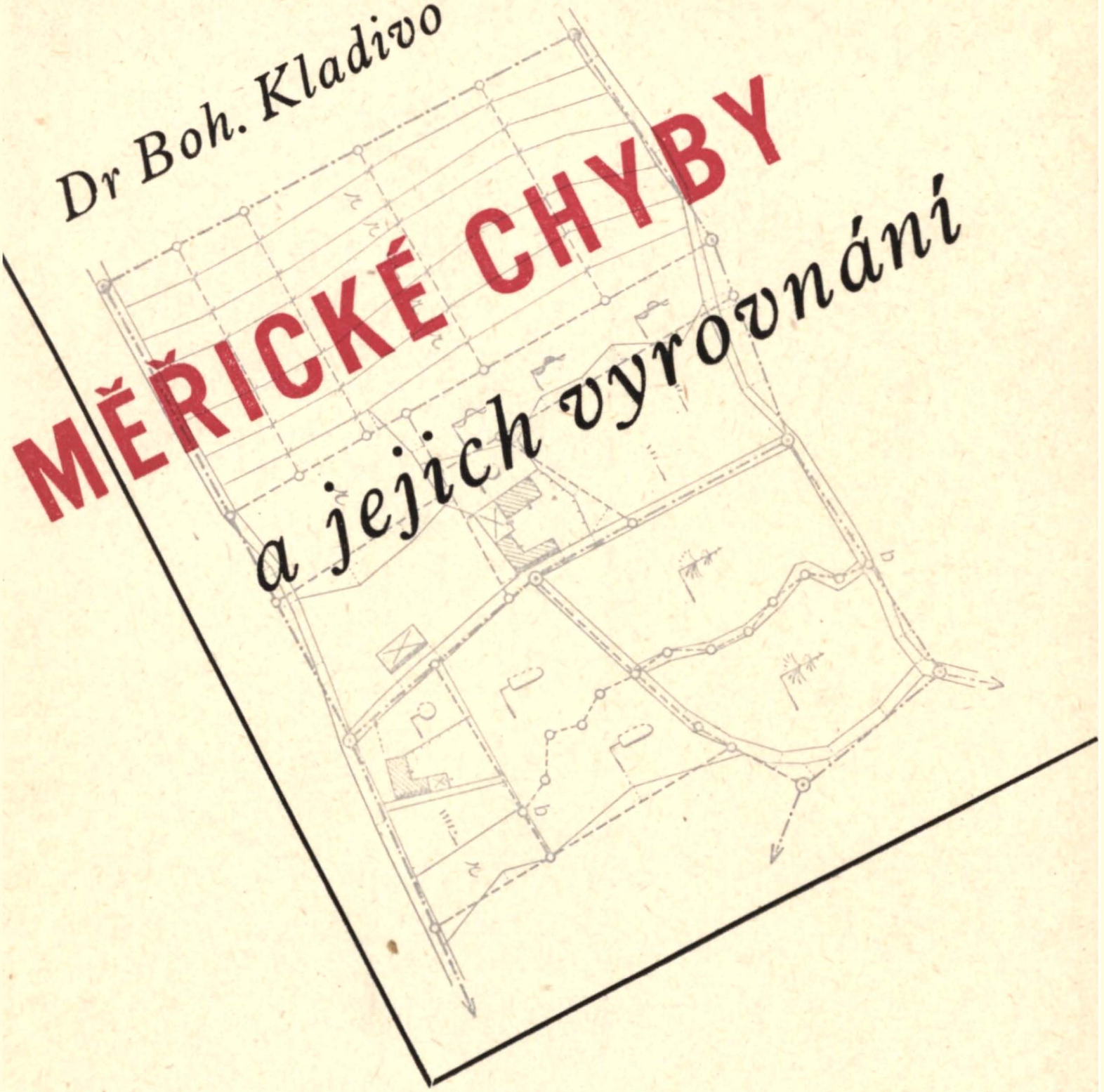
Dr Boh. Kladivo

MĚŘICKÉ CHYBY

a jejich vyrovnání



CESTA K VĚDĚNÍ SV. 24

J č
m+f

CESTA K VĚDĚNÍ

B. Kladivo:

MĚŘICKÉ CHYBY A JEJICH VYROVNÁNÍ

(methodou nejmenších čtverců).

Podkladem práce zeměměřiče, fysika, chemika a všech techniků je měření veličin, která bohužel jsou zatížena různým druhem chyb. Tyto doprovázejí celou další práci technikovu a mají vliv na jeho výsledky.

Je pochopitelné, že se technik snaží odstraniti tento vliv a hledá cestu, jak určiti onu hodnotu měřené veličiny, která je *co nejbližší skutečné hodnotě,* a jak *určiti chybu,* s kterou bylo měření provedeno. Touto chybou rozumí meze (interval), v nichž skutečná hodnota měřené veličiny se nachází. Vyrovnat měření a posoudit jeho přesnost

K 37,—

CESTA K VĚDĚNÍ

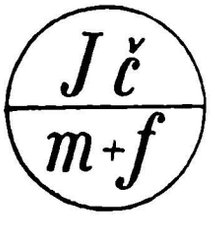
PROF. DR. BOH. KLADIVO

MĚŘICKÉ CHYBY A JEJICH VYROVNÁNÍ

(PODLE METHODY NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ)

S 13 obrazci

Pracováno s podporou Národní rady badatelské



Vyšlo jako 24. svazek sbírky

CESTA K VĚDĚNÍ

vydávané Jednotou českých matematiků a fysiků v Praze za redakce

Dra R. BRDIČKY, Dra F. VYČICHLA a Dra L. ZACHOVALA

1943

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
V GENERÁLNÍ KOMISI NAKLADATELSTVÍ PROMETHEUS V PRAZE
TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“ V PRAZE VIII

PŘEDMLUVA.

Snažil jsem se napsati stručnou a jasnou knížku o měřických chybách a o vyrovnání podle methody nejmenších čtverců a objasniti výklad na příkladech. — Chtěl bych, aby se čtenář z ní naučil nejen vyrovnávat podle methody nejmenších čtverců, ale také vyšetřovat charakter měřických chyb a odchylek, protože to může poskytnouti směrnici, jak hodnotiti výsledky vyrovnání: Jsou-li to hodnoty nejpravděpodobnější nebo mají-li největší váhu nebo jsou-li to jen jakési střední hodnoty. — Pozorný čtenář, který knížku prostuduje, může rozuměti většině spisů, týkajících se methody nejmenších čtverců.

Knížka je určena především pro absolventy zeměměřického inženýrství, dále pro ty, kteří provádějí zeměměřictví v praxi, ale také pro astronomy a pro fysiky, krátce pro všechny, kteří se zabývají nebo se chtějí zabývati některou měřickou vědou ať theoreticky nebo prakticky.

Ze všech učebnic o methodě nejmenších čtverců uvádím dvě, z nichž jsem nejvíc získal: F. R. Helmert: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 3. vyd., Leipzig-Berlin, 1924, a E. T. Whittaker-G. Robinson: The Calculus of Observations, 2. vyd., London and Glasgow, 1929.

B. Kladivo.

P. S. Poněvadž autor Prof. Dr. B. Kladivo (* 24. 6. 1888) zemřel 8. února 1943, provedli úpravu rukopisu této poslední jeho práce a tiskové korektury jeho přátelé.

I.

ÚVOD.

1. Jaké druhy chyb zatěžují měřické výsledky? Všechna měření jsou zatížena chybami. Naučíme se je rozlišovati na jednoduchém příkladě měření vodorovných vzdáleností invarovými dráty.

Dráty u nás obvyklé mají délku přibližně 24 m. Na koncích jsou k nim připojeny stupnice asi 8 cm dlouhé, dělené po milimetrech. Měřená délka D se rozdělí na úseky dlouhé přibližně po 24 m. V koncových bodech úseků se postaví třínohé stojany, nesoucí vodorovnou rysku, jež se urovná kolmo ke svislé rovině r, vedené měřenou délkou. Dráty se napínají dvěma závažími po 5 kg a urovnávají se do roviny r tak, že každá stupnice jest proti zmíněné rysce (obr. 1).

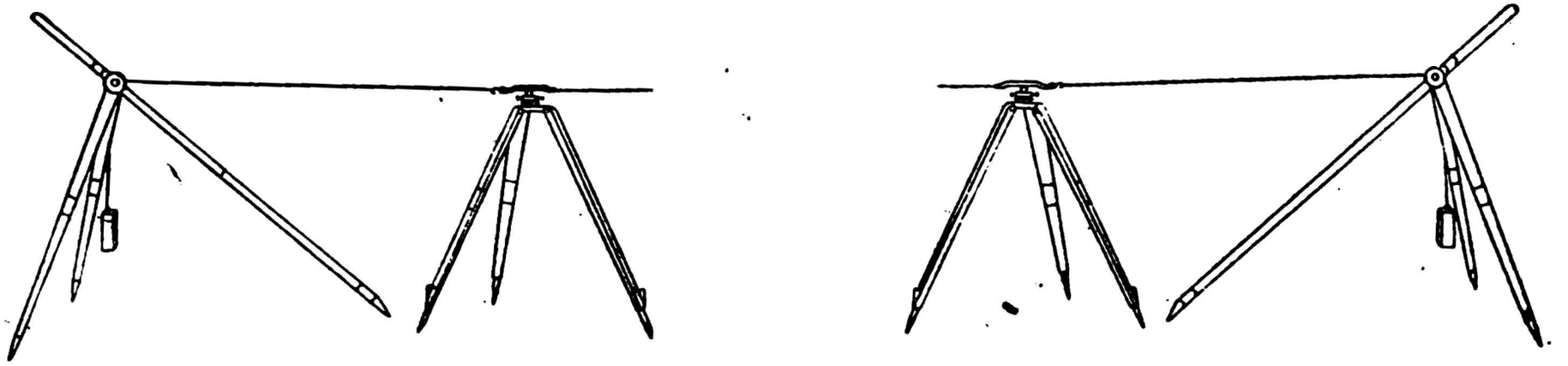
Při měření odhadujeme polohu rysek vůči děleným stupnicím (obr. 2).

Označíme vodorovnou vzdálenost mezi počátky obou stupnic písmenem L a čtení u rysky na počáteční (koncové) stupnici písmenem l_p (l_z). Pak bude vodorovná vzdálenost d mezi oběma uvažovanými ryskami rovna

$$d = L + l_z - l_p. \qquad (1)$$

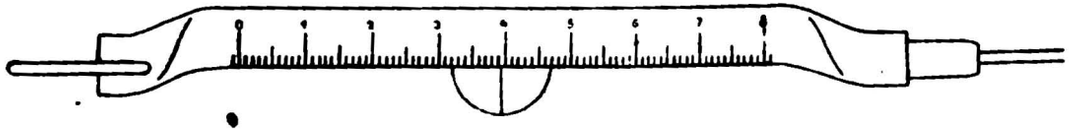
Kromě čtení l_z, l_p musíme určiti ještě teplotu drátu, protože jak délka L, tak délky na stupnicích závisí na teplotě. Dále nutno změřiti výškový rozdíl mezi oběma ryskami a opraviti délku d vzhledem k tomuto rozdílu.

A nyní uvažujme o chybách, které mohou zatěžovati délky d, počítané podle vzorce (1). Předně se mluvívá o hrubých chybách. Odhadujeme-li pozorně polohu rysky vůči milimetrovým stupnicím, je chyba, které se při tom dopustíme, jistě menší než $\frac{1}{5}$ mm. Dopustíme-li se v tomto případě chyby rovné 1 mm nebo 1 cm, je to zaviněno nezkušeností nebo nepozorností. Takové chybě říkáme hrubá chyba. Hrubé chyby



obr. 1

Stojany pro napínání invarových drátů.*)



obr. 2

Ryska stojanu a dělená stupnice.

*) Seznam všech obrazců je na str. 180.

musíme včas odkrýti nejčastěji tím, že měříme několikrát a měření zatížená hrubou chybou škrtneme.

Délky počítané podle vzorce (1) budou jistě zatíženy chybami, kterým se říká pravidelné nebo soustavné nebo systematické. Délka L, určená srovnáním drátu s normálním měřítkem, je zatížená chybou ε_1 z tohoto srovnání, t. zv. chybou z etalonování. Správná délka je pak $L + \varepsilon_1$. Chyba ε_1 je stálá, protože každý úsek jí bude zatížen stejně.

Jiné stálé chyby, které mohou zatěžovati délky (1) jsou: Chyba vyvolaná změnou napínací síly (na př. není-li některé závaží přesně 5 kg). — Nebo chyba vyvolaná tím, že zrychlení tíže v místě, kde měříme, je jiné než v místě, kde byly dráty etalonovány — nevezmeme-li změnu tíže v úvahu.

Na přechodu mezi chybami stálými a proměnlivými můžeme uvésti t. zv. osobní chybu pozorovatele. Pozorovatelé odhadují polohu rysky vůči dělení nepřesně. Příslušná chyba má dvě části. Jedna z nich bývá u pečlivého a zkušeného pozorovatele po delší dobu stálá. Právě této části se říká osobní chyba pozorovatele.

Přejdeme nyní k proměnlivým chybám systematickým. Označíme-li koeficient roztažnosti invarového drátu písmenem α a určíme-li teplotu drátu s chybou ε_2, bude její vliv na hodnoty vypočtené podle vzorce (1) roven přibližně $24\alpha\varepsilon_2$ m. Protože ε_2 se může od úseku k úseku měniti, čítáme tuto chybu k proměnlivým chybám systematickým.

Jinou takovou chybou je chyba z vybočení drátu z roviny r. Svírá-li rovina, v níž je drát napjat, s rovinou r úhel β, je správná vodorovná vzdálenost rysek, promítnutých do roviny r, rovna $d \cos \beta$, tedy chyba $-d + d \cos \beta = d(\cos \beta - 1)$. Tato chyba nabývá různých hodnot, podle toho, jaký je úhel β. Při tom zůstává stále záporná.

Jiná proměnlivá systematická chyba vznikne, změní-li se váha délkové jednotky drátu, na př. orosením, přebytečnou vaselinou, znečištěním a pod. — Nebo změní-li se napínací síla tím, že se změní tření napínacího provazce. — Nebo

chyba, která pochází z toho, že rysky na stupnicích nebyly správně vyneseny. — Ještě jinou takovou chybu vyvolá chyba ε_3 v koeficientu roztažnosti. Její vliv na délku d je přibližně rovný $24\varepsilon_3 t$ m, kde t je teplota drátu. — Nebo konečně t. zv. chyba theorie, která vzniká tím, že vzorec užitý k výpočtu délky invarového pásma není přesný.

Při každém měření se musíme snažit poznati příčiny všech systematických chyb, které by mohly snížiti přesnost výsledku pod žádanou mez, a musíme snížit jejich vliv tak, aby ani všechny dohromady nerušily žádanou přesnost výsledku. Děje se to všelijak. Vynález invaru znamenal podstatné snížení vlivu chyb, pocházejících z nesprávného určení teploty drátu ($24\alpha\varepsilon_2$ m). Koeficient roztažnosti platiny je totiž $9{,}0 \cdot 10^{-6}$, invaru až $1{,}0 \cdot 10^{-7}$. — Zvolíme-li dva dráty, z nichž jeden má kladný koeficient roztažnosti a druhý záporný a přibližně stejně velký, bude v aritmetickém průměru z obou měření vliv chyby ε_2 zase snížen, protože je roven $24\varepsilon_2 \cdot \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$ m.

Nemůžeme-li vliv systematických chyb takto nebo jinak snížit, musíme jej určiti z pomocných pozorování a měřické výsledky podle toho opravíme. Na př. určíme novým, přesnějším měřením koeficient roztažnosti, t. j. jeho chybu ε_3 nebo aspoň její podstatnou část a přičteme k měřickým výsledkům chybu $24\varepsilon_3 t$ m. — Nebo zjistíme zvážením, oč se liší napínací závaží od 5 kg, a vypočteme, jaký vliv to má na délku napjatého drátu, a podle toho opravíme měření.

Konečně se mluvívá v úvahách o t. zv. chybách nahodilých. Budeme tak jmenovati chyby, které mají tyto vlastnosti:

a) Stejně velké kladné a záporné chyby se vyskytují stejně často, tedy kladná a stejně velká záporná chyba jsou stejně pravděpodobné.

b) Chyby s menší absolutní hodnotou se vyskytují častěji než chyby s větší absolutní hodnotou, je tedy pravděpodobnější, že se dopustíme malé chyby než velké.

c) Chyby, jejichž absolutní hodnota je blízká nule, se vyskytují nejčastěji, čili je nejpravděpodobnější, že naměříme hodnotu bez chyby.

V případě měření délek invarovými dráty považuje se za nahodilou chybu na př. část chyby v odhadu polohy rysky vůči dělení, která se zmíněnou již osobní chybou tvoří celou chybu v odhadu polohy rysky. — Stejně se považuje za nahodilou chybu chyba v určení výškového rozdílu mezi ryskami.

Jak patrno z uvedeného příkladu měření délek, je každý výsledek měření zatížen řadou chyb. Naučili jsme se, co jsou to hrubé chyby a naučili jsme se rozlišovati chyby systematické (stálé a proměnlivé) od chyb nahodilých. Při všech dalších úvahách budeme předpokládati, že výsledky měření jsou zatíženy jen nahodilými chybami. To tedy znamená: a) Pozorným opakováním měření jsme se přesvědčili, že výsledky měření nejsou zatíženy hrubými chybami. b) V pečlivém rozboru možností chyb jsme uvážili všechny myslitelné prameny systematických chyb a jejich vliv na výsledky jsme snížili na př. pod desetinu vlivu chyb nahodilých (srovn. kap. VI, odst. 1).

Abychom některé systematické chyby nevynechali, je dobře uvažovati je po skupinách, podle příčin, které je vyvolaly. První, obyčejně početnou skupinu tvoří chyby strojové (na př. chyby vzniklé nesprávným vynesením rysek na stupnicích) a chyby teorie, dále jsou chyby z nesprávného ustavení měřických zařízení (na př. chyba z vybočení drátu z roviny r), pak jsou chyby vyvolané vnějšími vlivy (na př. chyba z nesprávného určení teploty drátu) a konečně chyby zaviněné pozorovatelem (na př. osobní i nahodilá chyba v odečtení).

2. Četnost chyb podle velikosti. Funkce a zákon četnosti. Křivka četnosti. Souvislost s pravděpodobností chyb. Předpokládejme, že jsme n-krát změřili určitou veličinu (na př. délku nebo úhel), jejíž správná hodnota je a, a že

výsledky měření a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), jsou prosté hrubých a systematických chyb. Hodnoty ε_i, které musíme k výsledkům měření algebraicky přičísti, abychom došli k správné hodnotě a, se jmenují **skutečné chyby** měřických výsledků. Tedy:

$$a_i + \varepsilon_i = a, \quad \varepsilon_i = a - a_i. \tag{2}$$

Uvažujme skupinu chyb, které jsou mezi ε a $\varepsilon + d\varepsilon$, kde interval $d\varepsilon$ je dostatečně malý. Předpokládáme, že počet chyb v této skupině je přibližně úměrný $d\varepsilon$. To jest, zvětší-li se několikrát interval $d\varepsilon$, zvětší se přibližně stejněkrát i počet chyb ve skupině. Podobně předpokládáme, že počet chyb v každé skupině je také přibližně úměrný počtu n všech chyb. To jest, zvětší-li se několikrát počet všech měření, zvětší se přibližně stejněkrát i počet chyb v každé skupině.

Za uvedených předpokladů můžeme tedy psáti pro počet členů v jednotlivých skupinách $yn\,d\varepsilon$, kde y je závislé na ε. Klademe $y = \varphi(\varepsilon)$, tedy počet chyb v intervalu od ε do $\varepsilon + d\varepsilon$ jest $n\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$. Známe-li funkci $\varphi(\varepsilon)$, známe rozdělení chyb podle jejich velikosti čili známe **četnost chyb** podle velikosti. Funkci $\varphi(\varepsilon)$ se říká **funkce četnosti**.

Nanášíme-li v nějakém měřítku na osu úseček velikost chyb ε, kolmo k ní příslušnou hodnotu $y = \varphi(\varepsilon)$ a spojíme-li koncové body pořadnic, vznikne křivka $y = \varphi(\varepsilon)$, které se říká **křivka četnosti**.

Podle toho, co bylo řečeno o vlastnostech nahodilých chyb, platí pro ně:

$$\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon), \tag{3}$$

pro $|\varepsilon_2| > |\varepsilon_1|$ jest

$$\varphi(|\varepsilon_2|) < \varphi(|\varepsilon_1|); \tag{3'}$$

$\varphi(\varepsilon)$ nabývá maxima pro $\varepsilon = 0$ a minima pro největší možnou chybu $\varepsilon = \pm E$. Pro $|\varepsilon| > +E$ jest $\varphi(\varepsilon) = 0$.

Ze vzorce (3) je patrno, že pro nahodilé chyby je křivka četnosti souměrná vzhledem k ose y-ové; ze vzorce (3')

a z okolnosti, že $\varphi(0)$ je maximální, vyplývá, že pro nahodilé chyby má křivka četnosti tvar zvonovitý.

Pravděpodobnost, že nahodile vybraná chyba z množství n chyb jest mezi ε a $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$, je rovna $\varphi(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = y\,\mathrm{d}\varepsilon$; je tedy rovna elementu plochy omezené křivkou četnosti a osou x. Pravděpodobnost, že chyba je v mezích od ε_1 do ε_2, jest rovna

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \varphi(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon. \tag{4}$$

Z podmínky, že pro $|\varepsilon| > E$ jest $\varphi(\varepsilon) = 0$, plyne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = \int_{-E}^{+E} \varphi(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = 1. \tag{5}$$

3. Jak se posuzuje přesnost měření. Střední chyba a průměrná chyba.*) Uvažujme o dvou řadách měření téže veličiny a označme chyby pro první řadu

$$\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_{n_1}, \tag{6}$$

a pro druhou řadu

$$\varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \ldots, \varepsilon''_{n_2}. \tag{6'}$$

Předpokládejme, že příslušné funkce četnosti $\varphi_1(\varepsilon)$ pro řadu (6) a $\varphi_2(\varepsilon)$ pro řadu (6') jsou sudé funkce, t. j. splňují podmínku (3), a že obě křivky četnosti se protínají jen v jednom bodě na každé straně osy y-ové (obr. 3). Příslušnou úsečku označme $\pm\,\acute{\varepsilon}$. Je patrno, že počet chyb $\begin{cases}\text{menších}\\ \text{větších}\end{cases}$ co do absolutní hodnoty než $\acute{\varepsilon}$, je více v řadě $\begin{cases}(6)\\ (6')\end{cases}$. Proto považujeme první řadu měření za přesnější.

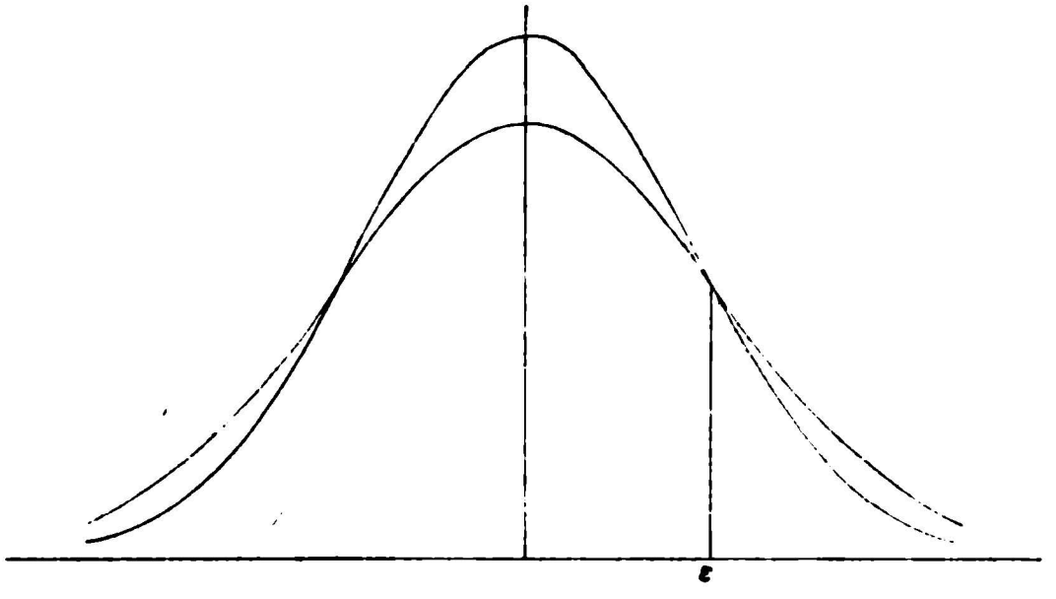
Abychom nemusili sestrojovati křivky četnosti a přece mohli rozhodnouti, která z řad měření je přesnější, uvažujeme takto: Z obr. 3 plyne, že pro $|\varepsilon| < \acute{\varepsilon}$ jest $\varphi_1(\varepsilon) > \varphi_2(\varepsilon)$,

*) F. R. Helmert, l. c. str. 18—20.

pro $|\varepsilon| > \xi$ jest $\varphi_1(\varepsilon) < \varphi_2(\varepsilon)$. Pro jakékoli ε bude

$$[\varphi_1(\varepsilon) - \varphi_2(\varepsilon)](\xi^q - |\varepsilon|^q) \geqq 0, \tag{7}$$

kde $q > 0$. Pro $|\varepsilon| < \xi$ jsou totiž oba faktory $[\varphi_1(\varepsilon) - \varphi_2(\varepsilon)]$ i $(\xi^q - |\varepsilon|^q)$ kladné, pro $|\varepsilon| > \xi$ jsou oba faktory záporné a pro $|\varepsilon| = \xi$ jsou oba faktory rovné 0.



obr. 3

Násobíme-li levou stranu vzorce (7) $d\varepsilon$ a integrujeme-li v mezích od $-\infty$ do $+\infty$, bude

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_1(\varepsilon) - \varphi_2(\varepsilon)] \cdot (\xi^q - |\varepsilon|^q)\, d\varepsilon > 0$$

čili

$$\xi^q \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\varepsilon)\, d\varepsilon - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\varepsilon)\, d\varepsilon\right] - \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^q \varphi_1(\varepsilon)\, d\varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^q \varphi_2(\varepsilon)\, d\varepsilon > 0.$$

Podle vzorce (5) vymizí člen s ξ^q a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^q \varphi_1(\varepsilon)\, d\varepsilon < \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^q \varphi_2(\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{8}$$

Pro přesnější řadu měření je tedy výraz

$$S_q = \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|^q \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{9}$$

menší. Proto můžeme přesnost řady měření posuzovati podle toho, jaké hodnoty nabývá veličina S_q. Je-li S_q pro nějakou řadu měření menší než pro jinou řadu, je první řada měření přesnější.

Jaký je význam veličiny S_q? Protože $n\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$ je počet chyb v mezích od ε do $\varepsilon + d\varepsilon$, je součin $|\varepsilon|^q n\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$ roven součtu absolutních hodnot q-tých mocnin chyb, jež jsou v mezích ε a $\varepsilon + d\varepsilon$. Pak součin nS_q je roven součtu absolutních hodnot q-tých mocnin všech chyb a S_q je aritmetický průměr absolutních hodnot q-tých mocnin všech chyb, tedy na př. pro řadu n chyb je

$$S_q = [|\varepsilon|^q] : n, \tag{9'}$$

kde lomená závorka [ ] značí součet pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Nejčastěji se volí $q = 1$ a $q = 2$. Pro $q = 1$ jest

$$S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon|\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = [|\varepsilon|] : n = s, \tag{10}$$

kde s je t. zv. průměrná chyba nebo průměrná hodnota chyby ε.

Pro $q = 2$ jest

$$S_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = [\varepsilon^2] : n = m^2, \tag{10'}$$

kde m je t. zv. střední chyba nebo střední hodnota chyby ε.

Je-li tedy průměrná nebo střední chyba pro nějakou řadu měření menší, přisuzujeme této řadě větší přesnost.

Opakujeme: úvaha v tomto odstavci předpokládá, že uvažované funkce četnosti jsou sudé funkce a že se křivky četnosti protínají jen v jednom bodě.

4. Střední chyba funkce f několika veličin $l_1, l_2, l_3, \ldots$, určených na sobě nezávisle. a) Nechť je $f = \alpha_1 l_1$, kde l_1 je měřená veličina a α_1 konstanta. Je-li skutečná chyba veličiny l_1 rovna ε_1, jest skutečná chyba veličiny f rovna $\varepsilon_f = \alpha_1 \varepsilon_1$. Podle definice (10') je tedy střední chyba m_f dána vzorcem

$$m_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1^2 \varepsilon_1^2 \varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1.$$

A je-li m_1 střední hodnota chyby ε_1, t. j. je-li

$$m_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_1^2 \varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1,$$

je patrno, že

$$m_f^2 = \alpha_1^2 m_1^2. \tag{11}$$

K stejnému výsledku dojdeme, užijeme-li vzorce $m^2 = [\varepsilon^2] : n$. Mysleme si, že opakujeme měření veličiny l_1 nekonečněkrát a že vypočteme vždycky skutečnou chybu ε_1 a $\varepsilon_f = \alpha_1 \varepsilon_1$ a pak aritmetický průměr $m_f^2 = [\varepsilon_f^2] : n = \alpha_1^2 [\varepsilon_1^2] : n$. Protože $[\varepsilon_1^2] : n = m_1^2$, je zase $m_f^2 = \alpha_1^2 m_1^2$.

b) Nechť $f = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \ldots + \alpha_n l_n$, kde $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ jsou nezávisle měřené veličiny a $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ konstanty. Označíme ε_i skutečnou chybu veličiny l_i a střední hodnotu chyby ε_i označíme m_i, $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$. Skutečná chyba výrazu f jest

$$\varepsilon_f = \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \alpha_3 \varepsilon_3 + \ldots + \alpha_n \varepsilon_n. \tag{12}$$

Její čtverec jest

$$\varepsilon_f^2 = \alpha_1^2 \varepsilon_1^2 + \alpha_2^2 \varepsilon_2^2 + \alpha_3^2 \varepsilon_3^2 + \ldots + 2\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i \alpha_k \varepsilon_i \varepsilon_k. \tag{12'}$$

Mysleme si, že opakujeme měření každé z veličin $l_1, l_2, l_3, \ldots$ nekonečněkrát a že vypočteme vždy skutečné chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, dále ε_f a aritmetický průměr veličin ε_f^2. Podle vzorce (10′) $m_f^2 = [\varepsilon_f^2] : n$ vypočetli jsme tak čtverec střední chyby výrazu f.

Dosadíme-li za ε_f^2 ze vzorce (12′), plyne jiný výraz pro m_f^2. Především půjde o členy tvaru $[\alpha_i^2 \varepsilon_i^2] : n$, které jsou podle předchozího rovny $\alpha_i^2 m_i^2$.

Dále jde o aritmetický průměr výrazu $\sum_{i,k} \alpha_i \alpha_k \varepsilon_i \varepsilon_k$. Chyby $\varepsilon_i, \varepsilon_k$ nabývají při tom nezávisle na sobě všech nekonečně mnoho hodnot.

Předpokládáme, že ke každé kladné chybě ε existuje stejně velká záporná chyba $-\varepsilon$. Všechny možné součiny $\varepsilon_i\varepsilon_k$ dostaneme tak, že zvolíme určité ε_k a dáme probíhati chybě ε_i všechny hodnoty. Součet těchto součinů je $\varepsilon_k \Sigma\varepsilon_i$. Pak zvolíme další ε_k a dáme probíhati ε_i zase všechny hodnoty atd., až vyčerpáme i všechny chyby ε_k. Protože však ke každé chybě ε_i existuje chyba $-\varepsilon_i$, bude $\Sigma\varepsilon_i = 0$, tedy i součet $\sum_{i,k} \alpha_i\alpha_k\varepsilon_i\varepsilon_k$ bude roven 0 a rovněž příslušný aritmetický průměr. Bude tedy celkem

$$m_f^2 = \alpha_1^2 m_1^2 + \alpha_2^2 m_2^2 + \alpha_3^2 m_3^2 + \ldots + \alpha_n^2 m_n^2. \quad (12'')$$

c) Nechť $f = f(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n)$, kde $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ jsou zase nezávisle měřené veličiny. Jsou-li ε_i skutečné chyby veličin l_i, jest skutečná hodnota funkce f rovna

$f(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, l_3 + \varepsilon_3, \ldots, l_n + \varepsilon_n)$ a její skutečná chyba $f(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, l_3 + \varepsilon_3, \ldots) - f(l_1, l_2, l_3, \ldots)$. O funkci f předpokládáme, že ji můžeme rozvinouti v řadu Taylorovu podle rostoucích mocnin chyb ε_i, a že při malých hodnotách chyb stačí podržeti členy lineární, že tedy

$$f(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, l_3 + \varepsilon_3, \ldots, l_n + \varepsilon_n) \doteq f(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial l_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial l_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial l_n}\varepsilon_n.^{*)}$$

Parciální derivace jsou vypočteny pro bod $(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n)$. Skutečná chyba funkce f se tedy rovná

$$\frac{\partial f}{\partial l_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial l_3}\varepsilon_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial l_n}\varepsilon_n. \quad (13)$$

Srovnáme-li s případem b), plyne ihned, že čtverec střední chyby funkce f jest

*) J. Vojtěch: Základy matematiky, 5. vydání, Praha 1939, I, str. 280—286, 398—401. — K. Petr: Počet diferenciální, Praha 1923, str. 198 a 325.

$$m_f = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 m_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_3}\right)^2 m_3^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2 m_n^2. \tag{13'}$$

Znovu připomínáme předpoklady, za kterých byl odvozen vzorec (12″) (a ovšem i (13′)): Veličiny $l_1, l_2, l_3, \ldots$ jsou veličiny na sobě nezávisle měřené. Funkce četnosti pro chyby každé z těchto veličin jsou sudé funkce.

5. Příklady na výpočet středních chyb. 1. Pro veličinu l jsme naměřili hodnoty $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Je-li střední chyba každé z nich rovna m, jaká je střední chyba m' aritmetického průměru $[l] : n$?

Jsou-li skutečné chyby naměřených hodnot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, je skutečná chyba aritmetického středu $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n) : n$. Srovnáním se vzorcem (12) plyne, že v uvažovaném případě je $\alpha_i = 1 : n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tedy ze vzorce (12″) je pro aritmetický střed $m'^2 = m^2 : n$ čili

$$m' = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{14}$$

2. Pro veličinu l jsme vypočetli z jedné řady měření hodnotu l_1 se střední chybou m'_1 a z druhé řady měření hodnotu l_2 se střední chybou m_2. Jaká je střední chyba m_d rozdílu $d = l_1 - l_2$?

