frac{1}{9}$.

2. Sú dané kladné čísla p a q . Zostrojte pravouhlý rovnobežník ABCD tak, aby platilo $|AE| = p$, $|AF| = q$, kde E a F sú v uvedenom poradí stredy strán BC a CD. Udajte podmienky riešiteľnosti.

3. Vyšetrite a v Gaussovej rovine komplexných čísel graficky znázornite množinu hodnôt, ktoré môže nadobúdať súčet $S = Z + W$ dvoch komplexných jednotiek Z a W , pre ktoré zároveň platí:

$$\operatorname{Im} Z \geq 0, \quad \operatorname{Re} W \geq 0.$$

/Pozn.: $\operatorname{Im} Z$ znamená imaginárnu časť čísla Z , $\operatorname{Re} W$ vyjadruje reálnu časť čísla W ./

4*. Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{5}{12}, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 45. \end{aligned}$$

5*. Na priamke sú dané navzájom rôzne body $A_1, A_2, \dots, A_n$. Každý z nich označíme práve jednou zo štyroch farieb tak, aby sme každú farbu použili. Dokážte, že potom v danej priamke existuje úsečka, ktorá obsahuje práve po jednom bode niektorých dvoch z uvedených farieb a aspoň po jednom bode oboch zostávajúcich farieb.

6. Je daná kocka ABCD A'B'C'D', AA' || BB' || CC' || DD'. Stred steny ABCD označme S. Určte všetky body X, ktoré majú súčasne tieto dve vlastnosti:

1. X patrí niektorej hrane danej kocky;
2. štvorsteny ABDX a CB'SX majú objemy rovnako veľké.

XXVII. ročník 1977/78

1. Nech n je prirodzené číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$\begin{aligned} \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)} &\geq \\ &\geq \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \dots + \sqrt{a_n b_n}. \end{aligned}$$

Ďalej dokážte, že rovnosť nastane práve vtedy, keď

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

2. Nájdite /aspoň jednu/ dvojicu čísel k a q tak, aby pre všetky $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platilo

$$\left| \sqrt{1-x^2} - kx - q \right| \leq \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1) .$$

3. Nech α, β, γ sú vnútorné uhly trojuholníka. Vyšetrujme sústavu rovníc

$$x \cos \beta + \frac{1}{z} \cos \alpha = 1 ,$$

$$y \cos \gamma + \frac{1}{x} \cos \beta = 1 ,$$

$$z \cos \alpha + \frac{1}{y} \cos \gamma = 1 .$$

a/ Ukážte, že danej sústave vyhovujú čísla $x = \sin \alpha / \sin \gamma$, $y = \sin \beta / \sin \alpha$, $z = \sin \gamma / \sin \beta$;

b/ nájdite všetky riešenia tejto sústavy.

4*. Existuje štvorsten ABCD, v ktorom súčet dĺžok hrán AB, BC, CD a AD je 12 cm a ktorého objem je väčší alebo rovný $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$?

5*. Je daný rovnoramenný lichobežník ABCD. Nech A', B', C', D' sú v uvedenom poradí stredy kružníc vpísaných trojuholníkom BCD, CAD, ABD, ABC. Potom body A', B', C', D' sú vrcholmi pravouhlého rovnobežníka. Dokážte.

6. Dokážte, že číslo

$$p_n = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n - 2$$

je prirodzené pre každé $n = 1, 2, 3, \dots$. Ďalej dokážte, že pre každé nepárne n je $p_n = r^2$ a pre každé párne n je $p_n = 5s^2$, kde r, s sú vhodné prirodzené čísla.

XXVIII. ročník 1978/79

1. Nech n je dané prirodzené číslo. Určte počet usporiadaných trojíc x, y, z nezáporných celých čísel, ktoré vyhovujú rovnici

$$x + 2y + 5z = 10n .$$

2. Je daný kváder Q s rozmermi a, b, c , $a < b < c$. Nájdite veľkosť hrany kocky K , ktorá má s daným kvádom rovnobežné steny a spoločný stred tak, aby objem rozdielu množín $Q \cup K$ a $Q \cap K$ bol minimálny.

3*. Ak v štvoruholníku ABCD, ktorého vrcholy ležia na kružnici s polomerom 1 platí $|AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| \geq 4$, potom ABCD je štvorec. Dokážte. /Môžete použiť Ptolemaiov vzorec $|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|$./

4*. Nech n je ľubovoľné prirodzené číslo. Nájdite všetky n -tice reálnych čísel $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, pre ktoré platí

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_{n-i+1}.$$

5. Je daný trojuholník ABC s veľkosťami strán $a \geq b \geq c$. Medzi všetkými dvojicami bodov X, Y na hranici trojuholníka ABC, ktoré delia túto hranicu na dve časti rovnakej dĺžky, nájdite všetky také, pre ktoré je vzdialenosť $|XY|$ maximálna.

6*. Nájdite všetky prirodzené čísla n , $n \leq 10^7$, pre ktoré platí: ak prirodzené číslo m , $1 < m < n$, je nesúdeliteľné s číslom n , potom m je prvočíslo.

XXIX. ročník 1979/80

1. Dokážte, že pre každé celé nezáporné číslo k je súčin

$$(k+1)(k+2) \dots (k+1980)$$

deliteľný číslom 1980^{197} .

2*. Nájdite veľkosti strán rovnoramenného lichobežníka, ktorého najdlhšia strana meria 13 cm, obvod 28 cm a obsah 27 cm^2 . Existuje taký lichobežník, ak predpíšeme obsah $27,001 \text{ cm}^2$?

3*. Množina M vznikla z roviny vybratím troch bodov A, B, C, ktoré sú vrcholmi trojuholníka. Aký je najmenší počet konvexných množín, ktorých zjednotením je množina M ?

4. Nech $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ sú reálne čísla,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|,$$

x ľubovoľné reálne číslo, n číslo párne. Nájdite minimum funkcie f .

5. Riešte v obore celých čísel sústavu nerovníc

$$3x^2 + 2yz \leq 1 + y^2,$$

$$3y^2 + 2zx \leq 1 + z^2,$$

$$3z^2 + 2xy \leq 1 + x^2.$$

6*. Nech M je množina piatich bodov v priestore, z ktorých žiadne štyri neležia v rovine. Nech je ďalej R množina siedmich rovín s vlastnosťami:

a/ Každá rovina z množiny R obsahuje aspoň jeden bod množiny M .

b/ Žiadny z bodov množiny M neleží v piatich rovinách množiny R .

Potom existujú také dva rôzne body P, Q , $P \in M$, $Q \in M$, že priamka PQ nie je priesečnicou žiadnych dvoch rovín z množiny R . Dokážte.

Ř e š e n í

I.2 Označíme L, S liché a /nenulové/ sudé číslo. Vytvoříme začátek /5 řádků/ tabulky:

1.	L L L
2.	L S L S L
3.	L L S L S L L
4.	L S S S L S S S L
5.	L L L S L L L S L L L
	

První tři čísla 1. a 5. řádku jsou táž; proto se trojčíslí v 1. až 4. řádku opakuji, a tím je dokázáno tvrzení úlohy.

II.1 $|a| > 2$, útvar je bod 0 ;

$|a| = 2$, útvar je poloosa reálných čísel, a to kladná pro $a = 2$ a záporná pro $a = -2$;

$0 \leq |a| < 2$, útvar jsou dvě různé polopřímky souměrně sdružené vzhledem k ose reálných čísel; pro $a = 0$ je útvar dvojice opačných poloos imaginárních čísel.

II.3 Použijeme indukce a nerovnosti $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \geq 2$, která platí pro

každá dvě kladná čísla a_i, a_j ; rovnost nastane právě tehdy, když je $a_i = a_j$.

Pro $n = 2$ platí dokazovaná nerovnost, jak snadno nahlédneme; rovnost nastane právě tehdy, když je $a_1 = a_2$. Označme $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $t = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ a předpokládejme, že platí $st \geq n^2$; přitom předpokládejme, že $st = n^2$ právě když je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Provedeme tento výpočet

$$\begin{aligned}
 (s + a_{n+1}) \left(t + \frac{1}{a_{n+1}} \right) &= st + \frac{s}{a_{n+1}} + a_{n+1}t + 1 = \\
 &= st + \left(\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} \right) + \left(\frac{a_2}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_2} \right) + \dots + \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) + \\
 &\quad + 1 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.
 \end{aligned}$$

Tím je odůvodněn indukční krok a věta je dokázána.

III.2 Kořeny rovnice jsou

$$/x/ \quad z_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

$$/xx/ \quad z_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Protože trojúhelník OZ_1Z_2 je pravoúhlý rovnoramenný /kde $\angle Z_1OZ_2 = 90^\circ$ /, musí platit

$$Z_1 = iZ_2 \quad \text{nebo} \quad Z_1 = -iZ_2.$$

Případ 1. Pro $Z_1 = iZ_2$ je

$$-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -i\frac{a}{2} - i\sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

a odtud postupně plyne

$$\frac{a}{2}(1-i) = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \cdot (1+i),$$

$$\frac{a}{2} = \frac{1+i}{1-i} \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

$$\frac{a}{2} = i \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

$$\frac{a^2}{4} = -\frac{a^2}{4} + b,$$

tj.

$$a^2 = 2b.$$

Případ 2. Pro $Z_1 = -iZ_2$ vyplývá stejným způsobem $a^2 = 2b$. Ze vztahů $/x/$, $/xx/$ vyplývá, že aspoň jedno z čísel a, b je různé od nuly, jinak by se kořeny Z_1, Z_2 rovnice $Z^2 + aZ + b$ rovnaly nule a útvar OZ_1Z_2 by nebyl trojúhelník. Platí tedy $a^2 = 2b \neq 0$, což jsme měli dokázat.

Obrácená věta zní: Je-li $a^2 = 2b \neq 0$, tvoří oba obrazy kořenů rovnice $Z^2 + aZ + b = 0$ a počátek souřadnic trojúhelník s pravým úhlem při počátku. Dosaďme do $/x/$, $/xx/$ za $b = \frac{a^2}{2}$. Dostaneme

$$Z_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{-\frac{a^2}{4}}, \quad Z_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{-\frac{a^2}{4}}$$

neboli

$$Z_1 = -\frac{a}{2}(1+i), \quad Z_2 = -\frac{a}{2}(1-i).$$

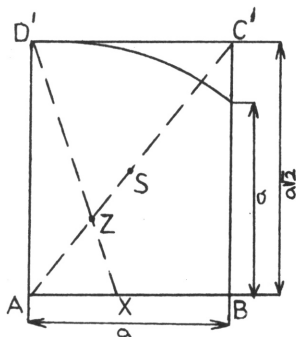
Platí $Z_1 = iZ_2$, je i $a \neq 0$, $Z_1 \neq 0$, $Z_2 \neq 0$ a trojúhelník OZ_1Z_2 má při vrcholu O pravý úhel.

III.4 a/ Všecky čtyřúhelníky $B'D'YX$ jsou rovnoramenné lichoběžníky, neboť je $B'D' \parallel XY$ /průsečnice roviny $B'D'X$ s oběma rovnoběžnými rovinami $A'B'C'D'$ a $ABCD$ /. $B'D' \neq XY$ /je $XY < BD = B'D'$ / a $B'X = D'Y$, neboť je $\triangle BB'X \cong \triangle DD'Y$ /sus/ a $XY \parallel BD$ /. Rovina ACC' je rovinou souměrnosti každého lichoběžníka /je $B'D' \perp ACC'$, $XY \parallel B'D'$, tj. $XY \perp ACC'$, přičemž jsou $B'D', XY$ půleny rovinou ACC' /. Průsečík Z úhlopříček $B'Y, D'X$ leží tedy v rovině ACC' a současně náleží vnitřku úsečky $D'X$, tj. náleží vnitřku $\triangle D'AB$. Společné

body roviny ACC' a vnitřku $\triangle D'AB$ vyplní vnitřek úsečky AS , kde S je střed krychle.

Obráceně každý bod Z vnitřku úsečky AS je průsečíkem úhlopříček některého lichoběžníka $B'D'YX$, neboť přímka $D'Z$ protne úsečku AB v jejím vnitřním bodě X .

b/ Je-li $D'Z = 2XZ$ /obr. 8/, pak z podobnosti trojúhelníků AXZ , $C'D'Z$ plyne, že $C'Z = 2 \cdot AZ$. Průsečík Z úhlopříček hledaného čtyřúhelníka tedy dělí tělesovou úhlopříčku AC' v poměru $1:2$, tj. $C'Z = 2AZ$.



Obr. 8

Dále není možné, aby platilo $XZ = 2 \cdot D'Z$, neboť je

$$AX < C'D' = AB,$$

a tedy vzhledem k podobnosti trojúhelníků AXZ , $C'D'Z$ také $XZ < D'Z$. Postup lze zřejmě obrátit.