Jsou-li ε_1 a ε_2 skutečné chyby hodnot l_1 a l_2, je skutečná chyba rozdílu $l_1 - l_2$ rovna $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Srovnáním se vzorcem (12) plyne $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, tedy ze vzorce (12″) bude

$$m_d = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}. \tag{15}$$

3. Je-li střední chyba veličiny x rovna m_x, jaká je střední chyba m_f veličiny $f = c \log x$, kde c je konstanta?

Je-li ε skutečná chyba veličiny x, je skutečná chyba veličiny f přibližně rovna $\varepsilon_f \doteq \frac{\partial f}{\partial x}\varepsilon$, kde $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{cM}{x}$, $(M \doteq 0{,}43429$ je modul briggických logaritmů). Pak plyne ze vzorce (13′)

$$m'_f = \frac{cM}{x} m_x.$$

4. Střední chyba v určení denního chodu hodin s vteřinovým kyvadlem je $m = \pm 0{,}02^s$. Jaká je střední chyba ve výpočtu jedné periody?

Den je přibližně roven 86 400 dob kyvu (vteřin), t. j. 43 200 period. Je-li skutečná chyba denního chodu ε, je skutečná chyba jedné periody $\frac{\varepsilon}{4{,}32 . 10^4}$ a příslušná střední chyba podle vzorce (11) je $\frac{m}{4{,}32 . 10^4} = \frac{0{,}02^s}{4{,}32 . 10^4} \doteq \frac{4{,}6^s}{10^7}$.

5. V čase t_1 byla určena oprava chronometru o_1 se střední chybou m_1 a v čase $t_2 = t_1 + t$ oprava o_2 se střední chybou m_2. Jaká je střední chyba denního chodu chronometru a střední chyba opravy o, vypočtené interpolací pro čas T?

Denní chod $ch = \frac{o_2 - o_1}{t}$, tedy $m_{ch} = \frac{1}{t}\sqrt{m_1^2 + m_2^2}$.

Oprava o v čase T je rovna $o = o_1 + ch\,(T - t_1) = o_1 + \frac{o_2 - o_1}{t}(T - t_1) = o_1 \frac{t_2 - T}{t} + o_2 \frac{T - t_1}{t}$. Odtud plyne, že $m_0 = \frac{1}{t}\sqrt{(t_2 - T)^2 m_1^2 + (T - t_1)^2 m_2^2}$.

6. Dány jsou tyto výsledky astronomického určení rozdílů zeměpisných délek a příslušné pravděpodobné chyby: Cambridge záp. Greenwiche: $4^h\,44^m\,30{,}99^s \pm 0{,}23^s$, Omaha západně Cambridge: $1^h\,39^m\,15{,}04^s \pm 0{,}06^s$, Springfield vých. Omahy: $25^m\,08{,}69^s \pm 0{,}11^s$. Jaký je délkový rozdíl Springfieldu záp. Greenwiche a jeho střední chyba?*)

Hledaný délkový rozdíl je $4^h\,44^m\,30{,}99^s + 1^h\,39^m\,15{,}04^s - 0^h\,25^m\,08{,}69^s = 5^h\,58^m\,37{,}34^s$.

*) Wright-Hayford: The Adjustment of Observations, New York, 1906, str. 68.

Označíme-li skutečné chyby v uvedených rozdílech zeměpisných délek po řadě ε_1, ε_2, ε_3, bude skutečná chyba rozdílu Springfield záp. Greenwiche rovna $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, tedy příslušná střední chyba $1{,}483 \,.\, \sqrt{0{,}23^2 + 0{,}06^2 + 0{,}11^2} = 1{,}483 \,.\, \sqrt{0{,}0686} = \pm\, 0{,}39^s$, neboť, je-li r pravděpodobná chyba a m střední chyba, je $m = r \,.\, 1{,}483$ [srovn. I, (29)].*)

7. Je-li střední chyba veličin a, b rovna m, jaká je střední chyba veličiny $c = \sqrt{a^2 + b^2}$?

Jsou-li ε_a, ε_b, ε_c skutečné chyby veličin a, b, c, jest podle vzorce (13) $\varepsilon_c = \frac{\partial c}{\partial a}\varepsilon_a + \frac{\partial c}{\partial b}\varepsilon_b$. Při tom $\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{c}$, $\frac{\partial c}{\partial b} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{c}$. Tedy podle vzorce (13′)

$$m_c = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}m^2 + \frac{b^2}{c^2}m^2} = m.$$

8. Je-li střední chyba veličin a, b rovna m, jaká je střední chyba m_α úhlu α, plynoucího z rovnice $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$? ($m_\alpha = m : \sqrt{a^2 + b^2}$.)

9. Úhly B a C rovinného trojúhelníka ABC byly změřeny se stejnou střední chybou m. Jaká je střední chyba m_b strany b, je-li strana c dána bez chyby?

Ze sinové věty je $b = \frac{c}{\sin C}\sin B$. Jsou-li ε_B, ε_C skutečné chyby úhlů B a C, plyne ze vzorce (13), že skutečná chyba ε_b strany b je přibližně rovna

$$\varepsilon_b \doteq \frac{\partial b}{\partial B}\varepsilon_B + \frac{\partial b}{\partial C}\varepsilon_C,$$

kde $\frac{\partial b}{\partial B} = \frac{c}{\sin C}\cos B = b \operatorname{cotg} B$, $\frac{\partial b}{\partial C} = -b \operatorname{cotg} C$.

*) Značí: I. kapitola, vzorec (29).

Tedy podle vzorce (13′) je $m_b = bm\sqrt{\operatorname{cotg}^2 B + \operatorname{cotg}^2 C}$.

10. Úhly A a C trojúhelníka ABC byly změřeny se středními chybami m_A resp. m_C. Jaká je střední chyba m_a strany a, je-li strana b dána bez chyby?

Jde-li o rovinný trojúhelník, je úhel $B = 180^0 - A - C$ a strana $a = \dfrac{b \sin A}{\sin (A + C)}$. Podle vzorce (13) je skutečná chyba strany a rovna $\varepsilon_a = \dfrac{\partial a}{\partial A}\varepsilon_A + \dfrac{\partial a}{\partial C}\varepsilon_C$, kde ε_A, ε_C jsou skutečné chyby úhlů A a C. Při tom je

$$\frac{\partial a}{\partial A} = \frac{b \cos A}{\sin (A + C)} - \frac{b \sin A}{\sin^2 (A + C)} \cos (A + C) =$$

$$= a\,[\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} (A + C)] \quad \text{a} \quad \frac{\partial a}{\partial C} = -a \operatorname{cotg} (A + C).$$

Tedy podle vzorce (13′) je

$$m_a = a\sqrt{m_A^2(\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} (A + C))^2 + m_C^2 \operatorname{cotg}^2 (A + C)}.$$

6. Váha měřené veličiny. Váha funkce nezávisle měřených veličin. Přesnost měřené veličiny se posuzuje často také podle t. zv. **váhy** (váha lat. pondus, odtud značka p), která je definována podmínkou, že váhy dvou měřených veličin se mají k sobě jako převrácené hodnoty čtverců středních chyb obou veličin. Značíme-li váhy p_1, p_2 a příslušné střední chyby m_1, m_2, jest

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2}.$$

Zvolíme-li za **jednotku váhy** ($p_0 = 1$) váhu měřené veličiny, jejíž střední chyba je m_0, můžeme psáti

$$p : 1 = \frac{1}{m^2} : \frac{1}{m_0^2},$$

čili

$$p = \frac{m_0^2}{m^2} \quad (16) \qquad \text{a naopak} \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{p}}. \quad (16')$$

To jsou základní vzorce, které umožňují přejíti od střední chyby měřené veličiny k příslušné váze a naopak od váhy ke střední chybě. Za jednotku váhy se volí často váha jednou měřené veličiny. Ale není to tak vždy (srovnej na př. II, odst. 5b). Proč byla veličina $m_0^2 : m^2$ nazvaná vahou, uvidíme později (srovn. II, odst. 3).

Označíme váhy měřených veličin $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ po řadě $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ a váhu veličiny $f = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \ldots + \alpha_n l_n$ písmenem P. Pak můžeme do vzorce (12″), děleného m_0^2, dosaditi váhy, čímž dostaneme vzorec

$$\frac{1}{P} = \frac{\alpha_1^2}{p_1} + \frac{\alpha_2^2}{p_2} + \frac{\alpha_3^2}{p_3} + \ldots + \frac{\alpha_n^2}{p_n}. \qquad (17)$$

To je vzorec pro váhu lineární funkce nezávisle měřených veličin.

Je-li $f = f(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n)$, užijeme vzorce (13′), z něhož plyne

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1}\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 + \frac{1}{p_2}\left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 + \frac{1}{p_3}\left(\frac{\partial f}{\partial l_3}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2, \qquad (17')$$

vzorec pro váhu funkce nezávisle měřených veličin l_i.

Předpoklady, za kterých byly odvozeny vzorce (17) a (17′) jsou tytéž, jako v odstavci 4, totiž: Veličiny $l_1, l_2, l_3, \ldots$ jsou na sobě nezávisle měřené. Funkce četnosti pro chyby každé z těchto veličin jsou sudé funkce.

7. Příklady na výpočet váhy. 1. Je-li váha jednoho měření rovna jednotce, jaká je váha aritmetického průměru z n měření?

Z úměry $p : 1 = \frac{1}{m'^2} : \frac{1}{m^2}$ plyne podle vzorce (14), že

$$p = \frac{m^2}{m'^2} = n. \qquad (18)$$

Váha aritmetického průměru z několika měření je rovna počtu měření.

2. Váhy nezávisle měřených úhlů BAC, CAD, DAE jsou po řadě $p_1 = 3$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1$. S jakou vahou je určen úhel BAE?*)

Jsou-li skutečné chyby měřených úhlů po řadě ε_1, ε_2, ε_3, je skutečná chyba úhlu BAE rovna $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Označíme-li váhu úhlu BAE písmenem P, bude podle vzorce (17)

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \quad \text{a se zvláštními čísly} \quad P = \frac{3}{5}.$$

3. Váhy nezávisle měřených veličin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_n$. S jakou vahou P je určena veličina $X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, jsou-li koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ rovny buď $+1$ nebo -1?**)

Podle vzorce (17) jest $\frac{1}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2}{p_i}$, a protože

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \ldots = \alpha_n^2 = 1, \quad \text{jest} \quad \frac{1}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}. \qquad (19)$$

4. Jsou-li váhy veličin x_1 a x_2 rovny p, jaká je váha součtu nebo rozdílu obou veličin?

Podle vzorce (19) je hledaná váha v obou případech $\frac{1}{2}p$.

5. Jsou-li úhly α, β rovinného trojúhelníka změřeny s vahami p_α, p_β, s jakou vahou vypočteme úhel γ ze vzorce $\gamma = 180° - \alpha - \beta$?

$(p_\gamma = p_\alpha p_\beta : (p_\alpha + p_\beta).)$

6. Je-li váha veličiny x rovna p_x, jaká je váha p_f veličiny $f = c \log x$?

Z úměry $p_f : p_x = \frac{1}{m_f^2} : \frac{1}{m_x^2}$ plyne $p_f = p_x \frac{m_x^2}{m_f^2}$. A protože $m_f = m_x \frac{cM}{x}$ (viz odst. 5, př. 3), bude $p_f = p_x \frac{x^2}{c^2 M^2}$.

---

*) Wright-Hayford, l. c. str. 71.
**) Wright-Hayford, l. c. str. 71.

7. Jsou-li váhy veličin a, b rovny p, jaká je váha p_c veličiny $c = \sqrt{a^2 + b^2}$?

($p_c = p$, viz odst. 5, př. 7.)

8. Váhy veličin a, b jsou rovny p; jaká je váha p_α úhlu α, plynoucího ze vzorce $\operatorname{tg} \alpha = b:a$?

($p_\alpha = p\,(a^2 + b^2)$, viz odst. 5, př. 8.)

9. Je-li váha veličiny x rovna p, jaká je váha veličiny $c:x$?

($px^4 : c^2$.)

10. Je-li váha úhlu α rovna p, jaká je váha veličin $\sin \alpha$, $\log \sin \alpha$, $\log \operatorname{cotg} \alpha$?

$$\left(\frac{p}{\cos^2 \alpha}, \quad \frac{p}{M^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha}, \quad \frac{p}{M^2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha\right)$$

8. Normální zákon četnosti. Míra přesnosti. Funkce chyb. Pravděpodobná chyba. Extrémní možná chyba. Nejdůležitější zákon četnosti, kterému se říká normální zákon četnosti, nebo také Gaussův zákon, jest

$$\varphi(\varepsilon) = ce^{-h^2\varepsilon^2}.$$

Veličiny c a h nejsou nezávislé, protože z rovnice (5) plyne

$$c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2}\, \mathrm{d}\varepsilon = 1. \tag{20}$$

Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2}\, \mathrm{d}\varepsilon$ převedeme na Laplaceův integrál $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Bude

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2}\, \mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(h\varepsilon)^2}\, \mathrm{d}(h\varepsilon) = \frac{1}{h} \sqrt{\pi}. \tag{21}$$

Ze vzorce (20) plyne pak $c = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$. Tedy normální zákon četnosti je

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}. \tag{22}$$

Veličina h, která se vyskytuje v normálním zákoně četnosti se jmenuje **míra přesnosti**. Uvidíme ihned, jaký je smysl tohoto názvu. Vyhledáme si vztahy mezi h a průměrnou nebo střední chybou.

Podle vzorce (10) bude v případě normálního zákona četnosti

$$S_1 = s = \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon| \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon,$$

a protože

$$2\int_0^{\infty} \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = -\frac{1}{h^2}\int_0^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2}\, d(-h^2\varepsilon^2) = \frac{1}{h^2},$$

bude

$$S_1 = s = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{23}$$

Podobně podle vzorce (10′) jest

$$S_2 = m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon^2\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon =$$

$$= -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varepsilon\, d(e^{-h^2\varepsilon^2}),$$

a protože

$$\int_0^{\infty} \varepsilon\, d(e^{-h^2\varepsilon^2}) = \left[\varepsilon \,.\, e^{-h^2\varepsilon^2}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon = -\frac{\sqrt{\pi}}{2h},$$

bude

$$S_2 = m^2 = \frac{1}{2h^2} \text{ a také } m = \frac{1}{h\sqrt{2}}. \tag{24}$$

Čím menší je průměrná nebo střední chyba pro nějaké mě-

ření, tím větší přesnost mu přisuzujeme (viz odst. 3). Definujeme-li přesnost měření jako veličinu nepřímo úměrnou průměrné nebo střední chybě, bude pro dvě řady měření poměr přesností roven

$$\frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} = \frac{1}{s_1} : \frac{1}{s_2} = h_1 : h_2.$$

V případě normálního zákona četnosti je tedy poměr přesností roven $h_1 : h_2$ a veličina h se proto jmenuje měrou přesnosti měření.

Podobně lze odvoditi i další vzorce pro S_3 a S_4.

$$S_3 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^3 e^{-h^2\varepsilon^2} \, d\varepsilon = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^2 \, d(e^{-h^2\varepsilon^2}), \quad \text{[viz (23)]}$$

a protože

$$\int_0^\infty \varepsilon^2 \, d(e^{-h^2\varepsilon^2}) = \left[\varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^4}\right]_0^\infty - 2\int_0^\infty \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} \, d\varepsilon = -\frac{1}{h^2},$$

bude

$$S_3 = +\frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}. \tag{25}$$

Konečně

$$S_4 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^4 e^{-h^2\varepsilon^2} \, d\varepsilon = -\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^3 \, d(e^{-h^2\varepsilon^2}),$$

a protože

$$\int_0^\infty \varepsilon^3 \, d(e^{-h^2\varepsilon^2}) = \left[\varepsilon^3 e^{-h^2\varepsilon^2}\right]_0^\infty - 3\int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} \, d\varepsilon = -\frac{3\sqrt{\pi}}{4h^3},$$

bude

$$S_4 = +\frac{3}{4h^4}. \tag{26}$$

Hodnoty S_1, S_2, S_3, S_4 mají tedy splňovati řadu podmínek.

$$S_1^2 = \frac{2}{\pi} S_2, \qquad S_1^3 = \frac{1}{\pi} S_3, \qquad S_1^4 = \frac{4}{3\pi^2} S_4. \tag{27}$$

Pravděpodobnost, že chyba ε je mezi x a $-x$ je v případě normálního zákona četnosti rovna

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2\varepsilon^2}\, \mathrm{d}\varepsilon = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2\varepsilon^2}\, \mathrm{d}\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hx} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Zavedeme-li označení $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \Phi(x)$, je pravděpodobnost, že chyba je mezi x a $-x$, rovna $\Phi(hx)$. Funkce $\Phi(x)$ se jmenuje funkce chyb.

Výpočet funkce $\Phi(x)$.

a) Protože $e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \ldots$, plyne integrací

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ x - \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + \ldots \right\}. \tag{28}$$

Tato řada konverguje pro každé x. Ale pro velká x (na př. pro $x = 5$) konverguje pravá strana s počátku pomalu.

b) Píšeme-li $\int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = e^{-x^2} y$, bude, derivujeme-li podle x,

$$e^{-x^2} = e^{-x^2} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xe^{-x^2} y, \quad \text{čili} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + 2xy.$$

Funkce y začíná členem lineárním v x. Píšeme

$$y = \alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7 + \ldots,$$

dosadíme a srovnáme koeficienty. Jest

$$\alpha + 3\beta x^2 + 5\gamma x^4 + 7\delta x^6 + \ldots =$$
$$= 1 + 2\alpha x^2 + 2\beta x^4 + 2\gamma x^6 + 2\delta x^8 + \ldots,$$

tedy

$$\alpha = 1, \quad \beta = \tfrac{2}{3}, \quad \gamma = \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{2}{3}, \quad \delta = \tfrac{2}{7} \cdot \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{2}{3}, \ldots,$$

čili

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} x \left\{ 1 + \frac{1}{3}(2x^2) + \frac{1}{3.5}(2x^2)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3.5.7}(2x^2)^3 + \ldots \right\}. \qquad (29)$$

Tato řada konverguje rovněž pro každé x, ale pro veliká x je k výpočtu rovněž málo vhodná.

c) Asymptotický rozvoj pro funkci $\Phi(x)$.

Integrál $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ lze psáti takto:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt - \int_x^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_x^\infty e^{-t^2}\,dt.$$

Integrací per partes plyne z posledního integrálu

$$\int_x^\infty e^{-t^2} \cdot \frac{dt^2}{2t} = -\left[\frac{e^{-t^2}}{2t}\right]_x^\infty - \frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{e^{-x^2}}{t^2}\,dt =$$
$$= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}\,dt^2}{2t^3} = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2^2}\frac{e^{-x^2}}{x^3} +$$
$$+ \frac{1.3}{2^2}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,dt =$$

$$= e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5}\right) - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^6}\,dt =$$

$$= e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4x^7}\right) + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^8}\,dt$$

atd.

Tedy

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x}\left\{1 - \frac{1}{(2x^2)} + \frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3} + \ldots\right\}. \quad (30)$$

Podržíme-li prvních n členů v závorce, dává nám příslušný výraz hodnotu funkce $\Phi(x)$ s chybou, jejíž absolutní hodnota je menší než absolutní hodnota $(n+1)$-ho členu násobeného $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x}$. *)

Připojujeme tabulku funkce $\Phi(x)$ upravenou z podrobnější tabulky Czuberovy**) tak, že je možno považovat druhé diference Δ^2 za stálé a počítati funkční hodnoty na př. podle vzorce $f(x) \doteq f(a) + \frac{\Delta}{h}\frac{(x-a)}{1!} + \frac{\Delta^2 f(a-h)}{h^2}\frac{(x-a)^2}{2!}$, kde a je tabulková hodnota argumentu nejblíže nižší než hodnota x, h je tabulkový interval, $\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$, $\Delta f(a-h) = f(a) - f(a-h)$, $\Delta = \frac{1}{2}[\Delta f(a) + \Delta f(a-h)]$, $\Delta^2 f(a-h) = \Delta f(a) - \Delta f(a-h)$.

Přesnost měření bývá charakterisována také tak zv. pravděpodobnou chybou. Nazývá se tak hodnota $x = r$, pro kterou je pravděpodobnost $\Phi(hr)$ rovna $\frac{1}{2}$. To značí: Je stejně pravděpodobné, že uvažovaná chyba je co do absolutní hodnoty menší než r, jako že je větší než r.

*) K. Petr: Počet integrální, Praha, 1915, str. 299.

**) E. Czuber: Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig, 1891, str. 411—413.

Tabulka I. Funkce $\Phi(x)$.

x	0		2		4		6		8	
	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$ +	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$ +	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$ +	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$ +	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$ +
0,0	0,0000	226	0,0226	225	0,0451	225	0,0676	225	0,0901	224
0,1	1125	223	1348	221	1569	221	1790	219	2009	218
0,2	2227	216	2443	214	2657	212	2869	210	3079	207
0,3	3286	205	3491	203	3694	199	3893	197	4090	194
0,4	4284	191	4475	187	4662	185	4847	180	5027	178
0,5	5205	174	5379	170	5549	167	5716	163	5879	160
0,6	6039	155	6194	152	6346	148	6494	144	6638	140
0,7	6778	136	6914	133	7047	128	7175	125	7300	121
0,8	7421	117	7538	113	7651	110	7761	106	7867	102
0,9	7969	99	8068	95	8163	91	8254	88	8342	85
1,0	8427	81	8508	78	8586	75	8661	72	8733	69
1,1	8802	66	8868	63	8931	60	8991	57	9048	55
1,2	9103	52	9155	50	9205	47	9252	45	9297	43
1,3	9340	41	9381	38	9419	37	9456	34	9490	33
1,4	9523	31	9554	29	9583	28	9611	26	9637	24
1,5	9661	23	9684	22	9706	20	9726	19	9745	18
1,6	9763	17	9780	16	9796	15	9811	14	9825	13
1,7	9838	12	9850	11	9861	11	9872	10	9882	9
1,8	9891	8	9899	8	9907	8	9915	7	9922	6
1,9	9928	6	9934	5	9939	5	9944	5	9949	4
2,0	9953									

x	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$
2,00	0,9953	+10
05	63	7
10	70	6
15	76	5
20	81	4
25	85	4
30	89	2
35	91	2
40	93	2
45	95	1
50	96	

x	$\Phi(x)$	$\Delta\Phi$
2,50	0,99959	+10
55	69	7
60	76	6
65	82	5
70	87	3
75	90	2
80	92	2
85	94	2
90	96	1
95	97	1
3,00	98	

Z tabulky funkce $\Phi(x)$ je patrno, že hodnota y, pro kterou $\Phi(y) = \frac{1}{2}$, je mezi 0,46 a 0,48. Lineární interpolací vypočteme přibližnou hodnotu 0,477. Pak hledané $y = 0{,}477 + \dot{y}$, a při tom

$$\Phi(0{,}477) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0{,}477}^{0{,}477+\dot{y}} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}.$$

Ze vzorce (28), užijeme-li prvních šest členů rozvoje, plyne $\Phi(0{,}477) = 0{,}5000572$ a tedy z předcházející rovnice

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0{,}477}^{0{,}477+\dot{y}} e^{-t^2}\, dt = -0{,}0000572 \doteq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, \dot{y} \,.\, e^{-0{,}477^2}.$$

Odtud $\dot{y} \doteq -0{,}000064$, tedy hledané $y \doteq 0{,}476936$ a

$$hr \doteq 0{,}476936.$$

Píšeme-li sem $h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$ (vzorec (24)), bude

$$r = m\sqrt{2} \,.\, 0{,}476936 = m \,.\, 0{,}67449$$

a

$$m = r \,.\, 1{,}4826. \qquad (31)$$

Podobně plynou vztahy mezi r a s, užijeme-li vzorce (23):

$$r = s\sqrt{\pi} \,.\, 0{,}476936 = s \,.\, 0{,}84535$$

a

$$s = r \,.\, 1{,}1829. \qquad (32)$$

Přibližně se píše

$$r \doteq \tfrac{2}{3}m, \qquad m \doteq 1{,}5r. \qquad (33)$$

Pravděpodobná chyba je tedy (v případě normálního zákona četnosti) přibližně rovna dvěma třetinám střední chyby.

Extrémní možná chyba. Podle definice funkce Φ je pravděpodobnost, že chyba je v mezích $-km$ a $+km$,

rovna $\Phi(hkm)$. Protože pak mezi m a h je vztah $mh = \frac{1}{\sqrt{2}}$ [srovn. (24)], je hledaná pravděpodobnost rovna $\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$.

Pro $k = 2, 3, 4$ jest $\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$ rovno po řadě 0,9545, 0,9973, 0,999937, tedy pravděpodobnost, že absolutní hodnota chyby je větší než $2m$, $3m$, $4m$ jest rovna

$$1 - 0{,}9545 = \frac{455}{10^4}, \text{ resp. } \frac{27}{10^4}, \text{ resp. } \frac{63}{10^6}.$$

Bylo-li měření opakováno 10krát, je počet chyb, jejichž absolutní hodnota je větší než $2m$, roven 0,455, tedy přibližně $\frac{1}{2}$. Lze tedy při 10 měřeních považovati přibližně $\pm 2m$ za extrémní možnou chybu.

Podobně, bylo-li měření opakováno 200krát, je počet chyb, jejichž absolutní hodnota je větší než $3m$, roven 0,54, lze tedy při 200 měřeních považovat přibližně $\pm 3m$ za extrémní možnou chybu.

Konečně při 800 měřeních lze považovati přibližně $\pm 4m$ za extrémní možnou chybu.

II.

VYROVNÁNÍ PŘÍMÝCH MĚŘENÍ.

1. Různé druhy vyrovnání. V této kapitole si nejprve uvědomíme, o jaké úkoly v t. zv. vyrovnávacím počtu jde.

a) Vyrovnání přímých měření. Pro danou veličinu x jsme naměřili hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Podle jakého pravidla vypočteme z měřených hodnot výslednou neboli vyrovnanou hodnotu? Jak můžeme posouditi přesnost provedených měření a přesnost vyrovnané hodnoty?

b) Vyrovnání zprostředkujících měření. Mezi délkou L kovového měřítka M a teplotou t předpokládejme jednoduchý vztah

$$L = A + Bt.$$

Měřítko M bylo srovnáno při různých teplotách $t_1, t_2, \ldots, t_n$ s jiným měřítkem M', jehož délku při každé teplotě umíme vypočísti, a ze srovnání byly určeny délky L_i srovnávaného měřítka M pro teplotu t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, takže má býti

$$L_i = A + Bt_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Hledané veličiny jsou v tomto případě A a B. Nejsou měřeny přímo, provedená měření veličin L_i a t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, zprostředkují výpočet hledaných veličin.

Obyčejně je počet rovnic (1) větší než počet hledaných veličin, tedy $n > 2$, a vliv měřických chyb působí, že nemohou býti všechny rovnice (1) splněny přesně.

Jaké hodnoty v tomto případě zvolíme za výsledné (vyrovnané) hodnoty A a B, aby rovnice (1) byly splněny alespoň „co nejlépe“? A jak zde posoudíme přesnost provedených měření a přesnost vyrovnaných hodnot?

c) Vyrovnání závislých měření. V trojúhelníku ABC byly měřeny všechny tři vnitřní úhly. Označíme naměřené hodnoty A, B, C a jejich hledané opravy x, y, z. Jde-li o rovinný trojúhelník, musí součet jeho vnitřních úhlů býti roven 180°, t. j.

$$x + y + z + A + B + C - 180^\circ = 0. \qquad (2)$$

Rovnice (2), které se říká podmínka nebo rovnice závislosti, musí býti splněna přesně. Ale k určení tří neznámých nestačí.

Jak určíme v takovém případě hledané vyrovnané veličiny? A můžeme i v takových případech posouditi nějak přesnost měření a přesnost vyrovnaných hodnot?

V dalších odstavcích uvidíme, že vyrovnání přímých i závislých měření se dá převésti na vyrovnání měření zprostředkujících (srovn. III, odst. 7b a IV, odst. 1). Proto začneme s úvahou o tomto vyrovnání.

Máme určiti neznámé $x, y, z, \ldots$ tak, aby byly „co nejlépe" splněny rovnice

$$a_i x + b_i y + c_i z + \ldots = l_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3)$$

α) je-li počet neznámých menší než počet rovnic n a

β) nedají-li se všechny rovnice přesně splniti žádným systémem hodnot $x, y, z, \ldots$.

Podobné úlohy jsou dosti časté, a to nejen v měřických vědách (na př. fysice, astronomii, geodesii). Hledá se na př. přímka či křivka, která se „co nejlépe přimyká" nebo „co nejlépe nahrazuje" řadu daných bodů. Nebo hledá se vztah mezi proměnnými, který „co nejlépe vyhovuje" daným, statisticky zjištěným, hodnotám atd.

Ve všech takových a podobných případech musíme vyjasniti, jaký je přesný smysl matematicky neurčitých slovních obratů „co nejlépe splniti", „co nejlépe nahraditi", „co nejlépe se přimykati", „co nejlépe vyhovovati".

Ať zvolíme jakýkoli systém hodnot $x = X, y = Y, z = Z, \ldots$ budou — podle podmínky β) — aspoň některé z hodnot

$$a_i X + b_i Y + c_i Z + \ldots - l_i = V_i \qquad (4)$$

různé od nuly.

Hodnotám V_i se říká **odchylky**, rovnicím (4) **odchylkové rovnice**.

Abychom mohli posouditi, který ze dvou libovolně zvole-

ných systémů hodnot $x, y, z, \ldots$ „lépe" splňuje rovnice (3), musíme srovnávati v obou případech zbývající odchylky V_i. Ale jak je máme srovnávati? Uvedu tři různé způsoby takového srovnávání.

α) Ve své Mécanique céleste*) navrhuje Laplace určovati vyrovnané hodnoty $x, y, z, \ldots$ tak, aby absolutní hodnota největší z odchylek V_i byla menší než pro jakékoli jiné hodnoty neznámých.

Objasníme tento předpis na jednoduchém příkladě přímých měření. Naměřili jsme pro danou veličinu x hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Předpokládejme, že jsme je uspořádali podle velikosti, takže

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n.$$

V tomto případě má býti

$$x - x_i = 0, \tag{3'}$$

ale vlivem měřických chyb bude

$$x - x_i = V_i, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4'}$$

kde odchylky V_i jsou obyčejně malé hodnoty.

Snadno se nahlédne, že vyrovnaná hodnota x', vyhledaná podle uvedeného předpisu Laplaceova, musí býti uprostřed mezi největší a nejmenší naměřenou hodnotou, t. j. musí $x' = \frac{1}{2}(x_1 + x_n)$. V tomto případě bude totiž největší odchylka $+\frac{1}{2}(x_1 + x_n) - x_1 = \frac{1}{2}(x_n - x_1)$, a nejmenší odchylka $+\frac{1}{2}(x_1 + x_n) - x_n = \frac{1}{2}(x_1 - x_n)$, absolutní hodnoty obou těchto extrémních odchylek jsou stejné. A je ihned patrno, že pro jakékoli x', různé od $\frac{1}{2}(x_1 + x_n)$, bychom došli k větším odchylkám než je $\frac{1}{2}(x_n - x_1)$.

Jak viděti, nezávisí v tomto případě výsledná hodnota x' vůbec na tom, jaké hodnoty byly naměřeny mezi x_1 a x_n.

Ten, kdo se postaví na stanovisko, že je nesprávné, nedbati takto — mnohdy — většiny naměřených hodnot, musí tento návrh Laplaceův pro případ přímých měření odmítnouti.

*) Livre III, § 39.

β) Uvedu jiný vyrovnávací předpis, který navrhl Edgeworth:*) Určiti vyrovnané hodnoty neznámých $x, y, z, \ldots$ tak, aby součet absolutních hodnot odchylek byl co nejmenší. Má tedy býti minimem součet

$$S = \sum_{i=1}^{n} | a_i x + b_i y + c_i z + \ldots - l_i |. \qquad (5)$$

Ukážeme na jednoduchém příkladě, že tento předpis nevede vždy k určité vyrovnané hodnotě.

Mysleme si, že jsme veličinu x změřili dvakrát, s výsledky x_1 a x_2, a nechť $x_1 < x_2$. Pak jest $S = | x_1 - x | + | x_2 - x |$.

Pro $x \leqq x_1$ bude $S = x_1 - x + x_2 - x$, minimum nastane pro $x = x_1$ a je rovné $x_2 - x_1$.

Pro $x \geqq x_2$ bude $S = x - x_1 + x - x_2$, minimum nastane pro $x = x_2$ a je rovné $x_2 - x_1$.

Pro $x_1 < x < x_2$ bude $S = x - x_1 + x_2 - x = x_2 - x_1$, ať je x kdekoli mezi x_1 a x_2.

Určili jsme tedy minimum součtu S, ale toto minimum nenastává pro jedinou hodnotu x, nýbrž pro všechny hodnoty v celém intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$, t. j. i včetně mezí.

Jak viděti, Edgeworthův vyrovnávací předpis nevede v tomto případě k cíli.

γ) Roku 1806 uveřejnil Legendre vyrovnávací způsob, který nazval methodou nejmenších čtverců. Již před ním užíval však methody nejmenších čtverců C. F. Gauss.

Podle této methody se určují vyrovnané hodnoty neznámých $x, y, z, \ldots$ tak, aby součet čtverců odchylek byl co nejmenší. Má tedy býti minimem součet

$$S = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y + c_i z + \ldots - l_i)^2. \qquad (6)$$

Aby součet (6) nabyl pro určitý bod $x', y', z', \ldots$ maxima nebo minima, musí se jeho první parciální derivace podle

*) Phil. Mag. 24 (1887), str. 222, a 25 (1888), str. 184. Cituji podle Whittaker-Robinson: l. c. str. 259.

$x, y, z, \ldots$ v bodě $x', y', z', \ldots$ rovnati nule.*) Musí tedy býti

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{x=x',\ldots} = \sum_i a_i (a_i x' + b_i y' + c_i z' + \ldots - l_i) = 0 = \sum_i a_i v_i,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{x=x',\ldots} = \sum_i b_i (a_i x' + b_i y' + c_i z' + \ldots - l_i) = 0 = \sum_i b_i v_i,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)_{x=x',\ldots} = \sum_i c_i (a_i x' + b_i y' + c_i z' + \ldots - l_i) = 0 = \sum_i c_i v_i,$$

. . . . . .

kde odchylka $v_i = a_i x' + b_i y' + c_i z' + \ldots - l_i$. Zde a v dalším rozumíme odchylkami vždy odchylky vypočtené z hodnot $x', y', z', \ldots$ plynoucích podle methody nejmenších čtverců. Na rozdíl od odchylek V_i vypočtených z libovolných hodnot $X, Y, Z, \ldots$ označujeme je v_i.

Zavedeme-li označení $\sum_i a_i^2 = [a^2]$, $\sum_i a_i b_i = [ab]$, $\sum_i a_i c_i = [ac]$, $\sum_i a_i l_i = [al]$ atd., kde všude i probíhá celá čísla od 1 do n, můžeme místo předcházejících rovnic napsat:

$$\begin{aligned} [a^2]\, x' + [ab]\, y' + [ac]\, z' + \ldots &= [al], \\ [ab]\, x' + [b^2]\, y' + [bc]\, z' + \ldots &= [bl], \\ [ac]\, x' + [bc]\, y' + [c^2]\, z' + \ldots &= [cl]. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned} \qquad (7)$$

Rovnicím (7) se říká normální rovnice. Z nich můžeme určiti vyrovnané hodnoty $x', y', z', \ldots$ jednoznačně, pokud determinant soustavy (7) není roven 0. Prozatím to budeme předpokládati. Později ukážeme, co značí pro koeficienty a_i, b_i, c_i, když je determinant soustavy (7) roven 0 (viz III, odst. 4).

Legendre methodu nejmenších čtverců nedokazoval. Jen upozornil na její výhody.

---

*) J. Vojtěch: Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických, I. díl, 5. vyd., Praha 1939, str. 408—410. — K. Petr: Počet diferenciální, Praha 1923, str. 390—394.

Pro přímé měření veličiny x, při kterém jsme naměřili hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$, má býti minimem součet $\sum_i (x - x_i)^2$. Podmínka minima je $\sum_i (x' - x_i) = 0$ čili $nx' - \sum_i x_i = 0$, tedy $x' = [x] : n$.

V případě přímých měření vede tedy methoda nejmenších čtverců k vyrovnané hodnotě rovné aritmetickému průměru všech naměřených hodnot. Legendre upozorňuje na tuto přednost methody nejmenších čtverců. Všechny naměřené hodnoty vstupují do výsledku stejně, nejmenší a největší naměřená hodnota nemá přednostní postavení, jako měla v návrhu Laplaceově.

Jak jsme viděli, vede methoda nejmenších čtverců k jednoznačným výsledkům, ať jde o vyrovnání měření přímých nebo zprostředkujících. Uvidíme později, že vede k jednoznačným výsledkům i při vyrovnání závislých měření (srovn. IV, odst. 1). Je to tedy methoda obecnější než předpis Laplaceův nebo Edgeworthův. — Její užití je také mnohem snadnější než užití způsobů právě jmenovaných. Snadno se lze o tom přesvědčiti, pokusíme-li se vyhledati vyrovnané hodnoty všemi třemi způsoby pro případ, že zbývající odchylky mají tvar $a_i x - l_i = v_i$.

2. První (Gaussovo) zdůvodnění methody nejmenších čtverců: Postulát aritmetického průměru vede k methodě nejmenších čtverců. Označíme skutečnou hodnotu měřené veličiny písmenem x, naměřené hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pak skutečné chyby jsou $\varepsilon_i = x - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pravděpodobnost, že skutečná chyba ε_i je v mezích od ε_i do $\varepsilon_i + \mathrm{d}\varepsilon$, nechť jest $\varphi(\varepsilon_i)\,\mathrm{d}\varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pravděpodobnost, že skutečné chyby při n měřeních, provedených po sobě, jsou v mezích $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 + \mathrm{d}\varepsilon \rangle$, $\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 + \mathrm{d}\varepsilon \rangle$, $\ldots$, $\langle \varepsilon_n, \varepsilon_n + \mathrm{d}\varepsilon \rangle$, jest podle pravidla o součinu pravděpodobností rovna

$$(\mathrm{d}\varepsilon)^n \varphi(\varepsilon_1)\,\varphi(\varepsilon_2) \ldots \varphi(\varepsilon_n). \qquad (8)$$

Kdy je pravděpodobnost (8) při daných $x_1, \ldots, x_n$ největší,

t. j. pro které x nabude součin $\varphi(\varepsilon_1)\,\varphi(\varepsilon_2)\ldots\varphi(\varepsilon_n)$ maxima, nebo jinak řečeno, který předpoklad o správné hodnotě x bude nejpravděpodobnější? Je-li $\varphi(\varepsilon_1)\,\varphi(\varepsilon_2)\ldots\varphi(\varepsilon_n)$ maximální, jest i $\sum_{i=1}^{n} \lg \varphi(\varepsilon_i)$ maximální. Aby tento výraz byl maximální, musí derivace podle x býti rovna 0, tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d} \lg \varphi(\varepsilon_i)}{\mathrm{d}\varepsilon_i} = 0. \tag{9}$$

To je podmínka pro maximum pravděpodobnosti (8). Tážeme se, lze-li určiti funkci φ tak, aby maximální hodnota pravděpodobnosti (8) nastala vždy pro

$$x = [x] : n? \tag{10}$$

Jinak řečeno, aby nejpravděpodobnější hodnotou byl vždy aritmetický průměr (postulát aritmetického průměru).

Rovnice (10) se dá psáti

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0. \tag{10'}$$

Podmínka (9) přechází v (10'), je-li na př.

$$\frac{\mathrm{d} \lg \varphi(\varepsilon_i)}{\mathrm{d}\varepsilon_i} = k\varepsilon_i,$$

kde k je nějaká konstanta. Odtud

$$\lg \varphi(\varepsilon_i) = \tfrac{1}{2} k\, \varepsilon_i^2 + k_1, \quad \varphi(\varepsilon_i) = e^{k_1} \,.\, e^{\frac{1}{2}k\varepsilon_i^2}.$$

Protože pak funkce φ klesá s rostoucím ε, musí býti konstanta k záporná. Píšeme $\frac{1}{2}k = -h^2$ a $e^{k_1} = c$. Tedy

$$\varphi(\varepsilon_i) = c \,.\, e^{-h^2\varepsilon_i^2}. \tag{11}$$

Aby při naměřených hodnotách $x_1, x_2, \ldots, x_n$ byl nejpravděpodobnější hodnotou aritmetický průměr, musí se chyby zatěžující měření nutně říditi normálním zákonem četnosti, ovšem za předpokladu, že funkce četnosti pro chybu ε_i má tvar $\varphi(\varepsilon_i)$ (srovn. I, odst. 8).

Pak je pravděpodobnost (8) rovna $c^n(\mathrm{d}\varepsilon)^n e^{-h^2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_n^2)}$. Požadavek, aby pravděpodobnost (8) byla maximální, je v tom případě totožný s požadavkem, aby $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2$, (t. j. součet čtverců chyb) byl minimální; tento požadavek vede tedy k methodě nejmenších čtverců.

Jak patrno, nutnost vyrovnávati podle methody nejmenších čtverců plyne z toho, že se chyby zatěžující měření řídí normálním zákonem četnosti. A dále z postulátu aritmetického průměru plyne, že se chyby zatěžující výsledky měření řídí normálním zákonem četnosti, arci za předpokladu, že funkce četnosti pro chybu ε_i má tvar $\varphi(\varepsilon_i)$.

Tedy za uvedeného předpokladu postulát aritmetického průměru vede k vyrovnání podle methody nejmenších čtverců (srovn. VII, odst. 2a).

3. Vyrovnání přímých měření o nestejné váze. Označíme zase skutečnou hodnotu měřené veličiny písmenem x, hodnoty plynoucí z měření $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a skutečné chyby $\varepsilon_i = x - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Předpokládejme, že se tyto chyby řídí normálním zákonem četnosti a že hodnoty $x_1, \ldots, x_n$ nemají stejnou váhu. Nejsou tedy stejně přesné. Označíme příslušné míry přesnosti $h_1, h_2, \ldots, h_n$ a váhy $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Pravděpodobnost, že chyba ε_i je v intervalu $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i + \mathrm{d}\varepsilon_i \rangle$, jest $\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2\varepsilon_i^2}\,\mathrm{d}\varepsilon_i$ a pravděpodobnost, že skutečné chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ jsou po řadě v intervalech $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 + \mathrm{d}\varepsilon_1 \rangle$, $\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 + \mathrm{d}\varepsilon_2 \rangle, \ldots, \langle \varepsilon_n, \varepsilon_n + \mathrm{d}\varepsilon_n \rangle$, jest

$$\frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n}\,\mathrm{d}\varepsilon_1\,\mathrm{d}\varepsilon_2 \ldots \mathrm{d}\varepsilon_n\, e^{-(h_1^2\varepsilon_1^2 + h_2^2\varepsilon_2^2 + \ldots + h_n^2\varepsilon_n^2)}. \qquad (12)$$

Který předpoklad o správné hodnotě x bude nejpravděpodobnější? Ten, pro nějž je pravděpodobnost (12) největší, tedy pro nějž je součet $h_1^2\varepsilon_1^2 + h_2^2\varepsilon_2^2 + \ldots + h_n^2\varepsilon_n^2$ nejmenší.

Mezi měrou přesnosti h_i, střední chybou m_0 pro jednotku váhy a vahou p_i jsou vztahy $p_i = m_0^2 : m_i^2$, a při normálním rozdělení četnosti $m_i^2 = 1 : 2h_i^2$, tedy

$$h_i = \frac{1}{m_0}\sqrt{\frac{p_i}{2}}$$

[srovn. I, (16) a I, (24)]. Předcházející výraz pro pravděpodobnost bude tedy roven

$$d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n = \frac{\sqrt{p_1 p_2 \cdots p_n}}{(\sqrt{2\pi})^n\, m_0^n}\, e^{-\frac{1}{2m_0^2}(p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + \ldots + p_n\varepsilon_n^2)} \quad (12')$$

Který předpoklad o vyrovnané hodnotě x' bude nejpravděpodobnější? Ten, pro nějž je pravděpodobnost (12′) největší, tedy pro nějž je součet

$$S = p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + \ldots + p_n\varepsilon_n^2 =$$
$$= p_1(x - x_1)^2 + p_2(x - x_2)^2 + \ldots + p_n(x - x_n)^2 \quad (13)$$

nejmenší. Aby byl nejmenší, musí derivace podle x býti rovna 0, t. j.

$$p_1(x' - x_1) + p_2(x' - x_2) + \ldots + p_n(x' - x_n) = 0,$$

čili

$$x' = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}. \quad (14)$$

Vzorec (14), dávající t. zv. **obecný aritmetický průměr**, je týž jako vzorec pro výpočet těžiště hmotných bodů o vahách $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Tato obdoba vedla k tomu, že veličiny $p = m_0^2 : m^2$ byly nazvány vahami (viz I, odst. 1, 5).

Váhy $p_1, \ldots, p_n$, příslušné hodnotám $x_1, \ldots, x_n$, klademe obyčejně — podle vzorce I, (18) — **rovny počtu jednotlivých měření**, z nichž jako aritmetický průměr byly vypočteny. To ovšem za předpokladu, že o jednotlivých měřeních můžeme důvodně souditi, že nemají různou váhu.

Jestliže nestejná přesnost jednotlivých měření je charakterisována ne vahami, ale příslušnými středními chybami

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ [vypočtenými podle vzorce II, (16′)], užijeme k výpočtu vyrovnané hodnoty vzorce, který plyne ze (14), když tam dosadíme $p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2}$. Krátíme-li v čitateli a jmenovateli m_0^2, vyjde

$$x' = \frac{\frac{x_1}{m_1^2} + \frac{x_2}{m_2^2} + \ldots + \frac{x_n}{m_n^2}}{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \ldots + \frac{1}{m_n^2}}. \qquad (14')$$

Jde-li o dvě měření, přejde vzorec (14′) ve

$$x' = \frac{m_2^2 x_1 + m_1^2 x_2}{m_1^2 + m_2^2}. \qquad (14'')$$

Že nastane pro $x = x'$ minimum součtu S, je patrno z toho, že druhá derivace výrazu (13) podle x jest rovna $[p]$, tedy kladná.*)

Ke stejnému výsledku přijdeme také touto úvahou:

Má-li měřená veličina x váhu p, pak má veličina kx váhu $P = \frac{p}{k^2}$. Neboť je-li m střední chyba veličiny x, je střední chyba veličiny kx rovna km a

$$P : p = \frac{1}{k^2 m^2} : \frac{1}{m^2} \quad \text{čili} \quad P = \frac{p}{k^2}.$$

Zvolíme-li $k = \sqrt{p}$, bude $P = 1$. To znamená: Místo abychom uvažovali měření různých vah, stačí násobiti každou odchylkovou rovnici odmocninou příslušné váhy a přisouditi všem měřením (a tedy i novým odchylkovým rovnicím) stejné váhy, rovné 1. V uvažovaném případě přímých měření o nestejné váze jsou odchylkové rovnice $v_i = x - x_i$, váhy p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Místo nich uvažujeme odchylkové rovnice $v'_i = (x - x_i)\sqrt{p_i}$ o stejné váze, rovné 1.

*) J. Vojtěch, l. c. str. 268—270. — K. Petr, l. c. str. 272 až 274.

Podle předcházejícího odstavce má býti minimem součet čtverců odchylek

$$v'_1{}^2 + v'_2{}^2 + \ldots + v'_n{}^2 = p_1 v_1{}^2 + p_2 v_2{}^2 + \ldots + p_n v_n{}^2.$$

A z toho plyne zase vzorec (14).

4. Střední chyba pro jednotku váhy. Střední chyba výsledku. Označíme střední chybu pro jednotku váhy písmenem m_0. Protože váha veličiny x_i je p_i, bude střední hodnota chyby ε_i rovna $\frac{m_0}{\sqrt{p_i}}$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$ (viz I, (16′)).

Ze vzorců $v_i = x' - x_i$, $\varepsilon_i = x - x_i$, plyne, násobíme-li p_i a sečteme:

$$[pv] = [p]\,x' - [px], \quad [p\varepsilon] = [p]\,x - [px]$$

a protože $[pv] = 0$ [viz (14)], jest $\frac{[p\varepsilon]}{[p]} = x - x'$.

Odtud

$$v_i = x' - x + x - x_i = \varepsilon_i - \frac{[p\varepsilon]}{[p]} =$$

$$= \frac{1}{[p]}\left\{-p_1\varepsilon_1 - p_2\varepsilon_2 - \ldots + ([p] - p_i)\,\varepsilon_i - \ldots - p_n\varepsilon_n\right\}. \quad (15)$$

Podle vzorce I, (12″) vypočteme odtud čtverec střední hodnoty $v_i{}^2$, který označíme $\dot{v}_i{}^2$. Bude

$$\dot{v}_i{}^2 = \frac{1}{[p]^2}\left\{p_1{}^2\frac{m_0{}^2}{p_1} + p_2{}^2\frac{m_0{}^2}{p_2} + \ldots + ([p_i] - p_i)^2\frac{m_0{}^2}{p_i} + \right.$$

$$\left. + \ldots + p_n{}^2\frac{m_0{}^2}{p_n}\right\} = \frac{m_0{}^2}{[p]^2}\left\{([p] - p_i) + ([p] - p_i)^2 \cdot \frac{1}{p_i}\right\} =$$

$$= \frac{m_0{}^2}{[p]} \cdot \frac{[p] - p_i}{p_i}$$

a součet

$$[p\dot{v}^2] = \frac{m_0{}^2}{[p]}\,[p]\,(n-1) = m_0{}^2\,(n-1),$$

čili $$m_0^2 = \frac{[p\dot{v}^2]}{n-1}.$$

Správnou hodnotu součtu $[p\dot{v}^2]$ nemůžeme vypočísti, protože neznáme střední hodnoty $\dot{v}_i^2$. Jsme proto nuceni dosaditi za $[p\dot{v}^2]$ přibližnou hodnotu, t. j. součet čtverců odchylek, násobených příslušnými vahami $[pv^2]$, jak plyne z uvažované řady měření. Bude tedy přibližně

$$m_0^2 \doteq \frac{[pv^2]}{n-1}. \qquad (15')$$

Protože skutečná chyba vyrovnané hodnoty $x' = \frac{[px]}{[p]}$ jest $\frac{[p\varepsilon]}{[p]}$, bude čtverec její střední hodnoty [viz I, (12″)]

$$\frac{1}{[p]^2}\left\{p_1^2\frac{m_0^2}{p_1} + p_2^2\frac{m_0^2}{p_2} + \cdots + p_n^2\frac{m_0^2}{p_n}\right\} = \frac{m_0^2}{[p]}.$$

Tedy střední chyba vyrovnané hodnoty $x' = \frac{[px]}{[p]}$ jest přibližně

$$\pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{(n-1)[p]}}. \qquad (16)$$

Podobně střední chybu vyrovnané hodnoty (14′) můžeme psáti

$$\frac{m_0}{\sqrt{[p]}} = \frac{m_0}{\sqrt{\frac{m_0^2}{m_1^2} + \frac{m_0^2}{m_2^2} + \cdots + \frac{m_0^2}{m_n^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \cdots + \frac{1}{m_n^2}}}. \qquad (16')$$

A střední chyba ve vzorci (14″) bude rovna

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}}}=\frac{m_1 m_2}{\sqrt{m_1^2+m_2^2}}. \qquad (16'')$$

Jde-li o přímá měření stejných vah ($p_i = 1$), bude střední chyba pro jednotku váhy rovna

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \qquad (15'')$$

a střední chyba vyrovnané hodnoty, t. j. aritmetického středu $x' = [x] : n$ jest

$$\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{(n-1)\,n}}. \qquad (16')$$

Abychom mohli počítati s malými čísly, píšeme $x_i = d + \dot{x}_i$, kde d je vhodně zvolená přibližná hodnota. Pak jest

$$x' = \frac{[px]}{[p]} = \frac{[p\,(d+\dot{x})]}{[p]} = d + \frac{[p\dot{x}]}{[p]}. \qquad (17)$$

Dále bude

$$v_i = x' - x_i = d + \frac{[p\dot{x}]}{[p]} - d - \dot{x}_i = \frac{[p\dot{x}]}{[p]} - \dot{x}_i. \qquad (18)$$

Pak

$$v_i^2 = \frac{[p\dot{x}]^2}{[p]^2} - 2\,\frac{[p\dot{x}]}{[p]}\,\dot{x}_i + \dot{x}_i^2,$$

tedy

$$[pv^2] = [p]\,\frac{[p\dot{x}]^2}{[p]^2} - \frac{2\,[p\dot{x}]}{[p]}.[p\dot{x}] + [p\dot{x}^2] = [p\dot{x}^2] - \frac{[p\dot{x}]^2}{[p]}. \qquad (19)$$

Pro přímá měření stejných vah ($p_i = 1$), bude

$$x' = d + [\dot{x}] : n, \qquad (17')$$

$$v_i = [\dot{x}] : n - \dot{x}_i, \qquad (18')$$

$$[v^2] = [\dot{x}^2] - [\dot{x}]^2 : n. \qquad (19')$$

5. Dvojice měření. a) Délky stran v polygonální síti se měří obyčejně dvakrát, jednou při postupu vpřed (p) a po druhé při postupu zpět (z). Předpokládáme, že jsou přibližně stejné, a označíme délku naměřenou pro i-tou stranu písmenem l_{ip} resp. l_{iz}.

Takovým a podobným měřením (na př. výškových rozdílů mezi dvěma sousedními výškovými značkami) se říká dvojice měření.

Označíme-li $l_{iz} - l_{ip} = d_i$ (rozdíl, diferenci měření zpět a měření vpřed), budou vyrovnané hodnoty $l_i' = \frac{1}{2}(l_{iz} + l_{ip})$ a odchylky

$$v_{i1} = \tfrac{1}{2}(l_{iz} - l_{ip}) = \tfrac{1}{2}d_i, \quad v_{i2} = \tfrac{1}{2}(l_{ip} - l_{iz}) = -\tfrac{1}{2}d_i.$$

Podle vzorce (15′) bude střední chyba jednoho měření

$$\pm \frac{d_i}{\sqrt{2}} \tag{20}$$

a podle vzorce (16′) střední chyba aritmetického průměru obou měření

$$\pm \tfrac{1}{2}d_i. \tag{20'}$$

Uvažujme nyní o rozdílech $l_{iz} - l_{ip} = d_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

Označíme-li skutečné chyby veličin l_{iz} a l_{ip} písmeny ε_{iz} a ε_{ip}, musí býti $l_{iz} + \varepsilon_{iz} = l_{ip} + \varepsilon_{ip}$, čili $l_{iz} - l_{ip} + (\varepsilon_{iz} - \varepsilon_{ip}) = 0$. Rozdíly $\varepsilon_{iz} - \varepsilon_{ip} = -d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou tedy skutečné chyby rozdílů měření zpět a vpřed.

Protože jsme předpokládali, že délky stran byly přibližně stejné, můžeme všem naměřeným délkám přisuzovati stejné váhy. Tedy i rozdíly d_i mají stejné váhy, jež volíme za 1. Pak střední hodnota těchto rozdílů, právě protože je můžeme považovati za skutečné chyby o váze rovné 1, je podle vzorce I, (10′) rovna

$$\pm \sqrt{[d^2] : n}. \tag{21}$$

Protože se váhy mají k sobě jako převrácené hodnoty čtverců středních chyb, budou podle vzorců (20) a (20′) váhy jednot-

livých měření rovny 2 a váhy aritmetických středů rovny 4, takže příslušné střední chyby pro jednotlivá měření jsou

$$\pm \sqrt{[d^2] : 2n} \qquad (21')$$

a pro aritmetické středy

$$\pm \tfrac{1}{2} \sqrt{[d^2] : n}. \qquad (21'')$$

b) Liší-li se značně délky stran (tratí), musíme předpokládati, že naměřené rozdíly mají nestejné váhy. Označíme váhu rozdílu d_i písmenem p_i. Při nivelacích na př. se klade váha rozdílu d_i rovna $1 : S_i$, kde S_i je délka trati v km. To značí, že váhu rovnou jednotce přisuzujeme rozdílu d pro trať rovnou 1 km.

Abychom vypočetli v tomto případě střední hodnotu d' rozdílu pro váhu rovnou 1, musíme nejprve naměřené rozdíly d převésti na rozdíly o váze rovné 1. To se stane tím, že je násobíme $\sqrt{p_i}$ (viz II, odst. 3). Pak užijeme zase vzorce I, (10'), takže

$$d' = \pm \sqrt{[pd^2] : n}\,. \qquad (22)$$

Stejně jako v případě a) bude střední chyba pro jedno měření a váhu rovnou 1 nebo střední kilometrová chyba pro jedno měření

$$\pm \sqrt{[pd^2] : 2n}\,. \qquad (22')$$

A střední kilometrová chyba pro střed ze dvou měření jest

$$\pm \tfrac{1}{2} \sqrt{[pd^2] : n}\,. \qquad (22'')$$

6. Příklady na vyrovnání přímých měření. 1. Pro dobu kyvu kyvadla č. 5 bylo naměřeno

0,50862228 sec,
245, (188; 217; 305; 278; 247; 328; 211; 159; 316; 307).

Jest vypočísti výslednou hodnotu, dále střední chybu pro jednotku váhy (t. j. střední chybu jednoho měření) a střední chybu výsledku.

Položíme $d = 0{,}50862$. Pak v jednotkách 10^{-8} bude

$\dot{x}_i = 228, (245; 188; 217; 305; 278; 247; 328: 211; 159; 316; 307)$;

odtud $[\dot{x}] = 3029$ a $_1^1[\dot{x}] = 252$, tedy výsledná hodnota 0,50862252 sec. Pak zase v jednotkách 10^{-8} bude

$v_i = [\dot{x}] : n - \dot{x}_i = +24, (+7, +64, +35, -53, -26, +5, -76, +41, +93, -64, -55)$,

$v_i^2 = 576, (49; 4096; 1225; 2809; 676; 25; 5776; 1681; 8649; 4096; 3025)$. Odtud dostaneme $[v^2] = 32683 \cdot 10^{-16}$.

Podle vzorce (15″) bude

$$m_0 = \pm \sqrt{2971} \cdot 10^{-8} = \pm 5{,}45 \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

A střední chyba výsledku podle vzorce (16′) jest

$$\pm \sqrt{\frac{32683}{132}} \cdot 10^{-8} = \pm \sqrt{247{,}6} \cdot 10^{-8} = \pm 1{,}6 \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

Užijeme-li vzorce (19′), bude $[\dot{x}^2] = 797251 \cdot 10^{-16}$, $[\dot{x}]^2 = 3029^2 \cdot 10^{-16} = 9174841 \cdot 10^{-16}$, tedy $_1^1[\dot{x}]^2 = 764570 \cdot 10^{-16}$ a konečně $[v^2] = 32681 \cdot 10^{-16}$.

Rozdíl mezi hodnotou $[v^2]$ vypočtenou podle vzorce (19′) a hodnotou vypočtenou přímo z odchylek v_i, je zaviněn zaokrouhlováním při výpočtu v_i resp. x'. Hodnota $32681 \cdot 10^{-16}$ je přesnější.

Označíme-li chybu ve výsledku, pocházející ze zaokrouhlení, písmenem ε, budou správné hodnoty odchylek rovny $v_i + 2$, správné hodnoty jejich čtverců $v_i^2 + 2\varepsilon v_i + \varepsilon^2$ a správná hodnota součtu čtverců odchylek

$$[v^2] + 2\varepsilon [v] + n\varepsilon^2.$$

V uvažovaném případě je $\varepsilon = 0{,}42 \cdot 10^{-8}$, $[v] = -5 \cdot 10^{-8}$, tedy $2\varepsilon [v] = -4{,}20 \cdot 10^{-16}$. A protože $n \cdot \varepsilon^2 = 12 \cdot 0{,}1764 \cdot 10^{-16} \doteq 2{,}12 \cdot 10^{-16}$, je $2\varepsilon [v] + n\varepsilon^2 = -2{,}08 \cdot 10^{-16}$. Proto byl součet čtverců odchylek, vypočtený přímo z odchylek v_i, o 2 jednotky řádu 10^{-16} větší než správnější hodnota vypočtená podle vzorce (19′). Obyčejně se omezujeme na přímý výpočet $[v^2]$ z odchylek v_i.

Aby byl při výpočtu přehled, je dobře prováděti výpočet v tabulce, která počítajícího sama nutí k pořádku.

Předešlý příklad sestavený v tabulce bude:

Tabulka II.

$\dot{x}_i$	$v_i = \frac{[\dot{x}]}{n} - \dot{x}_i$	v_i^2
228	+24	576
245	+ 7	49
188	+64	4096
217	+35	1225
305	—53	2809
278	—26	676
247	+ 5	25
328	—76	5776
211	+41	1681
159	+93	8649
316	—64	4096
307	—55	3025
$[\dot{x}] = 3029$ $\frac{1}{12}[\dot{x}] = 252$	$[v] = -5$	$[v^2] = 32683$

$m_0 = \pm \sqrt{32683 : 11} = \pm 5{,}45 \cdot 10^{-7}$ sec;

$m_0 : \sqrt{n} = \pm 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ sec.

Výsledek $0{,}50862252 \pm 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ sec.

2. Základna na české technice v Brně byla měřena po sobě čtyřmi různými invarovými měřítky (dráty a pásmy). Výsledky měření*) byly

12004 cm + 0,755 cm, (0,684; 0,659; 0,703).

Vypočísti výslednou hodnotu, střední chybu pro jednotku

*) A. Semerád: Podrobná délková měření dráty a pásmy invarovými, Techn. Obzor 1916, tab. V.

váhy (t. j. pro měření jedním měřítkem) a střední chybu výsledku.

(Výsledek 12004,100 cm $\pm$ 0,020 cm, $m_0 = \pm$ 0,041 cm.)

3. Na stanici Trenk byly naměřeny pro úhel Mednicken-Fuchsberg tyto hodnoty*)

83° 30′ 36,25″
7,50, (6,00; 4,77; 3,75; 0,25; 3,70; 6,14; 4,04;
6,96; 3,16; 4,57; 4,75; 6,50; 5,00; 4,75;
4,25; 5,25).

Vypočísti výslednou hodnotu, střední chybu pro jednotku váhy (t. j. pro jedno měření) a střední chybu výsledku.

(Výsledek 83° 30′ 34,87″ $\pm$ 0,39″, $m_0 = \pm$ 1,66″.)

4. Při nivelaci byly zjištěny tyto rozdíly dvojic měření v mm: $d = -0{,}6;\ +0{,}4;\ -0{,}6;\ -1{,}2;\ +2{,}4$.**) Příslušné délky tratí v km byly 0,72; 0,42; 0,47; 0,48; 0,51. Jaká plyne odtud střední kilometrová chyba pro jedno měření a pro střed z obou měření?

K výpočtu užijeme vzorce (22′) a (22″), při čemž váhy p jsou rovny převráceným hodnotám délek tratí.

Bude $[pd^2] = 15{,}94$ a odtud střední kilometrová chyba pro jedno měření $\pm \sqrt{\frac{1}{10}[pd^2]} = \pm$ 1,26 mm a střední kilometrová chyba pro střed obou měření $\pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}[pd^2]} = \pm$ 0,89 mm.

5. Při určování času byly odvozeny tyto opravy chronometru z pozorování 21 hvězd:

$-8{,}78^s$
76, (85; 78; 51; 64; 68; 63; 58; 80; 75; 78; 96; 64;
65; 83; 70; 64; 79; 90; 93).

---

*) Jordan: Handbuch der Vermessungskunde, I, Stuttgart, 1904 (5. Aufl.), str. 22.

**) Jordan, l. c. str. 37.

Za předpokladu, že váha všech měření byla stejná, vypočtěte vyrovnanou hodnotu opravy chronometru, její střední chybu a střední chybu jednoho měření (střední chybu pro jednotku váhy)!*)

(Výsledek $-8{,}74^s \pm 0{,}03^s$, $m_0 = \pm 0{,}117^s$.)

6. Gravitační konstanta k byla určena několikrát různými badateli:

Cornu a Baille (1873).....	určili $k =$	$6668 \cdot 10^{-11}$
Poynting (1894)		$6698 \cdot 10^{-11}$
Boys (1894).....		$6657 \cdot 10^{-11}$
Richarz a Krigar-Menzel (1896)		$6685 \cdot 10^{-11}$
Braun (1897)		$6658 \cdot 10^{-11}$

Předpokládáme, že váhy těchto jednotlivých měření jsou stejné. Vypočtěte výslednou hodnotu pro gravitační konstantu a její střední chybu!

(Výsledek: $6673{,}2 \cdot 10^{-11} \pm 8{,}0 \cdot 10^{-11}$.)

7. Pro určitou délku byly naměřeny tyto hodnoty:

5000,7 mm při 6 měřeních, 5007,9 mm při 15 měřeních,
4997,1 mm při 6 měřeních, 5002,1 mm při 8 měřeních,
5001,9 mm při 15 měřeních, 5001,1 mm při 8 měřeních.

Vypočtěte vyrovnanou hodnotu a její střední chybu i střední chybu pro jednotku váhy za předpokladu, že váhy jsou rovny počtu měření!

Zvolíme $d = 4997{,}1$ a počítáme v připojené tabulce postupně ve sloupcích: $\dot{x}_i$; p_i, $[p]$; $p_i\dot{x}_i$, $[p\dot{x}]$, $[p\dot{x}] : [p]$; $v_i = [p\dot{x}] : [p] - \dot{x}_i$; v_i^2; $p_i v_i^2$, $[pv^2]$; m_0, $m_0 : \sqrt{[p]}$.

---

*) Wright-Hayford, l. c. str. 37 a 43.

Tabulka III.

$\dot{x}_i$	p_i	$p_i\dot{x}_i$	v_i	v_i^2	$p_iv_i^2$
+ 3,6	6	21,6	+2,05	4,2025	25,2150
+ 0,0	6	0,0	+5,65	31,9225	191,5350
+ 4,8	15	72,0	+0,85	0,7225	10,8375
+10,8	15	162,0	—5,15	26,5225	397,8375
+ 5,0	8	40,0	+0,65	0,4225	3,3800
+ 4,0	8	32,0	+1,65	2,7225	21,7800
	$[p] = 58$	$[p\dot{x}] = 327,6$			$[pv^2] = 650,5850$

$[p\dot{x}] : [p] = 5,65$

$m_0 = \pm \sqrt{650,5850 : 5} = \pm \sqrt{130,1170} = \pm 11,4$ mm,

$m_0 : \sqrt{[p]} = \pm \sqrt{130,1170 : 58} = \pm 1,50$ mm.

Tedy výsledek $x' = 5002,75$ mm $\pm$ 1,50 mm.

8. Na české technice v Brně byla změřena dvakrát tíže. V roce 1926 bylo naměřeno 980,9618 dyn, při čemž střední chyba byla $\pm 1,39 \cdot 10^{-3}$ dyn. V r. 1928 bylo naměřeno 980,9606 dyn se střední chybou $\pm 1,26 \cdot 10^{-3}$ dyn. Určete výslednou hodnotu z obou měření (s ohledem na jejich váhy) a střední chybu výsledku.

Podle vzorce (14″) bude $x' = d + \dfrac{m_2^2 x_1 + m_1^2 x_2}{m_1^2 + m_2^2}$.

Zvolíme $d = 980,96$ dyn. Pak $\dot{x}_1 = 0,0018$, $\dot{x}_2 = 0,0006$; $m_1^2 = 1,9321$, $m_2^2 = 1,5876$. Tedy

$$x' = 980,96 + \frac{0,004017}{3,52} = 980,96 + 0,0011 = 980,9611 \text{ dyn.}$$

Střední chyba výsledku je podle vzorce (16″) rovna

$$\frac{m_1 m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} = \frac{1,39 \cdot 1,26}{\sqrt{3,52}} \cdot 10^{-3} = \pm 0,93 \cdot 10^{-3} \text{ dyn.}$$

Tedy výsledek

$$980{,}9611 \pm 0{,}93 \cdot 10^{-3} \text{ dyn.}$$

9. Výsledky měření rozdílu zeměpisné délky mezi Washingtonem a Key West a příslušné pravděpodobné chyby byly

1873, prosinec	24	$19^m\ 1{,}42^s$	$\pm 0{,}044^s$
	26	1,37	37
	30	1,38	36
	31	1,45	36
1874, leden	9	1,60	46
	10	1,55	45
	11	1,57	47

Určete výslednou hodnotu s ohledem na váhy a příslušnou střední chybu.*).