IV.3 Vrcholy daného sedmnáctiúhelníka jsou obrazy komplexních kořenů rovnice

$$z^{17} = 1,$$

neboli jsou to čísla

$$/x/ \quad z_k = \cos \frac{k \cdot 360^\circ}{17} + i \sin \frac{k \cdot 360^\circ}{17},$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, 16$. Označme

$$/xx/ \quad x_k = \frac{k \cdot 360^\circ}{17},$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, 16$; pak je

$$z_k = \cos x_k + i \sin x_k.$$

Označme dále m kružnici o středu $[\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}]$ a poloměru 1 . Úloha žádá vyhledat všechny ty body $[z_k]$, které mají od středu kružnice m vzdálenost menší než 1 , tj. všechny kořeny z_k rovnice $z^{17} = 1$,

pro které platí

$$/xxx/ \quad \left| z_k - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + i \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \right| < 1 .$$

Výpočtem zjistíme, že vztah /xxx/ můžeme nahradit vzhledem k /x/ vztahem

$$\left(\cos x_k - \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 + \left(\sin x_k - \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 < 1 .$$

Po úpravě dostaneme

$$\cos^2 x_k + \sin^2 x_k - 2 \sqrt{\frac{3}{2}} (\cos x_k - \sin x_k) + 2 \cdot \frac{3}{2} < 1$$

a dále

$$2 \sqrt{\frac{3}{2}} (\cos x_k + \sin x_k) > 2 \cdot \frac{3}{2}$$

a konečně

$$/xxxx/ \quad \cos x_k + \sin x_k > \sqrt{\frac{3}{2}} .$$

Podle známého vzorce dostaneme

$$\cos (45^\circ - x_k) > \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

neboli

$$\sin (45^\circ + x_k) > \frac{1}{2} \sqrt{3} .$$

Protože $\frac{1}{2} \sqrt{3} = \sin 60^\circ = \sin 120^\circ = \sin 420^\circ = \sin 480^\circ$, leží číslo $(45^\circ + x_k)$ buď v intervalu $(60^\circ, 120^\circ)$ nebo v intervalu $(420^\circ, 480^\circ)$; druhý interval zřejmě nepřichází v úvahu, protože platí $k < 17$. Proto musí být

$$60^\circ < 45^\circ + x_k < 120^\circ$$

neboli

$$15^\circ < x_k < 75^\circ .$$

Odtud dostaneme vzhledem ke vztahu /xx/

$$\frac{17}{24} < k < \frac{85}{24} ,$$

tj. $k = 1, k = 2, k = 3$. Snadno se přesvědčíme, že vrcholy $[z_1], [z_2], [z_3]$ daného sedmnáctiúhelníka skutečně vyhovují úloze.

IV.4 Je-li x kořen rovnice

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0 ,$$

vyhovuje také rovnici

$$(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b) = 0 ,$$

a tedy také rovnici

$$/x/ \quad 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0 .$$

Tato kvadratická rovnice má diskriminant

$$D = 4(a+b+c)^2 - 12(ab+bc+ca)$$

po úpravě

$$D = 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \\ = 2(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca),$$

tj.

$$D = 2[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] > 0,$$

neboť $a \neq b \neq c \neq a$.

Protože a, b, c jsou reálná čísla, má rovnice /x/ dva reálné kořeny. Tyto kořeny vyhovují také dané rovnici, neboť jsou vesměs různé od a, b, c . Dokážeme nepřímou např., že je kořen $\frac{2(a + b + c) + \sqrt{D}}{6}$ různý od a .

Připustíme, že je

$$\frac{1}{3}(a + b + c) + \frac{1}{3}\sqrt{D} = a.$$

Pak je

$$a + b + c + \sqrt{D} = 3a$$

neboli

$$\sqrt{D} = 2a - b - c.$$

Po umocnění

$$4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 4ac + 2bc$$

neboli

$$3b^2 + 3c^2 - 6bc = 0$$

neboli

$$3(b - c)^2 = 0;$$

to je však ve sporu s předpokladem $b \neq c$.

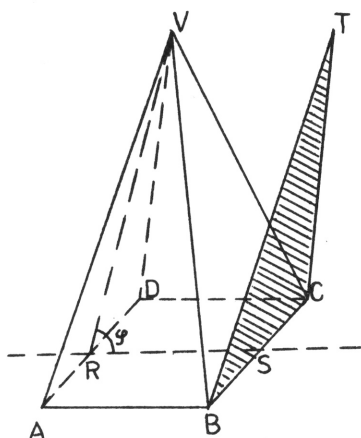
V.4 Každý z trojúhelníků BXY je pravouhlý / $\angle BXY = 90^\circ$ / a rovno-
ramenný / $BX = XY$ /. Proto je

$$\angle YBX = 45^\circ.$$

Bod Y vznikne z bodu X tím, že aplikujeme na X stejnoolehlost $\mathcal{O}$ se středem B a koeficientem $\sqrt{2}$; tím vznikne bod $Z = \mathcal{O}(X)$. Bod Y vznikne z bodu Z tím, že aplikujeme na Z otočení R se středem B o úhel 45° ve vhodném smyslu otočení. Podobnost $\mathcal{O}R$ převede otevřený oblouk $\widehat{AB}$ v otevřený oblouk $\widehat{EAB}$.

VI.1 Jde o řešení rovnice $\sqrt{9 - 5p^2} = 3p - 1$. Možná řešení jsou $p = 1$, $p = -\frac{4}{7}$, z nichž číslo $-\frac{4}{7}$ nevyhovuje, neboť $3 \cdot (-\frac{4}{7}) - 1 < 0$. Úloha má jediné řešení $p = 1$.

VI.2 Výpočet vzdálenosti mimoběžek VA, BC. Předpokládáme znalost věty o vzdálenosti dvou mimoběžek: vzdálenost mimoběžek p, q je vzdálenost dvou rovin ρ, σ , kde ρ obsahuje přímku p a je



Obr. 9

rovnoběžná s přímkou q a σ obsahuje přímku q a je rovnoběžná s přímkou p .

V našem případě je $p = AV$, $q = BC$, $\rho = ADV$, $\sigma = BCT$ /vyšrafovaná rovina/. Vzdálenost rovin ρ , σ se objevuje v $\triangle RSV$, kde R , S jsou po řadě středy hran AD , BC . Trojúhelník RSV je rovnoramenný se základnou $RS = 2d$ a s úhly velikosti φ při základně. Odtud plyne

$$v = 2d \sin \varphi.$$

VI.3 Vyjdeme ze vzorce

$$\cotg 2\alpha = \frac{\cotg^2 \alpha - 1}{2 \cotg \alpha}.$$

Nechť $\cotg \alpha = m$, $\cotg 2\alpha = n$ jsou celá čísla. Pak je

$$m^2 - 1 = 2mn,$$

tj.

$$m(m - 2n) = 1.$$

Je tedy buď

$$m = 1, \quad m - 2n = 0$$

nebo

$$m = -1, \quad m - 2n = -1.$$

Je tedy buď $m = 1$, $n = 0$ nebo $m = -1$, $n = 0$. Odtud dostáváme $\cotg \alpha = \pm 1$, $\cotg 2\alpha = 0$, $\alpha = 45^\circ + k \cdot 90^\circ$, kde k je celé číslo.

VII.1 Číslo x , p pokládejme za proměnné souřadnice. Každá dvojice $[x, p]$, která vyhovuje rovnici

$$/x/ \quad x + \sqrt{2p - x^2} = 8,$$

vyhovuje i rovnici

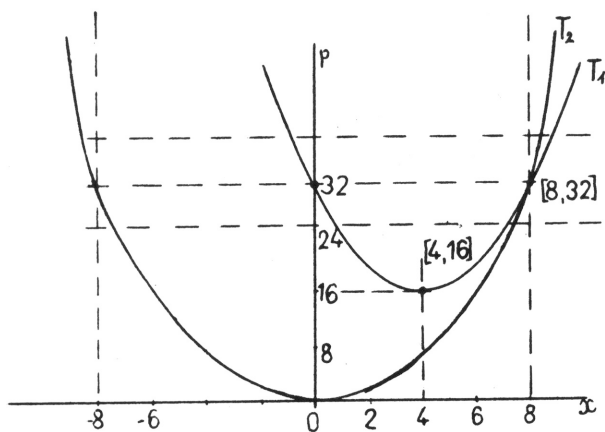
$$/xx/ \quad x^2 - 8x + (32 - p) = 0.$$

Množina M , která je grafem rovnice $/xx/$, obsahuje množinu M' , která je grafem rovnice $/x/$ neboli rovnice

$$/xxx/ \quad (x - 4)^2 = p - 16.$$

Graf rovnice $/xxx/$ je parabola, jejíž osa je rovnoběžná s osou p a která má vrchol $[4, 16]$. Omezující podmínky jsou $8 - x \geq 0$ neboli $x \leq 8$ a $2p - x^2 \geq 0$ neboli $p \geq \frac{1}{2}x^2$. Graf rovnice $p = \frac{1}{2}x^2$ je parabola T_2 . Vzhledem k nerovnici $p \geq \frac{1}{2}x^2$ jsou řešení ve vnitřku paraboly T_2 . Z obr. 10 vyčteme:

$p > 32$	jediné řešení
$16 \leq p \leq 32$	dvě řešení
$p = 16$	dvě splývající řešení
$p < 16$	žádné řešení



Obr. 10

VII.3 Zřejmě je $\sqrt{2 + \frac{5}{2} \cos x} \geq 0$, $\sin x \geq 0$, a tedy

$$2 + \frac{5}{2} \cos x \leq \sin^2 x.$$

Po úpravě

$$2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 \leq 0$$

a dále

$$/x/ \quad \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)(\cos x + 2) \leq 0.$$

Z nerovnice $/x/$ plyne buď

$$\cos x + \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{a zároveň} \quad \cos x + 2 \leq 0$$

neboli $\cos x \leq -2$, což nedává žádný kořen dané nerovnice. Nebo z $/x/$ plyne

$$\cos x + \frac{1}{2} \leq 0 \quad \text{a zároveň} \quad \cos x + 2 \geq 0.$$

Je tedy

$$/xx/ \quad -2 \leq \cos x \leq -\frac{1}{2}.$$

Připojíme-li k $/xx/$ ještě podmínky $\sin x \geq 0$, $2 + \frac{5}{2} \cos x \geq 0$ nebo-li $\cos x \geq -\frac{4}{5}$, dostaneme

$$-\frac{4}{5} \leq \cos x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{a zároveň} \quad \sin x \geq 0$$

a pro úhel x

$$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \varphi + 2k\pi \quad /k \text{ číslo celé/}.$$

Přitom úhel φ je určen vztahy $\cos \varphi = -\frac{4}{5}$, $\sin \varphi \geq 0$. Zkouškou ověříme, že tyto úhly x jsou opravdu řešením dané nerovnice.

VIII.1 Hledaný pravoúhlý trojúhelník doplníme na rovnoběžník ABCD a lokalizujeme úsečku $BD = 2t_b$. Úkolem je sestrojit bod A. Označíme T těžiště $\triangle ABC$ a B' střed odvěsny AC. Bod A pak leží jednak na kružnici $m = (T, \frac{2}{3}t_a)$, jednak na Thaletově kružnici k nad průměrem B'D. Diskuse dá podmínku řešitelnosti

$$t_a < 2t_b \quad \text{a zároveň} \quad t_b < 2t_a.$$

VIII.2 Vzhledem k třetí podmínce jsou buď všechna tři čísla a, b, c kladná, nebo je jedno z nich kladné a dvě záporná. Vyvrátíme, že je $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$. Podle druhé podmínky je

$$/x/ \quad ab > -c(a+b).$$

Z první podmínky je

$$a+b > -c$$

a dále

$$(a+b)(-c) > (-c)(-c)$$

neboli

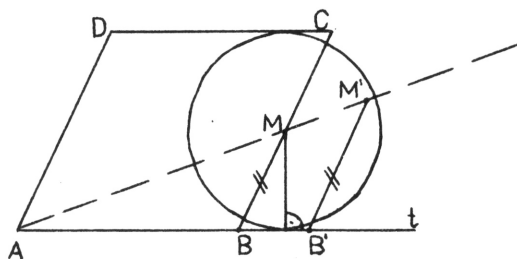
$$-c(a+b) > c^2.$$

Spojením s $/x/$ dostaneme

$$ab > c^2,$$

což je ve sporu se vztahy $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$.

IX.3 Sestrojíme nejprve přímkou, na které leží bod B. Je to tečna t vedená z bodu A ke kružnici $k = (M, \frac{v}{2})$. Na této tečně t zvolíme bod $B' \neq A$ a na přímkě AM sestrojíme bod M' tak, aby



$$AB' = 2B'M'$$

Obr. 11

bylo $AB' = 2B'M$. Rovnoběžka s přímkou BM vedená bodem M protne tečnu t v bodě B . Trojúhelník ABM doplníme na hledaný kosočtverec /obr. 11/. Diskuse ukáže, že podmínka řešitelnosti je

$$2d > v$$

a že úloha má nejvýše 4 řešení. Kosočtverec může přejít ve čtverec, právě když platí

$$2d = \sqrt{5} v .$$

IX.4 Pro existenci odmocnin je nutné a stačí, aby platilo $\frac{x^2}{4} \leq 1$, $\frac{x^2}{2} \leq 1$. Definiční obor je sjednocení množiny všech záporných čísel a všech nezáporných čísel x , pro něž platí

$$a \leq x \leq \sqrt{2} .$$

Vyšetříme obě tyto množiny.

$$a/x \leq 0 . \text{ Označíme } 1 - \frac{x^2}{4} = a; \text{ pak je } 1 - \frac{x^2}{2} = 2a - 1. +/$$

Pak je postupně

$$y = \sqrt{a + \sqrt{2a - 1}} - \sqrt{a - \sqrt{2a - 1}}$$

$$y^2 = a + \sqrt{2a - 1} + a - \sqrt{2a - 1} - 2 \sqrt{(a + \sqrt{2a - 1})(a - \sqrt{2a - 1})}$$

$$y^2 = 2a - 2 \sqrt{a^2 - (2a - 1)}$$

$$y^2 = 2a - 2(1 - a) = 4a - 2 ,$$

neboť $a - 1 \leq 0$. Dále je

$$y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) - 2 \quad \text{čili} \quad x^2 + y^2 = 2 .$$

$$b/x < 0 . \text{ Označíme } 1 + \frac{x^2}{4} = b; \text{ pak je } 1 + \frac{x^2}{2} = 2b - 1.$$

Obdobně jako v odstavci a/ dostaneme

$$y = \sqrt{b + \sqrt{2b - 1}} - \sqrt{b - \sqrt{2b - 1}}$$

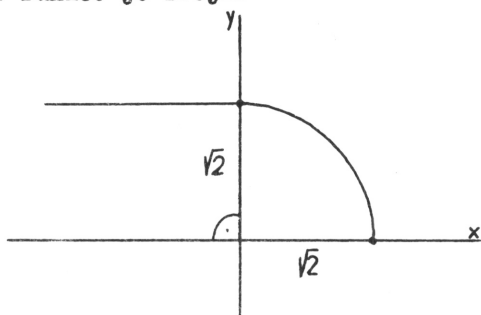
a odtud

$$y^2 = 2b - 2(b - 1) = 2 \quad \text{neboli} \quad y \geq 0 .$$

+/- Počtářský trik.