Ve vzorci (14′) se vyskytují v čitateli i jmenovateli čísla $\frac{1}{m_i^2}$, můžeme tedy místo nich klásti úměrné hodnoty $\frac{1}{r_i^2}$, neboť $m_i = 1{,}483 r_i$, [I, (31)].

$$\text{Pro } r_i = 3{,}6 \cdot 10^{-2}\ (3{,}7 \cdot 10^{-2};\ 4{,}4 \cdot 10^{-2};\ 4{,}5 \cdot 10^{-2};\ 4{,}6 \cdot 10^{-2};\ 4{,}7 \cdot 10^{-2})$$

bude $\frac{1}{r_i^2} \doteq 772,\ (730;\ 517;\ 494;\ 473;\ 453).$

Klademe-li $d = 19^m\ 1{,}3^s$, bude $\dot{x}_i = +0{,}12^s$, $(+0{,}07^s;\ +0{,}08^s;\ +0{,}15^s;\ +0{,}30^s;\ +0{,}25^s;\ +0{,}27^s)$.

Tedy podle vzorce (14′) je $\left[\frac{\dot{x}}{r^2}\right] : \left[\frac{1}{r^2}\right] = \frac{678{,}41}{4211} = +0{,}161,$

čili $x' = 19^m\ 1{,}461^s$.

A podle vzorce (16) bude střední chyba hodnoty x' rovna

*) Wright-Hayford, l. c. str. 72.

$$\pm \frac{1{,}483}{\sqrt{\left[\frac{1}{r^2}\right]}} = \pm \frac{1{,}483}{\sqrt{4211}} \text{ sec} = \pm 0{,}228^s.$$

Tedy výsledek $19^m\ 1{,}461^s \pm 0{,}228^s$.

10. Rychlost světla byla určena Fizeauem a jinými takto:

298 000 km ± 1500 km; 300 100 km ± 1500 km;
298 500 km ± 1500 km; 299 930 km ± 150 km.
299 990 km ± 300 km;

Jsou-li čísla uvedená na druhém místě pravděpodobné chyby, určete vyrovnanou hodnotu a její střední chybu.*)

Zvolíme $d = 299\,900$ km a za jednotku váhy zvolíme váhu měření s největší pravděpodobnou chybou (± 1500 km). Podle vzorce $p = \frac{m_0^2}{m^2} = \frac{m_0^2}{1{,}483^2 \cdot r^2}$ budou váhy příslušné pravděpodobným chybám ± 300 km a ± 150 km rovny 25 a 100. Při tom $1 = \frac{m_0^2}{1{,}483^2 \cdot 1500^2}$, čili

$m_0 = \pm 1500 \text{ km} \cdot 1{,}483.$

Bude tedy $\dot{x}_i = -1900, -1400, +90, +200, +30$
a příslušná $p_i = 1, 1, 25, 1, 100$, $[p] = 128$.
Tedy $p_i\dot{x}_i = -1900, -1400, +2250, +200, +3000$,
$[p\dot{x}] = +2150$.

Odtud $\frac{[p\dot{x}]}{[p]} = +\frac{2150}{128} = +17$, čili $x' = 299\,917$ km.

Střední chyba podle vzorce $m_0 : \sqrt{[p]}$ bude

$$\pm \frac{1500 \text{ km}}{\sqrt{128}} \cdot 1{,}483 = \pm 197 \text{ km}.$$

Tedy výsledek 299 917 km ± 197 km.

*) Wright-Hayford, l. c. str. 57—58.

III.

VYROVNÁNÍ ZPROSTŘEDKUJÍCÍCH MĚŘENÍ.

1. Vyrovnání zprostředkujících měření. (Omezíme se na tři neznámé x, y, z.) Hledané veličiny x, y, z mají býti určeny z rovnic

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

kde l_i jsou výsledky měření; o skutečných chybách těchto rovnic předpokládáme, že se řídí normálním zákonem četnosti a že nemají stejnou váhu. Pak pravděpodobnost, že v rovnici i-té nastane chyba v mezích $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i + \mathrm{d}\varepsilon_i \rangle$, jest rovna $\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2} \mathrm{d}\varepsilon_i$, a pravděpodobnost, že nastanou chyby, které budou po řadě v intervalech $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 + \mathrm{d}\varepsilon_1 \rangle$, $\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2 + \mathrm{d}\varepsilon_2 \rangle, \ldots, \langle \varepsilon_n, \varepsilon_n + \mathrm{d}\varepsilon_n \rangle$, bude zase rovna součinu pravděpodobností [II, (12)] resp. výrazu [II, (12′)].

Při tom jest $a_i x + b_i y + c_i z = l_i + \varepsilon_i$, čili

$$\varepsilon_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i.$$

Který předpoklad o vyrovnaných hodnotách $x, y, z, \ldots$ bude nejpravděpodobnější? Ten, pro nějž je pravděpodobnost [II, (12′)] největší, tedy pro nějž je součet

$$S = p_1 \varepsilon_1^2 + p_2 \varepsilon_2^2 + \ldots + p_n \varepsilon_n^2 \tag{2}$$

nejmenší.

Aby nastalo minimum součtu (2), musí býti první parciální derivace podle x, y, z rovny nule, t. j. musí býti

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} p_i \varepsilon_i \cdot a_i$$

pro $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ rovno 0, tedy

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i (a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i) = [pav] =$$

$$= [paa]\,x' + [pab]\,y' + [pac]\,z' - [pal] = 0$$

a podobně

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} p_i \varepsilon_i \,.\, b_i$$

pro $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ musí býti rovno 0, tedy

$$[pbv] = [pab]\,x' + [pbb]\,y' + [pbc]\,z' - [pbl] = 0,$$

a stejně (3)

$$[pcv] = [pac]\,x' + [pbc]\,y' + [pcc]\,z' - [pcl] = 0.$$

Při tom

$$v_i = a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i. \qquad (1')$$

Váhu p_i příslušnou i-té odchylkové rovnice odhadujeme podle toho, jaké jsou chyby měřených veličin, na nichž i-tá rovnice závisí, a jaký je jejich vliv na ε_i. Jestliže jediná měřená veličina v i-té rovnici byla veličina l_i, bude p_i její váha. Někdy se však stává, že váhu rovnice určuje jiná měřená veličina než l_i, jestliže její vliv na ε_i převažuje nad vlivem chyby v l_i (viz př. 2 v odst. 9).

Chceme-li ukázati, zda nastane pro $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ maximum nebo minimum, uvažujeme, jak se mění součet S v okolí bodu $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$.

Pro $x = x' + \xi$, $y = y' + \eta$, $z = z' + \zeta$ bude

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i \{a_i (x' + \xi) + b_i (y' + \eta) + c_i (z' + \zeta) - l_i\}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \{a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i + a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta\}^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= [paa]\,x'^2 + 2\,[pab]\,x'y' + [pbb]\,y'^2 + \\
&+ 2\,[pac]\,x'z' + 2\,[pbc]\,y'z' + [pcc]\,z'^2 - \\
&- 2\,[pal]\,x' - 2\,[pbl]\,y' - 2\,[pcl]\,z' + [pll] + \\
&+ 2\xi\,\{[paa]\,x' + [pab]\,y' + [pac]\,z' - [pal]\} + \\
&+ 2\eta\,\{[pab]\,x' + [pbb]\,y' + [pbc]\,z' - [pbl]\} + \\
&+ 2\zeta\,\{[pac]\,x' + [pbc]\,y' + [pcc]\,z' - [pcl]\} + \\
&+ [paa]\,\xi^2 + 2\,[pab]\,\xi\eta + [pbb]\,\eta^2 + 2\,[pac]\,\xi\zeta + \\
&+ 2\,[pbc]\,\eta\zeta + [pcc]\,\zeta^2.
\end{aligned}$$

Podle rovnic (3) jsou koeficienty u 2ξ, 2η a 2ζ rovny 0, takže

$$S = [paa]\,x'^2 + 2\,[pab]\,x'y' + [pbb]\,y'^2 + 2\,[pac]\,x'z' + \\ + 2\,[pbc]\,y'z' + [pcc]\,z'^2 - 2\,[pal]\,x' - 2\,[pbl]\,y' - 2\,[pcl]\,z' + \\ + [pll] + \sum_{i=1}^{n} p_i\,(a_i^2\xi^2 + 2a_ib_i\xi\eta + b_i^2\eta^2 + 2a_ic_i\xi\zeta + 2b_ic_i\eta\zeta + \\ + c_i^2\zeta^2).$$

První část výrazu na pravé straně je hodnota součtu S pro $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Druhá část je rovna $\sum_{i=1}^{n} p_i\,(a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta)^2$, je tedy vždy kladná. Z toho je patrno, že součet S je v bodě $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ menší než pro všechny body v okolí; je tedy v bodě x', y', z' minimum.

2. Řešení normálních rovnic postupem Gaussovým. Součtové kontroly. Nechť jde o řešení tří normálních rovnic o třech neznámých x', y', z'. Rovnice jsou

$$\begin{aligned} [paa]\,x' + [pab]\,y' + [pac]\,z' &= [pal], \\ [pab]\,x' + [pbb]\,y' + [pbc]\,z' &= [pbl], \\ [pac]\,x' + [pbc]\,y' + [pcc]\,z' &= [pcl]. \end{aligned} \qquad (3)$$

Jak patrno, mají souměrný tvar vzhledem k úhlopříčce, jdoucí členy $[paa]$, $[pbb]$, $[pcc]$.

Řešení soustavy (3) se často provádí t. zv. postupem Gaussovým. Násobíme první z rovnic (3) po řadě čísly $\{[pab] : [paa]\}$, $\{[pac] : [paa]\}$ a odečteme od druhé resp. třetí z rovnic (3). Tak vyloučíme neznámou x' a dojdeme k soustavě redukovaných rovnic:

$$\begin{aligned} \left\{[pbb] - [pab]\cdot\frac{[pab]}{[paa]}\right\} y' + \left\{[pbc] - [pac]\frac{[pab]}{[paa]}\right\} z' &= \\ = \left\{[pbl] - [pal]\,\frac{[pab]}{[paa]}\right\}, & \\ \left\{[pbc] - [pab]\cdot\frac{[pac]}{[paa]}\right\} y' + \left\{[pcc] - [pac]\,\frac{[pac]}{[paa]}\right\} z' &= \end{aligned} \qquad (4)$$

$$= \left\{[pcl] - [pal]\,\frac{[pac]}{[paa]}\right\}.$$

Zavedeme obvyklé zkratky a píšeme rovnice (4) ve tvaru

$$\begin{aligned}[pbb\,.\,1]\,y' + [pbc\,.\,1]\,z' &= [pbl\,.\,1],\\ [pbc\,.\,1]\,y' + [pcc\,.\,1]\,z' &= [pcl\,.\,1].\end{aligned} \tag{4'}$$

Význam zkratek je patrný ze srovnání rovnic (4') a (4).

Podobně vyloučíme z rovnic (4') neznámou y'. Výsledná redukovaná rovnice jest

$$\begin{aligned}&\left\{[pcc\,.\,1] - [pbc\,.\,1]\,.\,\frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}\right\} z' =\\ &= \left\{[pcl\,.\,1] - [pbl\,.\,1]\,.\,\frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}\right\},\end{aligned} \tag{5}$$

a zavedeme-li obvyklé zkratky

$$[pcc\,.\,2]\,z' = [pcl\,.\,2]. \tag{5'}$$

Význam zkratek je zase patrný ze srovnání rovnice (5') a (5). Docela podobně se postupuje při libovolném počtu neznámých.

Aby výpočty byly krok za krokem kontrolovány, provádějí se t. zv. součtové kontroly. K číslům a_i, b_i, c_i, l_i připojíme součty

$$a_i + b_i + c_i + l_i = s_i. \tag{6}$$

Počítáme součty součinů

$$\begin{aligned}[paa], [pab], [pac], [pal], [pas],\\ [pbb], [pbc], [pbl], [pbs],\\ [pcc], [pcl], [pcs].\end{aligned}$$

Násobíme-li každou z rovnic (6) součinem $p_i a_i$ a sečteme pro $i = 1, \ldots, n$, dostaneme

$$[paa] + [pab] + [pac] + [pal] = [pas].$$

Podobně

$$
\begin{aligned}
[pab] + [pbb] + [pbc] + [pbl] &= [pbs],\\
[pac] + [pbc] + [pcc] + [pcl] &= [pcs],\\
[pal] + [pbl] + [pcl] + [pll] &= [pls].
\end{aligned}
\qquad (6')
$$

Znásobíme-li první z rovnic (6′) číslem $[pab] : [paa]$, odečteme-li od druhé a zavedeme-li obvyklé zkratky, dostaneme

$$[pbb \,.\, 1] + [pbc \,.\, 1] + [pbl \,.\, 1] = [pbs \,.\, 1], \qquad (6''_1)$$

kde

$$[pbs \,.\, 1] = [pbs] - [pas] \,.\, \frac{[pab]}{[paa]}.$$

Podobně jest

$$[pbc \,.\, 1] + [pcc \,.\, 1] + [pcl \,.\, 1] = [pcs \,.\, 1], \qquad (6''_2)$$

kde

$$[pcs \,.\, 1] = [pcs] - [pas] \,.\, \frac{[pac]}{[paa]}.$$

Tabulka

$[paa]$,	$[pab]$	$[pac]$
$[pab]$ $-[pab]$.	$[pbb]$ $-[pab] \,.\, \frac{[pab]}{[paa]}$ $[pbb \,.\, 1]$	$[pbc]$ $-[pac] \,.\, \frac{[pab]}{[paa]}$ $[pbc \,.\, 1]$
$[pac]$ $-[pac]$.	$[pbc]$ $-[pab] \,.\, \frac{[pac]}{[paa]}$ $[pbc \,.\, 1]$	$[pcc]$ $-[pac] \,.\, \frac{[pac]}{[paa]}$ $[pcc \,.\, 1]$
	$[pbc \,.\, 1]$ $-[pbc \,.\, 1]$.	$[pcc \,.\, 1]$ $-[pbc \,.\, 1] \,\frac{[pbc\ 1]}{[pbb\ 1]}$ $[pcc \,.\, 2]$

Znásobíme-li první z rovnic (6″) číslem $[pbb \,.\, 1]:[pbc \,.\, 1]$ a odečteme-li od druhé, plyne (zavedeme-li obvyklé zkratky):

$$[pcc \,.\, 2] + [pcl \,.\, 2] = [pcs \,.\, 2], \qquad (6''')$$

kde

$$[pcs \,.\, 2] = [pcs \,.\, 1] - [pbs \,.\, 1] \,.\, \frac{[pbc \,.\, 1]}{[pbb \,.\, 1]}.$$

Výpočet normálních rovnic se pro přehlednost provádí obyčejně ve formuláři. (Viz tabulku IV.)

Součet čísel v prvních čtyřech sloupcích má býti v každém řádku formuláře roven číslu v tomtéž řádku a v předposledním sloupci — ovšem až na chyby plynoucí ze zaokrouhlování.

IV.

$[pal]$	$[pas]$	Zkouška
$[pbl]$	$[pbs]$	„
$-[pal] \,.\, \frac{[pab]}{[paa]}$	$-[pas] \,.\, \frac{[pab]}{[paa]}$	„
$[pbl \,.\, 1]$	$[pbs \,.\, 1]$	„
$[pcl]$	$[pcs]$	„
$-[pal] \,.\, \frac{[pac]}{[paa]}$	$-[pas] \,.\, \frac{[pac]}{[paa]}$	„
$[pcl \,.\, 1]$	$[pcs \,.\, 1]$	„
$[pc \,.\, 1]$	$[pcs \,.\, 1]$	„
$-[pbl \,.\, 1] \frac{[pbc \,.\, 1]}{[pbb \,.\, 1]}$	$-[pbs \,.\, 1] \frac{[pbc \,.\, 1]}{[pbb \,.\, 1]}$	„
$[pcl \,.\, 2]$	$[pcs \,.\, 2]$	„

Popsanou redukcí došli jsme k těmto rovnicím pro neznámé $x'\ y'\ z'$:

$$\begin{aligned}
[paa]\,x' + [pab]\,y' + [pac]\,z' &= [pal] && (7_1)\\
[pab]\,x' + [pbb]\,y' + [pbc]\,z' &= [pbl] && (7_2)\\
[pac]\,x' + [pbc]\,y' + [pcc]\,z' &= [pcl] && (7_3)\\
[pbb\,.\,1]\,y' + [pbc\,.\,1]\,z' &= [pbl\,.\,1] && (7'_1)\\
[pbc\,.\,1]\,y' + [pcc\,.\,1]\,z' &= [pcl\,.\,1] && (7'_2)\\
[pcc\,.\,2]\,z' &= [pcl\,.\,2]. && (7'')
\end{aligned}$$

Z rovnice $(7'')$ vypočteme z' a dosadíme do předcházejících. Z rovnice $(7'_1)$ vypočteme y' a kontrolujeme výpočtem z rovnice $(7'_2)$. Dosadíme do předcházejících rovnic, vypočteme ze (7_1) neznámou x' a kontrolujeme výpočtem z rovnice (7_2) nebo (7_3).

V dalším výkladu užijeme jiného postupu, který je výhodný při zvláštních hodnotách prostých členů rovnic (3). Píšeme rovnice (7_1), (7_2) a (7_3) ve tvaru

$$\begin{aligned}
x' + \frac{[pab]}{[paa]}\,y' + \frac{[pac]}{[paa]}\,z' &= \frac{[pal]}{[paa]},\\
y' + \frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}\,z' &= \frac{[pbl\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]},\\
z' &= \frac{[pcl\,.\,2]}{[pcc\,.\,2]}.
\end{aligned} \qquad (8)$$

K první rovnici přičtěme druhou, násobenou číslem A_1 a třetí, násobenou číslem A_2. Dostaneme

$$\begin{aligned}
x' + \left(\frac{[pab]}{[paa]} + A_1\right) y' + \left(\frac{[pac]}{[paa]} + A_1\frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]} + A_2\right) z' &=\\
= \frac{[pal]}{[paa]} + A_1\frac{[pbl\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]} + A_2\frac{[pcl\,.\,2]}{[pcc\,.\,2]}&.
\end{aligned}$$

Zvolíme čísla A_1, A_2 tak, že koeficienty u y' a z' v této rovnici jsou rovny nule, t. j. vypočteme A_1, A_2 z rovnic

$$\frac{[pab]}{[paa]} + A_1 = 0, \quad \frac{[pac]}{[paa]} + A_1\frac{[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]} + A_2 = 0. \qquad (9)$$

Pak bude

$$x' = \frac{[pal]}{[paa]} + A_1 \frac{[pbl \,.\, 1]}{[pbb \,.\, 1]} + A_2 \frac{[pcl \,.\, 2]}{[pcc \,.\, 2]}. \qquad (10)$$

Přičtěme ke druhé z rovnic (8) třetí, násobenou číslem B_1. Určíme-li B_1 tak, že

$$\frac{[pbc \,.\, 1]}{[pbb \,.\, 1]} + B_1 = 0, \qquad (9')$$

bude

$$y = \frac{[pbl \,.\, 1]}{[pbb \,.\, 1]} + B_1 \frac{[pcl \,.\, 2]}{[pcc \,.\, 2]}. \qquad (10')$$

Třetí neznámá plyne z rovnice

$$z' = \frac{[pcl \,.\, 2]}{[pcc \,.\, 2]}. \qquad (10'')$$

3. Střední chyby neznámých x', y', z' a střední chyba lineárního výrazu $\Phi = f_0 + f_1 x' + f_2 y' + f_3 z'$. Řešíme-li normální rovnice (3) pomocí determinantů, dostaneme

$$x' = \begin{vmatrix} [pal], [pab], [pac] \\ [pbl], [pbb], [pbc] \\ [pcl], [pbc], [pcc] \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} [paa], [pab], [pac] \\ [pab], [pbb], [pbc] \\ [pac], [pbc], [pcc] \end{vmatrix} \qquad (11)$$

a podobně y', z'.

Uvažme, že $[pal] = p_1 a_1 l_1 + p_2 a_2 l_2 + \ldots + p_n a_n l_n$ a stejně pro ostatní čísla z prvního sloupce v prvním determinantu. Tento determinant můžeme tedy rozložiti v n determinantů, z nichž první bude míti jako násobitele l_1, druhý l_2 a poslední l_n. Je tedy patrno, že x', y', z' se dají psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_n l_n, \\ y' &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \ldots + \beta_n l_n, \\ z' &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \ldots + \gamma_n l_n, \end{aligned} \qquad (11')$$

kde $\alpha_1, \ldots, \gamma_n$ nezávisí na l_i, $(i = 1, \ldots, n)$.

Jsou-li skutečné chyby veličin $l_1, \ldots, l_n$ po řadě $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, jest skutečná chyba na př. veličiny x' rovna $\alpha_1 \varepsilon_1 + \ldots + \alpha_n \varepsilon_n$.

Přisuzujeme-li veličinám $l_1, \ldots, l_n$ po řadě váhy $p_1, \ldots, p_n$ a označíme-li střední chybu pro jednotku váhy písmenem m_0, je podle (I, odst. 6) střední hodnota veličiny l_i rovna $m_0 : \sqrt{p_i}$.

Předpokládejme, že chyby ε_i sledují normální zákon četnosti. Pak střední chyba $m_{x'}$ výsledku x', jehož skutečná chyba je $\alpha_1\varepsilon_1 + \ldots + \alpha_n\varepsilon_n$ bude rovna [(I, 12″)]

$$\pm\sqrt{\alpha_1^2\frac{m_0^2}{p_1} + \alpha_2^2\frac{m_0^2}{p_2} + \ldots + \alpha_n^2\frac{m_0^2}{p_n}} = m_0\sqrt{\left[\frac{\alpha^2}{p}\right]}.$$

Označíme-li ještě váhu veličiny x' značkou $p_{x'}$, je

$$m_0\sqrt{[\alpha^2 : p]} = m_0 : \sqrt{p_{x'}} \quad \text{[viz I, (16′)]}.$$

Podobně střední chyba $m_{y'}$ veličiny y' je rovna

$$m_0\sqrt{[\beta^2 : p]} = m_0 : \sqrt{p_{y'}},$$

a střední chyba $m_{z'}$ veličiny z' je rovna

$$m_0\sqrt{[\gamma^2 : p]} = m_0 : \sqrt{p_{z'}},$$

kde značí $p_{y'}$, $p_{z'}$ váhy veličin y' a z'.

Součty $[\alpha^2 : p]$, $[\beta^2 : p]$, $[\gamma^2 : p]$ určíme takto: Násobme normální rovnice (7) po řadě čísly Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} a sečtěme. Bude

$$\begin{aligned} x'\{[paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + [pac]Q_{13}\} + y'\{[pab]Q_{11} + \\ + [pbb]Q_{12} + [pbc]Q_{13}\} + z'\{[pac]Q_{11} + [pbc]Q_{12} + \\ + [pcc]Q_{13}\} = [pal]Q_{11} + [pbl]Q_{12} + [pcl]Q_{13}. \end{aligned}$$

Určíme-li čísla Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} z rovnic

$$\begin{aligned} [paa]Q_{11} + [pab]Q_{12} + [pac]Q_{13} &= 1, \\ [pab]Q_{11} + [pbb]Q_{12} + [pbc]Q_{13} &= 0, \\ [pac]Q_{11} + [pbc]Q_{12} + [pcc]Q_{13} &= 0, \end{aligned} \qquad (12)$$

bude

$$\begin{aligned} x' = [pal]Q_{11} + [pbl]Q_{12} + [pcl]Q_{13} = l_1(p_1a_1Q_{11} + p_1b_1Q_{12} + \\ + p_1c_1Q_{13}) + l_2(p_2a_2Q_{11} + p_2b_2Q_{12} + p_2c_2Q_{13}) + \ldots + \\ + l_n(p_na_nQ_{11} + p_nb_nQ_{12} + p_nc_nQ_{13}). \end{aligned}$$

Srovnáním s rovnicemi (11′) plyne

$$\alpha_i = p_i a_i Q_{11} + p_i b_i Q_{12} + p_i c_i Q_{13}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (12')$$

Odtud

$$\alpha_i^2 : p_i = (p_i a_i Q_{11} + p_i b_i Q_{12} + p_i c_i Q_{13})(a_i Q_{11} + b_i Q_{12} + c_i Q_{13}),$$

Tedy

$$[\alpha^2 : p] = \{[paa]\, Q_{11} + [pab]\, Q_{12} + [pac]\, Q_{13}\}\, Q_{11} + \\ + \{[pab]\, Q_{11} + [pbb]\, Q_{12} + [pbc]\, Q_{13}\}\, Q_{12} + \{[pac]\, Q_{11} + \\ + [pbc]\, Q_{12} + [pcc]\, Q_{13}\}\, Q_{13}.$$

A podle rovnic (12) jest $[\alpha^2 : p] = Q_{11}$.

Součet $[\alpha^2 : p]$ je tedy roven veličině Q_{11}, plynoucí z rovnic (12). Abychom Q_{11} určili přímo z koeficientů normálních a redukovaných rovnic, užijeme postupu vyloženého na konci předcházejícího odstavce. Jen musíme uvážiti, že zde místo $[pal]$, $[pbl]$, $[pcl]$ jest 1, 0, 0, tedy místo $[pbl \,.\, 1]$ jest nyní

$$-[pab] : [paa] = A_1, \quad (13)$$

[viz (4), (4′) a (9)], místo $[pcl \,.\, 1]$ jest $-[pac] : [paa]$ [viz (4) a (4′)] a místo $[pcl \,.\, 2]$ bude nyní

$$-[pac] : [paa] - A_1\, [pbc \,.\, 1] : [pbb \,.\, 1] = A_2 \quad (13')$$

[viz (5), (5′) a (9)]. Tedy z rovnice (10) vyplývá

$$Q_{11} = \frac{1}{[paa]} + \frac{A_1^2}{[pbb \,.\, 1]} + \frac{A_2^2}{[pcc \,.\, 2]}. \quad (13'')$$

Abychom určili součet $[\beta^2 : p]$, násobíme normální rovnice (3) po řadě čísly Q_{21}, Q_{22}, Q_{23} a sečteme. Určíme-li čísla Q_{21}, Q_{22}, Q_{23} z rovnic

$$\begin{aligned} [paa]\, Q_{21} + [pab]\, Q_{22} + [pac]\, Q_{23} &= 0, \\ [pab]\, Q_{21} + [pbb]\, Q_{22} + [pbc]\, Q_{23} &= 1, \\ [pac]\, Q_{21} + [pbc]\, Q_{22} + [pcc]\, Q_{23} &= 0, \end{aligned} \quad (12_1)$$

bude

$$y' = [pal]\, Q_{21} + [pbl]\, Q_{22} + [pcl]\, Q_{23}$$

a odtud

$$\beta_i = p_i a_i Q_{21} + p_i b_i Q_{22} + p_i c_i Q_{23},\ i = 1, 2, \ldots, n, \quad (12'_1)$$

a

$$[\beta^2 : p] = Q_{22}.$$

Součet $[\beta^2 : p]$ je tedy roven veličině Q_{22}, plynoucí z rovnic (12_1). Abychom jej určili přímo z koeficientů normálních a redukovaných rovnic, musíme uvážiti, že zde místo $[pal]$, $[pbl]$, $[pcl]$ jest 0, 1, 0, tedy místo $[pbl \,.\, 1]$ je nyní 1 a místo $[pcl \,.\, 1]$ je 0; odtud plyne, že místo $[pcl \,.\, 2]$ bude nyní

$$-[pbc \,.\, 1] : [pbb \,.\, 1] = B_1. \quad (14)$$

Tedy z rovnice (10′) bude

$$Q_{22} = \frac{1}{[pbb \,.\, 1]} + \frac{B_1^2}{[pcc \,.\, 2]}. \quad (14')$$

Abychom konečně určili součet $[\gamma^2 : p]$, násobíme normální rovnice (3) po řadě čísly Q_{31}, Q_{32}, Q_{33} a sečteme. Určíme-li čísla Q_{31}, Q_{32}, Q_{33} z rovnic

$$\begin{aligned} [paa]\,Q_{31} + [pab]\,Q_{32} + [pac]\,Q_{33} &= 0, \\ [pab]\,Q_{31} + [pbb]\,Q_{32} + [pbc]\,Q_{33} &= 0, \\ [pac]\,Q_{31} + [pbc]\,Q_{32} + [pcc]\,Q_{33} &= 1, \end{aligned} \quad (12_2)$$

bude

$$z' = [pal]\,Q_{31} + [pbl]\,Q_{32} + [pcl]\,Q_{33},$$

a odtud

$$\gamma_i = p_i a_i Q_{31} + p_i b_i Q_{32} + p_i c_i Q_{33},\ i = 1, 2, \ldots, n \quad (12'_2)$$

a

$$[\gamma^2 : p] = Q_{33}.$$

Součet $[\gamma^2 : p]$ je tedy roven veličině Q_{33}, plynoucí z rovnic (12_2). Abychom jej určili přímo z koeficientů normálních a redukovaných rovnic, musíme uvážiti, že zde místo $[pal]$, $[pbl]$, $[pcl]$ jest 0, 0, 1, tedy místo $[pbl \,.\, 1]$ jest 0 a místo $[pcl \,.\, 1]$ bude 1; odtud plyne, že místo $[pcl \,.\, 2]$ bude nyní 1 a tedy z rovnice (10″) jest

$$Q_{33} = 1 : [pcc \,.\, 2]. \quad (15)$$

Můžeme tedy psáti

$$m_{x'} = \frac{m_0}{\sqrt{p_{x'}}} = m_0 \sqrt{\frac{1}{[paa]} + \frac{A_1^2}{[pbb \,.\, 1]} + \frac{A_2^2}{[pcc \,.\, 2]}},$$

$$m_{y'} = \frac{m_0}{\sqrt{p_{y'}}} = m_0 \sqrt{\frac{1}{[pbb \,.\, 1]} + \frac{B_1^2}{[pcc \,.\, 2]}}, \qquad (16)$$

$$m_{z'} = \frac{m_0}{\sqrt{p_{z'}}} = m_0 \sqrt{\frac{1}{[pcc \,.\, 2]}}.$$

Při tom A_1, A_2, B_1 plynou ze vzorců (13), (13′) a (14).

Z rovnic (12′) a ($12'_1$) pro α_i a β_i plyne:

$$\alpha_i\beta_i : p_i = (p_i a_i Q_{11} + p_i b_i Q_{12} + p_i c_i Q_{13})(a_i Q_{21} + b_i Q_{22} + c_i Q_{23}) = (p_i a_i a_i Q_{11} + p_i a_i b_i Q_{12} + p_i a_i c_i Q_{13}) Q_{21} + (p_i a_i b_i Q_{11} + p_i b_i b_i Q_{12} + p_i b_i c_i Q_{13}) Q_{22} + (p_i a_i c_i Q_{11} + p_i b_i c_i Q_{12} + p_i c_i c_i Q_{13}) Q_{23}.$$

Sečteme-li pro všechna $i = 1, \ldots, n$ a použijeme-li rovnic (12), bude

$$[\alpha\beta : p] = Q_{21}.$$

Ale jest také

$$\alpha_i\beta_i : p_i = (a_i Q_{11} + b_i Q_{12} + c_i Q_{13})(p_i a_i Q_{21} + p_i b_i Q_{22} + p_i c_i Q_{23}) = Q_{11}(p_i a_i a_i Q_{21} + p_i a_i b_i Q_{22} + p_i a_i c_i Q_{23}) + Q_{12}(p_i a_i b_i Q_{21} + p_i b_i b_i Q_{22} + p_i b_i c_i Q_{23}) + Q_{13}(p_i a_i c_i Q_{21} + p_i b_i c_i Q_{22} + p_i c_i c_i Q_{23}).$$

Sečteme-li zase pro všechna i a použijeme-li rovnic (12_1), bude

$$[\alpha\beta : p] = Q_{12}.$$

Z toho je patrno, že $Q_{12} = Q_{21}$. Stejně plyne

$$Q_{13} = Q_{31} \text{ a } Q_{23} = Q_{32}. \qquad (17)$$

Střední chyba lineárního výrazu $\Phi = f_0 + f_1 x' + f_2 y' + f_3 z'$. Dosadíme-li sem za x', y', z' ze vzorců (11′), bude

$$\Phi = f_0 + f_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i + f_2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i l_i + f_3 \sum_{i=1}^{n} \gamma_i l_i =$$

$$= f_0 + \sum_{i=1}^{n} (f_1\alpha_i + f_2\beta_i + f_3\gamma_i)\, l_i.$$

Podle vzorce [I, (12″)] bude tedy čtverec střední chyby výrazu Φ roven

$$m_\Phi^2 = \sum_{i=1}^{n} (f_1\alpha_i + f_2\beta_i + f_3\gamma_i)^2 \frac{m_0^2}{p_i} =$$

$$= m_0^2 \left\{ f_1^2 \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + f_1 f_2 \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + f_1 f_3 \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + \right.$$

$$+ f_2 f_1 \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + f_2^2 \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + f_2 f_3 \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] +$$

$$\left. + f_3 f_1 \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + f_3 f_2 \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] + f_3^2 \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] \right\}.$$

A zavedeme-li veličiny $Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{33}$, bude

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \{f_1(f_1Q_{11} + f_2Q_{12} + f_3Q_{13}) + f_2(f_1Q_{21} + f_2Q_{22} + f_3Q_{23}) + f_3(f_1Q_{31} + f_2Q_{32} + f_3Q_{33})\}. \qquad (16')$$

Veličiny $Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{33}$ plynou z rovnic (12), (12_1) a (12_2).

4. Co znamená anulování determinantu Δ soustavy normálních rovnic? Je-li v soustavě (3) $\Delta = 0$, existují čísla $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, jež nejsou všechna rovna 0, a jež splňují rovnice

$$\begin{aligned} [paa]\,\dot{x} + [pab]\,\dot{y} + [pac]\,\dot{z} &= 0, \\ [pab]\,\dot{x} + [pbb]\,\dot{y} + [pbc]\,\dot{z} &= 0, \\ [pac]\,\dot{x} + [pbc]\,\dot{y} + [pcc]\,\dot{z} &= 0. \end{aligned} \qquad (3')$$

Nyní uvažujme o hodnotách $t_i = a_i\dot{x} + b_i\dot{y} + c_i\dot{z}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Násobíme-li je p_ia_i, p_ib_i, p_ic_i a sečteme-li vždy pro všechna i, bude

$$[pat] = [pbt] = [pct] = 0.$$

Násobíme-li hodnotu t_i součinem p_it_i a sečteme-li pro všechna i, dostaneme

$$[pt^2] = [pat]\,\dot{x} + [pbt]\,\dot{y} + [pct]\,\dot{z},$$

tedy podle předcházejících rovnic $[pt^2] = 0$, t. j. musí

$$t_i = a_i\dot{x} + b_i\dot{y} + c_i\dot{z} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Je-li tedy determinant $\Delta = 0$, musí mezi koeficienty odchylkových rovnic (1) býti vztahy (18).

Naopak jsou-li mezi koeficienty odchylkových rovnic (1) vztahy (18), plynou z nich, násobíme-li je $p_i a_i$, $p_i b_i$, $p_i c_i$ a sečteme-li pro všechna i rovnice (3′), kde všechna čísla $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ nejsou rovna 0. To však vyžaduje $\Delta = 0$.

Jsou-li mezi koeficienty odchylkových rovnic (1) vztahy (18) a předpokládáme-li na př. $\dot{z} \neq 0$, píšeme

$$c_i = -a_i \frac{\dot{x}}{\dot{z}} - b_i \frac{\dot{y}}{\dot{z}},$$

tedy z odchylkových rovnic (1) bude

$$a_i\left(x - \frac{\dot{x}}{\dot{z}} z\right) + b_i\left(y - \frac{\dot{y}}{\dot{z}} z\right) - l_i = v_i.$$

Z těchto odchylkových rovnic nevypočteme tedy hodnoty neznámých x, y, z, nýbrž jen hodnoty výrazů

$$x - \frac{\dot{x}}{\dot{z}} z \quad \text{a} \quad y - \frac{\dot{y}}{\dot{z}} z.$$

Zmenšuje-li se determinant Δ, zvětšují se koeficienty Q_{11}, Q_{22}, Q_{33}. Ze vzorců (12), (12_1), (12_2) plyne totiž

$$Q_{11} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}[pbb], [pbc]\\ [pbc], [pcc]\end{vmatrix}, \quad Q_{22} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}[paa], [pac]\\ [pac], [pcc]\end{vmatrix},$$

$$Q_{33} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}[paa], [pab]\\ [pab], [pbb]\end{vmatrix}. \tag{19}$$

Ze vzorců $m_{x'} = m_0\sqrt{Q_{11}}$, $m_{y'} = m_0\sqrt{Q_{22}}$, $m_{z'} = m_0\sqrt{Q_{33}}$ a ze vzorců (19) je patrno, jak roste střední chyba výsledných hodnot, zmenšuje-li se determinant Δ.

5. Střední chyba m_0 pro jednotku váhy. Protože váha i-té odchylkové rovnice jest p_i, bude střední hodnota chyby ε_i rovna $m_0 : \sqrt{p_i}$. Ze vzorců

$$v_i = a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i, \quad \varepsilon_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i,$$

(viz III, odst. 1), kde v_i značí odchylky a ε_i skutečné chyby i-té odchylkové rovnice, plyne

$$v_i - \varepsilon_i = a_i (x' - x) + b_i (y' - y) + c_i (z' - z).$$

První ze vzorců (11′) jest $x' = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \ldots + \alpha_n l_n$, při čemž z rovnic (12′) a (12) plyne

$$[a\alpha] = 1, \ [b\alpha] = 0, \ [c\alpha] = 0,$$

tedy

$$[v\alpha] = [a\alpha] x' + [b\alpha] y' + [c\alpha] z' - [l\alpha] = x' - [l\alpha],$$

což je podle prvního ze vzorců (11′) rovno 0.

Násobíme-li tedy rovnici $v_i - \varepsilon_i = a_i (x' - x) + b_i (y' - y) + c_i (z' - z)$ po řadě α_i a sečteme pro všechna i, bude $-[\alpha\varepsilon] = x' - x$ a stejně $-[\beta\varepsilon] = y' - y$, $-[\gamma\varepsilon] = z' - z$.

Odtud

$$v_i = \varepsilon_i - a_i [\alpha\varepsilon] - b_i [\beta\varepsilon] - c_i [\gamma\varepsilon] = -\varepsilon_1 (a_i\alpha_1 + b_i\beta_1 + c_i\gamma_1) - \varepsilon_2 (a_i\alpha_2 + b_i\beta_2 + c_i\gamma_2) - \ldots + \varepsilon_i \{1 - (a_i\alpha_i + b_i\beta_i + c_i\gamma_i)\} - \ldots - \varepsilon_n (a_i\alpha_n + b_i\beta_n + c_i\gamma_n).$$

Ze vzorce [I, (12″)] vypočteme čtverec střední hodnoty v_i, který označíme $\dot{v}_i^2$. Bude

$$\dot{v}_i^2 = \frac{m_0^2}{p_1} (a_i\alpha_1 + b_i\beta_1 + c_i\gamma_1)^2 + \frac{m_0^2}{p_2} (a_i\alpha_2 + b_i\beta_2 + c_i\gamma_2)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m_0^2}{p_i} \{1 - (a_i\alpha_i + b_i\beta_i + c_i\gamma_i)\}^2 + \ldots + \frac{m_0^2}{p_n} (a_i\alpha_n +$$

$$+ b_i\beta_n + c_i\gamma_n)^2 = m_0^2 \left\{ a_i^2 \left[\frac{\alpha^2}{p}\right] + 2a_i b_i \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + b_i^2 \left[\frac{\beta^2}{p}\right] + \right.$$

$$\left. + 2a_i c_i \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + 2b_i c_i \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] + c_i^2 \left[\frac{\gamma^2}{p}\right] + \frac{1}{p_i} - 2a_i \frac{\alpha_i}{p_i} - \right.$$

$$- 2\,b_i \frac{\beta_i}{p_i} - 2\,c_i \frac{\gamma_i}{p_i}\Big\},$$

čili

$$p_i v_i^2 = m_0^2 \{p_i a_i^2 \left[\frac{\alpha^2}{p}\right] + 2p_i a_i b_i \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + 2p_i b_i^2 \left[\frac{\beta^2}{p}\right] +$$

$$+ 2p_i a_i c_i \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + 2p_i b_i c_i \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] + p_i c_i^2 \left[\frac{\gamma^2}{p}\right] + 1 - 2a_i\alpha_i -$$

$$- 2b_i\beta_i - 2c_i\gamma_i\}.$$

Pak bude součet

$$[pv^2] = m_0^2 \{[paa] \left[\frac{\alpha^2}{p}\right] + 2\,[pab] \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + [pbb] \left[\frac{\beta^2}{p}\right] +$$

$$+ 2\,[pac] \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + 2\,[pbc] \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] + [pcc] \left[\frac{\gamma^2}{p}\right] +$$

$$+ n - 2\,[a\alpha] - 2\,[b\beta] - 2\,[c\gamma]\}.$$

Užijeme-li označení $Q_{11}, Q_{12}, \ldots, Q_{33}$ (viz III, odst. 3), bude

$$[pv^2] = m_0^2 \{([paa]\,Q_{11} + [pab]\,Q_{12} + [pac]\,Q_{13}) +$$
$$+ ([pab]\,Q_{21} + [pbb]\,Q_{22} + [pbc]\,Q_{23}) + ([pac]\,Q_{31} + [pbc]\,Q_{32} +$$
$$+ [pcc]\,Q_{33}) + n - 2\,[a\alpha] - 2\,[b\beta] - 2\,[c\gamma]\}.$$

Užijeme-li vzorců (12), (12_1) a (12_2), dostaneme

$$[pv^2] = m_0^2 \{3 + n - 2\,[a\alpha] - 2\,[b\beta] - 2\,[c\gamma]\}.$$

Ze vzorců (12′), resp. $(12'_1)$, $(12'_2)$ násobíme-li je a_i resp. b_i a c_i a sečteme-li pro všechna i, plyne $[a\alpha] = [b\beta] = [c\gamma] = 1$, tedy

$$[pv^2] = m_0^2\,(n - 3)$$

a odtud

$$m_0^2 = \frac{[pv^2]}{n - 3}. \qquad (20)$$

Správnou hodnotu součtu $[pv^2]$ nemůžeme vypočísti, protože neznáme střední hodnoty v_i^2. Jsme proto nuceni dosaditi za $[pv^2]$ přibližnou hodnotu, t. j. ten součet čtverců odchylek

násobených příslušnými vahami $[pv^2]$, který plyne z uvažované řady měření. Bude tedy přibližně

$$m_0^2 \doteq \frac{[pv^2]}{n-3}. \qquad (20')$$

V případě k neznámých bychom odvodili stejně

$$m_0^2 \doteq \frac{[pv^2]}{n-k}. \qquad (20'')$$

V kapitole II—IV předpokládáme, že se chyby, které zatěžují měření, řídí normálním zákonem četnosti. Výpočet chyby m_0 pro jednotku váhy v tomto odstavci je však založen na vzorci I, (12″), který byl odvozen za předpokladu obecnějšího (viz I, odst. 4). Platí tedy vzorce (20′) a (20″) nejen v případě, že se chyby veličin l_i řídí normálním zákonem četnosti, nýbrž i tehdy, jsou-li na sobě nezávislé a je-li jejich funkce četnosti sudá funkce.

6. Výpočet součtu $[pvv]$. a) Přímá cesta. Dosadíme hodnoty x', y', z', vypočtené z normálních rovnic (3) do levých stran odchylkových rovnic

$$a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i = v_i. \qquad (1')$$

Tak vypočteme odchylky v_i, odtud v_i^2, $p_i v_i^2$ a součet $\sum_i p_i v_i^2 = [pv^2]$. Tento způsob je sice zdlouhavý, ale poskytuje současně i jednotlivé odchylky v_i. Z jejich průběhu usuzujeme, mají-li vlastnosti nahodilých chyb či je-li na nich patrný nějaký systematický vliv (viz kap. V).

b) Nepřímá cesta.

α) Z rovnic (1′) plyne

$$[pvv] = \sum_i p_i (a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i)^2 = \sum_i (p_i a_i x' + p_i b_i y' + p_i c_i z' - p_i l_i)(a_i x' + b_i y' + c_i z' - l_i) = ([paa]\, x' + [pab]\, y' + [pac]\, z' - [pal])\, x' + ([pab]\, x' + [pbb]\, y' + [pbc]\, z' - [pbl])\, y' + ([pac]\, x' + [pbc]\, y' + [pcc]\, z' - [pcl])\, z' - [pal]\, x' - [pbl]\, y' - [pcl]\, z' + [pll].$$

Protože x', y', z' splňují normální rovnice, jsou první tři členy rovny 0 a tedy

$$[pvv] = [pll] - [pal]\, x' - [pbl]\, y' - [pcl]\, z'. \qquad (21)$$

β) Vyloučíme-li z tohoto vzorce pomocí redukovaných rovnic hodnoty x', y', z', dojdeme k novému vzorci. Protože jest

$$x' + \frac{[pab]}{[paa]}\, y' + \frac{[pac]}{[paa]}\, z' = \frac{[pal]}{[paa]}, \qquad (8)$$

bude, vyloučíme-li x',

$$[pvv] = [pll] - [pal]\frac{[pal]}{[paa]} - \left([pbl] - [pal]\frac{[pab]}{[paa]}\right) y' -$$
$$- \left([pcl] - [pal]\frac{[pac]}{[paa]}\right) z',$$

a zavedeme-li zkratky $[pbl \,.\, 1]$ a $[pcl \,.\, 1]$ [srovn. (4′) a (4)], bude

$$[pvv] = [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - [pbl \,.\, 1]\, y' - [pcl \,.\, 1]\, z'.$$

Protože je dále

$$y' + \frac{[pbc \,.\, 1]}{[pbb \,.\, 1]}\, z' = \frac{[pbl \,.\, 1]}{[pbb \,.\, 1]}, \qquad (8)$$

bude, vyloučíme-li y',

$$[pvv] = [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pbl \,.\, 1]^2}{[pbb \,.\, 1]} - \left([pcl \,.\, 1] -\right.$$
$$\left. - [pbl \,.\, 1] \,.\, \frac{[pbc \,.\, 1]}{[pbb \,.\, 1]}\right) z'$$

a zavedeme-li zkratku $[pcl \,.\, 2]$ [srovn. (5′) a (5)], jest

$$[pvv] = [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pbl \,.\, 1]^2}{[pbb \,.\, 1]} - [pcl \,.\, 2]\, z'.$$

A protože

$$z' = \frac{[pcl \,.\, 2]}{[pcc \,.\, 2]}, \tag{8}$$

dostaneme konečný vzorec ve tvaru

$$[pvv] = [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pbl \,.\, 1]^2}{[pbb \,.\, 1]} - \frac{[pcl \,.\, 2]^2}{[pcc \,.\, 2]}. \tag{22}$$

7. Případ dvou neznámých a případ jedné neznámé. a) V případě dvou neznámých přejdou rovnice (1′) v rovnice

$$a_i x' + b_i y' - l_i = v_i.$$

Normální rovnice jsou

$$[paa]\, x' + [pab]\, y' = [pal],$$
$$[pab]\, x' + [pbb]\, y' = [pbl].$$

Redukované rovnice jsou

$$[paa]\, x' + [pab]\, y' = [pal],$$
$$[pbb \,.\, 1]\, y' = [pbl \,.\, 1].$$

Střední chyba $m_{x'} = m_0\sqrt{Q_{11}}$, $m_{y'} = m_0\sqrt{Q_{22}}$, při čemž Q_{11}, Q_{22} a Q_{12}, Q_{21} plynou z rovnic

$$[paa]\, Q_{11} + [pab]\, Q_{12} = 1,$$
$$[pab]\, Q_{11} + [pbb]\, Q_{12} = 0,$$

resp.

$$[paa]\, Q_{21} + [pab]\, Q_{22} = 0,$$
$$[pab]\, Q_{21} + [pbb]\, Q_{22} = 1,$$

nebo ze vzorců

$$Q_{11} = \frac{1}{[paa]} + \frac{A_1^2}{[pbb \,.\, 1]}, \text{ kde } A_1 = -\frac{[pab]}{[paa]}, \text{ a}$$

$$Q_{22} = \frac{1}{[pbb \,.\, 1]}.$$

Součet $[pvv]$ se počítá buď přímo z odchylek v_i, nebo nepřímo ze vzorce

$$[pvv] = [pll] - [pal]\, x' - [pbl]\, y' =$$
$$= [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]} - \frac{[pbl \,.\, 1]^2}{[pbb \,.\, 1]}.$$

Střední chyba pro jednotku váhy plyne ze vzorce

$$m_0^2 = \frac{[pv^2]}{n-2}.$$

b) V případě jedné neznámé přejdou rovnice (1′) v rovnice

$$a_i x' - l_i = v_i.$$

Normální rovnice jest $[paa]\, x' = [pal]$.

Střední chyba $m_{x'} = m_0 \sqrt{Q_{11}}$, kde Q_{11} plyne z rovnice

$$[paa]\, Q_{11} = 1, \text{ tedy } Q_{11} = \frac{1}{[paa]}.$$

Součet $[pvv]$ dostaneme ve tvaru

$$[pvv] = [pll] - [pal]\, x' =$$
$$= [pll] - \frac{[pal]^2}{[paa]}.$$

Střední chyba pro jednotku váhy plyne ze vzorce

$$m_0^2 = \frac{[pv^2]}{n-1}.$$

Ještě jednodušší případ, kdy $a_i = 1$ (přímá měření nestejné váhy), vede ke vzorcům

$$x' = \frac{[pl]}{[p]}, \quad Q_{11} = \frac{1}{[p]}, \quad [pvv] = [pll] - \frac{[pl]^2}{[p]}$$

[viz II, (19)] a

$$m_0^2 = \frac{[pv^2]}{n-1}.$$

Nejjednodušší případ — přímá měření stejné váhy — vede ke vzorcům

$$x' = \frac{[l]}{n}, \quad Q_{11} = \frac{1}{n}, \quad [pvv] = [pll] - \frac{[l]^2}{n},$$

[viz II, (19′)] a

$$m_0^2 = \frac{[vv]}{n-1}.$$

8. Redukce odchylkových rovnic na lineární tvar. Nechť mezi měřenou veličinou m a neznámými X, Y, Z jest vztah

$$f(X, Y, Z; t, u, w) = m,$$

kde t, u, w jsou veličiny, jejichž hodnoty určujeme pomocnými měřeními. Ke každé skupině hodnot t_i, u_i, w_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, měříme příslušnou hodnotu m_i. Máme tedy pro tři neznámé X, Y, Z rovnice

$$f(X, Y, Z; t_i, u_i, w_i) = m_i,$$

jejichž počet je n.

Obyčejně známe předem nebo získáme předem přibližné hodnoty neznámých (x_0, y_0, z_0) a hledáme malé chyby x, y, z, jež nutno k přibližným hodnotám algebraicky přičísti, abychom dostali správné hodnoty neznámých $(X = x_0 + x, Y = y_0 + y, Z = z_0 + z)$.

Předpokládejme, že známe takové přibližné hodnoty, že můžeme v Taylorově rozvoji funkce $f(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z; t, u, w)$ podle rostoucích mocnin x, y, z zanedbati členy druhého a vyšších řádů, že tedy můžeme s dostatečnou přesností psáti

$$f(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z; t, u, w) \doteq$$
$$\doteq f(x_0, y_0, z_0; t, u, w) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z \doteq$$
$$\doteq d + ax + by + cz,$$

kde a, b, c, d jsou funkce t, u, w nebo konstanty.

Píšeme-li ještě $m_i - d_i = l_i$, máme k určení x, y, z zase n lineárních rovnic

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i, \qquad (1)$$

s nimiž jsme se dosud zabývali v této kapitole.

9. Příklady na vyrovnání zprostředkujících měření.
1. Určiti střední výšku závitu jemného stavěcího šroubu. Závity byly potřeny olejem a otištěny desetkrát na papír. Změřena v každém případě vzdálenost krajních otištěných čárek na dvacetinu mm a zjištěn příslušný počet závitů. Došli jsme k těmto číslům

počet závitů									
122	121	121	120	121	121	121	120	111	114
vzdálenost v mm									
85,20	84,60	84,60	83,90	84,45	84,60	84,55	83,95	77,70	79,65

Klademe přibližně střední výšku závitu $x_0 = 0{,}7$ mm, přesně $x = 0{,}7 + \dot{x}_0$. Tak dostaneme z první dvojice čísel odchylkovou rovnici

$$122\,(0{,}7 + \dot{x}_0) - 85{,}20 = v_1, \text{ nebo } 122\dot{x}_0 + 0{,}20 = v_1.$$

Stejně z ostatních dvojic

$$\begin{aligned} 121\dot{x}_0 + 0{,}10 &= v_2, & 121\dot{x}_0 + 0{,}15 &= v_7 \\ 121\dot{x}_0 + 0{,}10 &= v_3, & 120\dot{x}_0 + 0{,}05 &= v_8 \\ 120\dot{x}_0 + 0{,}10 &= v_4, & 111\dot{x}_0 + 0{,}00 &= v_9 \\ 121\dot{x}_0 + 0{,}25 &= v_5, & 114\dot{x}_0 + 0{,}15 &= v_{10}. \\ 121\dot{x}_0 + 0{,}10 &= v_6, \end{aligned}$$

Podle (III, 7b) bude $\dot{x}_0 = [al] : [aa]$, při tom $[aa] = 142\,206$, $[al] = -144{,}20$, tedy $\dot{x}_0 \doteq -0{,}0010$. Odchylky v setinách mm jsou

$$+7{,}8;\ -2{,}1;\ -2{,}1;\ -2{,}0;\ +12{,}9;\ -2{,}1;\ +2{,}9;\ +7{,}0;\ -11{,}1;\ +3{,}6.$$

Odtud součet čtverců odchylek je 438,06,

$$m_0 = \pm \sqrt{438{,}06} : 3 = \pm\, 6{,}98 \text{ (v setinách mm)}.$$

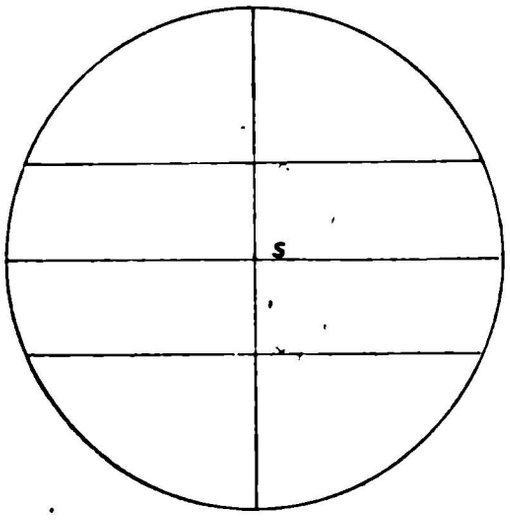
A střední chyba výsledku

$$\frac{m_0}{\sqrt{[aa]}} \doteq \pm \frac{6{,}98}{\sqrt{142206}} = \pm\, 1{,}9 \cdot 10^{-2} \text{ (v setinách mm)}.$$

Tedy výsledek

$$x = 0{,}6990 \text{ mm} \pm 1{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ mm}.$$

2. Určiti konstanty Reichenbachova dálkoměru.*)



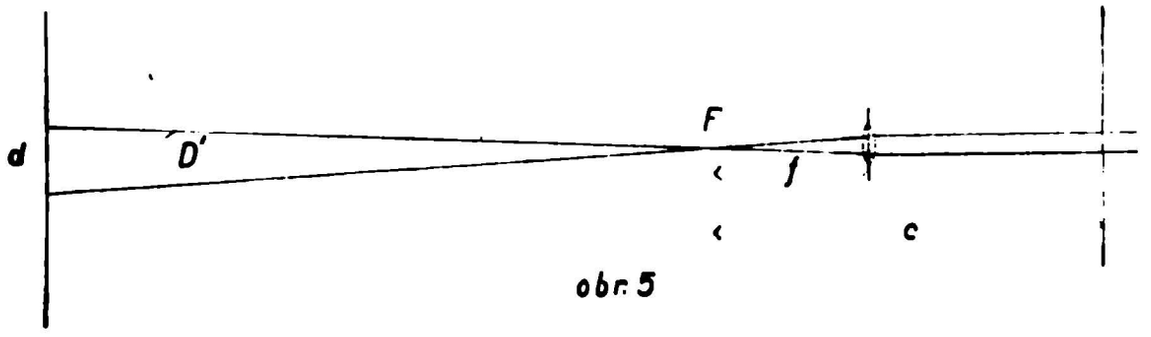
obr. 4

Reichenbachův dálkoměr je vodorovně ustavený dalekohled, jehož nitkový kříž má tvar patrný z obrázku 4. Dálkoměrem zaměřujeme na svisle postavenou dělenou lať a určujeme polohu horního a dolního vodorovného vlákna vůči obrazu latě, jinak řečeno určujeme čtení při horním a dolním vláknu. Rozdíl obou čtení označíme d. Z podobnosti trojúhelníků pak plyne (z obr. 5), vzdálenost latě od předního ohniska objektivu je úměrna d [rovná se $(f : s) \cdot d = kd$]. Vzdálenost svislé osy stroje od předního ohniska objektivu se jmenuje malá konstanta c. Tedy vzdálenost D latě od svislé osy stroje je rovna $c + kd$, kde $k = f : s$, velká konstanta, bývá blízká 100.

*) Srovnej Helmert, l. c. str. 89—94.

Tabulka

d	D	a	b	l	s
1,2661	126,014	1	1,2661	+0,047	2,3131
1,0830	108,029	1	1,0830	+0,225	2,3080
0,8434	84,049	1	0,8434	+0,014	1,8574
0,6002	60,069	1	0,6002	+0,159	1,7592
0,3593	36,089	1	0,3593	+0,076	1,4353
0,1183	12,109	1	0,1183	+0,004	1,1223
		[aa]	[ab]	[al]	[as]
		6	4,2703	+0,525	10,7953



obr. 5

Mají se určiti hodnoty c a k ze šesti dvojic hodnot d_i a D_i sestavených do 1. a 2. sloupce následující tabulky. První a poslední dvojice vede k rovnicím

$$c + k \,.\, 1{,}2661 = 126{,}014,$$
$$c + k \,.\, 0{,}1183 = 12{,}109,$$

z nichž plyne $k \doteq 99{,}2$, $c \doteq 0{,}37$.

Klademe-li $c = 0{,}37 + x$, $k = 99{,}2 + y$, plyne z první dvojice hodnot d_i, a D_i vztah $0{,}37 + x + (99{,}2 + y)\,1{,}2661 = 126{,}014$, čili

$$x + 1{,}2661y = 0{,}047.$$

Stejně pro ostatní dvojice. Koeficienty a, b, l těchto rovnic jsou sestaveny ve 3., 4. a 5. sloupci tabulky. V 6. sloupci jsou vypočtena čísla $s_i = a_i + b_i + l_i$ a v dalších sloupcích potřebné součiny a jejich součty.

V.

bb	*bl*	*bs*	*v*	v^2
1,6030	0,0595	2,9286	+0,078	0,0061
1,1729	0,2437	2,4996	—0,112	0,0125
0,7113	0,0118	1,5665	+0,082	0,0067
0,3602	0,0954	1,0559	—0,079	0,0062
0,1291	0,0273	0,5157	—0,013	0,0002
0,0140	0,0005	0,1328	+0,043	0,0018
[*bb*]	[*bl*]	[*bs*]		0,0335
3,9905	0,4382	8,6991		

Součtové kontroly

$$[aa] + [ab] + [al] - [as] = 0{,}0000$$
$$[ab] + [bb] + [bl] - [bs] = 0{,}0001$$

ukazují, že koeficienty normálních rovnic jsou vypočteny správně. V další tabulce je provedena redukce normálních rovnic se součtovou kontrolou.

Tabulka VI.

x	y		
6	4,2703	+0,525	10,7953
4,2703	+3,9905	+0,4382	8,6990
4,2703	+3,9905	+0,4382	8,6990
4,2703	+3,0393	+0,3736	7,6832
	0,9512	+0,0646	1,0158

Z redukované rovnice

$$0{,}9512y = +\,0{,}0646$$

plyne $y = +\,0{,}0679$, a z první normální rovnice tedy $x = 0{,}0392$. Odtud $c \doteq 0{,}409$, $k \doteq 99{,}268$.

V předposledním a posledním sloupci tabulky V jsou vypočteny odchylky v_i, jejich čtverce a $[vv] = 0{,}0335$.

Podle vzorce

$$[vv] = [ll] - [al]\,x - [bl]\,y$$

(viz III, 7a), uvážíme-li, že

$$[ll] = 0{,}0841,\ [al] = +\,0{,}5250,\ [bl] = +\,0{,}4382,$$
$$x = 0{,}0392,\ y = 0{,}0679,$$

plyne $[vv] = 0{,}0338$.

Podle vzorce

$$[vv] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl\,.\,1]^2}{[bb\,.\,1]}$$

(viz III, 7a), uvážíme-li, že

$$[aa] = 6,\ [bl \,.\, 1] = 0{,}0646,\ [bb \,.\, 1] = 0{,}9512,$$

bude $[vv] = 0{,}0338$.

Pak [viz III, (20″)] jest

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} \,.\, 0{,}0338} = \pm\, 9{,}2 \,.\, 10^{-2}.$$

Odtud

$$m_y = \frac{m_0}{\sqrt{[bb \,.\, 1]}} = \frac{9{,}2 \,.\, 10^{-2}}{\sqrt{0{,}9512}} = \pm\, 9{,}4 \,.\, 10^{-2}.$$

A protože

$$Q_{11} = \frac{1}{[aa]} + \frac{A_1^2}{[bb \,.\, 1]},\ \text{kde}\ A_1 = -\frac{[ab]}{[aa]},$$

bude $Q_{11} = 0{,}6992$, tedy

$$m_x = m_0 \sqrt{Q_{11}} = 9{,}2 \,.\, 10^{-2} \sqrt{0{,}6992} = \pm\, 7{,}7 \,.\, 10^{-2}.$$

Výsledek

$$c \doteq\ 0{,}409 \pm 7{,}7 \,.\, 10^{-2},$$
$$k = 99{,}268 \pm 9{,}4 \,.\, 10^{-2}.$$

Přesněji určíme obě veličiny c a k, jestliže c změříme přímo. Bylo změřeno 0,335 a nejistotu v této hodnotě odhaduje Helmert na 0,003. Výpočet neznámé k z naměřených šesti dvojic d_i a D_i provedeme za dvou různých předpokladů.

α) Předpokládáme, že odchylkové rovnice mají stejnou váhu. Pak první rovnice $c + k \,.\, 1{,}2661 = 126{,}014$, klademe-li $c = 0{,}335$ a $k = 99{,}2 + y$, přejde v $1{,}2661y = +\, 0{,}082$ a stejně ostatní rovnice. Koeficienty nových odchylkových rovnic jsou sestaveny v 1. a 2. sloupci tabulky VII. Ve 3. sloupci jsou vypočtena čísla $s_i = b_i + l_i$ a v dalších sloupcích potřebné součiny a jejich součty. Součtová kontrola $[bb] + [bl] - [bs] = -\, 0{,}0001$ ukazuje, že koeficienty normální rovnice $3{,}9905y = +\, 0{,}5876$ jsou vypočteny správně. Odtud $y = +\, 0{,}147$, tedy $k = 99{,}347$. V dalších dvou sloupcích jsou vypočteny odchylky v_i, jejich čtverce a $[vv]$.

Tabulka VII.

b	l	s	bl	bs	v	v^2
1,2661	+0,082	1,3481	+0,1038	1,7068	+0,104	0,0108
1,0830	+0,260	1,3430	0,2816	1,4545	—0,101	102
0,8434	+0,049	0,8924	0,0413	0,7527	+0,075	56
0,6002	+0,194	0,7942	0,1164	0,4766	—0,106	112
0,3593	+0,111	0,4703	0,0399	0,1690	—0,058	34
0,1183	+0,039	0,1573	0,0046	0,0186	—0,022	5
			+0,5876	4,5782		0,0417

Ze vzorců

$$[vv] = [ll] - [bl]\, y = [ll] - [bl]^2 : [bb]$$

(odst. III, 7b) dostaneme $[vv] = 0{,}0417$, resp. 0,0416, neboť $[ll] = 0{,}1281$. Odtud

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{0{,}0417}{5}} = \pm\, 9{,}1 \,.\, 10^{-2}$$

a

$$m_y = \frac{m_0}{\sqrt{[bb]}} = \pm \frac{9{,}1 \,.\, 10^{-2}}{\sqrt{3{,}9905}} = \pm\, 4{,}6 \,.\, 10^{-2}.$$

Výsledek

$$k = 99{,}347 \pm 4{,}6 \,.\, 10^{-2}.$$

β) Označíme-li skutečné chyby čísel D a d písmenem ε a ε', jest skutečná chyba odchylkových rovnic rovna $k\varepsilon' - \varepsilon$. Jsou-li příslušné hodnoty středních chyb rovny m a m', bude čtverec střední chyby odchylkových rovnic $k^2 m'^2 + m^2$. Helmert odhaduje $m \leqq 0{,}05$, $m' = 0{,}002$, takže

$$m^2 \leqq 0{,}0025,\quad k^2 m'^2 = 99{,}2^2 \,.\, 4 \,.\, 10^{-6} = 0{,}0394,$$

což je skoro 16krát větší než m^2. Rozhoduje tedy o váze odchylkových rovnic v tomto případě člen $k^2 m'^2$.

Protože váha je nepřímo úměrná čtverci střední chyby a podle provedených zkoušek je střední chyba m přímo

úměrná vzdálenosti latě, tedy přibližně přímo úměrná délkám d, můžeme jako váhu klásti veličinu $1 : d^2$. Násobíme-li každou rovnici $1{,}2661\, y = + 0{,}082$ atd. odmocninou její váhy, tedy veličinou $1 : d = 1 : b$, dojdeme k těmto rovnicím o váze vesměs rovné 1 (srovn. II, 3):

$$\begin{aligned} y &= + 0{,}065 & y &= + 0{,}323 \\ y &= + 0{,}240 & y &= + 0{,}309 \\ y &= + 0{,}058 & y &= + 0{,}330. \end{aligned}$$

Z nich plyne $y = \frac{1}{6} \cdot 1{,}325 = + 0{,}221$, $k = 99{,}421$. Pak $v = + 0{,}156; -0{,}019; + 0{,}163; -0{,}102; -0{,}088; -0{,}109;$ $[v] = + 0{,}001$; $[vv] = 813 \cdot 10^{-4}$. Stejná hodnota plyne ze vzorce II, (19′). Pak

$$m_y = \pm \sqrt{\frac{813 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 6}} = \pm 10^{-2} \sqrt{27{,}1} = \pm 5{,}2 \cdot 10^{-2}.$$

Výsledek

$$k = 99{,}421 \pm 5{,}2 \cdot 10^{-2}.$$

3. Pro neznámé x, y jsou dány tyto odchylkové rovnice

$$x \pm y - l_i = v_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n,$$

v n rovnicích jest u y znaménko $+$, ve zbytku znamení $-$. Vypočísti vyrovnané hodnoty neznámých a jejich střední chyby.

V tomto případě je $[aa] = 2n$, $[ab] = 0$, $[bb] = 2n$, $[al] = [l]$. Je-li s_1 a s_2 aritmetický střed hodnot l_i pro ta i, pro něž je v odchylkové rovnici u y znaménko $+$ resp. $-$, jest $[al] = ns_1 + ns_2$ a $[bl] = ns_1 - ns_2$.

Normální rovnice tedy jsou

$$\begin{aligned} 2nx &= ns_1 + ns_2, \\ 2ny &= ns_1 - ns_2. \end{aligned}$$

Odtud

$$x = \tfrac{1}{2}(s_1 + s_2), \quad y = \tfrac{1}{2}(s_1 - s_2).$$

Protože $[vv] = [ll] - [al]\, x - [bl]\, y$, [viz III, (21)], bude

$$[vv] = [l^2] - \tfrac{1}{2}(s_1 + s_2)^2 n - \tfrac{1}{2}(s_1 - s_2)^2 n = [l^2] - n(s_1^2 + s_2^2).$$

Tedy střední chyba m_0 pro jednotku váhy je

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[l^2] - n\,(s_1^2 + s_2^2)}{2\,(n-1)}}$$

a střední chyba vyrovnané hodnoty x a y je $m_0 : \sqrt{2n}$.