Je totiž $b - 1 = \frac{x^2}{4} \geq 0$.

Graf funkce je zřejmě



Obr. 12

X.1 Členy dané posloupnosti zařadíme do skupin podle následujícího vzoru:

Členy posloupnosti	1	2, 2	3, 3, 3	4, 4, 4, 4	...	n, n, ..., n
Index skupiny	1	2	3	4	...	n

Index skupiny udává zároveň čísla skupiny i počet členů, které skupina má. Prvních n skupin obsahuje

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$$

členů dané posloupnosti.

Je-li tisící člen posloupnosti v n -té skupině, je $S_n \geq 1000$, neboli

$$\frac{1}{2} n(n + 1) \geq 1000.$$

Po úpravě dostaneme požadavek formulovaný nerovnicí

$$/x/ \quad n^2 + n - 2000 \geq 0.$$

Nerovnice $/x/$ má kořeny

$$n_1 = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{8001}) > 0,$$

$$n_2 = \frac{1}{2} (-1 - \sqrt{8001}) < 0.$$

Zřejmě musí platit $n \geq n_1$. Ale protože je $90 > \sqrt{8001} > 89$ a dále

$$n_1 > \frac{-1 + 89}{2} = 44$$

$$n_1 < \frac{-1 + 90}{2} = 44,5$$

Vztah $n \geq n_1$ platí tedy pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovná číslu 45. Tisící člen je tedy ve skupině S_{45} a je 45.

X.3 Označme T /v sekundách/ čas, který uplynul od startu cyklistů

až do jejich prvního setkání; dále označme o obvod kruhové dráhy; pak platí:

$$Tc_1 + Tc_2 = o$$

neboli

$$/x/ \quad T = \frac{o}{c_1 + c_2}.$$

Za dobu xT , kde x je přirozené číslo, dojde k x setkáním; označíme-li t čas od startu cyklistů až do určitého okamžiku mezi x -tým a $(x+1)$ -ním setkáním, potom platí

$$/xx/ \quad xT \leq t < (x+1)T.$$

Objel-li v okamžiku t první cyklista obvod právě n -krát, pak platí $o \cdot n = c_1 t$, tj.

$$/xxx/ \quad t = \frac{o \cdot n}{c_1}.$$

Dosadíme-li z $/x/$, $/xxx/$ do $/xx/$, dostaneme

$$x \frac{o}{c_1 + c_2} \leq \frac{o \cdot n}{c_1} < (x+1) \frac{o}{c_1 + c_2}$$

a po úpravě

$$x \leq n \frac{c_1 + c_2}{c_1} < x+1$$

neboli

$$x = \left[n \frac{c_1 + c_2}{c_1} \right],$$

kde $[k]$ značí funkci "celá část z čísla k ".

V daném číselném příkladě je

$$x = \left[11 \cdot \frac{17}{10} \right] = [18,7] = 18.$$

Cyklista tedy objel dráhu 18krát, cyklisté se potkali 18krát.

XI.1 Daný trojčlen rozložíme na súčin lineárnych faktorov:

$$2x^2 - x - 36 = (2x - 9)(x + 4).$$

Podmienky úlohy môžu byť zrejme splnené len pre také čísla x , pre ktoré jeden z faktorov rozkladu nadobúda niektorú z hodnôt ± 1 , $\pm p$, $\pm p^2$, kde p je prvočíslo a druhý zároveň v uvedenom poradí hodnotu $\pm p^2$, $\pm p$, ± 1 . Vyšetříme postupne jednotlivé prípady:

a/ V prípade $2x - 9 = 1$, $x + 4 = p^2$ dostaneme z prvej rovnice $x = 5$, čo vyhovuje aj druhej rovnici pre prvočíslo $p = 3$.

b/ Pre $2x - 9 = -1$, $x + 4 = -p^2$ dostaneme z prvej rovnice $x = 4$, čo však nevyhovuje druhej rovnici pre žiadne prvočíslo p .

c/ V prípade $x + 4 = 1$, $2x - 9 = p^2$ dostaneme z prvej rovnice $x = -3$ a z ľavej strany druhej rovnice po dosadení $2x - 9 = -15$, čo nie je druhá mocnina prvočísla.

d/ Ak $x + 4 = -1$, $2x - 9 = -p^2$, dostávame z prvej rovnice $x = -5$ a z druhej po dosadení $2x - 9 = -19$, čo opäť nie je druhá mocnina prvočísla.

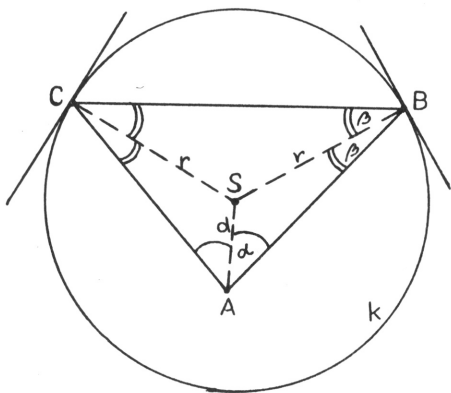
e/ V prípade $x + 4 = \pm p$, $2x - 9 = \pm p$ musí byť $x + 4 = 2x - 9$, z čoho dostávame $x = 13$. Potom však $(x + 4)(2x - 9) = 17^2$, čo je druhá mocnina prvočísla.

Úloha má tedy dve riešenia: $x = 5$, $x = 13$.

XI.4 Pri riešení úlohy vyjdeme zo známeho fyzikálneho zákona, podľa ktorého uhol dopadu a uhol odrazu svetelného lúča sú si rovné. Kolmicou ku krivke odrazu je normála kružnice k , ktorá prechádza jej stredom S . Dráhou svetelného lúča je obvod trojuholníka ABC /obr. 13/. Podľa podmienok úlohy je teda bod S priesečníkom osí uhlov tohto trojuholníka pri vrcholoch B a C a polpriamka AS je osou uhla pri vrchole A . Označme $\angle SAB = \alpha$, $\angle SBA = \beta$ /obr. 13/. Potom z trojuholníka SAB podľa sínusovej vety vyplýva

$$/1/ \quad d \sin \alpha = r \sin \beta.$$

K tomu, aby sme z /1/ určili $\sin \alpha$ pomocou r a d , potrebujeme vyjadriť β pomocou α . Z toho, že trojuholník SBC je rovnoramenný vyplýva, že $\angle SCB = \beta$. Vzhľadom na to, že polpriamka AS je osou uhla pri vrchole A , je zrejme $\angle SAC = \alpha$. Pre veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC teda platí $2\alpha + 4\beta = 180^\circ$ čiže $\alpha = 90^\circ - 2\beta$. Ak túto hodnotu dosadíme za α do /1/, vyjadríme ľahko $\sin \beta$ a po opätovnom dosadení za $\sin \beta$ do /1/ už dostaneme hľadané $\sin \alpha$. Teda



Obr. 13

$$d \sin (90^\circ - 2\beta) = r \sin \beta ,$$

čiže

$$d \cos 2\beta = r \sin \beta ,$$

z čoho

$$d(1 - 2 \sin^2 \beta) = r \sin \beta ,$$

odkiaľ

$$/2/ \quad 2d \sin^2 \beta + r \sin \beta - d = 0 .$$

Pretože podľa predpokladu $d \neq 0$, z /2/ vyplýva

$$/3/ \quad \sin \beta = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 8d^2}}{4d} .$$

Diskriminant rovnice /2/ je zrejme číslo kladné, ale pretože uhol β je dutý, je $\sin \beta > 0$ a z koreňov /3/ tejto podmienky vyhovuje len koreň so znamienkom $+$. Je teda

$$/4/ \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{r^2 + 8d^2} - r}{4d} .$$

Pretože $\sqrt{r^2 + 8d^2} > \sqrt{r^2} = r$, je zlomok v /4/ číslo kladné. Ľahko sa presvedčíme, že musí byť tiež menšie než 1. V opačnom prípade by totiž platilo $\sqrt{r^2 + 8d^2} - r \geq 4d$, z čoho po úprave dostaneme $8d(d + r) \leq 0$, čo nie je možné.

Ak teraz dosadíme zo /4/ do /1/, dostaneme

$$\sin \alpha = r \frac{\sqrt{r^2 + 8d^2} - r}{4d^2} .$$

XII.2 Číslo $2k$, kde k je celé kladné číslo rozložíme na súčet prirodzených čísel x a $y = 2k - x$. Označenie zvolíme tak, aby platilo $x \leq y$. Potom je $xy = x(2k - x) = k^2 - (k - x)^2$. Prirodzené číslo xy je najväčšie práve vtedy, keď je $k - x = 0$ čiže $x = k$. Dostávame tak rozklad $k + k$, ktorý však vyhovuje požiadavke nesúdeliteľnosti oboch sčítancov len pre $k = 1$.

Uvažujme teraz o prípadoch, keď je $k > 1$. Označme $k - x = n$, kde n je prirodzené. Súčin $xy = k^2 - n^2$ bude tým väčší, čím je n menšie. Rozlišujme prípady, keď je k číslo párne, resp. nepárne.

Ak je k párne, potom pre $n = 1$ sú $k - 1$, $k + 1$ nepárne čísla s rozdielom 2. Z toho vyplýva, že majú len spoločného deliteľa 1 a sú teda nesúdeliteľné. V tomto prípade je hľadaným rozkladom $(k + 1) + (k - 1)$.

Nech je $k > 1$ číslo nepárne. V tomto prípade sú čísla $k - 1$, $k + 1$ párne čísla so spoločným deliteľom 2 a nesplňujú tedy podmienku nesúdeliteľnosti. Čísla $k - 2$, $k + 2$ sú však nepárne s rozdielom 4, pričom čísla 2, 4 nie sú zrejme ich deliteľmi. Hľadaným

rozkladom v tomto prípade tedy je $(k + 2) + (k - 2)$.

XIII.1 Keďže je $6\,000 = 3 \cdot 2\,000$, musíme o čísla $N = 11^{100} - 1$ dokázať, že je deliteľné oboma nesúdeliteľnými číslami $2\,000$ a 3 .

Podľa binomickej vety platí

$$N = (10 + 1)^{100} - 1 = M + z,$$

kde M, z sú prirodzené čísla, pretože kombinačné čísla sú zrejme čísla celé. Platí totiž

$$\begin{aligned} M &= 10^{100} + \binom{100}{1} 10^{99} + \dots + \binom{100}{96} 10^4 + \binom{100}{97} 10^3 = \\ &= 10^4 \cdot a + 100 \cdot 33 \cdot 49 \cdot 10^3 = 10^4 \cdot b, \end{aligned}$$

kde a, b sú celé kladné čísla;

$$z = \binom{100}{98} 10^2 + \binom{100}{99} 10 = 50 \cdot 99 \cdot 100 + 1000 = 496\,000.$$

Dekadický zápis čísla M končí teda štyrmi nulami a posledným štvorčíslím čísla N je preto posledné štvorčíslie čísla z , tj. $6\,000$. Z toho zároveň vyplýva, že číslo N je deliteľné číslom $2\,000$.

Ďalej platí

$$\begin{aligned} N &= (12 - 1)^{100} - 1 = 12^{100} - \binom{100}{1} 12^{99} + \dots - \binom{100}{1} 12 + 1 - 1 = \\ &= 12P = 3 \cdot 4P, \end{aligned}$$

kde číslo P je zrejme celé, pretože kombinačné čísla sú celé čísla. Z toho vyplýva, že číslo N je deliteľné tiež tromi, čím je tvrdenie úlohy dokázané.

XIII.3 Ak je $2 \cos \alpha - 1 = 0$, tj.

$$/1/ \quad \alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \alpha = \frac{5\pi}{3},$$

potom rovnica

$$/2/ \quad (2 \cos \alpha - 1)x^2 + 4x + 4 \cos \alpha + 2 = 0$$

má jediný koreň $x = -1$, ako sa ľahko presvedčíme. Hodnoty /1/ preto danej úlohe nevyhovujú.

Nech je teda $\alpha \neq \frac{\pi}{3}$, $\alpha \neq \frac{5\pi}{3}$ čiže $2 \cos \alpha - 1 \neq 0$. Kvadratická rovnica /2/ má potom diskriminant $D = 8(3 - 4 \cos^2 \alpha)$. Reálne korene má preto práve vtedy, keď je $3 - 4 \cos^2 \alpha \geq 0$ čiže

$$/3/ \quad |\cos \alpha| \leq \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

Nerovnica /3/ je splnená práve vtedy, keď α patrí do niektorého z intervalov

$$/4/ \quad \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\rangle.$$

Rovnica /2/ má jeden koreň kladný a druhý záporný práve vtedy, keď

$$/5/ \quad x_1 x_2 = \frac{4 \cos \alpha + 2}{2 \cos \alpha - 1} < 0.$$

Sú tieto dve možnosti:

a/ $2 \cos \alpha - 1 > 0$ čiže α patrí do niektorého z intervalov $\langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle, (\frac{5\pi}{3}, 2\pi \rangle$. Potom podľa /5/ je $2 \cos \alpha + 1 < 0$, tj. $\cos \alpha < -\frac{1}{2}$ čiže α je z intervalu $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$. Je zrejmé, že tieto intervaly sú disjunktné a v tomto prípade úloha riešenie nemá.

b/ Nech $2 \cos \alpha - 1 < 0$ čiže α je z intervalu $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ a vzhľadom na /4/ z intervalov

$$/6/ \quad (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}) \rangle, \langle \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} \rangle.$$

Pretože $x_1 x_2$ je číslo záporné, je podľa /5/ $2 \cos \alpha + 1 > 0$, tj. $\cos \alpha > -\frac{1}{2}$, čo znamená, že α patrí niektorému z intervalov

$$/7/ \quad \langle 0, \frac{2\pi}{3} \rangle, (\frac{4\pi}{3}, 2\pi \rangle.$$

Prienikom intervalov /6/, /7/ sú však intervaly

$$/8/ \quad (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \rangle, (\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}) \rangle,$$

ktoré dávajú riešenie úlohy.

Zostáva ešte preskúmať prípad, keď je jeden koreň rovnice /2/ kladný, druhý rovný nule. To nastane práve vtedy, keď je $x_1 x_2 = 0$ a súčasne $x_1 + x_2 > 0$. Z /5/ však pre tento prípad vyplýva $2 \cos \alpha + 1 = 0$, z čoho

$$/9/ \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}, \text{ resp. } \alpha = \frac{4\pi}{3}.$$

Ak platí /9/, potom je zrejmé $2 \cos \alpha - 1 = -2 \neq 0$ a súčasne $x_1 + x_2 = 2$, čo je číslo kladné. Spojením /8/, /9/ dostávame, že riešením úlohy sú všetky čísla α z intervalov

$$(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \rangle, \langle \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \rangle.$$

XIV.1 Dané číslo možno vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} & 5 \cdot 2^2 \cdot 5^{2n} \cdot 2^n + 3^2 \cdot 2 \cdot 3^n \cdot 2^{2n} = 20 \cdot 50^n + 18 \cdot 12^n = \\ & = 19 \cdot 50^n + 19 \cdot 12^n + 50^n - 12^n. \text{ Číslo } 50^n - 12^n \text{ je však pre každé celé } n \geq 0 \text{ deliteľné číslom } 50 - 12 = 38 = 2 \cdot 19. \text{ Z toho vyplýva, že dané číslo je deliteľné devätnástimi pre každé celé } n \geq 0. \end{aligned}$$

XIV.3 Predpokladajme, že x je riešením danej rovnice

$$/1/ \quad \sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 2x - 1} = p,$$

kde p je dané reálne číslo. Potom zrejme musí platiť jednak

$$/2/ \quad p \geq 0,$$

jednak $x^2 - 2|x| - 1 \geq 0$ čiže

$$/3/ \quad (x^2 - 1)^2 \geq 4x^2.$$

Umocnením oboch strán v /1/ dostaneme

$$x^2 - 2x - 1 + x^2 + 2x - 1 + 2\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 4x^2} = p^2$$

čiže

$$/4/ \quad 2\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 4x^2} = p^2 - 2(x^2 - 1).$$

Z toho vyplýva, že

$$/5/ \quad p^2 \geq 2(x^2 - 1).$$

Umocnením /4/ dostaneme

$$4[(x^2 - 1)^2 - 4x^2] = p^4 - 4p^2(x^2 - 1) + 4(x^2 - 1)^2$$

čiže

$$/6/ \quad 4x^2(p^2 - 4) = p^2(p^2 + 4).$$

Zo /6/ vyplýva

$$/7/ \quad p^2 - 4 > 0$$

a za podmienky /7/ môže rovnici /1/ vyhovovať len niektoré z čísel

$$/8/ \quad x_{1,2} = \pm \frac{p}{2} \sqrt{\frac{p^2 + 4}{p^2 - 4}}.$$

Z /5/ a /8/ však pre p vyplýva podmienka

$$p^2 \geq 2 \left(\frac{p^2(p^2 + 4)}{4(p^2 - 4)} - 1 \right)$$

a z toho vzhľadom na /7/

$$2(p^2 - 4)p^2 \geq p^2(p^2 + 4) - 4(p^2 - 4),$$

z čoho vyplýva

$$/9/ \quad p^4 - 8p^2 - 16 \geq 0.$$

Z /9/ dostaneme

$$[p^2 - 4(1 + \sqrt{2})][p^2 + 4(\sqrt{2} - 1)] \geq 0,$$

odkiaľ dostaneme

$$p^2 \geq 4(1 + \sqrt{2})$$

a vzhľadom na /2/

$$/10/ \quad p \geq 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

Tým sme dokázali, že ak rovnica /1/ má riešenie, môže ním byť len niektoré z čísel /8/, pričom pre číslo p musí byť splnená pod-

Na druhej strane však vtedy, keď je splnená podmienka /10/, obe čísla x_1, x_2 určené vzťahom /8/ existujú a vyhovujú vzťahom /5/ a /6/ a teda aj /4/. Zo /4/ a /5/ vyplýva správnosť /3/, obe odmocniny v /1/ sú definované a platí /1/. Dokázali sme teda, že daná rovnica má riešenie práve vtedy, keď platí /10/, a to dve riešenia určené vzťahom /8/.

$$/1/ \quad p_{n+1} = p_n + 2n.$$
$$p_n = p_{n-1} + 2(n-1),$$

$$p_{n-1} = p_{n-2} + 2(n-2),$$

$$/2/ \quad p_{n-2} = p_{n-3} + 2(n-3),$$

• • • • •

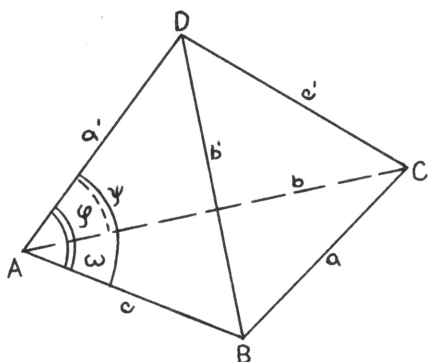
$$p_2 = p_1 + 2 \cdot 1$$

$$/3/ \quad p_n = p_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \cdot$$

Druhý sčítanec v /3/ sa rovná $\frac{1}{2} (2 + 2n - 2) \cdot (n - 1) = n(n - 1)$ a pretože $p_1 = 2$ /vnútro a vonkajšok kružnice/, je

$$/4/ \quad p_n = n(n-1) + 2 = n^2 - n + 2.$$

XVI.2 Označme $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AD| = a'$, $|BD| = b'$,
 $|CD| = c'$.



Obr. 14

Potom dané rovnosti možno zapísať v tvare

$$/1/ \quad a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2 .$$

Vyšetríme veľkosti uhlov $\angle BAD$, $\angle CAD$ a $\angle BAC$ pri vrchole A. Označme ich /obr. 14/: $\angle BAD = \varphi$, $\angle CAD = \psi$, $\angle BAC = \omega$. Podľa kosínusovej vety je

$$/2a/ \quad 2a'c \cos \varphi = a'^2 + c^2 - b'^2 ,$$

$$/2b/ \quad 2a'b \cos \psi = a'^2 + b^2 - c'^2 .$$

$$/2c/ \quad 2bc \cos \omega = b^2 + c^2 - a^2 .$$

Z /1/ však vyplýva

$$/3a/ \quad a'^2 - b'^2 + c^2 = b^2 + c^2 - a^2 ,$$

$$/3b/ \quad a'^2 - c'^2 + b^2 = b^2 + c^2 - a^2 .$$

Spojením vzťahov /2abc/ a /3ab/ zistíme, že čísla $\cos \varphi$, $\cos \psi$ a $\cos \omega$ sú súčasne všetky tri buď kladné alebo záporné alebo rovné nule. Je teda buď $\varphi = \psi = \omega = \frac{\pi}{2}$ alebo $\varphi < \frac{\pi}{2}$, $\psi < \frac{\pi}{2}$, $\omega < \frac{\pi}{2}$ alebo $\varphi > \frac{\pi}{2}$, $\psi > \frac{\pi}{2}$, $\omega > \frac{\pi}{2}$.

Rovnaký výsledok však dostaneme aj pre uhly pri vrcholech B, C, D štvorstena ABCD.

Ak je teraz trojuholník ABC ostrohľý, netreba už nič dokazovať. Nech je trojuholník ABC pravouhlý alebo tupouhlý a to tak, že $\omega \geq \frac{\pi}{2}$. Potom však na základe vyššie uvedeného je tiež $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ a $\psi \geq \frac{\pi}{2}$. Z toho ale súčasne vyplýva, že pri každom z vrcholov B, C, D je aspoň jeden uhol ostrý. Podľa predchádzajúceho to zároveň znamená, že všetky uhly pri vrcholech B, C, D sú ostré čiže trojuholník BCD je ostrohľý.

XVII.2 a/ Uvažujme najskôr o prípade, keď n je číslo prirodzené. Potom na základe binomickej vety platí

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot (\sqrt{3})^k - (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot (\sqrt{3})^k \right]}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} + \binom{n}{3} 2^{n-3} \cdot 3 + \binom{n}{5} \cdot 2^{n-5} \cdot 3^2 + \dots$$

čiže a_n je celé číslo. Ďalej je zrejmé, že všetky členy súčtu, ktorým je vyjadrené, s výnimkou najviac prvého, sú deliteľné tromi. Preto a_n je deliteľné tromi práve vtedy, keď je $\binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}$ deliteľné tromi a vzhľadom na to, že 2^{n-1} nie je tromi deliteľné, práve vtedy, keď je tromi deliteľné číslo n .

b/ Pre $n = 0$ platí:

$$a_0 = \frac{1-1}{2\sqrt{3}} = 0.$$

Číslo a_0 je teda celé a deliteľné tromi.

c/ Nech n je celé záporné číslo. Keďže platí

$$2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}},$$

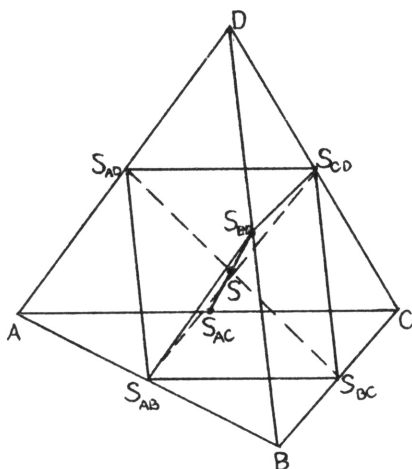
je

$$a_n = \frac{(2 - \sqrt{3})^{-n} - (2 + \sqrt{3})^{-n}}{2\sqrt{3}} = -a_{-n}.$$

Číslo $-n$ je prirodzené a preto vzhľadom na výsledok časti a/ je číslo a_n celé a deliteľné tromi práve vtedy, keď je $-n$ a teda tiež n deliteľné tromi.

Dokázali sme teda, že číslo a_n je celé pre každé celé n a deliteľné tromi práve vtedy, keď je n deliteľné tromi.

XVII.4 Označme stredy úsečiek AB, AC, AD, BC, BD, CD v uvedenom poradí $S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}, S_{BC}, S_{BD}, S_{CD}$ /obr. 15/. Nech je S stred úsečky $S_{AB}S_{CD}$ /o prípade $S_{AB} \equiv S_{CD}$ budeme uvažovať zvlášť; zatiaľ predpokladajme, že body $S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}, S_{BC}, S_{BD}, S_{CD}$ sú navzájom rôzne/. Podľa známej planimetrickej vety je $S_{AB}S_{AD} \parallel BD$ a tiež $S_{BC}S_{CD} \parallel BD$, z čoho vyplýva, že $S_{AB}S_{AD} \parallel S_{BC}S_{CD}$. Analogicky sa ukáže, že $S_{AD}S_{CD} \parallel S_{AB}S_{BC}$. Štvoruholník $S_{AB}S_{BC}S_{CD}S_{AD}$ je teda rovnobežník a bod S je súčasne stredom úsečky $S_{AD}S_{BC}$. Platí preto: $|SS_{AB}| = |SS_{BC}| = |SS_{CD}| = |SS_{AD}|$ a pretože $AC \perp BD$ a $S_{AB}S_{BC} \parallel AC$, $S_{BC}S_{CD} \parallel BD$, je $S_{AB}S_{BC} \perp S_{BC}S_{CD}$ a rovnobežník je zrejme obdĺžnikom,



Obr. 15

čo znamená, že tiež $|SS_{BC}| = |SS_{CD}|$.

Analogicky sa dokáže, že $S_{AB}S_{BD}S_{CD}S_{AC}$ je obdĺžnik a teda platí: $|SS_{AB}| = |SS_{BD}| = |SS_{AC}| = |SS_{CD}|$. Bod S je teda rovnako vzdialený od všetkých bodov $S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}, S_{BC}, S_{BD}, S_{CD}$ čiže existuje guľová plocha so stredom S, ktorá všetkými týmito bodmi prechádza.

Zostáva ešte preskúmať prípad $S_{AB} \equiv S_{CD}$. Ak by tento prípad nastal, boli by body A, B, C, D vrcholmi rovnobežníka ABCD, v ktorom $AD \parallel BC$. Vzhľadom na predpoklad $AD \perp BC$ to však nie je možné. Analogicky sa vylúčia prípady $S_{AC} \equiv S_{BD}, S_{AD} \equiv S_{BC}$.

XVIII.1 Nech x, y je dvojica racionálnych čísel, pre ktoré platí

$$/1/ \quad (x + y\sqrt{5})^2 = 7 + 3\sqrt{5}.$$

Potom

$$x^2 + 5y^2 + 2xy\sqrt{5} = 7 + 3\sqrt{5}$$

čiže

$$x^2 + 5y^2 - 7 = (3 - 2xy)\sqrt{5}.$$

Ak by bolo $3 - 2xy \neq 0$, bolo by

$$\sqrt{5} = \frac{x^2 + 5y^2 - 7}{3 - 2xy}$$

racionálne číslo, čo však nie je pravda. Dostávame teda $2xy = 3$, tj.

$$/2/ \quad xy = \frac{3}{2}$$

a súčasne

$$/3/ \quad x^2 + 5y^2 = 7 .$$

Umocnením /3/ na druhú dostaneme

$$/4/ \quad x^4 + 10x^2y^2 + 25y^4 = 49$$

a z /2/ analogicky dostaneme

$$/5/ \quad 20x^2y^2 = 45 .$$

Po odčítaní /5/ od /4/ máme

$$x^4 - 10x^2y^2 + 25y^4 = 4$$

čiže

$$(x^2 - 5y^2)^2 = 4 .$$

Je teda buď

$$/6/ \quad x^2 - 5y^2 = 2$$

alebo

$$/7/ \quad x^2 - 5y^2 = -2 .$$

Sčítaním /3/ a /6/ dostaneme $2x^2 = 9$ čiže $x^2 = \frac{9}{2}$, čo však nie je možné, pretože x je podľa predpokladu racionálne číslo.