4. Dokažte, že n odchylkových rovnic

$$x + b_i y + c_i z - l_i = v_i \text{ o váze 1, } i = 1, 2, \ldots, n$$

vede ke stejným vyrovnaným hodnotám pro neznámé y, z jako n odchylkových rovnic t. zv. redukovaných:

$$\left\{b_i - \frac{[b]}{n}\right\} y + \left\{c_i - \frac{[c]}{n}\right\} z - \left\{l_i - \frac{[l]}{n}\right\} = v_i' \text{ o váze 1,}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Normální rovnice k daným odchylkovým rovnicím jsou

$$\begin{aligned} n x + [b]\, y + [c]\, z - [l] &= 0, \\ [b]\, x + [b^2]\, y + [bc]\, z - [bl] &= 0, \\ [c]\, x + [bc]\, y + [c^2]\, z - [cl] &= 0. \end{aligned}$$

Odtud redukované rovnice prvního řádu budou

$$\begin{aligned} y\left\{[b^2] - \frac{[b]^2}{n}\right\} + z\left\{[bc] - \frac{[b][c]}{n}\right\} - \left\{[bl] - \frac{[b]\,[l]}{n}\right\} &= 0, \\ y\left\{[bc] - \frac{[b][c]}{n}\right\} + z\left\{[c^2] - \frac{[c]^2}{n}\right\} - \left\{[cl] - \frac{[c]\,[l]}{n}\right\} &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Z redukovaných odchylkových rovnic dojdeme k normálním rovnicím.

$$\begin{aligned} y\left[\left\{b_i - \frac{[b]}{n}\right\}^2\right] + z\left[\left\{b_i - \frac{[b]}{n}\right\}\left\{c_i - \frac{[c]}{n}\right\}\right] - \\ - \left[\left\{b_i - \frac{[b]}{n}\right\}\left\{l_i - \frac{[l]}{n}\right\}\right] = 0, \end{aligned} \tag{23'}$$

$$y\left[\left\{b_i-\frac{[b]}{n}\right\}\left\{c_i-\frac{[c]}{n}\right\}\right]+z\left[\left\{c_i-\frac{[c]}{n}\right\}^2\right]- \tag{23'}$$
$$-\left[\left\{c_i-\frac{[c]}{n}\right\}\left\{l_i-\frac{[l]}{n}\right\}\right]=0.$$

Protože

$$\left[\left\{b_i-\frac{[b]}{n}\right\}^2\right]=\left[b_i^2-2b_i\frac{[b]}{n}+\frac{[b]^2}{n^2}\right]=$$
$$=[b^2]-\frac{2[b]^2}{n}+\frac{[b]^2}{n}=[b^2]-\frac{[b]^2}{n},$$

a dále

$$\left[\left\{b_i-\frac{[b]}{n}\right\}\left\{c_i-\frac{[c]}{n}\right\}\right]=[bc]-\frac{[c][b]}{n}-\frac{[b][c]}{n}+\frac{[b][c]}{n}=$$
$$=[bc]-\frac{[b][c]}{n};$$

podobnou úpravou ostatních koeficientů dokážeme, že rovnice (23) a (23′) jsou totožné.

Jak se v tomto případě vypočtou střední chyby neznámých y a z? Podle vzorců (16) jest

$$m_y=m_0\sqrt{\frac{1}{[bb\,.\,1]}+\frac{B_1^2}{[cc\,.\,2]}},\quad m_z=m_0\sqrt{\frac{1}{[cc\,.\,2]}},$$

při čemž

$$B_1=-\frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]}.$$

Veličiny $[bb\,.\,1]$, $[bc\,.\,1]$ jsou koeficienty u y a z v redukované rovnici prvního řádu, t. j. v první z rovnic (23) nebo (23′), a veličina $[cc\,.\,2]$ je koeficient u z v redukované rovnici druhého řádu. Střední chybu m_0 pro jednotku váhy vypočteme ze vzorce (20″) t. j. $m_0=\sqrt{[v^2]:(n-3)}$. Při tom součet $[v^2]$ je podle (21) roven $[vv]=[ll]-$ $-[l]\,x-[bl]\,y-[cl]\,z$. Vyloučíme-li odtud a z první nor-

mální rovnice $nx + [b]\,y + [c]\,z - [l] = 0$ zase neznámou x, dostaneme

$$[vv] = [ll] - \frac{[l]^2}{n} - y\left\{[bl] - \frac{[l]\,[b]}{n}\right\} - z\left\{[cl] - \frac{[l][c]}{n}\right\},$$

nebo podle předcházející úvahy

$$[vv] = \left[\left\{l_i - \frac{[l]}{n}\right\}^2\right] - y\left[\left\{b_i - \frac{[b]}{n}\right\}\left\{l_i - \frac{[l]}{n}\right\}\right] -$$
$$- z\left[\left\{c_i - \frac{[c]}{n}\right\}\left\{l_i - \frac{[l]}{n}\right\}\right] = [v'v'].$$

5. Z grafu, ukazujícího pravděpodobnou výšku syna v závislosti na výšce otce, byla vyňata tato čísla (v palcích)

$$S = 65{,}7;\ 66{,}8;\ 67{,}2;\ 69{,}3;\ 69{,}8;\ 70{,}5;\ 70{,}9,$$
$$O = 62;\ 64;\ 65;\ 69;\ 70;\ 71;\ 72.$$

Předpokládáme-li mezi S a O vztah $S = x + yO$, určete vyrovnané hodnoty koeficientů x a y a jejich střední chyby.*) Normální rovnice jsou

$$7x + 473y = 480{,}2,$$
$$473x + 32\,051y = 32\,494{,}6.$$

Odtud

$$y = 0{,}522 \pm 0{,}008,\quad x = 33{,}3 \pm 0{,}5.$$

6. Pro časy $T_1, T_2, \ldots, T_n$, vyjádřené ve dnech, byly určeny opravy hodin $o_1, o_2, \ldots, o_n$. Určiti odtud opravu hodin $o = x + yT$ pro libovolný čas T; y je denní chod hodin.**)

Měření vedou k rovnicím $x + yT - o_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Normální rovnice jsou

$$nx + [T]\,y = [o],$$
$$[T]\,x + [T^2]\,y = [oT].$$

---

*) Whittaker-Robinson, l. c. str. 214.

**) P. Pizzetti: I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali, Genova 1891, str. 136—138.

Čítáme-li T pro jednoduchost od středu $[T] : n$, který položíme rovný 0, přejdou normální rovnice ve tvar

$$nx = [o] ,$$
$$[T^2]\, y = [oT].$$

Střední chyby budou tedy

$$m_x = m_0 : \sqrt{n}, \quad m_y = m_0 : \sqrt{[T^2]}.$$

Abychom vypočetli střední chybu opravy $o = x + yT$, užijeme vzorce [III, (16′)]. V uvažovaném případě jest

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_2 = T,\ Q_{11} = \frac{1}{n},\ Q_{12} = Q_{21} = 0,\ Q_{22} = \frac{1}{[T^2]}.$$

Tedy

$$m_\Phi = m_0 \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{T^2}}{[T^2]}}.$$

7. Mezi teplotou T ebonitové tyče a odečtením x na stupnici je vztah

$$x = A + BT + CT^2.$$

Vyhledati koeficienty B a C a jejich střední chyby ze šesti dvojic měření.*)

Tabulka VIII.

x	12,47	15,28	18,27	21,00	23,81	28,23
T	14,44	20,14	25,52	30,39	34,92	40,73

Protože nezáleží na výpočtu koeficientu A, užijeme postupu vyloženého v příkl. 4, t. j. odvodíme redukované odchylkové rovnice. Aby koeficienty u C nepřevyšovaly mnohokrát koeficienty u B a prosté členy, dělíme každý stem a současně místo C zavedeme neznámou $C' = 100C$.

*) Srovn. B. Kučera: Základové prakt. fysiky, II, str. 4.

Tabulka

$b' = b - \frac{[b]}{n}$	$c' = c - \frac{[c]}{n}$	$l' = l - \frac{[l]}{n}$	s	b'^2
—13,25	—6,36	—7,37	—26,98	175,56
— 7,55	—4,39	—4,56	—16,50	57,00
— 2,17	—1,93	—1,57	— 5,67	4,71
+ 2,70	+0,79	+1,16	+ 4,65	7,29
+ 7,23	+3,75	+3,97	+14,95	52,27
+13,04	+8,14	+8,39	+29,57	170,04
				466,87

Normální rovnice budou

$$466{,}87B + 256{,}99C' = 276{,}73,$$
$$256{,}99B + 144{,}38C' = 154{,}02.$$

Redukovaná rovnice prvního řádu

$$2{,}92C' = 1{,}69.$$

Odtud

$$C' = 0{,}579, \qquad C = 0{,}00579, \qquad B = 0{,}274.$$

A střední chyby

$$m_C = \pm\, 0{,}00088, \quad m_B = \pm\, 0{,}049.$$

8. Určiti methodou nejmenších čtverců prvních pět koeficientů ve Fourierově řadě.

Odchylkové rovnice zde budou

$$a + b \sin x_k + c \cos x_k + d \sin 2x_k + e \cos 2x_k - l_k = v_k,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1. \qquad (24)$$

Jak vidíme, je v tomto případě výhodné voliti $x_k = \frac{2\pi}{n} k$, kde $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, t. j. určiti l_k pro hodnoty x_k, jež rozdělují periodu 2π na n stejných dílů. Normální rovnice budou

IX.

$b'c'$	$b'l'$	$b's$	$c'c'$	$c'l'$	$c's$
+ 84,27	+ 97,65	+ 357,48	40,45	+ 46,87	+ 171,59
+ 33,14	+ 34,43	+ 124,58	19,27	+ 20,02	+ 72,44
+ 4,19	+ 3,41	+ 12,30	3,72	+ 3,03	+ 10,94
+ 2,13	+ 3,13	+ 12,56	0,62	+ 0,92	+ 3,67
+ 27,11	+ 28,70	+ 108,09	14,06	+ 14,89	+ 56,06
+106,15	+109,41	+ 385,59	66,26	+ 68,29	+ 240,70
+256,99	+276,73	+1000,60	144,38	+154,02	+ 555,40

$$an + b\,[\sin x_k] + c\,[\cos x_k] + d\,[\sin 2x_k] + e\,[\cos 2x_k] - [l_k] = 0,$$
$$a\,[\sin x_k] + b\,[\sin^2 x_k] + c\,[\sin x_k \cos x_k] + d\,[\sin x_k \sin 2x_k] + e\,[\sin x_k \cos 2x_k] - [l_k \sin x_k] = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a\,[\cos 2x_k] + b\,[\cos 2x_k \sin x_k] + c\,[\cos 2x_k \cos x_k] + d\,[\cos 2x_k \sin 2x_k] + e\,[\cos^2 2x_k] - [l_k \cos 2x_k] = 0.$$

Zmíněná volba hodnot $x_k = \frac{2\pi}{n} k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ zjednoduší poslední rovnice takto:

$$na = [l_k], \quad \tfrac{1}{2}n\,b = [l_k \sin x_k], \quad \tfrac{1}{2}n\,c = [l_k \cos x_k],$$
$$\tfrac{1}{2}n\,d = [l_k \sin 2x_k], \quad \tfrac{1}{2}n\,l = [l_k \cos 2x_k]. \qquad (25)$$

Abychom to ukázali, uvažujme o součtech

$$S_s = \sum_{k=0}^{n-1} \sin L \frac{2\pi}{n} k \quad \text{a} \quad S_c = \sum_{k=0}^{n-1} \cos L \frac{2\pi}{n} k.$$

Výraz $S_s + iS_c$, kde $i = +\sqrt{-1}$, bude roven

$$S_s + iS_c = \sum_{k=0}^{n-1} e^{iL\frac{2\pi}{n}k},$$

což je geometrická řada, jejíž první člen je roven 1 a podíl $e^{iL\frac{2\pi}{n}}$.

Tedy $$S_s + iS_c = \frac{1 - e^{iL2\pi}}{1 - e^{\frac{2\pi}{n}}}.$$

Protože

$$e^{iL2\pi} = \cos 2\pi L + i \sin 2\pi L = 1, \text{ je } S_s + iS_c = 0,$$

čili $$S_s = S_c = 0.$$

Jmenovatel $1 - e^{iL\frac{2\pi}{n}}$ není roven nule, pokud L není násobkem čísla n. Z toho je patrno, že na př.

$$[\sin l_1 x_k \sin l_2 x_k] = -\tfrac{1}{2}[\cos (l_1 + l_2) x_k - \cos (l_1 - l_2) x_k] = 0,$$

pokud $l_1 \neq l_2$, kdežto pro $l_1 = l_2$ jest

$$[\sin^2 l_1 x_k] = \tfrac{1}{2}n.$$

Stejně je

$$[\sin l_1 x_k \cos l_2 x_k] = \tfrac{1}{2}[\sin (l_1 + l_2) x_k + \sin (l_1 - l_2) x_k] = 0,$$

a to ať je $l_1 \neq l_2$ nebo $l_1 = l_2$.

Konečně je

$$[\cos l_1 x_k \cos l_2 x_k] = \tfrac{1}{2}[\cos (l_1 + l_2) x_k + \cos (l_1 - l_2) x_k] = 0,$$

je-li $l_1 \neq l_2$. A pro $l_1 = l_2$ jest

$$[\cos^2 l_1 x_k] = \tfrac{1}{2}n.$$

Označíme-li zase písmenem m_0 střední chybu pro jednotku váhy, bude střední chyba veličiny a rovna $m_0 : \sqrt{n}$ a střední chyby všech ostatních koeficientů b, c, d, e jsou rovny $m_0\sqrt{2 : n}$

Veličiny Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} atd. plynou totiž z rovnic

$$nQ_{11} = 1, \quad \tfrac{1}{2}n\,Q_{22} = 1, \quad \tfrac{1}{2}n\,Q_{33} = 1 \text{ atd.}$$

Tato úloha se vyskytuje v praksi často. Uvádím na př.: Určování periodických chyb v dělení kruhu, určování periodických chyb mikrometrických šroubů, určování vlivu blízkých hmot na údaje torsní váhy podle způsobu Schweydarova.

9. Určiti vyrovnané hodnoty pravoúhlých souřadnic $(x; y)$ bodu P, jestliže byla změřena se stejnou vahou jeho vzdálenost od bodů (0; 0), (7; 0), (0; 6) a bylo naměřeno po řadě 6,40; 4,47; 5,38.*)

Zvolíme přibližné hodnoty $x_0 = 5$, $y_0 = 4$. Pak z rovnice

$$\sqrt{(5 + x)^2 + (4 + y)^2} - 6{,}40 = 0,$$

uvážíme-li, že

$$\sqrt{41 + 10x + 8y + \ldots} = \sqrt{41}\,(1 + \tfrac{10}{41}x + \tfrac{8}{41}y + \ldots)^{\frac{1}{2}} = \\ = \sqrt{41}\,(1 + \tfrac{5}{41}x + \tfrac{4}{41}y + \ldots),$$

plyne

$$0{,}78x + 0{,}62y + 0{,}0031 = 0.$$

Stejně i druhé dvě rovnice

$$-0{,}45x + 0{,}89y + 0{,}0021 = 0,$$
$$+0{,}93x - 0{,}37y + 0{,}0052 = 0.$$

Odtud vyrovnáním podle metody nejmenších čtverců plyne

$$x \doteq -0{,}004, \quad y = -0{,}002,$$

tedy výsledek

$$x_0 + x = 4{,}996, \quad y_0 + y = 3{,}998.$$

10. Na několika bodech, jejichž pravoúhlé souřadnice $(x_i; y_i)$ známe, byly měřeny směry k těmto známým bodům a k jednomu bodu, jehož souřadnice $(x; y)$ hledáme (hledaný bod). Jak postupujeme při výpočtu vyrovnaných souřadnic x, y?

Nejprve vypočteme t. zv. směrníky směrů od daného bodu na jiný daný bod, t. j. úhly, které svírají uvažované směry s kladným směrem osy x-ové. Na př. pro směrník σ_{12} od bodu $(x_1; y_1)$ na bod $(x_2; y_2)$ bude

$$\operatorname{tg} \sigma_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

*) Whittaker-Robinson, l. c. str. 214—215.

Protože při měření směrů nemůžeme dělený kruh přesně orientovati, na př. tak, aby směr od středu kruhu k rysce 0° směřoval ve směru rovnoběžném s kladným směrem osy x-ové, musíme k měřeným směrům S_{12} (s bodu $(x_1; y_1)$ na bod $(x_i; y_i)$) připojiti t. zv. orientační konstantu o_1, aby z řady směrů vznikla řada směrníků, tedy

$$\sigma_{1i} = S_{1i} + o_1, \quad o_1 = \sigma_{1i} - S_{1i}.$$

Jestliže na př. v bodě $(x_1; y_1)$, kromě směru na hledaný bod $(x; y)$ byl zaměřen jen jeden směr na některý daný bod, máme pro orientační konstantu o_1 jen jednu hodnotu. Jestliže jsme zaměřili několik směrů na dané body, máme pro orientační konstantu několik hodnot a jejich aritmetický průměr klademe jako její vyrovnanou hodnotu. Připojíme-li pak orientační konstantu k směru naměřenému při zaměření na hledaný bod, dostaneme t. zv. orientovaný směrník S_{o1} s bodu $(x_1; y_1)$ na hledaný bod $(x; y)$.

Nyní vypočteme přibližné souřadnice x_0, y_0 hledaného bodu ze dvou orientovaných směrů, a to takto: Ze souřadnic $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, z nichž oba orientované směry vycházejí, vypočteme vzdálenost těchto dvou bodů $s_{12} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \sigma_{12}} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \sigma_{12}}$, pak ze sinové věty určíme strany s_{10}, s_{20} a konečně ze vzorců

$$x_0 - x_1 = s_{10} \cos S_{o1}, \quad y_0 - y_1 = s_{10} \sin S_{o1},$$

nebo

$$x_0 - x_2 = s_{20} \cos S_{o2}, \quad y_0 - y_2 = s_{20} \sin S_{o2}$$

přibližné souřadnice x_0, y_0 hledaného bodu a ze vzorce

$$\operatorname{tg} \sigma'_i = \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i}$$

přibližné hodnoty směrníků σ'_i z daných bodů na hledaný. Dále uvážíme, že pro definitivní směrník σ_i bude

$$\operatorname{tg} \sigma_i = \frac{y_0 + \Delta y - y_i}{x_0 + \Delta x - x_i},$$

kde Δx, Δy jsou hledané opravy přibližných souřadnic.

Odtud

$$\sigma_i = \operatorname{arctg} \frac{y_0 + \Delta y - y_i}{x_0 + \Delta x - x_i},$$

a rozvineme-li v řadu Taylorovu,

$$\sigma_i = \operatorname{arctg} \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i} + a_i \Delta x + b_i \Delta y = \sigma'_i + a_i \Delta x + b_i \Delta y,$$

kde

$$a_i = -\frac{y_0 - y_i}{s_{i0}^2}, \qquad b_i = \frac{x_0 - x_i}{s_{i0}^2};$$

při tom s_{i0} je délka strany mezi bodem $(x_i; y_i)$ a $(x_0; y_0)$.

Protože definitivní směrník σ_i se má rovnati orientovanému směrníku S_{0i}, dojdeme k odchylkovým rovnicím

$$\sigma_i - S_{oi} = a_i \Delta x + b_i \Delta y + l_i = v_i,$$

kde

$$l_i = \sigma'_i - S_{oi}.$$

Z těchto odchylkových rovnic podle methody nejmenších čtverců vypočteme neznámé Δx, Δy a jejich střední chyby.

IV.

VYROVNÁNÍ ZÁVISLÝCH MĚŘENÍ.

1. Vyrovnání závislých měření (převedením na vyrovnání zprostředkujících měření). Uvažujme o této úloze: Neznámé $X_1, X_2, \ldots, X_\varrho$, pro něž jsme naměřili hodnoty $M_1, M_2, \ldots, M_\varrho$, mají přesně splňovati σ podmínek

$$f_1(X_1, X_2, \ldots, X_\varrho) = 0,\ f_2(X_1, X_2, \ldots, X_\varrho) = 0,\ \ldots,$$
$$f_\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_\varrho) = 0;\ (\varrho > \sigma). \qquad (1)$$

Obyčejně známe předem, nebo získáme předem, přibližné hodnoty neznámých $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{\varrho 0}$, takže

$$X_1 = x_{10} + x_1,\ X_2 = x_{20} + x_2,\ \ldots,\ X_\varrho = x_{\varrho 0} + x_\varrho.$$

O opravách $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ předpokládáme, že jsou tak malé, že lze zanedbati již členy obsahující jejich součiny a čtverce, Pak z měření plyne ϱ rovnic $X_j - M_j = x_{j0} + x_j - M_j = 0$. čili

$$x_j - l_j = 0,\ \text{kde}\ l_j = M_j - x_{j0},\ j = 1, 2, \ldots, \varrho. \qquad (2)$$

Místo podmínek (1) můžeme psáti přibližně

$$f_g(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{\varrho 0}) + \left(\frac{\partial f_g}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial f_g}{\partial x_2}\right)_0 x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f_g}{\partial x_\varrho}\right)_0 x_\varrho = 0,$$

nebo

$$a_{g1}x_1 + a_{g2}x_2 + \ldots + a_{g\varrho}x_\varrho = a_{g0},\ g = 1, 2, \ldots, \sigma, \qquad (3)$$

kde

$$a_{gj} = \left(\frac{\partial f_g}{\partial x_j}\right)_0,\ a_{g0} = -f_g(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{\varrho 0}).$$

Rovnice (3) mají býti splněny přesně, proto nejsou všechny neznámé nezávislé. Z rovnic (3) můžeme vyjádřiti na př. $x_1, x_2, \ldots, x_\sigma$ jako lineární funkce neznámých $x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \ldots, x_\varrho$, jejichž počet je $\varrho - \sigma$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= A_{11}x_{\sigma+1} + A_{12}x_{\sigma+2} + \ldots + A_{1,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{10},\\
x_2 &= A_{21}x_{\sigma+1} + A_{22}x_{\sigma+2} + \ldots + A_{2,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{20},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_\sigma &= A_{\sigma 1}x_{\sigma+1} + A_{\sigma 2}x_{\sigma+2} + \ldots + A_{\sigma,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{\sigma 0}.
\end{aligned}
\qquad (3')
$$

Máme tedy určiti $\varrho - \sigma$ nezávislých neznámých tak, aby bylo splněno pokud možno přesně ϱ rovnic:

$$
\begin{aligned}
&A_{11}x_{\sigma+1} + A_{12}x_{\sigma+2} + \ldots + A_{1,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{10} - l_1 = 0,\\
&A_{21}x_{\sigma+1} + A_{22}x_{\sigma+2} + \ldots + A_{2,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{20} - l_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_{\sigma 1}x_{\sigma+1} + A_{\sigma 2}x_{\sigma+2} + \ldots + A_{\sigma,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{\sigma 0} - l_\sigma = 0,\\
&\qquad x_{\sigma+1} - l_{\sigma+1} = 0,\\
&\qquad x_{\sigma+2} - l_{\sigma+2} = 0,\\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad x_\varrho \quad - l_\varrho \quad = 0.
\end{aligned}
\qquad (2')
$$

Protože počet nezávislých neznámých $(\varrho - \sigma)$ je menší než počet těchto rovnic (ϱ), nebude obecně lze nalézti takové hodnoty $x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \ldots, x_\varrho$, aby všechny rovnice (2') byly splněny. Ať dosadíme za $x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \ldots, x_\varrho$ jakékoli hodnoty, budou levé strany rovnic (2') rovny malým veličinám v_j. Tedy

$$
\begin{aligned}
&A_{11}x_{\sigma+1} + A_{12}x_{\sigma+2} + \ldots + A_{1,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{10} - l_1 = v_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_{\sigma 1}x_{\sigma+1} + A_{\sigma 2}x_{\sigma+2} + \ldots + A_{\sigma,\varrho-\sigma}x_\varrho + A_{\sigma 0} - l_\sigma = v_\sigma,\\
&\qquad x_{\sigma+1} - l_{\sigma+1} = v_{\sigma+1},\\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad x_\varrho \quad - l_\varrho \quad = v_\varrho.
\end{aligned}
\qquad (2'')
$$

Předpokládejme, že váha j-té rovnice je p_j. Hodnoty vah odhadujeme v tomto případě obyčejně podle středních chyb měřených veličin M_j, vypočtených přímo z měření, nebo podle výsledků podobných měření dřívějších. Máme-li důvod k úsudku, že váhy jsou stejné, klademe je obyčejně rovné 1.

Tím bylo převedeno vyrovnání závislých měření na vyrovnání zprostředkujících měření. Vyrovnané hodnoty $x'_{\sigma+1}$,

$x'_{\sigma+2}, \ldots, x'_\varrho$ určíme jako v kap. III tak, aby byl minimální součet $\sum_{j=1}^{\varrho} p_j v_j^2$. Z podmínek pro minimum (derivace podle neznámých $x'_{\sigma+1}, x'_{\sigma+2}, \ldots, x'_\varrho$ mají býti rovny nule) plyne $\varrho - \sigma$ normálních rovnic, z nichž vypočteme nezávislé neznámé $x'_{\sigma+1}, x'_{\sigma+2}, \ldots, x'_\varrho$. Dosadíme-li tyto vypočtené hodnoty za $x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \ldots, x_\varrho$ do rovnic (3'), dostaneme vyrovnané hodnoty $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\sigma$.

Střední chyba pro jednotku váhy plyne stejně jako v kap. III ze vzorce (20″)

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{\varrho - (\varrho - \sigma)}} = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{\sigma}}. \qquad (4)$$

Lomená závorka značí součet členů $p_j v_j^2$ pro všechny hodnoty indexu $j = 1, 2, \ldots, \varrho$.

2. Vyrovnání závislých měření užitím korelát. Často se však užívá při výpočtu vyrovnaných hodnot $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\varrho$ jiného postupu.*) Tyto hodnoty mají činiti součet

$$\sum_{j=1}^{\varrho} p_j v_j^2 = \sum_{j=1}^{\varrho} p_j (x'_j - l_j)^2$$

minimem a při tom mají přesně splňovati podmínky (3).

Podmínka minima jest

$$2 \sum_{j=1}^{\varrho} p_j (x'_j - l_j)\, \mathrm{d}x'_j = 0. \qquad (5)$$

Ale protože veličiny $x'_1, \ldots, x'_\varrho$ musí přesně splňovati rovnice (3), nejsou přírůstky $\mathrm{d}x'_j$ nezávislé, nýbrž musí vyhovovati σ podmínkám

$$a_{g1}\, \mathrm{d}x'_1 + a_{g2}\, \mathrm{d}x'_2 + \ldots + a_{g\varrho}\, \mathrm{d}x'_\varrho = 0, \; g = 1, 2, \ldots, \sigma. \qquad (6)$$

Z těchto rovnic a z podmínky (5) vyloučíme σ závislých pří-

*) J. Vojtěch, l. c. I, str. 411—413. — K. Petr, l. c. str. 414—418.

růstků a položíme koeficienty u nezávislých přírůstků rovny nule.

Předpokládejme, že na př. determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\sigma} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2\sigma} \\ \vdots \\ a_{\sigma 1}, a_{\sigma 2}, \ldots, a_{\sigma\sigma} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Násobme rovnice (6) po řadě koeficienty $2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_\sigma$, a odečtěme je od rovnice (5). Bude

$$\sum_{j=1}^{\varrho} \{p_j (x'_j - l_j) - k_1 a_{1j} - k_2 a_{2j} - \ldots - k_\sigma a_{\sigma j}\} \, \mathrm{d}x'_j = 0.$$

Určeme tak koeficienty $k_1, k_2, \ldots, k_\sigma$, kterým se říká **koreláty**, aby faktory u $\mathrm{d}x'_1, \ldots, \mathrm{d}x'_\sigma$ byly rovny nule. To je za uvedeného předpokladu o determinantu Δ možné.

Pak ale zbývá podmínka

$$\sum_{j=\sigma+1}^{\varrho} \{p_j (x'_j - l_j) - k_1 a_{1j} - k_2 a_{2j} - \ldots - k_\sigma a_{\sigma j}\} \, \mathrm{d}x'_j = 0,$$

a protože přírůstky $\mathrm{d}x'_{\sigma+1}, \ldots, \mathrm{d}x'_\varrho$ jsou nezávislé, musí jejich koeficienty býti rovněž rovny nule.

Celkem tedy musí býti

$$p_j (x'_j - l_j) - k_1 a_{1j} - k_2 a_{2j} - \ldots - k_\sigma a_{\sigma j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{7}$$

Levé strany těchto podmínek jsou parciální derivace funkce

$$\begin{aligned} F = {} & p_1 (x_1 - l_1)^2 + p_2 (x_2 - l_2)^2 + \ldots + p_\varrho (x_\varrho - l_\varrho)^2 - \\ & - 2k_1 (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\varrho}x_\varrho - a_{10}) - \\ & - 2k_2 (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\varrho}x_\varrho - a_{20}) - \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - 2k_\sigma (a_{\sigma 1}x_1 + a_{\sigma 2}x_2 + \ldots + a_{\sigma\varrho}x_\varrho - a_{\sigma 0}). \end{aligned} \tag{8}$$

Podmínky (7) tedy vypočteme, anulujeme-li parciální derivace prvního řádu funkce F podle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$.

Zvolíme-li za přibližné hodnoty pro neznámé $x'_1, \ldots, x'_\varrho$ naměřené hodnoty $M_1, M_2, \ldots, M_\varrho$, jest $x_{j0} = M_j$, tedy $l_j = 0$.

Z rovnic (7) plyne

$$x'_j = \frac{1}{p_j} \sum_{\varrho=1}^{\sigma} k_\varrho a_{\varrho j} + l_j, \quad j = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{7'}$$

Tyto vzorce vyjadřují neznámé $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\varrho$ pomocí korelát $k_1, \ldots, k_\sigma$. Dosadíme-li odtud za x'_j do první z rovnic (3), plyne

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{11}}{p_1}(a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \ldots + a_{\sigma 1}k_\sigma + l_1 p_1) + \\
&+ \frac{a_{12}}{p_2}(a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{\sigma 2}k_\sigma + l_2 p_2) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{a_{1\varrho}}{p_\varrho}(a_{1\varrho}k_1 + a_{2\varrho}k_2 + \ldots + a_{\sigma\varrho}k_\sigma + l_\varrho p_\varrho) - a_{10} = 0,
\end{aligned}$$

a uspořádáme-li jako lineární funkci korelát $k_1, k_2, \ldots, k_\sigma$, bude

$$k_1\left[\frac{a_{1j}^2}{p_j}\right] + k_2\left[\frac{a_{1j}a_{2j}}{p_j}\right] + \ldots + k_\sigma\left[\frac{a_{1j}a_{\sigma j}}{p_j}\right] - a_{10} + [a_{1j}l_j] = 0.$$

Aby se vzorce zjednodušily, zavedeme pro převrácenou hodnotu vah značku $q_j = 1 : p_j$ a vynecháme druhý index j, podle něhož se tvoří součty naznačené lomenou závorkou. Pak bude předcházející rovnice a ostatní rovnice, které plynou, dosadíme-li do dalších rovnic (3):

$$\begin{aligned}
&k_1[qa_1^2] + k_2[qa_1a_2] + \ldots + k_\sigma[qa_1a_\sigma] - a_{10} + [a_1 l] = 0, \\
&k_1[qa_2a_1] + k_2[qa_2^2] + \ldots + k_\sigma[qa_2a_\sigma] - a_{20} + [a_2 l] = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&k_1[qa_\sigma a_1] + k_2[qa_\sigma a_2] + \ldots + k_\sigma[qa_\sigma^2] - a_{\sigma 0} + [a_\sigma l] = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Zvolíme-li $x_{j0} = M_j$, bude $l_j = 0$ a v rovnicích (9) odpadnou členy $[a_1 l] = [a_2 l] = \ldots = [a_\sigma l] = 0$.

Těmto rovnicím se říká normální rovnice pro koreláty. Z nich vypočteme koreláty na př. Gaussovým postupem (III, 2). Pak ze vzorců (7′) plynou neznámé $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\varrho$.

Výpočet normálních rovnic (9) pro koreláty se zase kontroluje součtovou kontrolou. Připojíme ke koeficientům z rovnic (3), t. j. k číslům

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\varrho}, \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2\varrho}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\sigma 1}, a_{\sigma 2}, \ldots, a_{\sigma\varrho}, \end{array} \qquad (10)$$

součty jednotlivých sloupců, $s_1, s_2, \ldots, s_\varrho$, takže je

$$s_1 = \sum_{\varrho=1}^{\sigma} a_{\varrho 1}, \quad s_2 = \sum_{\varrho=1}^{\sigma} a_{\varrho 2}, \text{ atd.}$$

Násobíme-li na př. sloupce (10) po řadě čísly $q_1 a_{11}, q_2 a_{12}, \ldots q_\varrho a_{1\varrho}$, budou součty v jednotlivých řádcích $[qa_1^2], [qa_1 a_2], \ldots, [qa_1 a_\sigma], [qa_1 s]$, a při tom

$$[qa_1 s] = [qa_1^2] + [qa_1 a_2] + \ldots + [qa_1 a_\sigma].$$

Tak jsou kontrolovány koeficienty první normální rovnice pro koreláty. Podobně se kontrolují i koeficienty ostatních normálních rovnic, pro něž

$$\begin{array}{l} [qa_2 s] = [qa_2 a_1] + [qa_2^2] + \ldots + [qa_2 a_\sigma], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [qa_\sigma s] = [qa_\sigma a_1] + [qa_\sigma a_2] + \ldots + [qa_\sigma^2]. \end{array}$$

Koreláty $k_{\sigma-1}, k_{\sigma-2}, \ldots, k_1$ se počítají vždy ze dvou různých redukovaných rovnic. Tím ověříme správnost výpočtu korelát. Správnost výpočtu neznámých $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\varrho$ ze vzorců (7′) ověříme, dosadíme-li vypočtené hodnoty do podmínek (3).

3. Výpočet součtu [*pvv*]. a) Součet [*pvv*], kterého potřebujeme k výpočtu střední chyby m_0 pro jednotku váhy, mů-

žeme počítati přímo z hodnot x'_j; vypočteme odchylky $v_j = x'_j - l_j$, čtverce v_j^2, pak součiny $p_j v_j^2$ a utvoříme součet pro všechna $j = 1, 2, \ldots, \varrho$.

b) Nepřímá cesta.

α) Užijeme-li vzorce (7), můžeme psáti

$$[pvv] = \sum_{j=1}^{\varrho} p_j (x'_j - l_j)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{\varrho} (k_1 a_{1j} + \ldots + k_\sigma a_{\sigma j}) \cdot q_j (k_1 a_{1j} + \ldots + k_\sigma a_{\sigma j}) =$$

$$= k_1 \{k_1 [q a_1 a_1] + k_2 [q a_1 a_2] + \ldots + k_\sigma [q a_1 a_\sigma]\} +$$
$$+ k_2 \{k_1 [q a_2 a_1] + k_2 [q a_2 a_2] + \ldots + k_\sigma [q a_2 a_\sigma]\} + \ldots +$$
$$+ k_\sigma \{k_1 [q a_\sigma a_1] + k_2 [q a_\sigma a_2] + \ldots + k_\sigma [q a_\sigma a_\sigma]\}.$$

Užijeme-li rovnic (9) a položíme-li $l_j = 0$, bude

$$[pvv] = a_{10} k_1 + a_{20} k_2 + \ldots + a_{\sigma 0} k_\sigma. \qquad (11)$$

Můžeme tedy počítati součet $[pvv]$ podle vzorce (11) z hodnot korelát.