Sčítaním /3/ a /7/ analogicky dostaneme $2x^2 = 5$ čiže $x^2 = \frac{5}{2}$, čo opäť vedie k sporu s predpokladom racionálnosti čísla x .

Zistili sme teda, že neexistuje žiadna dvojica x, y požadovaných vlastností.

XVIII.4 Daná nerovnica je zrejme ekvivalentná s nerovnicou

$$/1/ \quad |z - |z + |z|||^2 \geq 3|z|^2 ,$$

ktorej vyhovuje číslo $z = 0$.

Nech teraz $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde $r > 0$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$ sú reálne čísla, vyhovuje nerovnici /1/. Potom zrejme platí

$$|r(\cos \varphi + i \sin \varphi) - |r(\cos \varphi + i \sin \varphi) + r||^2 \geq 3r^2 ,$$

z čoho po vynásobení číslom r^{-2} a vyjadrení absolútnej hodnoty vo vnútri výrazu na ľavej strane dostaneme

$$|\cos \varphi - \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} + i \sin \varphi|^2 \geq 3 ,$$

čiže

$$\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} + 2(1 + \cos \varphi) + \sin^2 \varphi \geq 3 .$$

Z toho po jednoduchšej úprave máme

$$/2/ \quad \cos \varphi \geq \cos \varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} .$$

Z vykonaných úprav je zrejmé, že číslo $z \neq 0$ vyhovuje danej nerovnici práve vtedy, keď jeho amplitúda $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$ splňuje /2/.

Nerovnici /2/ vyhovujú zrejme všetky tie čísla φ , pre ktoré $\cos \varphi = 0$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Nech $\cos \varphi > 0$. Potom z /2/ máme $1 \geq \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}$, z čoho

po umocnení na druhú a jednoduchej úprave dostávame nerovnicu $\cos \varphi \leq -\frac{1}{2}$, ktorá je v spore s predpokladom. Znamená to teda, že uhly φ , pre ktoré $\cos \varphi > 0$ nerovnici /2/ nevyhovujú.

Nech $\cos \varphi < 0$, potom z /2/ dostaneme

$$1 \leq \sqrt{2(1 + \cos \varphi)},$$

z čoho analogicky ako v predchádzajúcom prípade dostaneme nerovnicu

$$/3/ \quad -\frac{1}{2} \leq \cos \varphi < 0,$$

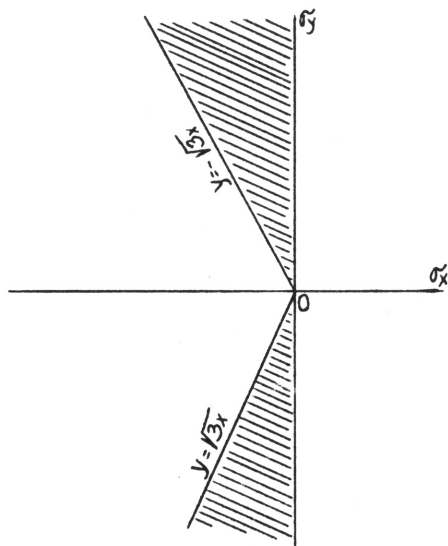
ktorej vyhovujú práve tie čísla φ z uvažovaného intervalu, pre ktoré platí niektorý zo vzťahov

$$/4/ \quad \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{3} \leq \varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

Pre riešenia nerovnice /3/ však zrejme platí $2(1 + \cos \varphi) \geq 1$

čiže $\sqrt{2(1 + \cos \varphi)} \geq 1$ a $\cos \varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} \leq \cos \varphi$, tj. vyhovujú nerovnici /2/.

Zistili sme teda, že danej nerovnici vyhovuje číslo $z = 0$ a tie čísla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$, pre ktorých amplitúdy platí /4/. Množina riešení danej nerovnice je zobrazená na obr. 16.



Obr. 16

XIX.1 Pretože p je prvočíslo väčšie než 2, je nepárne a počet sčítancov na pravej strane je párny. Súčet na pravej strane možno preto upraviť takto:

$$\frac{a}{b} = \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right).$$

Dvojice sčítancov v zátvorkách možno sčítať:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p-n} = \frac{p-n+n}{n(p-n)} = \frac{p}{n(p-n)}.$$

Preto platí:

$$\frac{a}{b} = p \frac{\overset{\text{č}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \cdot \dots \cdot (p-1)}}{(p-1)!} = \frac{p \cdot \text{č}}{(p-1)!}.$$

Čitateľ č je však číslo prirodzené, ktorého presnú hodnotu nepotrebuje poznať, pretože platí

$$a \cdot (p-1)! = p \cdot \text{č} \cdot b.$$

Prvočíslo p však zrejme nedelí číslo $(p-1)!$ a musí teda deliť číslo a , ako sme mali dokázať.

XIX.6 Ľavá strana danej nerovnice má podľa definície druhej odmocniny a logaritmickej funkcie zmysel pre všetky x , pre ktoré súčasne platí

$$\lg x - 1 \geq 0, \quad \lg x > 0, \quad \lg x \neq 1, \quad 2 + 4 \cos^2 x > 0.$$

Všetky tieto nerovnice sú súčasne splnené práve vtedy, keď je

$$/1/ \quad \lg x > 1.$$

Za tohto predpokladu však je daná nerovnica ekvivalentná nerovnici

$$/2/ \quad \log_{\lg x} (2 + 4 \cos^2 x) \geq 2.$$

Danú nerovnicu možno teda nahradiť sústavou nerovníc /1/, /2/. Podľa /1/ je však základ logaritmu v nerovnici /2/ väčší než 1 a tak nerovnica /2/ je ekvivalentná nerovnici

$$/3/ \quad 2 + 4 \cos^2 x \geq \lg^2 x.$$

Ak do /3/ dosadíme za $\cos^2 x = \frac{1}{\lg^2 x + 1}$, čo platí pre všetky x ,

pre ktoré je definovaná funkcia $\lg x$, dostaneme

$$/4/ \quad \lg^4 x - \lg^2 x - 6 \leq 0,$$

čo je nerovnica ekvivalentná nerovnici /3/. Zo /4/ jednoduchou úpravou dostaneme

$$\left(\lg^2 x - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{25}{4},$$

z čoho vzhľadom na /1/ vyplýva

$$\lg^2 x \leq 3$$

čiže

$$/5/ \quad -\sqrt{3} \leq \lg x \leq \sqrt{3}.$$

Spojením /1/ a /5/ dostaneme

$$1 < \lg x \leq \sqrt{3},$$

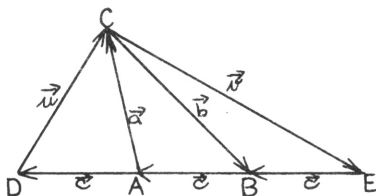
z čoho vyplýva, že sústave /1/, /2/ a teda aj danej nerovnici vyho-

vujú čísla

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi ,$$

kde k je ľubovoľné celé číslo.

XX.2 Označme $\vec{BA} = \vec{c}$, $\vec{AC} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$, $\vec{DC} = \vec{u}$, $\vec{CE} = \vec{v}$. Potom $\vec{AD} = \vec{c}$, $\vec{EB} = \vec{c}$. /Obr. 17/



Obr. 17

Predpokladajme, že existujú také dĺžky úsečiek a, b , aby existoval trojuholník ABC tej vlastnosti, že $\angle DCE$ je pravý. Potom platí:

/1/ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Zrejme platí:

/2/ $\vec{u} = \vec{a} - \vec{c}$, $\vec{v} = \vec{b} - \vec{c}$,

/3/ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$,

kde $\vec{0}$ je nulový vektor. Podľa /1/, /2/ platí

/4/ $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \cdot \vec{c} = 0$.

Podľa /3/ však je

/5/ $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$,

z čoho

/6/ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (\vec{c} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b})$.

Po dosadení z /5/ a /6/ do /4/ dostaneme teda

$$5 \vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

čiže

/7/ $5c^2 = a^2 + b^2$.

Ak, naopak v trojuholníku ABC platí /7/, potom sa obrátením postupu presvedčíme, že $\angle DCE = 90^\circ$.

K tomu, aby sme mohli zostrojiť trojuholník ABC požadovaných vlastností, musí platiť

$$|a - b| < c < a + b$$

čiže

$$a^2 + b^2 - 2ab < c^2 < a^2 + b^2 + 2ab$$

a vzhľadom na /7/ súčasne

$$c^2 = \frac{1}{5} (a^2 + b^2).$$

Znamená to teda, že musí súčasne platiť

$$4a^2 + 4b^2 - 10ab < 0, \quad 4a^2 + 4b^2 + 10ab > 0.$$

Druhá z týchto nerovností je však splnená pre každé kladné a, b .

Prvú nerovnosť upravíme na tvar

$$2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 5 \left(\frac{a}{b} \right) + 2 < 0,$$

z ktorého dostaneme

$$/8/ \quad \frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2.$$

Všetky úpravy, ktorými sme dostali podmienku /8/, boli ekvivalentné. Stačí teda splnenie tejto podmienky k tomu, aby trojuholník ABC bolo možno zostrojiť a uhol DCE bol pravý.

XXI.2 Použijeme rozkladu otáčeni ve dvě rovinové souměrnosti, a to v konstantní souměrnost $\mathcal{S}_1$, která převede A v B a v proměnnou souměrnost $\mathcal{S}_2$ podle roviny ρ trsu B, při čemž $\rho \neq BCD$.

Souměrnost $\mathcal{S}_1$ převede bod C v bod D, souměrnost $\mathcal{S}_2$ převede bod D v bod kulové plochy Γ , která má střed B a poloměr BD a z níž je vyloučen bod M polopřímky DC; M je určen podmínkou $CM = CD$. Kulová plocha Γ protne povrch krychle ABCDA'B'C'D' ve čtvrtkružnicích $\widehat{A'C'}$, $\widehat{A'D}$, $\widehat{C'D}$ ležících po řadě ve stěnách A'B'C', AA'D, DCC'. Sjednocení těchto tří čtvrtkružnic je hledaná množina všech bodů X.

XXI.5 /Nejkratší žákovské řešení/ Vytvoříme uspořádané dvojice disjunktních podmnožin množiny M. Pro libovolný prvek množiny M máme právě tři možnosti:

- /1/ buď je prvkem první podmnožiny;
- /2/ nebo je prvkem druhé podmnožiny;
- /3/ nebo nepatří do žádné z těchto podmnožin.

Každý z případů /1/, 2/, /3/ má n možností. Je tedy 3^n možností.

XXII. Použijeme toho, že /pro každé přirozené $n = 2/$

$$\left[\sqrt{n^2 - 1} \right] = n - 1,$$

neboť

$$n-1 \leq \sqrt{n^2-1} < n-1+1.$$

Množinu $M = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n^2-1}\}$ rozložíme na $n-1$ disjunkt-ních podmnožin A_i definovaných takto:

$$A_i = \{x \in M; [x] = i\} \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Nyní zjistíme počet p_i prvků množiny A_i . Nejmenším prvkem množiny A_i je zřejmě

$$\alpha_i = \sqrt{i^2};$$

Jejím největším prvkem je

$$\beta_i = \sqrt{(i+1)^2-1}.$$

Zřejmě je

$$A_i = \{\alpha_i, \alpha_i + 1, \dots, \beta_i\},$$

a proto

$$p_i = (i+1)^2 - i^2 = 2i + 1.$$

Z předchozího plyne pro každé $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \sum_{i=1}^{n-1} i p_i = \sum_{i=1}^{n-1} (2i^2 + i) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i.$$

Podle známých vzorců pro $\sum i$ a $\sum i^2$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \frac{2}{6} (n-1) \cdot n(2n-1) + \frac{1}{2} (n-1)n,$$

po úpravě hledaný vzorec

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [k] = \frac{1}{6} n(n-1)(4n+1).$$

XXII.5. Použijeme analytické geometrie v rovině s jednou komplexní souřadnicí. Místo symbolů $+$, $\cdot$ pro operace uijeme výraznějších znaků $\ast$ a $\bullet$. Je tedy

$$\alpha \ast \beta = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + /$$

/1/

$$\alpha \bullet \beta = (1-i)\alpha + i\beta.$$

Z první rovnice /1/ je patrné, že operace $\ast$ je komutativní, napro-ti tomu operace $\bullet$ není komutativní, neboť

$$(1-i)\alpha + i\beta = (1-i)\beta + i\alpha$$

dává

$$(1-2i)\alpha = (1-2i)\beta,$$

což platí jen pro $\alpha = \beta$.

+/ Písmena α, β značí současně body roviny ρ i jejich komplexní souřadnice. Obdobně jiná písmena.

Zobrazení $x \mapsto x'$ z části /b/ a /c/ je charakterizováno vztahem

$$X' \bullet X = (A \bullet X) \neq B$$

neboli v souřadnicích

$$(1 - i) x' + ix = \frac{1}{2}(1 - i)a + \frac{1}{2}x + \frac{b}{2},$$

po úpravě

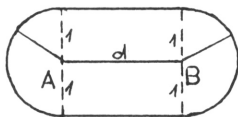
$$/2/ \quad x' = \frac{1-i}{4}x + \left(\frac{a}{2} + \frac{b(1+i)}{4}\right).$$

Rovnice /2/ je podobnost přímá s koeficientem $\left|\frac{1-i}{4}\right| = \frac{1}{\sqrt{8}}$. Její samodružný bod je jediný a dostaneme jej, položíme-li v /2/ $x' = x$. Pak vyjde

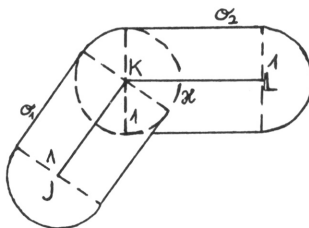
$$x = \frac{3-i}{10} (2a + b + bi).$$

XXII.6 Nechť AB je libovolná úsečka čáry L. Utvořme ovál složený z pravouhelníků o stranách 2, d a kružnice o poloměru 1; jeho obsah je $2d + \pi$. Tento ovál /obr. 18/ je množina všech bodů, které mají od některého bodu úsečky AB vzdálenost nanejvýš 1. Jsou-li JK, KL dvě sousední úsečky

Obr. 18



a/



b/

lomené čáry L, mají oba ovály σ_1, σ_2 jako průnik kruh se středem K, poloměrem 1 a obsahu π . Pro obsah P sjednocení všech oválů platí

$$/1/ \quad P \leq \sum_{i=1}^n 2d_i + \pi = \pi + 2 \sum_{i=1}^n d_i,$$

kde d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou délky úseček lomené čáry L. Kdyby platilo

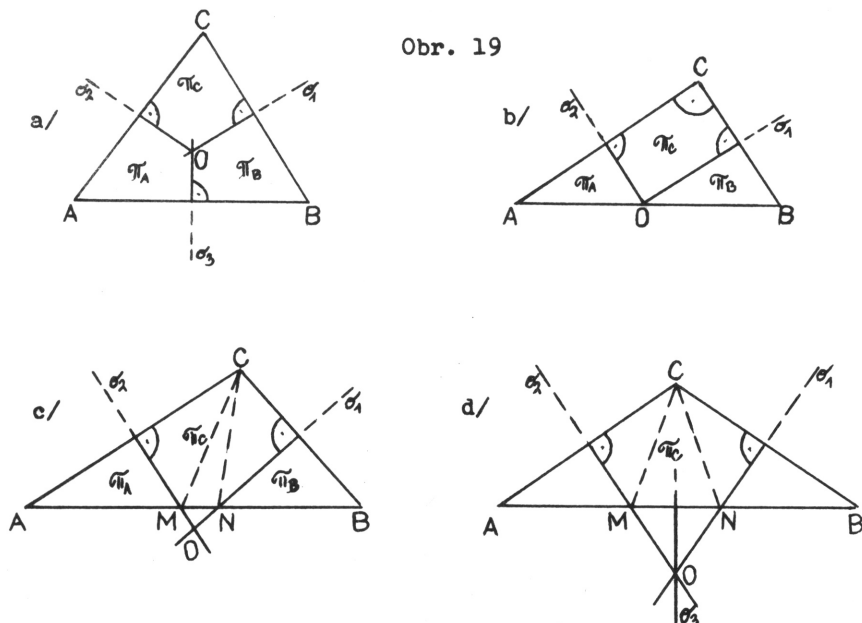
$$\sum_{i=1}^n d_i \leq 1248$$

pro některou lomenou čáru L, plynulo by z /1/

$$P \leq \pi + 2496 < 2500 = 50^2.$$

To je však spor, neboť $P \geq 50^2$.

XXIII.2 Rozlišíme čtyři případy: I/ $\triangle ABC$ je ostroúhlý, II/ $\triangle ABC$ je pravouhlý, III/ $\triangle ABC$ je tupouhlý nerovnoramenný, IV/ $\triangle ABC$ je tupouhlý rovnoramenný /obr. 19 a, b, c, d/.



Označíme o_1, o_2, o_3 osy stran $\triangle ABC$, O střed kružnice opsané. Π_A, Π_B, Π_C jsou množiny bodů, které mají za nejbližší vrcholy body A, B, C .

Snadno dokážeme, že na obr. 19 a/ nejdelší z úseček AX , které lze umístit do Π_A je úsečka AO . Obdobně tomu je v oblastech Π_B a Π_C . Největší z úseček AO, BO, CO je kterákoli z nich, neboť je $AO = BO = CO$. Úloha I má jediné řešení - bod O .

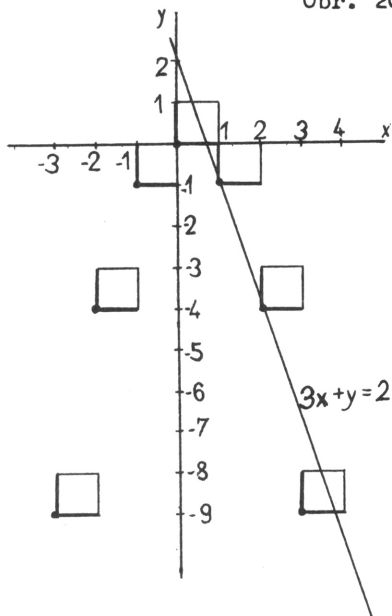
Obdobně tomu je s řešením případu II; také zde má úloha jediné řešení - bod O , který je středem přepony AB .

V případě III nechť je $AC > BC$. Největší z úseček $AX / X \in \Pi_A /$ je AM / M , N jsou průsečíky os o_2, o_3 s úsečkou AB , největší z úseček $BX / X \in \Pi_B /$ je BN . Mimo to je $AM = CM, BN = CN$. Protože je $AC > BC$, je $AM > BN$ a úloha III má tedy jediné řešení - bod M .

Konečně v případě IV je $AC = BC, AM = BN = CM = CN$, případ IV má dvě řešení - body M, N .

XXIV.2 Sestrojíme nejprve graf rovnice $[x^2] + [y] = 0$. Na obr. 20 je tento graf, který se skládá z neuzavřených čtverců, k nimž náleží

Obr. 20



vždy levý dolní vrchol a polo-uzavřená levá a dolní strana. Levé dolní vrcholy jsou body paraboly $x^2 = y$ s celočíselnými souřadnicemi a na ně jsou "přivěšeny" jednotkové čtverečky.

Na obr. 20 je také graf přímky $3x + y = 2$. Snadno dokážeme, že tato přímka může zasáhnout jen sedm naznačených čtverců. Všechna možná řešení jsou pro x

$$\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{10}{3} < x \leq \frac{11}{3}, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

Příslušná y vypočteme z rovnice $3x + y = 2$.

XXIV.4 Pro všechna reálná z platí $|z| + z \geq 0$, přičemž rovnost platí jen tehdy, je-li $z \leq 0$. Upravíme danou rovnici na tvar

$$|x - 2| + |y - 3| + y - 3 = p - 3.$$

Levá strana je podle předchozího rovna nule, právě když

$$x - 2 = 0 \quad y - 3 \leq 0$$

a je vždy nezáporná. To znamená, že pro $p < 3$ nevyhovuje dané rovnici žádný bod, pro $p = 3$ je řešením polopřímka

$$x = 2, y \leq 3.$$

Pro $p > 3$ dostáváme v polovině $y \leq 3$ množinu řešení

$$|x - 2| = p - 3$$

tj. dvojici polopřímek $x - 2 = \pm (p - 3)$. Úloha má tedy jediné řešení $p = 3$.

XXIV.6 Považujeme dvojice (x, y) za vektory v dvojrozměrném bodovém prostoru R_2 . Podle textu úlohy obsahuje množina M aspoň jeden vektor (a, b) a obsahuje-li dva vektory $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, obsahuje i každou jejich lineární kombinaci a obsahuje i vektor (a^2, b^2) , neboť $a^2 = a \cdot a, b^2 = b \cdot b$. Vektory $(a, b), (a^2, b^2)$ jsou lineárně nezávislé. Z podmínky $ab(a - b) \neq 0$ plyne $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$. Kdyby byly vektory $(a, b), (a^2, b^2)$ lineárně závislé, platilo by

$a^2 = \lambda a, b^2 = \lambda b$, tj. $a = \lambda = b$, což je spor.

Vektory $(a, b), (a^2, b^2)$ jsou báze a proto M je množina všech vektorů R_2 . /Řešení bylo odměněno zvláštní cenou MÚ ČSAV./

XXV.1 Druhá mocnina celého čísla náleží vždy do zbytkové třídy 0 nebo 1 modulo 3. V naší úloze, kde $x^2 + y^2 = 3z^2$, náleží $x^2 + y^2$ do zbytkové třídy 0. Z tabulky vyčteme:

Zbytková třída x^2	Zbytková třída y^2	Zbytková třída $x^2 + y^2$
0	0	0
0	1	1
1	1	2

To znamená, že x i y jsou násobky tří: $x^2 = 9x_1^2, y^2 = 9y_1^2$, tj. $9x_1^2 + 9y_1^2 = 3z^2$ čili

$$/1/ \quad 3x_1^2 + 3y_1^2 = z^2.$$

Je tedy z násobek tří: $z = 3z_1$, čili z /1/ plyne

$$x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2.$$

Zvolíme-li za z nejmenší kladné číslo žádané vlastnosti, je $z_1 < z$ ještě menší číslo této vlastnosti, což je spor. Úloha má tedy jediné řešení

$$x = y = z = 0.$$

XXV.6 Body A, B, C neleží v přímce, tedy ani A', B', C' neleží v přímce. Kdyby body A', B', C', D ležely v rovině, byla by to rovina obsahující π' a bod $D \in \pi$ by ležel na přímce p , což odporuje předpokladu. Tvoří tedy body A', B', C', D opět vrcholy čtyřstěnu.

Z předpokladu rovnoběžnosti $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ plyne existence bodů E, E' na přímce AA' , pro něž platí

$$\begin{aligned} E - A &= D' - D \\ E' - A' &= D - D' \end{aligned}$$

Je patrné, že body E, D' /resp. E', D / jsou stejně vzdáleny od roviny, jež obsahuje polorovinu π /resp. π' /, a proto se objemy čtyřstěnů $ABCD'$ a $ABCE$ /resp. $A'B'C'D$ a $A'B'C'E'$ / sobě rovnají. Stačí proto dokázat rovnost objemů čtyřstěnů $ABCE$ a $A'B'C'E'$.

Platí $AE = A'E' = DD'$ a dále bod B má od přímky AE stejnou vzdálenost jako bod B' od přímky $A'E'$, a proto mají trojúhelníky ABE a $A'B'E'$ týž obsah.

Roviny ABE a $A'B'E'$ splývají a $CC' \parallel ABE$, takže výška čtyř-

stěnů ABCE a A'B'C'E', a tedy i objemy čtyřstěnů ABCD' a A'B'C'D jsou stejně velké.

XXVI.1 Celú kocku so stranou 1 môžeme rozdeliť na 512 kociek so stranou dĺžky $\frac{1}{8}$. Keďže $4 \cdot 512 = 2048 < 2050$, musí podľa Dirichletovho priehradkového princípu existovať medzi nimi aspoň jedna, ktorá obsahuje najmenej päť z daných bodov. Ak tejto kocke opíšeme guľovú plochu, pre jej polomer r platí

$$r = \frac{\sqrt{3}}{16} = \sqrt{\frac{3}{256}} < \sqrt{\frac{3}{255}} = \frac{1}{\sqrt{85}} < \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}.$$

XXVI.4 Ak nejaká trojica x, y, z vyhovuje sústave

$$/1/ \quad x + y + z = 3,$$

$$/2/ \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12},$$

$$/3/ \quad x^3 + y^3 + z^3 = 45,$$

potom musí zrejme byť $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. Z /2/ dostaneme

$$/4/ \quad xy + yz + zx = \frac{5}{12} xyz.$$

Zrejme platí

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz,$$

z čoho po dosadení z /1/, /3/, /4/ a jednoduchšej úprave dostaneme

$$/5/ \quad xyz = -24.$$

Vzhľadom na to po dosadení do /4/ hneď bude

$$/6/ \quad xy + yz + zx = -10.$$

Z /1/, /6/, /5/ na základe známych vzťahov medzi koreňmi a koeficientami kubickej rovnice vyplýva, že čísla x, y, z vyhovujúce sústave /1/-/3/ musia byť koreňmi rovnice

$$/7/ \quad u^3 - 3u^2 - 10u + 24 = 0.$$

$$\text{Keďže } u^3 - 3u^2 - 10u + 24 = (u - 2)(u^2 - u - 12) = \\ = (u - 2)(u + 3)(u - 4), \text{ rovnici /7/ vyhovujú čísla } 2, -3, 4.$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že všetky permutácie čísel tejto trojice sú riešeniami danej sústavy.

XXVI.5 Môžeme predpokladať, že body nasledujú na priamke za sebou v poradí $A_1, A_2, \dots, A_n$. Nech k je najmenší index taký, že medzi bodmi $A_1, A_2, \dots, A_k$ už sú body všetkých štyroch farieb. Bod A_k má teda inú farbu ako ktorýkoľvek z bodov $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$. Označme j najväčší index taký, že $1 \leq j \leq k - 1$ a že medzi bodmi A_j ,

$A_{j+1}, \dots, A_k$ už sú body všetkých štyroch farieb. Bod A_j má teda inú farbu než ktorýkoľvek z bodov $A_{j+1}, A_{j+2}, \dots, A_k$. Úsečka $A_j A_k$ už zrejme má požadovanú vlastnosť, pretože farby bodov A_k a A_j sa vyskytujú medzi bodmi $A_j, A_{j+1}, \dots, A_k$ práve raz a zostávajúce dve farby aspoň raz.

XXVII.4 Najskôr dokážeme, že ak má štvorsten ABCD súčet dĺžok hrán $|AB| + |BC| + |CD| + |AD| = 12$ a súčasne najväčší možný objem, potom musí byť $|AB| = |BC| = |CD| = |AD|$.

Predpokladajme opak. Nech napr. $|AD| \neq |CD|$ /analogicky možno uvažovať o ľubovoľnej dvojici susedných hrán z danej štvorice hrán/. Uvažujme o bodoch D_1, D_2 v rovine ACD, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodov A, C a pre ktoré platí

$$|AD_1| + |CD_1| = |AD_2| + |CD_2| = |AD| + |CD| = 12 - |AB| - |BC|.$$

Body D_1, D_2 majú najväčšiu možnú vzdialenosť od roviny ABC a teda štvorsten daných vlastností so susednými hranami rôznych dĺžok nemá maximálny objem, čo je spor s predpokladom.