β) Podobně jako ve výpočtu $[pvv]$ (viz III, 6), můžeme vyloučiti koreláty ze vzorce (11) a z normálních rovnic (9). V tomto případě je místo $[pll]$ nyní 0, místo koeficientů $-[pal]$, $-[pbl]$, $-[pcl]$ atd. je nyní $+ a_{10}$, $+ a_{20}$, $+ a_{30}$, ..., místo $[paa]$ je nyní $[q a_1 a_1]$, (t. j. koeficient u k_1 v první z rovnic (9)), místo $[pbb \cdot 1]$, $[pbl \cdot 1]$ nyní $[q a_2 a_2 \cdot 1]$, $[a_{20} \cdot 1]$ (koeficient u k_2 a prostý člen v první redukované rovnici prvního řádu) a místo $[pcc \cdot 2]$, $[pcl \cdot 2]$ nyní $[q a_3 a_3 \cdot 2]$, $[a_{30} \cdot 2]$ (koeficient u k_3 a prostý člen v první redukované rovnici druhého řádu).

Pak podle vzorce [III, (22)] plyne

$$[pvv] = \frac{a_{10}^2}{[q a_1 a_1]} + \frac{[a_{20} \cdot 1]^2}{[q a_2 a_2 \cdot 1]} + \frac{[a_{30} \cdot 2]^2}{[q a_3 a_3 \cdot 2]} + \ldots \qquad (11')$$

z koeficientů a prostých členů normálních a redukovaných rovnic.

4. Střední chyba lineární funkce vyrovnaných hodnot. Chceme vypočísti střední chybu funkce $\Phi = f_0 + f_1 x'_1 + f_2 x'_2 + \ldots + f_\varrho x'_\varrho$. K tomu cíli musíme vyjádřiti Φ jako lineární funkci měřených veličin M_i nebo veličin l_i. Bude

$$\Phi = f_0 + \sum_{j=1}^{\varrho} f_j x'_j = f_0 + \sum_{j=1}^{\varrho} \{f_j q_j \sum_{g=1}^{\sigma} k_g a_{gj} + f_j l_j\} =$$

$$= f_0 + \sum_{g=1}^{\sigma} k\,[q a_g f] + [fl].$$

Zavedeme veličiny $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$, které splňují rovnice

$$\begin{aligned} &h_1\,[q a_1 a_1] + h_2\,[q a_1 a_2] + \ldots + h_\sigma\,[q a_1 a_\sigma] = [q a_1 f], \\ &h_1\,[q a_2 a_1] + h_2\,[q a_2 a_2] + \ldots + h_\sigma\,[q a_2 a_\sigma] = [q a_2 f], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &h_1\,[q a_\sigma a_1] + h_2\,[q a_\sigma a_2] + \ldots + h_\sigma\,[q a_\sigma a_\sigma] = [q a_\sigma f]. \end{aligned} \tag{12}$$

Násobíme-li rovnice (9) po řadě čísly $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$, sečteme-li a přihlédneme-li k rovnicím (12), dostaneme

$$k_1\,[q a_1 f] + k_2\,[q a_2 f] + \ldots + k_\sigma\,[q a_\sigma f] = \sum_{g=1}^{\sigma} k_g\,[q a_g f] = a_{10} h_1 +$$

$$+ a_{20} h_2 + \ldots + a_{\sigma 0} h_\sigma - h_1\,[a_1 l] - h_2\,[a_2 l] - \ldots - h_\sigma\,[a_\sigma l],$$

tedy

$$\Phi = f_0 + a_{10} h_1 + a_{20} h_2 + \ldots + a_{\sigma 0} h_\sigma +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\varrho} (f_j - h_1 a_{1j} - h_2 a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j})\, l_j.$$

Protože střední chyba j-té z rovnic (2) je rovna $m_0 : \sqrt{p_j}$, bude podle vzorce [I, (12″)] čtverec střední chyby funkce Φ roven

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \sum_{j=1}^{\varrho} q_j\,(f_j - h_1 a_{1j} - h_2 a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j})^2. \tag{13}$$

Vzorec (13) můžeme ještě upraviti takto:

$$\sum_{j=1}^{\varrho} q_j (f_j - h_1 a_{1j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j})(f_j - h_1 a_{1j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j}) =$$
$$= [qff] - 2h_1 [qfa_1] - 2h_2 [qfa_2] - \ldots - 2h_\sigma [qfa_\sigma] +$$
$$+ h_1 \{h_1 [qa_1 a_1] + h_2 [qa_1 a_2] + \ldots + h_\sigma [qa_1 a_\sigma]\} +$$
$$+ h_2 \{h_1 [qa_2 a_1] + h_2 [qa_2 a_2] + \ldots + h_\sigma [qa_2 a_\sigma]\} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ h_\sigma \{h_1 [qa_\sigma a_1] + h_2 [qa_\sigma a_2] + \ldots + h_\sigma [qa_\sigma a_\sigma]\}.$$

Užijeme-li vzorců (12) a sloučíme-li, jest

$$\sum_{j=1}^{\varrho} q_j (f_j - h_1 a_{1j} - h_2 a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j})^2 =$$
$$= [qff] - h_1 [qfa_1] - h_2 [qfa_2] - \ldots - h_\sigma [qfa_\sigma],$$

tedy

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \{[qff] - h_1 [qfa_1] - h_2 [qfa_2] - \ldots - h_\sigma [qfa_\sigma]\}. \quad (13')$$

Podobně jako v (III, 6) o výpočtu $[pvv]$, můžeme vyloučiti veličiny $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$ ze vzorce (13′) a z rovnic (12). Jen místo p je nyní q, místo l jest f a místo $a, b, c, \ldots$ je nyní $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Místo vzorce [III, (22)] bude tedy

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \left(q[ff] - \frac{[qa_1 f]^2}{[qa_1 a_1]} - \frac{[qa_2 f \,.\, 1]^2}{[qa_2 a_2 \,.\, 1]} - \frac{[qa_3 f \,.\, 2]^2}{[qa_3 a_3 \,.\, 2]} - \ldots \right). \quad (13'')$$

Při tom $[qa_1 a_1]$, $[qa_1 f]$ jest koeficient u h_1 a prostý člen v první z rovnic (12), $[qa_2 a_2 \,.\, 1]$, $[qa_2 f \,.\, 1]$ je koeficient u h_2 a prostý člen v příslušné první redukované rovnici prvního řádu, $[qa_3 a_3 \,.\, 2]$, $[qa_3 f \,.\, 2]$ je koeficient u h_3 a prostý člen v první redukované rovnici druhého řádu atd.

Jde-li na př. o jedinou podmínku

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1\varrho} x_\varrho = a_{10},$$

bude také jediná veličina h_1 a příslušná rovnice (12) jest

$$h_1 [qa_1 a_1] = [qa_1 f],$$

takže čtverec střední chyby lineární funkce vyrovnaných

hodnot $\Phi = f_0 + f_1 x'_1 + f_2 x'_2 + \ldots + f_\varrho x'_\varrho$ bude podle vzorce (13′) nebo (13″) roven

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \left\{ [qff] - \frac{[qa_1 f]^2}{[qa_1 a_1]} \right\}. \tag{14}$$

Nechť jde o σ podmínek tvaru

$$\begin{aligned} x'_1 + y'_1 + z'_1 &= a_{10}, \\ x'_2 + y'_2 + z'_2 &= a_{20}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_\sigma + y'_\sigma + z'_\sigma &= a_{\sigma 0}; \end{aligned} \tag{15}$$

váhy měřených veličin označíme $p_1, p'_1, p''_1; p_2, p'_2, p''_2; \ldots; p_\sigma, p'_\sigma, p''_\sigma$. Chceme určiti střední chybu výrazu

$$\Phi = f_0 + \sum_{\varrho=1}^{\sigma} (f_\varrho x'_\varrho + f'_\varrho y'_\varrho + f''_\varrho z''_\varrho).$$

Zavedeme čísla $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$, která splňují rovnice (12),

$$h_\varrho (q_\varrho + q'_\varrho + q''_\varrho) = (q_\varrho f_\varrho + q'_\varrho f'_\varrho + q''_\varrho f''_\varrho), \quad g = 1, 2, \ldots, \sigma.$$

Pak ze vzorce (13′) plyne

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \sum_{\varrho=1}^{\sigma} \left\{ (q_\varrho f_\varrho^2 + q'_\varrho f'^2_\varrho + q''_\varrho f''^2_\varrho) - \frac{(q_\varrho f_\varrho + q'_\varrho f'_\varrho + q''_\varrho f''_\varrho)^2}{(q_\varrho + q'_\varrho + q''_\varrho)} \right\}. \tag{15′}$$

Chceme ještě vypočísti, jaká je průměrná hodnota poměru váhy měřené hodnoty k váze vyrovnané hodnoty. Označíme váhu měřené hodnoty M_j písmenem p_j a váhu (střední chybu) vyrovnané hodnoty x'_j písmenem P_j (m_j). Máme tedy určiti průměrnou hodnotu $\frac{1}{\varrho} \sum_{j=1}^{\varrho} \frac{p_j}{P_j}$.

Protože $\frac{1}{P_j} = \frac{m_j^2}{m_0^2}$ a podle vzorce (13′) jest

$$\frac{m_j^2}{m_0^2} = q_j - h_1 q_j a_{1j} - h_2 q_j a_{2j} - \ldots - h_\sigma q_j a_{\sigma j},$$

bude

$$\frac{p_j}{P_j} = 1 - h_1 a_{1j} - h_2 a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j},$$

a

$$\sum_{j=1}^{\varrho} \frac{p_j}{P_j} = \varrho - \sum_{j=1}^{\varrho} h_1 a_{1j} - \sum_{j=1}^{\varrho} h_2 a_{2j} - \ldots - \sum_{j=1}^{\varrho} h_\sigma a_{\sigma j}.$$

Při tom podle vzorců (12) jest

$$\begin{aligned}
&h_1[qa_1a_1] + h_2[qa_1a_2] + \ldots + h_\sigma[qa_1a_\sigma] = q_j a_{1j},\\
&h_1[qa_2a_1] + h_2[qa_2a_2[+ \ldots + h_\sigma[qa_2a_\sigma] = q_j a_{2j},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&h_1[qa_\sigma a_1] + h_2[qa_\sigma a_2] + \ldots + h_\sigma[qa_\sigma a_\sigma] = q_j a_{\sigma j}.
\end{aligned}$$

Odtud na př.

$$h_1 a_{1j} = \frac{1}{\Delta'} \begin{vmatrix} q_j a_{1j} a_{1j}, & [qa_1a_2], & \ldots, & [qa_1a_\sigma] \\ q_j a_{2j} a_{1j}, & [qa_2a_2], & \ldots, & [qa_2a_\sigma] \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ q_j a_{\sigma j} a_{1j}, & [qa_\sigma a_2], & \ldots, & [qa_\sigma a_\sigma] \end{vmatrix},$$

kde Δ' je determinant předcházející soustavy lineárních rovnic; tedy

$$\sum_{j=1}^{\varrho} h_1 a_{1j} = \frac{1}{\Delta'} \begin{vmatrix} [qa_1a_1], & [qa_1a_2], & \ldots, & [qa_1a_\sigma] \\ [qa_2a_1], & [qa_2a_2], & \ldots, & [qa_2a_\sigma] \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ [qa_\sigma a_1], & [qa_\sigma a_2], & \ldots, & [qa_\sigma a_\sigma] \end{vmatrix} = 1.$$

Podobně

$$\sum_{j=1}^{\varrho} h_2 a_{2j} = 1, \ldots, \quad \sum_{j=1}^{\varrho} h_\sigma a_{\sigma j} = 1, \text{ tedy } \sum_{j=1}^{\varrho} \frac{p_j}{P_j} = \varrho - \sigma.$$

Počet sčítanců $p_j : P_j$ jest ϱ. Průměrná hodnota poměru váhy měřené hodnoty k váze vyrovnané hodnoty jest tedy

$$\frac{1}{\varrho} \sum_{j=1}^{\varrho} \frac{p_j}{P_j} = \frac{\varrho - \sigma}{\varrho}. \qquad (16)$$

5. Příklady na vyrovnání závislých měření. 1. V trojúhelníku ABC byly měřeny úhly $A = 61° 07' 52{,}00''$, $B = 76° 50' 54{,}00''$, $C = 42° 01' 12{,}15''$. Jejich váhy jsou po řadě 3, 2, 2, sférický excess $\varepsilon' = 2{,}11''$. Provésti vyrovnání.

Označíme-li opravy úhlů x_1, x_2, x_3, má býti $3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$ minimální a při tom má býti přesně splněna podmínka

$$x_1 + x_2 + x_3 = + 3{,}96''. \qquad (17)$$

Funkce

$$F = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2k_1 (x_1 + x_2 + x_3 - 3{,}96'')$$

nabude minima, když

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0,$$

tedy když

$$3x'_1 = k_1,\ 2x'_2 = k_1,\ 2x'_3 = k_1;$$

dosadíme-li do rovnice (17), bude $k_1 (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = +3{,}96''$. To je normální rovnice, kterou bychom mohli přímo napsati podle první z rovnic (9): $k_1 [qa_1a_1] = a_{10}$. Odtud $k_1 = 2{,}97''$.

Pak

$$x'_1 = \tfrac{1}{3}k_1 = + 0{,}990'',\ x'_2 = \tfrac{1}{2}k_1 = + 1{,}485'' = x'_3.$$

Vyrovnané úhly budou:

$$A + x'_1 = 61° 07' 52{,}990'',$$
$$B + x'_2 = 76° 50' 55{,}485'',$$
$$C + x'_3 = 42° 01' 13{,}635''.$$

Střední chyba pro jednotku váhy je $m_0 = \pm\sqrt{[pvv] : 1}$, kde $v_j = x'_j$, tedy $[pvv] = 3x'^2_1 + 2x'^2_2 + 2x'^2_3 = 11{,}7611$. Podle vzorce (11) je $[pvv] = a_{10}k_1 = + 3{,}96'' \cdot 2{,}97'' = 11{,}7612$. Pak $m_0 = \pm 3{,}43''$.

Čtverec střední chyby pro x_1 je podle vzorce (14), do něhož dosadíme $f_0 = f_2 = \ldots = f_\varrho = 0$ a $f_1 = 1$, roven

$$m_{x_1}^2 = m_0^2 \left\{ q_1 - \frac{q_1^2}{q_1 + q_2 + q_3} \right\} = m_0^2 \frac{q_1 (q_2 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3},$$

odtud

$$m_{x_1}^2 = \tfrac{1}{4} m_0^2, \quad m_{x_1} = \pm 1{,}72''.$$

Podobně je

$$m_y^2 = m_0^2 \frac{q_2 (q_2 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}, \qquad m_y = \tfrac{1}{4} m_0 \sqrt{5} = \pm 1{,}92'' = m_z.$$

To jsou střední chyby vyrovnaných úhlů uvažovaného trojúhelníka.

Můžeme je vypočísti také přímo takto: Jsou-li ΔA, ΔB, ΔC skutečné chyby úhlů A, B, C a tedy

$$k_1 = \frac{180° + \varepsilon' - A - B - C}{q_1 + q_2 + q_3},$$

bude skutečná chyba ve vyrovnaném úhlu $A + x'_1$ rovna

$$\Delta A - \frac{\Delta A + \Delta B + \Delta C}{q_1 + q_2 + q_3} q_1 =$$

$$= \frac{(q_2 + q_3)\Delta A - q_1 \Delta B - q_1 \Delta C}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

A protože střední hodnoty $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ jsou $\frac{m_0}{\sqrt{p_1}}$, $\frac{m_0}{\sqrt{p_2}}$, $\frac{m_0}{\sqrt{p_3}}$ čili $m_0 \sqrt{q_1}$, $m_0 \sqrt{q_2}$, $m_0 \sqrt{q_3}$, bude čtverec střední chyby vyrovnaného úhlu $A + x'_1$ roven podle vzorce [I, (12″)]

$$\frac{m_0^2}{(q_1 + q_2 + q_3)^2} [(q_2 + q_3)^2 q_1 + q_1^2 q_2 + q_1^2 q_3] =$$

$$= m_0^2 \frac{q_1 (q_2 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

Podobně jest čtverec střední chyby pro vyrovnaný úhel $B + x'_2$ roven

$$m_0^2 \frac{q_2 (q_1 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}$$

a pro úhel $C + x'_3$ jest

$$m_0^2 \frac{q_3 (q_1 + q_2)}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

Váhy vyrovnaných úhlů jsou po řadě rovny

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_1 (q_2 + q_3)}, \quad \frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_2 (q_1 + q_3)}, \quad \frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_3 (q_1 + q_2)}.$$

V uvažovaném zvláštním případě budou rovny číslům 4, $1\frac{6}{5}$, $1\frac{6}{5}$.

2. Na stanovisku bylo měřeno n úhlů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tvořících dohromady plný úhel. Jaká je váha jednotlivých vyrovnaných úhlů, je-li váha každého měřeného úhlu rovna p?

V tomto případě je

$$F = px_1^2 + px_2^2 + \ldots + px_n^2 - \\ - 2k_1 (x_1 + x_2 + \ldots + x_n - a_{10}),$$

kde $a_{10} = 360° - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n$. Pak

$$x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_n = \frac{k_1}{p},$$

a dosadíme-li do podmínky $x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n - a_{10} = 0$, bude

$$k_1 = \frac{a_{10} p}{n} \text{ a } x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_n = \frac{a_{10}}{n}.$$

Střední chyba pro jednotku váhy je

$$m_0 = \pm \sqrt{p (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_n)} = k_1 \sqrt{\frac{n}{p}} = a_{10} \sqrt{\frac{p}{n}}.$$

Abychom vypočetli čtverec střední chyby vyrovnané hodnoty x_j (a vyrovnaného úhlu $\alpha_j + x_j$), položíme ve vzorci (14) $f_j = 1$ a místo ostatních f klademe 0. Pak

$$m_{x_j}^2 = m_0^2 \left(q_j - \frac{q_j^2}{q_1 + q_2 + \ldots + q_n} \right) = m_0^2 \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 n} \right) = \\ = m_0^2 \frac{n - 1}{pn},$$

tedy

$$m_{x_j} = \pm m_0 \sqrt{\frac{n-1}{pn}} = \pm \frac{a_{10}}{n} \sqrt{n-1}.$$

Váha vyrovnaného úhlu bude $pn : (n-1)$.

Střední chybu vyrovnaného úhlu $\alpha_j + x'_j$ můžeme počítati také přímo:

$$\alpha_j + x'_j = \alpha_j + \frac{360^\circ - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n}{n} =$$

$$= \frac{360^\circ}{n} - \frac{\alpha_1}{n} - \frac{\alpha_2}{n} - \ldots - \frac{\alpha_{j-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\alpha_j -$$

$$- \frac{\alpha_{j+1}}{n} - \ldots - \frac{\alpha_n}{n}.$$

Protože střední chyba jednoho měřeného úhlu je $m_0 : \sqrt{p}$, je střední chyba vyrovnaného úhlu $\alpha_j + x'_j$ podle vzorce [I, (12″] rovna

$$m_0 \sqrt{\frac{1}{n^2}\frac{(n-1)}{p} + \frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{1}{p}} = m_0 \sqrt{\frac{n-1}{pn}}.$$

3. Mezi body Brest, Greenwich a Paříž byly v r. 1872 určeny tyto rozdíly zeměpisných délek:

Brest—Greenwich	$17^m\ 57{,}154^s$	váha 10,
Greenwich—Paříž ...	$9^m\ 21{,}120^s$	váha 7,
Brest—Paříž	$27^m\ 18{,}190^s$	váha 9.

Určiti jejich vyrovnané hodnoty, jejich střední chyby a váhy nejprve obecně a pak číselně.*)

Označíme délkové rozdíly

$$\omega_{B-G} = \omega_1 + x_1,\ \omega_{G-P} = \omega_2 + x_2,\ \omega_{B-P} = \omega_3 + x_3,$$

má býti

$$\omega_1 + x_1 + \omega_2 + x_2 = \omega_3 + x_3,\ \text{tedy}\ x_1 + x_2 - x_3 = a_{10},$$

*) Wright-Hayford, l. c. str. 166.

kde

$$a_{10} = \omega_3 - \omega_1 - \omega_2 = -0{,}084^s.$$

Funkce

$$F = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 - 2k_1 (x_1 + x_2 - x_3 - a_{10}),$$

odtud

$$x'_1 = \frac{k_1}{p_1}, \quad x'_2 = \frac{k_1}{p_2}, \quad x'_3 = -\frac{k_1}{p_3}.$$

Dosadíme-li do rovnice

$$x'_1 + x'_2 - x'_3 = a_{10}, \text{ bude } k_1 = \frac{a_{10}}{q_1 + q_2 + q_3},$$

tedy

$$x'_1 = \frac{a_{10} q_1}{q_1 + q_2 + q_3}, \quad x'_2 = \frac{a_{10} q_2}{q_1 + q_2 + q_3},$$

$$x'_3 = -\frac{a_{10} q_3}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

V uvažovaném zvláštním případě jest

$k_1 = 0{,}237^s$, $x'_1 = -0{,}024^s$, $x'_2 = -0{,}034^s$, $x'_3 = +0{,}026^s$

a tedy vyrovnané hodnoty délkových rozdílů jsou

$$17^m\,57{,}130^s;\ 9^m\,21{,}086^s;\ 27^m\,18{,}216^s.$$

Střední chyba pro jednotku váhy bude

$$m_0 = \pm \sqrt{p_1 x'^2_1 + p_2 x'^2_2 + p_3 x'^2_3} =$$
$$= \pm \sqrt{1{,}994 \cdot 10^{-2}} = \pm 0{,}141^s.$$

Podle vzorce (11) je

$$[pvv] = a_{10} k_1 = 1{,}991 \cdot 10^{-2}.$$

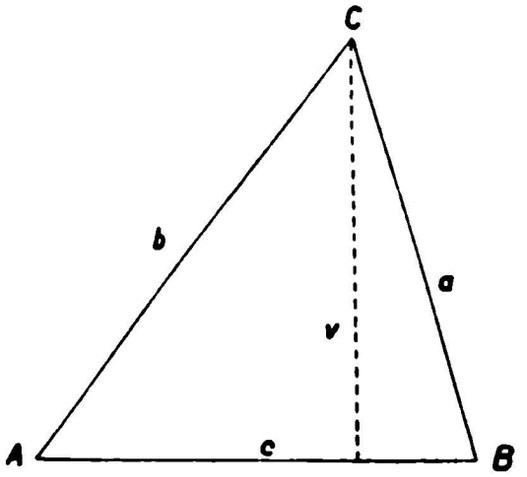
Jako v 1. příkladě jsou střední chyby vyrovnaných veličin x'_1, x'_2, x'_3 rovny

$$m_0 \sqrt{\frac{q_1 (q_2 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}}, \quad m_0 \sqrt{\frac{q_2 (q_1 + q_3)}{q_1 + q_2 + q_3}}, \quad m_0 \sqrt{\frac{q_3 (q_1 + q_2)}{q_1 + q_2 + q_3}}$$

a váhy daných délkových rozdílů jsou

$$\frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_1 (q_2 + q_3)}, \quad \frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_2 (q_1 + q_3)}, \quad \frac{q_1 + q_2 + q_3}{q_3 (q_1 + q_2)}.$$

V uvažovaném číselném příkladě jsou střední chyby $\pm 0{,}038^s$, $\pm 0{,}041^s$, $\pm 0{,}039^s$ a váhy po řadě $\frac{2}{16}\frac{2}{3}$, $\frac{2}{19}\frac{2}{3}$, $\frac{2}{17}\frac{2}{3}$.



obr. 6

4. V trojúhelníku ABC (obr. 6) jsou vnitřní úhly měřeny s vahami p_1, p_2, p_3. Je-li dána délka strany $\overline{AB} = c$, o které předpokládáme, že je bez chyby, a je-li m_0 střední chyba pro jednotku váhy, jaká je relativní střední chyba délky $a = \overline{BC}$ a výšky v_c?

Označíme-li úhly A, B, C a jejich opravy x_1, x_2, x_3, bude jako v 1. příkladě

$$F = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 - 2k_1 (x_1 + x_2 + x_3 - a_{10}),$$

kde

$$a_{10} = 180 + \varepsilon' - A - B - C.$$

Hledáme především střední chybu veličiny

$$a = \frac{c}{\sin C} \sin A.$$

Jsou-li ΔA, ΔB, ΔC skutečné chyby v úhlech A, B, C a jestliže skutečnou chybu v a označíme Δa, jest

$$\Delta a = \frac{\partial a}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial a}{\partial C} \sin C.$$

A protože

$$\frac{\partial a}{\partial A} = \frac{c}{\sin C} \cos A = a \operatorname{cotg} A,$$

$$\frac{\partial a}{\partial C} = -\frac{c}{\sin^2 C} \sin A \cos C = -a \operatorname{cotg} C,$$

bude, zavedeme-li zkratky

$$c_1 = \operatorname{cotg} A, \quad c_2 = \operatorname{cotg} B, \quad c_3 = \operatorname{cotg} C,$$

relativní chyba

$$\Phi = \frac{\Delta a}{a} = c_1 \Delta A - c_3 \Delta C.$$

Protože tedy jde o střední chybu výrazu $c_1 x'_1 - c_3 x'_3$, stačí použíti vzorce (14), kde položíme $f_1 = c_1$, $f_2 = 0$, $f_3 = -c_3$. Bude tedy

$$m_\Phi{}^2 = m_0{}^2 \left\{ q_1 c_1{}^2 + q_3 c_3{}^2 - \frac{(q_1 c_1 - q_3 c_3)^2}{q_1 + q_2 + q_3} \right\}.$$

Pro $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ bude

$$m_\Phi{}^2 = m_0{}^2 \left\{ c_1{}^2 + c_3{}^2 - \frac{(c_1 - c_3)^2}{3} \right\} = \frac{2 m_0{}^2}{3} (c_1{}^2 + c_1 c_3 + c_3{}^2).$$

Jde-li o trojúhelník rovnostranný, je

$$c_1 = c_3 = \operatorname{cotg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

a tedy

$$m_\Phi = m_0 \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Chceme ještě vyhledati střední relativní chybu ve výšce

$$v_c = \frac{c}{\sin C} \sin A \sin B.$$

V tomto případě je

$$\frac{\Delta v_c}{v_c} = c_1 \Delta A + c_2 \Delta B - c_3 \Delta C.$$

Půjde tedy o střední chybu lineárního výrazu

$$\Phi_1 = c_1 x'_1 + c_2 x'_2 - c_3 x'_3.$$

Užijeme-li zase vzorce (14), bude

$$m_{\Phi_1}{}^2 = m_0{}^2 \left\{ q_1 c_1{}^2 + q_2 c_2{}^2 + q_3 c_3{}^2 - \frac{(q_1 c_1 + q_2 c_2 - q_3 c_3)^2}{q_1 + q_2 + q_3} \right\}.$$

Je-li uvažovaný trojúhelník rovnoramenný a měříme-li oba úhly při základně stejně přesně, jest $c_1 = c_2$, $p_1 = p_2$ a tedy

$$m_{\Phi_1}{}^2 = m_0{}^2 \left\{ 2q_1 c_1{}^2 + q_3 c_3{}^2 - \frac{(2q_1 c_1 - q_3 c_3)^2}{2q_1 + q_3} \right\} =$$

$$= m_0{}^2 \, 2q_1 q_3 \frac{(c_1 + c_3)^2}{2q_1 + q_3} = m_0{}^2 \frac{2(c_1 + c_3)^2}{p_1 + 2p_3}.$$

V tomto případě je

$$c_1 = \operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg}(90 - \tfrac{1}{2}C) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C,$$

takže

$$c_1 + c_3 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C + \operatorname{cotg} C = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}C + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}C}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}C} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}C}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}C} = \frac{1}{\sin C},$$

tedy

$$m_{\Phi_1} = \frac{m_0}{\sin C} \sqrt{\frac{2}{p_1 + 2p_3}}.$$

5. Od vrcholu P_0 je veden podél poledníků bodu P_0 řetěz σ trojúhelníků (obr. 7), s vrcholy $P_1, P_2, \ldots, P_{\sigma+1}$, v nichž byly měřeny všechny úhly se stejnou přesností. Jaká je střední chyba: a) ve straně $s_g = P_g P_{g+1}$; b) v úhlu, který svírá strana s_g s poledníkem bodu P_0; c) v průmětu $P_0 F_{\sigma+1}$ čáry $P_0 P_1 \ldots P_{\sigma+1}$ do poledníku bodu P_0.*) (Výpočty prováděti jakoby body $P_1, P_2, \ldots, P_{\sigma+1}$ ležely v rovině.)

Délku $P_0 P_1$ označíme s_0 a předpokládáme o ní, že byla změřena bez chyby. Měřené úhly v g-tém trojúhelníku jsou

*) A. R. Charke: Geodesy, Oxford 1880, str. 225—227.

A_g, B_g, C_g a jejich opravy x_g, y_g, z_g. Podmínka z g-tého trojúhelníka bude

$$x_g + y_g + z_g = a_{g0}, \quad (17')$$

kde

$$a_{g0} = 180^0 - A_g - B_g - C_g.$$

Funkce F je v tomto případě

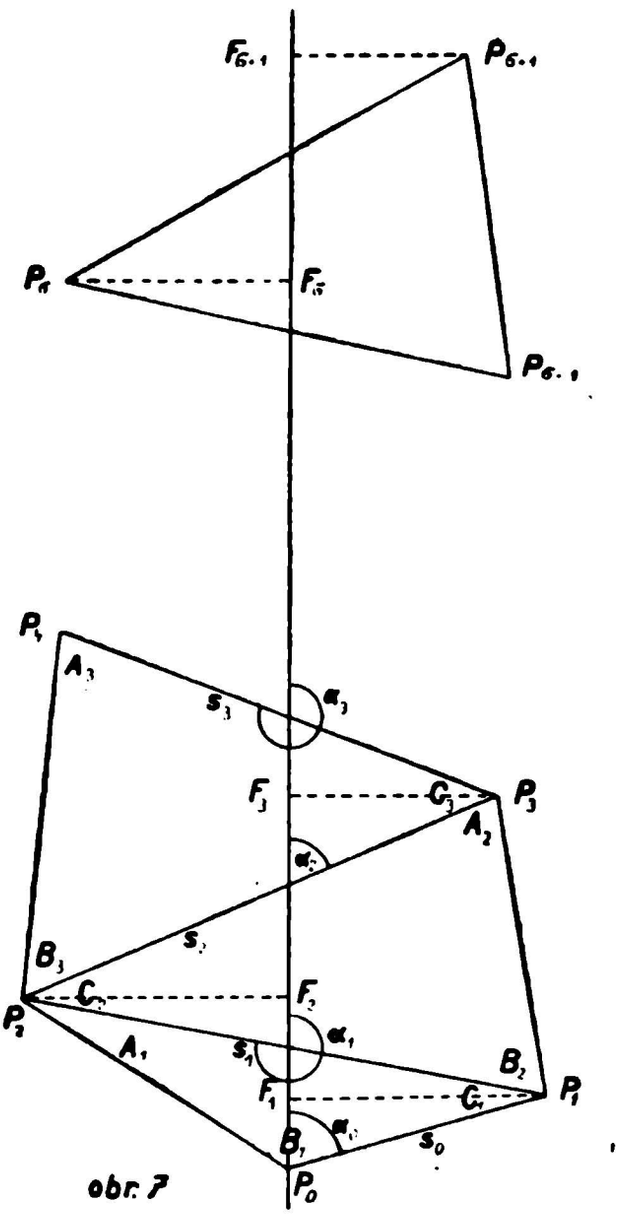
$$F = \sum_{g=1}^{\sigma} (x_g^2 + y_g^2 + z_g^2) - 2k_g (x_g + y_g + z_g - a_{g0}).$$

Anulováním derivací podle x_g, y_g, z_g plyne $x'_g = y'_g = z'_g = k_g$. Dosadíme-li do podmínek (17'), bude

$$y'_g = x'_g = z'_g = \tfrac{1}{3} a_{g0},$$

tedy vyrovnané hodnoty úhlů v g-tém trojúhelníku jsou

$$A_g + x'_g, \; B_g + y'_g, \; C_g + z'_g.$$



obr. 7

Označíme-li střední chybu pro jednotku váhy (t. j. v jednom měřeném úhlu) písmenem m_0, pak podle vzorce (15'), kde klademe na př. $f_g = 1$ a ostatní f rovna 0 a $q_g = q'_g = q''_g = 1$, plyne střední chyba ve vyrovnaném úhlu

$$m_0 \sqrt{q_g - \frac{q_g}{q_g + q'_g + q''_g}} = m_0 \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

a) Abychom odvodili vztah mezi skutečnými chybami $\Delta A_i, \Delta B_i, i = 1, 2, \ldots, g$ a příslušnou skutečnou chybou strany s_g, vyjdeme z věty sinové

$$s_g = s_0 \frac{\sin B_1 \sin B_2 \ldots \sin B_g}{\sin A_1 \sin A_2 \ldots \sin A_g}.$$

A_1 jest úhel proti dané straně s_0, B_1 proti první hledané straně s_1 atd.