Nech existujú dve rôzne dlhé protiľahlé strany z danej štvorice, napr. $|AB| \neq |CD|$. Podľa vyššie uvedeného platí $|AD| = |CD|$, z čoho vyplýva $|AB| \neq |AD|$. To však je opäť spor s tým, čo sme dokázali vyššie.

Ďalej je zrejmé, že ak roviny ABC a ACD nie sú na seba kolmé, môžeme otočením niektorej z nich okolo priamky AC do polohy vzájomne kolmej získať štvorsten daných vlastností s väčším objemom. Z toho vyplýva, že v štvorstene s maximálnym objemom musia byť roviny ABC a ACD na seba kolmé.

Nech S je stred hrany AC, $\alpha = \angle CAD = \angle CAB$. Potom pre objem V štvorstena platí

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \frac{|AC| \cdot |BS|}{2} \cdot |DS| = \frac{1}{6} |AC| \cdot |BS| \cdot |DS| = \\ &= \frac{1}{6} (2 \cos \alpha \cdot |AB|) \cdot (\sin \alpha \cdot |AB|) \cdot (\sin \alpha \cdot |AB|) = \\ &= \frac{1}{3} \cos \alpha \sin^2 \alpha \cdot |AB|^3. \end{aligned}$$

Pretože $|AB| = 3$, hľadáme maximum funkcie

$$f(\alpha) = 9 \cos \alpha \sin^2 \alpha = 9 (\cos \alpha - \cos^3 \alpha)$$

na intervale $(0, \frac{\pi}{2})$.

Derivácia

$$f'(\alpha) = 9 \sin \alpha (3 \cos^2 \alpha - 1)$$

sa rovná nule pre $\alpha_0 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pre objem V štvorsten v tomto prípade platí

$$V = 9 (\cos \alpha_0 - \cos^3 \alpha_0) = 9 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9} \right) = 2\sqrt{3}.$$

Zistili sme teda, že štvorsten požadovaných vlastností existuje. Jedným z takých je aj štvorsten $ABCD$, v ktorom $|AB| = |BC| = |CD| = |AD| = 3$ cm, roviny ABC a ADC sú na seba kolmé a $\angle CAD = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

XXVII.5 Zo zhodnosti trojuholníkov ABC a ABD vyplýva, že polomery vpísaných kružníc sú rovnaké a priamka $C'D'$ je rovnobežná so základňou AB . Analogicky zo zhodnosti trojuholníkov BCD a ACD vyplýva, že je priamka $A'B'$ rovnobežná so základňou AB .

Označme $|AB| = a$, $|BC| = |AD| = b$, $|CD| = c$, $|AC| = |BD| = u$, pričom $a > c$. Nech P, P_1, P_2 sú v uvedenom poradí dotykové body kružnice vpísanej trojuholníku ACD so stranami CD, DA, AC . Potom platí /obr. 21/:

$$|AC| = u = |AP_2| + |P_2C| = |AP_1| + |PC| = b + c - 2|DP|,$$

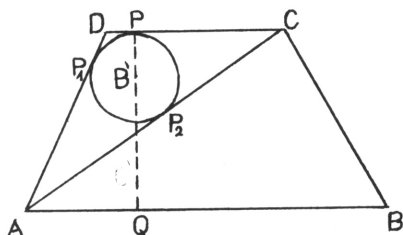
odkiaľ

$$|DP| = \frac{1}{2} (c + b - u).$$

Ak Q je bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku AB so stranou AB , analogicky dostaneme

$$|AQ| = \frac{1}{2} (a + b - u).$$

Z toho vyplýva, že $|AQ| - |DP| = \frac{1}{2} (a - c)$, čo znamená, že priamka PQ je kolmá na základňu AB . V takom prípade však $B'C' \equiv PQ$ a tvrdenie úlohy je dokázané.



Obr. 21

XXVIII.3 Označme s súčin $|AB| \cdot |CD|$. Potom

$$s + \frac{4}{s} = |AB| \cdot |CD| + \frac{4}{|AB| \cdot |CD|} \leq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |BD|.$$

Zároveň však platí $|AC| \leq 2$, $|BD| \leq 2$, z čoho vyplýva, že $s + \frac{4}{s} \leq 4$ čiže $(s - 2)^2 \leq 0$. Musí teda platiť $s = 2$ a v danom vzťahu nastáva rovnosť. Potom však tiež $|AC| = 2$, $|BD| = 2$ čiže body A ,

C sú protíľahlými bodmi kružnice a to isté platí pre body B, D. Z toho vyplýva ďalej, že $|AB| = |CD|$, a pretože $|AB| \cdot |CD| = 2$, musí byť $|AB| = |CD| = \sqrt{2}$. Potom však tiež $|AD| = |BC| = \sqrt{2}$ a body A, B, C, D sú vrcholmi štvorca, čo sme mali dokázať.

XXVIII.4 Najskôr dokážeme pomocné tvrdenie:

Nech $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ sú reálne čísla, potom

$$/1/ \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \leq n \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

príčom rovnosť nastane práve vtedy, keď buď $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ alebo $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Pre každú dvojicu indexov $1 \leq i, j \leq n$ platí

$$/2/ \quad (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0.$$

Ak sčítame nerovnosti /2/ pre všetky dvojice indexov pre $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, po jednoduchej úprave dostaneme /1/.

Dokázané tvrdenie aplikujme teraz na n -tice reálnych čísel

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \quad -x_n \leq -x_{n-1} \leq \dots \leq -x_1.$$

Dostaneme

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n -x_{n-i+1} \right) \leq n \sum_{i=1}^n (-x_i \cdot x_{n-i+1})$$

čiže

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \geq n \sum_{i=1}^n x_i \cdot x_{n-i+1}.$$

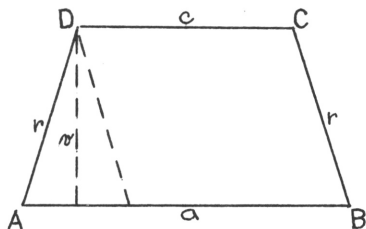
Z toho vyplýva, že nerovnosť z textu úlohy platí práve vtedy, keď platí rovnosť, t.j. práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

XXVIII.6 Nech n je prirodzené číslo, pre ktoré platí tvrdenie úlohy. Ak pre prvočíslo p je $p^2 < n$, potom je n deliteľné číslom p . V opačnom prípade by totiž platilo $(p^2, n) = 1$, čo je spor, pretože p^2 nie je prvočíslo.

Ľahko sa zistí, že úlohe vyhovujú čísla 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30. Žiadne iné číslo menšie než 30 nemá požadované vlastnosti.

Nech $n > 30$ má požadovanú vlastnosť. Keďže $2^2 < 30$, $3^2 < 30$, $5^2 < 30$, musí podľa vyššie uvedeného platiť: $2/n$, $3/n$, $5/n$ čiže $n = 30k \geq 60$. Keďže $7^2 < 60$, tak $n \geq 7 \cdot 60 = 420$, ale $11^2 < 420$, $13^2 < 420$, $17^2 < 420$, $19^2 < 420$ a teda $n \geq 420 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 > 10^7$. Danej úlohe vyhovujú teda len čísla 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30.

XXIX.2 Nech ABCD je hľadaný lichobežník, v ktorom platí $|AB| = a$, $|CD| = c$, $|BC| = |AD| = r$. Označme P pātu kolmice z vrcholu D na základňu AB = $|DP| = v$. /Obr. 22/ Ak by platilo $r = 13$ cm, muselo by platiť $a + c = 2$ cm, čo nie je možné, pretože v tomto prípade



Obr. 22

$v < 13$ cm a obsah lichobežníka by musel byť menší než 13 cm^2 . Najdlhšou stranou lichobežníka je teda základňa AB a platí $a = 13$ cm.

Z toho vyplýva

$$\begin{aligned} /1/ \quad 2r + c &= 15, \\ 4v^2 + (13 - c)^2 &= 4r^2, \end{aligned}$$

z čoho vyplýva $v^2 = 2r - 1$.

Pre obsah P lichobežníka ABCD platí: $P = \frac{1}{2}(13 + c)v$,

z čoho

$$P^2 = \left(\frac{13 + c}{2}\right)^2 (2r - 1) = (14 - r)^2 (2r - 1),$$

pričom $1 < r < \frac{15}{2}$.

Výšetrujme funkciu $f(r) = (14 - r)^2(2r - 1) = 2r^3 - 57r^2 + 420r - 196$. Derivácia $f'(r) = 6r^2 - 114r + 420$ sa rovná nule pre $r = 5$ a $r = 14$. Do uvažovaného intervalu patrí len prvá z týchto hodnôt a ľahko sa zistí, že funkcia f nadobúda pre $r = 5$ svoje maximum. Pre $r = 5$ je teda maximálne P^2 a teda aj $P = 27 \text{ cm}^2$. Pri $r = 5$ však musí byť aj $c = 5$ cm, ako vyplýva z /1/.

Súčasne sme našli aj zápornú odpoveď na otázku o existencii lichobežníka daných vlastností s obsahom $27,001 \text{ cm}^2$.

XXIX.3 Nech je K prienik otvorených polrovín ABC a BCA doplnený ešte o otvorené úsečky AB a BC. Nech je P polrovina opačná k polrovine ABC, z hranice ktorej patrí do P len otvorená polpriamka opačná k polpriamke AB. Podobne nech je Q polrovina opačná k polrovine BCA, z hranice ktorej patrí do Q len otvorená polpriamka opačná k polpriamke CB.

Potom zrejme K, P, Q sú konvexné množiny a ich zjednotením je množina M.

Dokážeme, že M nemožno získať ako zjednotenie dvoch konvexných množín. Predpokladajme opak: $M = R \cup S$, kde R, S sú konvexné množiny. Zvoľme body U, V, W tak, že bod A je stredom úsečky UV , bod B stredom úsečky UW , bod C stredom úsečky VW . Ak je $U \in R$, potom $V \notin R$, pretože inak by muselo platiť tiež $A \in R \subset M$, čo je spor. Musí preto byť $V \in S$ a rovnako tiež $W \in S$. Z toho však vyplýva $C \in S \subset M$, čo je opäť spor.

Tým sme dokázali, že množinu M nemožno pokryť dvoma konvexnými množinami a tak minimálny počet konvexných množín, ktorých zjednotením je M , je tri.

XXIX.6 Označme $M = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ a R_i množinu tých rovín z R , ktoré obsahujú bod A_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Analogicky budeme chápať množiny $R_{ij}, R_{ijk}, R_{ijkl}$ ako množiny rovín z R obsahujúce body z M s príslušnými indexami. Podľa predpokladu je $R_{ijkl} = \emptyset$ pre každé i, j, k, l . Ďalej podľa b/ platí $|R_i| \leq 4$, kde symbolom $|S|$ označujeme počet prvkov množiny S .

Číslo

$$\sum_{i < j < k} |R_{ijk}|$$

je počet rovín, ktoré obsahujú práve po tri body. Keďže podľa b/ leží každý bod z M najviac v štyroch rovinách, tak

$$3 \sum_{i < j < k} |R_{ijk}| \leq 4 \cdot 5,$$

z čoho vyplýva

$$\sum_{i < j < k} |R_{ijk}| \leq 6.$$

Podľa a/ je $\bigcup R_i = R$ a podľa princípu inklúzie a exklúzie máme

$$7 = \sum_{i=1}^5 |R_i| - \sum_{i < j} |R_{ij}| + \sum_{i < j < k} |R_{ijk}|,$$

z čoho vyplýva, že $\sum_{i < j} |R_{ij}| \leq 20 + 6 - 7 = 19$. Keďže $\binom{5}{2} = 10$,

existuje dvojica i, j taká, že $|R_{ij}| \leq 1$. Body A_i, A_j sú potom hľadanými bodmi P, Q .

Vyprávění o úlohách MO

Jan V y š í n

Materiál úloh uchovaný v téměř třiceti ročníkových brožurách má dokumentární hodnotu. Pochopitelně různou: najdeme tu úlohy velmi náročné a originální, úlohy rutinní i školské; přispívali sem praktičtí pedagogové i vědečtí pracovníci, což se odráží v charakteru úloh. Kritika úloh je - jak je přirozené - příznivá i odmítavá, ne-li zdrucující. Za kladný posudek můžeme pokládat např. počín pracovníků maďarské olympiády, kteří přeložili a vydali řešení úloh několika ročníků olympiády sovětské a československé. Velmi ostrá odmítavá kritika zaznívá občas z řad učitelů a studentů, že se k řešení dávají bůhví odkud sehnané úlohy; tito kritikové asi napadají "odřezky" vědecké práce, které byly někdy bez motivací zařazovány jako soutěžní úlohy. Olympiáda měla a má však poslání nejen soutěžní, ale i studijní. Na soubor soutěžních úloh se tedy nesmíme dívat jen jako na muzeální exponáty, ale spíše jako na sbírku modelů na módní přehlídce. Projděme zběžně touto neinstalovanou výstavkou a všimněme si nejzajímavějších exponátů. O soutěžních úlohách můžeme říci jako o knížkách: habent sua fata libelli; a opravdu některé úlohy mají už svou malou historii.

V prvním kole 1. ročníku MO se objevila úloha, jejímž autorem byl - jak zde prozrazujeme - profesor Knichal. Ta se stala svým způsobem legendární. Text úlohy zněl:

Soustava čtverců má tuto vlastnost:

- . Jeden vrchol každého čtverce leží na přímce p , druhý na přímce q , třetí na přímce r .
- . Dokažte, že čtvrté vrcholy čtverců soustavy leží také na přímce.
- . Užitím předchozího výsledku sestrojte čtverec ABCD, jehož vrchol A leží na dané přímce a , vrchol B na dané přímce b , vrchol C na dané přímce c a vrchol D na přímce d .
- . Diskuse.

Úloha byla zadána, aniž se předem vypracovalo její podrobné řešení. Když na to došlo, zjistilo se, že úplné řešení není tak jednoduché, jak se zdálo na první pohled. Profesor Knichal znal sice řešení, ale to nebylo přístupné středoškolákům; a tak několik pracovníků Matematického ústavu ČSAV /tehdejšího Ústředního ústavu matematického/ sestavilo školské řešení, které najdete na šesti stranách ročníkové brožury; obsahuje dvě pomocné věty a dvě pomocné úlohy, z nichž

jedna je značně členitá a složitá.

Z této pseudokomické situace vytěžil ÚVMO mravní naučení, že nelze zadat žádnou úlohu do soutěže, pokud autor nevypracoval její podrobné řešení; tato zásada se od těch dob přísně dodržuje.

Ale tato úloha A-I-8 měla ještě pozdější dozvuky. Časopis pro pěstování matematiky otiskl ve svém 84. ročníku /1959/ článek známého slovenského pracovníka dr. Pavla Bartoše o lineárních soustavách přímých podobností v rovině; autor tu studuje pomocí aparátu komplexních čísel /souřadnic/ jisté lineární soustavy přímých podobností v rovině. Jde o podobnosti, které převádějí n daných bodů $B_1, \dots, B_n$ v body ležící na n daných přímkách $p_1, \dots, p_n$. Vypracovává se jakási "miniteorie" těchto soustav a z ní vyplývá řešení úlohy A-I-8 jako evidentní důsledek /příklad 5 v citovaném článku/.

Také tato skutečnost v sobě skrývá mravní naučení: příliš komplikované řešení některé úlohy nás upozorňuje, že pravděpodobně děláme "skok": v našem případě jsme přeskočili celou zmíněnou "miniteorii". Takové úlohy se ovšem pro soutěž MO nehodí.

Chceme-li hovořit frazeologií módní přehlídky, objevují se v prvním desetiletí olympiády většinou velmi solidní, umírněné a osvědčené modely tradičního vkusu, které se líbily a splnily své poslání. Posuďte sami:

- Určete všechna reálná řešení rovnice

$$x + \sqrt{2p - x^2} = 8$$

o neznámé x s parametrem p . Proveďte diskusi vzhledem k parametru p /roč. 1957/58/.

- Je dána funkce

$$y = \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x|} + \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|} - \sqrt{1 - \frac{x}{4}|x|} - \sqrt{1 - \frac{x}{2}|x|}.$$

Určete její maximální definiční obor a nakreslete její graf /roč. 1959/60/.

- Vypočtete tisící člen posloupnosti

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...

/roč. 1960/61 - úloha A-III-1/.

Pěstovala se střízlivá funkční teorie /vyskytovaly se tu i funkce s odmocninami a absolutními hodnotami/, rovnice a nerovnice s parametry a vydatné diskuse. Od samého začátku MO se vyskytovala

geometrická zobrazení a jejich skládání. Později jsme od tématiky geometrických zobrazení značně upustili - asi ke škodě věci.

Zvláštní postavení v naší olympiádě měla stereometrie - úlohy byly zpravidla metrické, ale nikoli výpočty objemů a povrchů. Když se zrodila z podnětu prof. Tiberiu Romana v r. 1959 první mezinárodní matematická olympiáda v Rumunsku /zprávu o ní najdeme v osmé ročníkové brožuře/, stalo se Československo takřka monopolním dodavatelem stereometrických úloh; bylo to hlavně zásluhou profesora M. Fiedlera. Zde jsou dvě ukázky stereometrických úloh, které Československo navrhlo na mezinárodních olympiádách a které byly přijaty:

- . Má-li jediná hrana čtyřstěnu délku větší než 1 pak je jeho objem roven nejvýše $\frac{1}{8}$; dokažte. /1967/
- . Bod O leží na přímce ℓ , $OP_1, \dots, OP_n$ jsou takové jednotkové vektory, že body P_1 leží ve vnitřku téže poloroviny s hranicí ℓ . Dokažte, že pro každé liché číslo n platí

$$|\overrightarrow{OP_1} + \dots + \overrightarrow{OP_n}| \geq 1;$$

přitom $|\overrightarrow{AB}|$ značí velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$. /1973/

Zůstanme ještě na chvíli u mezinárodních olympiád. V roce 1970 se konala XII. MMO v Maďarsku. Mezinárodní jury přijala československou úlohu, její text zní:

- . Určete všechna přirozená čísla n , která mají tuto vlastnost: množinu $M = \{n, n+1, \dots, n+5\}$ lze rozložit ve dvě disjunktní neprázdné podmnožiny tak, že součiny všech prvků obou těchto množin jsou si rovny.

Úloha nemá řešení /žádné takové n neexistuje/. Zvedla pak na olympiádě i doma mezi pracovníky ve školské matematice "vlnu tvořivosti" v sestavování různých variant i analogií.

Jak už jsme se však zmínili, má MO /s malým přerušením/ čtyři kategorie A, B, C, Z /dříve A, B, C, D/. Úlohy kategorie Z a částečně i C představují na naší přehlídce "dětské šatečky". Matematické prostředky účastníků těchto kategorií jsou velmi skrovné a tak součástí úloh jsou často matematické úlohy "bez matematiky". Připouští se - dokonce se vyžaduje - experimentování, použití takových pomůcek, jako je strom všech logických možností, jako jsou Vennovy diagramy, které postupně vytlačují dřívější náměty úloh na procenta, zlomky apod..

Dosti atraktivní byly úlohy s "opravováním chyb". Jedna úloha

tohoto typu je C-II-3, roč. 1962/63:

- . Žák měl vypočítat aritmetický průměr čtyř daných čísel a, b, c, d . Počítal jej takto: určil nejdříve aritmetický průměr p čísel a, b , pak aritmetický průměr q čísel c, p a konečně aritmetický průměr r čísel d, q . Číslo r pokládal za výsledek.
- a/ Ukažte, že postup, který žák použil, není správný.
- b/ Jestliže však číslo r bylo přesto správným výsledkem, splňovala čísla a, b, c, d nutně určitý vztah; najděte jej.

V historii tvorby a využití soutěžních úloh pro MO jsou dvě důležité události: předně založení konkursu JČSMF /nyní též JSMF/ na olympiádní úlohy r. 1966. Byl to konkurs, kterým dosud

prošlo více než 1500 úloh a jehož význam se ještě zvýší, podařilo se s pomocí JČSMF realizovat dokumentaci soutěžních i cvičných úloh.

Druhou událostí je zavedení metodických komentářů pro učitele; tyto komentáře, které jsou snad přece jen něčím více než pouhým řešením úlohy a které dostávají učitelé prakticky současně se zadáním přípravných i soutěžních úloh I. kola, se původně /v roce 1970/ vypracovávaly jen pro kategorii Z, nyní jsou k dispozici pro všechny čtyři kategorie. Snaží se pro jednotlivé úlohy konkrétně zodpovědět věcnou polyakovskou otázku: "Jak na to?", tj., jak pomoci žákům při řešení, aniž jim vlastní řešení prozradíme.

Ale vraťme se znovu k naší přehlídce. Postupné modernizování výuky matematice na gymnáziích si vynucuje, aby se modernizovala i tematika soutěžních úloh MO v duchu těchto zásad:

Modernizace vyučování není jen zavedení množinově logického jazyka.

Tradiční a modernizovaná matematika nejsou v rozporu, ale tvoří jediný organický celek.

Proto se zpestřuje tematika úloh prvky kombinatorické geometrie, strukturami, grafy /schéma "strom"/, schodovými funkcemi, funkcí sgn a jinými nespojitými funkcemi, náměty topologického rázu, analytickou geometrií s komplexní souřadnicí a ovšem i množinovými operacemi v potenční množině se znázorněním Vennovými diagramy. Tak se dostala do MO v posledních ročnících např. i Jaccardova vzdálenost konečných množin /tj. vlastně model metrického prostoru/, ale i jednoduché úlohy o sjednocení a průniku několika množin s tematikou "dopravní síť" nebo "nákupy v obchodním domě". Nedostatek místa nám nedovoluje ani vzorově uvádět texty takových úloh; ostatně tkví asi ještě dost

v paměti našich čtenářů - učitelů, neboť probíhaly olympiádou nedávno.

Jak už jsme se zmínili, byli a jsou uváděni řešitelé do klauzurních úloh jednak semináři na témata předem stanovená a zpracovaná nebo - a to trvá dodnes - sestavenými cykly úloh pro jednotlivé kategorie počínaje studijními koly. Je to slabá náhrada za postup, který doporučuje probrat /třeba v kroužcích/ jistá ne rozsáhlá témata a z probrané tematiky čerpat náměty soutěžních úloh. V každém případě se dostáváme k požadavku nezadávat jednotlivé úlohy izolované, ale zařadovat do určitého ročníku soutěže skupiny na sebe navazujících úloh. Zejména mladší řešitelé /kategorie C a Z/ to vyžadují. Uvedeme některé příklady návaznosti.

- Na kružnici k leží 8 různých bodů, z nichž jsou čtyři červené a čtyři modré. Zjistěte, zda lze vždy sestrojít takovou přímku p , že uvnitř opačných polorovin s hranicí p leží po dvou červených a po dvou modrých bodech.
- Osmiúhelník vepsaný dané kružnici má čtyři vrcholy červené a čtyři modré; přitom žádné tři sousední vrcholy nejsou téže barvy. Zjistěte, zda lze vždy sestrojít takové dvě různoběžné přímky, aby uvnitř každého jimi sevřeného úhlu ležel jeden červený a jeden modrý bod. /Roč. 1977/78, Z-I-3, Z-II-1./
- V rovině jsou dány dva trojúhelníky $\triangle_1$, $\triangle_2$ této vlastnosti: Ke každému rovnoramennému trojúhelníku T_1 , který obsahuje $\triangle_1$ resp. $\triangle_2$ existuje trojúhelník T_2 shodný s T_1 , který obsahuje $\triangle_2$, resp. $\triangle_1$. Dokažte, že trojúhelníky $\triangle_1$, $\triangle_2$ jsou shodné.
- Jsou dány trojúhelníky T_1 , T_2 s obsahy P_1 , P_2 a poloměry vepsaných kružnic ρ_1 , ρ_2 . Je-li trojúhelník T_1 obsažen v trojúhelníku T_2 , pak platí
$$\rho_1 \geq \frac{P_1}{P_2} \rho_2 .$$
Dokažte.
- Je-li vypuklý mnohoúhelník s obvodem o_1 obsažen ve vypuklém mnohoúhelníku s obvodem o_2 , pak platí $o_1 = o_2$. Dokažte. /Roč. 1974/75, A-I-6, A-II-2a, A-III-5./

Žákovská řešení byla někdy tak originální, nápaditá, že daleko překračovala řešení autorská; taková řešení hlavně z II. a III. kola kategorií A, B se otiskovala v ročníkových brožurách a byla odměňována finančními cenami MÚ ČSAV. Ukázkou je řešení úlohy A-III-6 ročníku 1975/76, které podal J. Turek z Hradce Králové - najdete je v této brožuře.

Mnohá fakta uvedená v tomto "Vyprávění" jsou blíž osvětlena v článku "O třetím kole", který se týká jen kategorie A a je jakýmsi pohledem "pod mikroskopem" na vystavené úlohy třetího kola. I když se článek "O třetím kole" týká jen jedné kategorie a jednoho kola, ukazuje vývoj soutěžních úloh, hlavně jejich tematiky.

Je vidět a jsme si toho plně vědomi - bude třeba ledacos změnit a zlepšit. Chybějí nám v soutěži úlohy s praktickou náplní, úlohy s aplikacemi školské matematiky. Pravděpodobně by se tu měly vyskytovat, hlavně v studijním kole, kde účastník není tak vázán časem, i tzv. problémové situace, které lépe odpovídají tomu, jak nám svět a život problémy předkládá; nikoli izolované, ale v komplexech, z nichž musíme matematické úlohy teprve vypreparovat. Olympiáda by se měla více opírat o studijní literaturu, měla by více podněcovat k experimentování, k vyslovování hypotéz, k jejich dokazování a vyvracení, měla by si více všímat moderní tematiky /např. pravděpodobnosti/.

Je zřejmé, že na příští tvůrce soutěžních i cvičných úloh čeká práce dost. Přejeme autorům úloh a jejich hlavním patronům MÚ ČSAV a oběma Jednotám, aby se jim tato práce dobře dařila a byla ku prospěchu naší společnosti.

O B S A H

Niekoľko slov úvodom	3
Trochu statistiky k posledným deseti ročníkům MO - Leo Boček	5
Mezinárodní matematické olympiády - František Zítek . . .	13
Bývalí vítazi a úspěšní řešitelé MO - Jozef Moravčík . .	19
Korespondenční seminář MO na východnom Slovensku - Martin Gavalec	31
Naša pani profesorka - Tamara Marcisová	33
Celostátní kolo ve Strakoniciích - Lada Vaňatová	34
Poznámky vrstevníka matematické olympiády - Jiří Vinárek .	36
Z venkovského řešitele tajemníkem ústředního výboru - Antonín Vrba	38
Malé zamyšlení nad masovostí v matematické olympiádě - Bohdan Zelinka	42
Matematická gymnázia - Jan Vyšín	46
Korespondenční seminář ÚV MO - Antonín Vrba	50
O třetím kole - Jozef Moravčík, Jan Vyšín	85
Řešení některých úloh třetího kola kategorie A	107
Vyprávění u úlohách MO - Jan Vyšín	143

Matematické olympiáda 1951 - 1981. Sestavili Jozef Moravčík a Antonín Vrba. Recenzoval dr. Jaroslav Barták. Vydala Jednota československých matematiků a fyziků a Ústřední výbor matematické olympiády, 1981. Vytiskla Polygrafia 6 n.p. - Prometheus, Praha 8. Náklad 1500 výtisků.

57-555-81