Ze změněných hodnot úhlů bychom vypočetli

$$s_g + \Delta s_g = s_0 \frac{\sin (B_1+\Delta B_1) \sin (B_2+\Delta B_2) \ldots \sin (B_g + \Delta B_g)}{\sin (A_1+\Delta A_1) \sin (A_2+\Delta A_2) \ldots \sin (A_g+\Delta A_g)}.$$

Logaritmováním plyne odtud

$$\log (s_g + \Delta s_g) - \log s_0 = \sum_{i=1}^{g} \{\log \sin (B_i + \Delta B_i) - \log \sin (A_i + \Delta A_i)\}$$

a z předcházející rovnice

$$\log s_g - \log s_0 = \sum_{i=1}^{g} \{\log \sin B_i - \log \sin A_i\},$$

tedy

$$\log (s_g + \Delta s_g) - \log s_g = \sum_{i=1}^{g} \{\log \sin (B_i+\Delta B_i) - \log \sin B_i\} - \sum_{i=1}^{g} \{\log \sin (A_i + \Delta A_i) - \log \sin A_i\}.$$

Rozdíl

$$\log (s_g + \Delta s_g) - \log s_g = M \log \frac{s_g + \Delta s_g}{s_g} =$$

$$= M \log \left(1 + \frac{\Delta s_g}{s_g}\right) \doteq M \cdot \frac{\Delta s_g}{s_g}.$$

Označíme-li značkami δA_i, δB_i tabulkové diference pro log sin a jednu vteřinu v místě A_i, resp. B_i, jest

$$\log \sin (B_i + \Delta B_i) - \log \sin B_i \doteq \Delta B_i \, \delta B_i$$

a

$$\log \sin (A_i + \Delta A_i) - \log \sin A_i \doteq \Delta A_i \, \delta A_i,$$

tedy

$$\frac{\Delta s_g}{s_g} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{g}(\Delta B_i\,\delta B_i - \Delta A_i\,\delta A_i).$$

Půjde tedy o střední chybu výrazu

$$\Phi = \frac{\Delta s_g}{s_g} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{g}(y'_i\,\delta B_i - x'_i\,\delta A_i).$$

Užijeme zase vzorce (15′), v němž klademe

$$q_g = q'_g = q''_g = 1,\ f_g = -\delta A_i,\ f'_g = +\delta B_i,\ f''_g = 0.$$

Pak

$$m_\Phi^2 = \frac{m_0^2}{M^2}\sum_{i=1}^{g}\left\{\delta A_i^2 + \delta B_i^2 - \frac{(-\delta A_i + \delta B_i)^2}{3}\right\} =$$

$$= \frac{m_0^2}{M^2}\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{g}(\delta A_i^2 + \delta A_i\,\delta B_i + \delta B_i^2).$$

Tedy střední relativní chyba ve straně s_g jest

$$\frac{m_0}{M}\sqrt{\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{g}(\delta A_i^2 + \delta A_i\,\delta B_i + \delta B_i^2)}. \qquad (18)$$

Při tom ΔA_i, ΔB_i, ΔC_i a tedy i m_0 značí počet vteřin, tedy prostá čísla.

b) Označíme-li úhel, který svírá strana s_0 s poledníkem bodu P_0, písmenem α_0 (azimut bodu P_1, čítaný od severu přes východ na západ), bude

azimut směru P_1P_2 roven $\alpha_1 = \quad 180° + \alpha_0 + C_1$,
azimut směru P_2P_3 jest $\alpha_2 = -180° + \alpha_1 - C_2$,
azimut směru P_3P_4 jest $\alpha_3 = \quad 180° + \alpha_2 + C_3$,
azimut směru P_4P_5 jest $\alpha_4 = -180° + \alpha_3 - C_4$,
. . . . . .

azimut směru P_gP_{g+1} jest

$$\alpha_g = (-1)^{g-1}\,180° + \alpha_{g-1} + (-1)^{g-1}\,C_g.$$

Odtud

$$\alpha_g = \begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ \end{cases} + \alpha_0 + C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots + (-1)^{g-1} C_g,$$

Ve vzorci klademe $\begin{cases} 0^\circ \\ 180^\circ \end{cases}$, je-li g $\begin{cases} \text{sudé} \\ \text{liché} \end{cases}$.

Předpokládáme-li, že azimut první strany (α_0) byl změřen bez chyby, bude skutečná chyba v α_g rovna

$$\Delta\alpha_g = \Delta C_1 - \Delta C_2 + \ldots + (-1)^{g-1} \Delta C_g.$$

Půjde tedy o střední chybu výrazu

$$\Phi_1 = z'_1 - z'_2 + \ldots + (-1)^{g-1} z'_g,$$

a užijeme-li vzorce (15′), plyne

$$m_{\Phi_1}{}^2 = m_0{}^2 \left(\tfrac{2}{3}g\right);$$

střední chyba v α_g bude proto rovna

$$m_0 \sqrt{\tfrac{2}{3}g}.$$

c) Průmět

$$P_0F_{\sigma+1} = s_0 \cos\alpha_0 + s_1 \cos\alpha_1 + \ldots + s_\sigma \cos\alpha_\sigma.$$

Skutečná chyba v průmětu $P_0F_{\sigma+1}$ je rovna

$$\sum_{g=1}^{\sigma} (\Delta s_g \cos\alpha_g - s_g \sin\alpha_g \Delta\alpha_g).$$

Viděli jsme, že

$$\Delta s_g = \frac{s_g}{M} \sum_{i=1}^{g} (\delta B_i \Delta B_i - \delta A_i \Delta A_i),$$

$$\Delta\alpha_g = \Delta C_1 - \Delta C_2 + \ldots + (-1)^{g-1} \Delta C_g,$$

tedy skutečná chyba v průmětu $P_0F_{\sigma+1}$ je

$$\sum_{g=1}^{\sigma} \left\{ \frac{s_g \cos\alpha_g}{M} \sum_{i=1}^{g} \delta B_i \Delta B_i - \delta A_i \Delta A_i - \right.$$

$$\left. - s_g \sin\alpha_g (\Delta C_1 - \Delta C_2 + \ldots + (-1)^{g-1} \Delta C_g) \right\}.$$

Označíme délky průmětů od F_1 do $F_{\sigma+1}$, t. j. $s_1 \cos \alpha_1 + \ldots + s_\sigma \cos \alpha_\sigma$ písmenem $\overline{P_\sigma}$ a délky průmětů do přímky kolmé k poledníku, t. j. $s_1 \sin \alpha_1 + \ldots + s_\sigma \sin \alpha_\sigma$, písmenem $\overline{Q_\sigma}$ (pro $\sigma = 1, 2, \ldots, \sigma$). Pak můžeme psáti skutečnou chybu v průmětu $P_0 F_{\sigma+1}$:

$$(\delta B_1 \Delta B_1 - \delta A_1 \Delta A_1) \frac{\overline{P_\sigma}}{M} + (\delta B_2 \Delta B_2 - \delta A_2 \Delta A_2) \frac{\overline{P_\sigma} - \overline{P_1}}{M} +$$

$$+ (\delta B_3 \Delta B_3 - \delta A_3 \Delta A_3) \frac{\overline{P_\sigma} - \overline{P_2}}{M} + \ldots +$$

$$+ (\delta B_\sigma \Delta B_\sigma - \delta A_\sigma \Delta A_\sigma) \frac{\overline{P_\sigma} - \overline{P_{\sigma-1}}}{M} - \overline{Q_\sigma} \Delta C_1 +$$

$$+ (\overline{Q_\sigma} - \overline{Q_1}) \Delta C_2 - (\overline{Q_\sigma} - \overline{Q_2}) \Delta C_3 +$$

$$+ \ldots - (\overline{Q_\sigma} - \overline{Q_{\sigma-1}}) (-1)^{\sigma-1} \Delta C_\sigma.$$

Půjde tedy zde o střední chybu výrazu

$$\Phi_2 = (-x'_1 \delta A_1 + y'_1 \delta B_1) \frac{\overline{P_\sigma}}{M} - z'_1 \overline{Q_\sigma} +$$

$$+ (-x'_2 \delta A_2 + y'_2 \delta B_2) \frac{\overline{P_\sigma} - \overline{P_1}}{M} + z'_2 (\overline{Q_\sigma} - \overline{Q_1}) +$$

$$+ (-x'_3 \delta A_3 + y'_3 \delta B_3) \frac{\overline{P_\sigma} - \overline{P_2}}{M} - z'_3 (\overline{Q_\sigma} - \overline{Q_2}) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (-x'_\sigma \delta A_\sigma + y'_\sigma \delta B_\sigma) \frac{\overline{P_\sigma} - \overline{P_{\sigma-1}}}{M} -$$

$$- z'_\sigma (\overline{Q_\sigma} - \overline{Q_{\sigma-1}}) (-1)^{\sigma-1}.$$

Protože $q_\varrho = q'_\varrho = q''_\varrho = 1$, bude podle vzorce (15'):

$$m_{\Phi_2}^2 = m_0^2 \sum_{\varrho=1}^{\sigma} \left\{ (f_\varrho^2 + f'^2_\varrho + f''^2_\varrho) - \frac{(f_\varrho + f'_\varrho + f''_\varrho)^2}{3} \right\}.$$

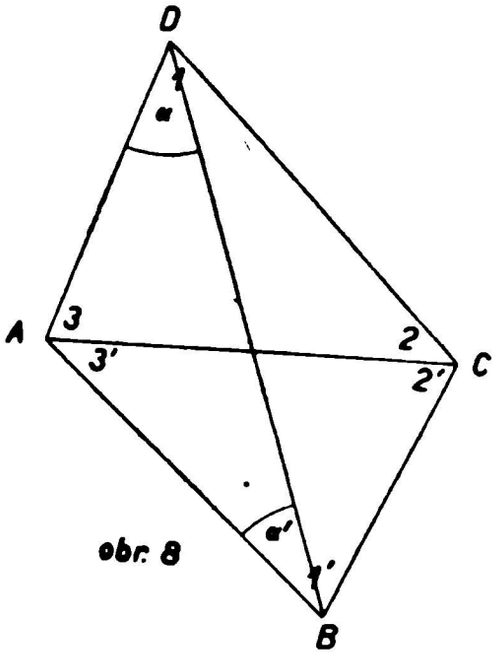
Další výpočet se doporučuje prováděti číselně.

6. V řetězci pěti podobných rovnoramenných trojúhelníků, v nichž úhly při vrcholech jsou 38° a úhly při základně 71°, je dána základna s_0 prvního trojúhelníka. Je-li m_0 střední chyba jednoho měřeného úhlu a předpokládáme-li, že byly měřeny všechny úhly v trojúhelnících a že byly vyrovnány, jaká je relativní střední chyba strany s_5?

Podle vzorce (18) je střední relativní chyba strany s_5 rovna

$$\frac{m_0}{M}\sqrt{\tfrac{1}{3}\cdot 6\,(\delta^2 38° + \delta 38°\,\delta 71° + \delta^2 71°)}.$$

Protože $\delta 38° = 26{,}9 \cdot 10^{-7}$, $\delta 71° = 7{,}2 \cdot 10^{-7}$, bude střední relativní chyba strany s_5 rovna $1{,}31 \cdot 10^{-5} m_0$.



obr. 8

7. Ve čtyrúhelníku $ABCD$ (obr. 8) je dána úhlopříčka $z = \overline{AC}$ a byly měřeny úhly (1), (2), (3); (1′), (2′), (3′) s vahami rovnými po řadě p_1, p'_1, p''_1; p_2, p'_2, p''_2. Určiti střední relativní chybu úhlopříčky $\overline{BD} = Z$.*)

V tomto případě je

$$Z^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{AB} \cos [(3) + (3')],$$

a

$$\overline{AD} = \frac{z}{\sin (1)} \sin (2), \quad \overline{AB} = \frac{z}{\sin (1')} \sin (2').$$

Abychom vypočetli, jak závisí chyba v délce Z na chybách $\Delta 1, \Delta 2, \ldots, \Delta 3'$ měřených úhlů, postupujeme takto: Derivujeme výraz pro Z^2 podle (1). Jest

*) Jordan, l. c. III, Stuttgart 1907 (5. vyd.), str. 153—155.

$$Z\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(1)} = \overline{AD}\,.\,\frac{\mathrm{d}\overline{AD}}{\mathrm{d}(1)} - \overline{AB}\cos[(3)+(3')]\frac{\mathrm{d}\overline{AD}}{\mathrm{d}(1)},$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{AD}}{\mathrm{d}(1)} = -\frac{z}{\sin^2(1)}\sin(2)\cos(1) = -\overline{AD}\operatorname{cotg}(1) =$$

$$= -\overline{AD}c_1,$$

edy

$$Z\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(1)} = -\overline{AD}c_1\{\overline{AD} - \overline{AB}\cos[(3)+(3')]\},$$

a protože (viz obr. 8)

$$\overline{AD} - \overline{AB}\cos[(3)+(3')] = Z\cos\alpha,$$

je

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(1)} = -\overline{AD}\,c_1\cos\alpha.$$

Podobně je

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(2)} = +\overline{AD}\,c_2\cos\alpha, \qquad \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(1')} = -\overline{AB}\,c'_1\cos\alpha',$$

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(2')} = +\overline{AB}\,c'_2\cos\alpha',$$

kde

$$c_2 = \operatorname{cotg}(2),\ c'_1 = \operatorname{cotg}(1'),\ c'_2 = \operatorname{cotg}(2').$$

Dále

$$\frac{Z\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(3)} = +\overline{AD}\,.\,\overline{AB}\sin[(3)+(3')],$$

a protože

$$\overline{AB}\sin[(3)+(3')] = Z\sin\alpha$$

(viz obr. 8), je

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(3)} = \overline{AD}\sin\alpha.$$

Podobně

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}(3')} = \overline{AB} \sin \alpha'.$$

Půjde tedy o výpočet střední chyby pro výraz

$$\Phi = f_1(1) + f'_1(2) + f''_1(3) + f_2(1') + f'_2(2') + f''_2(3'),$$

kde

$$f_1 = -\overline{AD}c_1 \cos\alpha, \quad f'_1 = +\overline{AD}c_2 \cos\alpha, \quad f''_1 = \overline{AD} \sin\alpha,$$
$$f_2 = -\overline{AB}c'_1 \cos\alpha', \quad f'_2 = +\overline{AB}c'_2 \cos\alpha', \quad f''_2 = \overline{AB} \sin\alpha'.$$

Při tom podmínky jsou

$$(1) + (2) + (3) = a_{10}, \quad (1') + (2') + (3') = a_{20}.$$

Podle vzorce (15′) bude

$$m_\Phi^2 = m_0^2 \left\{ q_1 f_1^2 + q'_1 f'^2_1 + q''_1 f''^2_1 + q_2 f_2^2 + q'_2 f'^2_2 + q''_2 f''^2_2 - \right.$$
$$\left. - \frac{(q_1 f_1 + q'_1 f'_1 + q''_1 f''_1)^2}{q_1 + q'_1 + q''_1} - \frac{(q_2 f_2 + q'_2 f'_2 + q''_2 f''_2)^2}{q_2 + q'_2 + q''_2} \right\}.$$

Jde-li o kosočtverec, budou úhly (1) a (1′) stejné a rovněž úhly (2), (3), (2′), (3′) budou stejné; a také $\alpha = \alpha'$, tedy $f_1 = f_2$, $f'_1 = f'_2$, $f''_1 = f''_2$. Předpokládáme-li dále, že $p_1 = p_2$, $p'_1 = p''_1 = p'_2 = p''_2$, bude výraz ve složené závorce

$$2\left\{ q_1 f_1^2 + q'_1 (f'^2_1 + f''^2_1) - \frac{[q_1 f_1 + q'_1 (f'_1 + f''_1)]^2}{q_1 + 2q'_1} \right\}.$$

Dosadíme-li sem $f_1 = -\overline{AD}c_1 \cos\alpha$, $f'_1 = +\overline{AD}c_2 \cos\alpha$, $f''_1 = \overline{AD} \sin\alpha$ a uvážíme-li, že $c_1 = \operatorname{cotg} 2\alpha$, $c_2 = \operatorname{cotg}(2) = \operatorname{tg}\alpha$, jest výraz ve složené závorce po úpravě

$$\frac{\overline{AD}^2}{\sin^2\alpha} \frac{q_1 q'_1}{q_1 + 2q'_1} = \frac{\overline{AD}^2}{\sin^2\alpha} \frac{1}{(p'_1 + 2p_1)},$$

a tedy

$$m_Z = \frac{m_0 \overline{AD}}{\sin\alpha} \sqrt{\frac{1}{2p_1 + p'_1}}$$

A protože v případě kosočtverce jest $\overline{AD}\cos\alpha = \frac{1}{2}Z$, jest

$$\frac{m_Z}{Z} = \frac{m_0}{\sin 2\alpha}\sqrt{\frac{1}{2p_1 + p'_1}}. \tag{19}$$

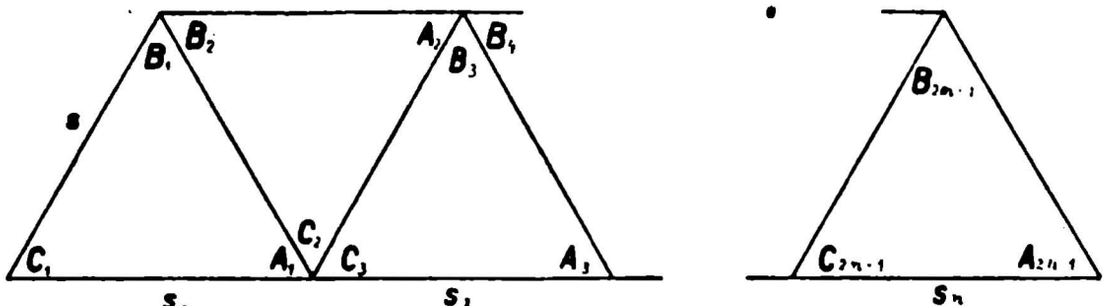
Zavedeme-li místo úhlu α poměr $Z : z = v$, bude

$$\sin\alpha = \frac{z}{2\overline{AD}}, \quad \cos\alpha = \frac{Z}{2\overline{AD}},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2zZ}{4\overline{AD}^2} = \frac{4zZ}{2(Z^2 + z^2)} = \frac{2v}{1 + v^2},$$

tedy

$$\frac{m_Z}{Z} = m_0\frac{1 + v^2}{2v}\sqrt{\frac{1}{2p_1 + p'_1}}. \tag{19'}$$



obr. 9

8. V řetězci trojúhelníků (obr. 9) je dána strana s prvního trojúhelníka a byly měřeny všechny úhly se stejnou střední chybou m_0. Jest vypočísti střední chybu součtu $S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ za předpokladu, že trojúhelníky jsou rovnostranné.*)

Protože v tomto případě půjde o $2n - 1$ podmínek tvaru (15) a všechny váhy p jsou stejné a rovné 1, bude

$$m_\varphi^2 = m_0^2\sum_{g=1}^{2n-1}\{(f_g^2 + f'^2_g + f''^2_g) - \tfrac{1}{3}(f_g + f'_g + f''_g)^2\}. \tag{15''}$$

*) Jordan, l. c. str. 159—161.

Musíme tedy určiti veličiny $f_\varrho, f'_\varrho, f''_\varrho$, t. j. koeficienty u $\mathrm{d}A_\varrho, \mathrm{d}B_\varrho, \mathrm{d}C_\varrho$ ve výrazu

$$S = \sum_{\varrho=1}^{2n-1} (f_\varrho \,\mathrm{d}A_\varrho + f'_\varrho \,\mathrm{d}B_\varrho + f''_\varrho \,\mathrm{d}C_\varrho).$$

Podle věty sinové vypočteme

$$s_1 = \frac{s}{\sin A_1} \sin B_1, \qquad s_2 = \frac{s}{\sin A_1} \frac{\sin C_1}{\sin A_2} \frac{\sin B_2}{\sin A_3} \sin B_3,$$

$$s_3 = \frac{s}{\sin A_1} \frac{\sin C_1}{\sin A_2} \frac{\sin B_2}{\sin A_3} \frac{\sin C_3}{\sin A_4} \frac{\sin B_4}{\sin A_5} \sin B_5, \ \ldots,$$

$$s_\varrho = \frac{s}{\sin A_1} \frac{\sin C_1}{\sin A_2} \frac{\sin B_2}{\sin A_3} \cdots \frac{\sin B_{2\varrho-2}}{\sin A_{2\varrho-1}} \sin B_{2\varrho-1}.$$

Derivujeme-li podle A_1, obdržíme

$$\mathrm{d}s_1 = -\frac{s}{\sin^2 A_1} \sin B_1 \cos A_1 \,\mathrm{d}A_1 = -s_1 \operatorname{cotg} A_1 \,\mathrm{d}A_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{d}s_\varrho = -s_\varrho \operatorname{cotg} A_1 \,\mathrm{d}A_1.$$

Podobně, derivujeme-li podle A_2, dostaneme

$$\mathrm{d}s_2 = -s_2 \operatorname{cotg} A_2 \,\mathrm{d}A_2, \ \ldots, \ \mathrm{d}s_\varrho = -s_\varrho \operatorname{cotg} A_2 \,\mathrm{d}A_2$$

a stejně pro ostatní úhly A_3, A_4 atd. Tedy

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\operatorname{cotg} A_1 (s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = -ns \operatorname{cotg} 60°, \\
f_2 &= -\operatorname{cotg} A_2 (s_2 + \ldots + s_n) = -(n-1)\, s \operatorname{cotg} 60°, \\
f_3 &= -\operatorname{cotg} A_3 (s_2 + \ldots + s_n) = -(n-1)\, s \operatorname{cotg} 60°, \\
f_4 &= -\operatorname{cotg} A_4 (s_3 + \ldots + s_n) = -(n-2)\, s \operatorname{cotg} 60°, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_{2n-1} &= -\operatorname{cotg} A_{2n-1} s_n = -s \operatorname{cotg} 60°.
\end{aligned}$$

Derivujeme-li podle B_1, obdržíme

$$\mathrm{d}s_1 = \frac{s}{\sin A_1} \cos B_1 \,\mathrm{d}B_1 = s_1 \operatorname{cotg} B_1 \,\mathrm{d}B_1$$

a stejně

$$ds_2 = s_2 \operatorname{cotg} B_3 \, dB_3, \quad ds_3 = s_3 \operatorname{cotg} B_5 \, dB_5, \quad \ldots,$$
$$ds_n = s_n \operatorname{cotg} B_{2n-1} \, dB_{2n-1}.$$

Pro sudé indexy u B jest

$$ds_g = s_g \operatorname{cotg} B_2 \, dB_2, \text{ pro } g = 2, \ldots, n,$$
$$ds_g = s_g \operatorname{cotg} B_4 \, dB_4, \text{ pro } g = 3, \ldots, n \text{ atd.}$$

Tudíž

$$f'_1 = s_1 \operatorname{cotg} B_1 = s \operatorname{cotg} 60°,$$
$$f'_2 = \operatorname{cotg} B_2 (s_2 + \ldots + s_n) = (n-1) s \operatorname{cotg} 60°,$$
$$f'_3 = s \operatorname{cotg} 60°,$$
$$f'_4 = (n-2) s \operatorname{cotg} 60°,$$
$$f'_5 = s \operatorname{cotg} 60°,$$
$$f'_6 = (n-3) s \operatorname{cotg} 60°,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f'_{2n-1} = s \operatorname{cotg} 60°.$$

Úhel C_1 obsahují $s_2, s_3, \ldots, s_n$, tedy $f''_1 = (n-1) s \operatorname{cotg} 60°$; úhel C_2 a všechny úhly se sudými indexy neobsahují žádné s_g, tedy $f''_{2k} = 0$; úhel C_3 obsahují $s_3, s_4, \ldots, s_n$, tedy $f''_3 = (n-2) s \operatorname{cotg} 60°$; podobně $f''_5 = (n-3) s \operatorname{cotg} 60°$, $f''_7 = (n-4) s \operatorname{cotg} 60°$ atd.

Vidíme, že

$$f_1 + f'_1 + f''_1 = s \operatorname{cotg} 60° (-n + 1 + n - 1) = 0,$$
$$f_2 + f'_2 + f''_2 = s \operatorname{cotg} 60° (-n + 1 + n - 1) = 0,$$
$$f_3 + f'_3 + f''_3 = s \operatorname{cotg} 60° (-n + 1 + 1 + n - 2) = 0,$$
$$f_4 + f'_4 + f''_4 = s \operatorname{cotg} 60° (-n + 2 + n - 2) = 0 \text{ atd.}$$

Tím vzorec (15″) přejde v

$$m_\varphi^2 = m_0^2 \sum_{g=1}^{2n-1} (f_g^2 + f'^2_g + f''^2_g).$$

Dále jest

$$\sum_{g=1}^{2n-1} f_g^2 = s^2 \operatorname{cotg}^2 60° \{n^2 + (n-1)^2 + (n-1)^2 +$$
$$+ (n-2)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2 + 1^2\}.$$

A protože

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{6} n\,(n+1)\,(2n+1),$$

jest

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \tfrac{1}{6}\,(n-1)\,n\,(2n-1),$$

tedy

$$\sum_{g=1}^{2n-1} f_g^2 = \tfrac{1}{3}\, s^2 \operatorname{cotg}^2 60^\circ\, n\,(2n^2+1).$$

Podobně

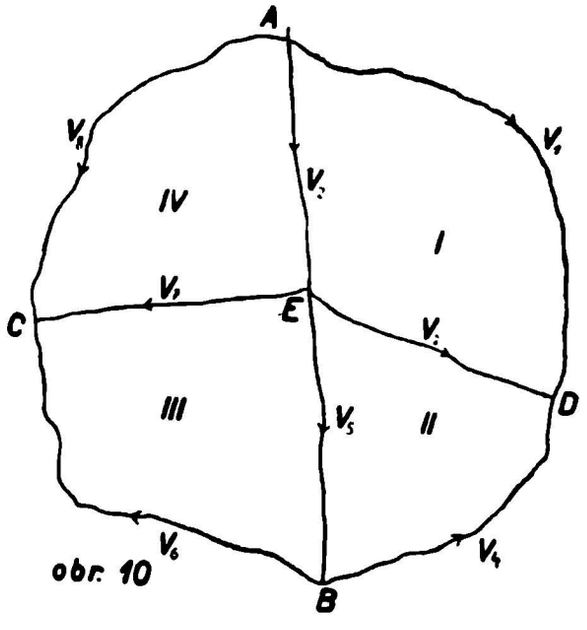
$$\sum_{g=1}^{2n-1} f'_g{}^2 = s^2 \operatorname{cotg}^2 60^\circ \{1^2 + (n-1)^2 + 1^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2 + 1^2\} = \tfrac{1}{6}\, ns^2 \operatorname{cotg}^2 60^\circ\,(2n^2 - 3n + 7),$$

a

$$\sum_{g=1}^{2n-1} f''_g{}^2 = s^2 \operatorname{cotg}^2 60^\circ \{(n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2\} = \tfrac{1}{6}\, s^2 \operatorname{cotg}^2 60^\circ\,(n-1)\,n\,(2n-1);$$

proto

$$m_\psi{}^2 = m_0{}^2 s^2 \operatorname{cotg}^2 60^\circ\, \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{3}.$$



obr. 10

9. Vyrovnání nivelační sítě. Při nivelaci města byla nivelační síť připojena na body A a B základní nivelační sítě, jejichž výšky jsou V_A a V_B. V obr. 10 značí šipky stoupání tratí. V_i jsou naměřené rozdíly výšek a v_i příslušné hledané opravy. Úkolem je vyrovnati tuto nivelační síť. Opravené rozdíly výšek mají splňovati tyto podmínky: Z obrazce I jest

$$V_1 + v_1 - (V_2 + v_2) - (V_3 + v_3) = 0,$$

čili

$$v_1 - v_2 - v_3 = a_1, \text{ kde } a_1 = -V_1 + V_2 + V_3.$$

Podobné jsou podmínky plynoucí z obrazců II, III a IV:

$$\begin{aligned} v_2 - v_4 - v_5 &= a_2, \quad a_2 = -V_2 + V_4 + V_5, \\ v_5 + v_6 - v_7 &= a_3, \quad a_3 = -V_5 - V_6 + V_7, \\ v_3 + v_7 - v_8 &= a_4, \quad a_4 = -V_3 - V_7 + V_8. \end{aligned}$$

Podmínka pevného výškového rozdílu mezi body A a B jest

$$V_3 + v_3 + V_5 + v_5 = V_B - V_A,$$

čili

$$v_3 + v_5 = a_5, \; a_5 = V_B - V_A - V_3 - V_5.$$

Prosté členy $a_1, \ldots, a_5$ vyjadřujeme obyčejně v mm.

Osm neznámých oprav $v_1, \ldots, v_8$ nemůže býti určeno uvedenými pěti podmínkami. Ale přistupuje ještě podmínka, aby součet čtverců oprav násobených příslušnými vahami byl minimální (viz IV, odst. 1). V případě nivelací se podle zkušeností předpokládá, že váhy jsou nepřímo úměrné vzdálenostem. Píše se obyčejně $p_i = 1 : s_i$, kde s_i jest délka příslušné trati v km. To také znamená, že váha rovná 1 přísluší trati rovné 1 km. Má tedy býti minimem součet

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_8 v_8^2$$

a při tom mají býti splněny podmínky

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 - v_3 &= a_1, \\ v_2 - v_4 - v_5 &= a_2, \\ v_5 + v_6 - v_7 &= a_3, \\ v_3 + v_7 - v_8 &= a_4, \\ v_3 + v_5 &= a_5. \end{aligned} \tag{20}$$

Funkce F [viz (7)] v tomto případě jest

$$\begin{aligned} F = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_8 v_8^2 &- 2k_1 (v_1 - v_2 - v_3 - a_1) - \\ - 2k_2 (v_2 - v_4 - v_5 - a_2) &- 2k_3 (v_5 + v_6 - v_7 - a_3) - \\ - 2k_4 (v_3 + v_7 - v_8 - a_4) &- 2k_5 (v_3 + v_5 - a_5). \end{aligned}$$

Anulujeme-li parciální derivace podle jednotlivých v_i, bude

$$\begin{aligned}
p_1v_1 &= k_1,\\
p_2v_2 &= -k_1 + k_2,\\
p_3v_3 &= -k_1 + k_4 + k_5,\\
p_4v_4 &= -k_2,\\
p_5v_5 &= -k_2 + k_3 + k_5,\\
p_6v_6 &= k_3,\\
p_7v_7 &= -k_3 + k_4,\\
p_8v_8 &= -k_4.
\end{aligned} \tag{21}$$

Dosadíme-li tyto rovnice do podmínek (20) a píšeme-li $q_i = 1 : p_i$, bude

$$\begin{aligned}
k_1(q_1 + q_2 + q_3) - k_2q_2 - k_4q_3 - k_5q_3 &= a_1,\\
-k_1q_2 + k_2(q_2 + q_4 + q_5) - k_3q_5 - k_5q_5 &= a_2,\\
-k_2q_5 + k_3(q_5 + q_6 + q_7) - k_4q_7 + k_5q_5 &= a_3,\\
-k_1q_3 - k_3q_7 + k_4(q_3 + q_7 + q_8) + k_5q_3 &= a_4,\\
-k_1q_3 - k_2q_5 + k_3q_5 + k_4q_3 + k_5(q_3 + q_5) &= a_5.
\end{aligned}$$

Ke stejným rovnicím bychom došli podle vzorců (9). Koeficient $[qa_1^2]$ se rovná součtu převrácených hodnot vah pro ty trati, jež se vyskytují v první podmínce. Podobně $[qa_2^2]$, $[qa_3^2]$ atd. V koeficientu $[qa_1a_2]$ jest qa_1a_2 převrácená hodnota váhy pro trať, jež se vyskytuje v podmínce první a druhé a znaménko je buď + nebo — podle toho, jsou-li znaménka u a_1 i a_2 stejná či různá. Tak je na př. $[qa_1a_2] = -q_2$, $[qa_1a_3] = 0$ (protože žádná trať se nevyskytuje současně v první a třetí podmínce) atd.

Sem stačí klásti $q_i = 1 : p_i = s_i$, jsou to tedy lineární rovnice se známými číselnými koeficienty.

Z těchto rovnic vypočteme koreláty $k_1, k_2, \ldots, k_5$ (na př. postupem Gaussovým). Pak z rovnic (21) vypočteme opravy $v_1, \ldots, v_8$.

Pro kontrolu dosadíme do podmínek (20), jež musí býti splněny až na chyby plynoucí ze zaokrouhlování.

Střední chyba m_0 pro jedničku váhy — jmenuje se také střední chyba kilometrová, protože váha rovná 1 přísluší

trati dlouhé 1 km — se vypočte podle vzorce (4)

$$m_0 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{5}[pv^2]}.$$

Vyrovnaná výška na př. bodu C jest $V_A + V_8 + v_8$. Předpokládáme, že výšku V_A známe bez chyby. Pak střední chyba vyrovnané výšky bodu C bude rovna střední chybě opravy v_8. Podle vzorce (13′) jest

$$m_{v_8}^2 = m_0^2 (q_8 + q_8 h_4) = m_0^2 q_8 (1 + h_4), \qquad (22)$$

neboť jen $f_8 = 1$ a ostatní f jsou rovna 0, takže $[qa_1 f] = 0$ (člen $qa_1 f$ je součin převrácené hodnoty váhy, příslušného koeficientu v první podmínce a příslušného f),

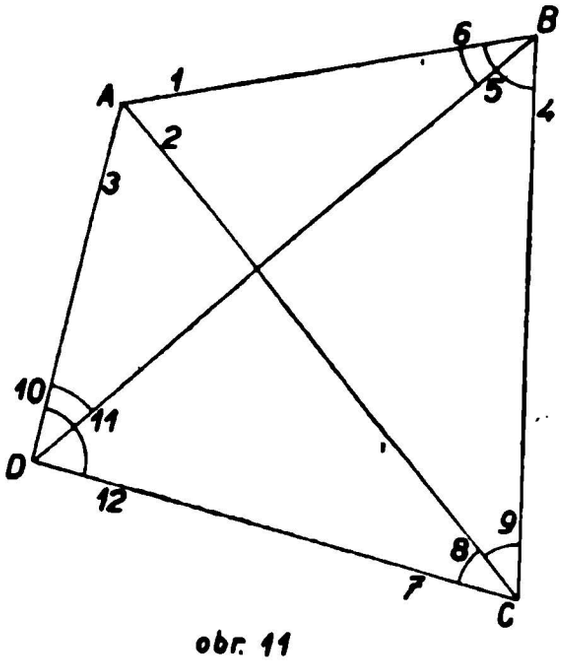
$$[qa_2 f] = 0,\ [qa_3 f] = 0,\ [qa_4 f] = -q_8,\ [qa_5 f] = 0.$$

Stačí tedy vypočísti h_4 z rovnic (12), jež zde budou:

$$\begin{aligned}
h_1(q_1 + q_2 + q_3) - h_2 q_2 - h_4 q_3 - h_5 q_3 &= 0,\\
-h_1 q_2 + h_2(q_2 + q_4 + q_5) - h_3 q_5 - h_5 q_5 &= 0,\\
-h_2 q_5 + h_3(q_5 + q_6 + q_7) - h_4 q_7 + h_5 q_5 &= 0,\\
-h_1 q_3 - h_3 q_7 + h_4(q_3 + q_7 + q_8) + h_5 q_3 &= -q_8,\\
-h_1 q_3 - h_2 q_5 + h_3 q_5 + h_4 q_3 + h_5(q_3 + q_5) &= 0,
\end{aligned}$$

a dosaditi do vzorce (22).

10. Vyrovnání trigonometrické sítě. Ve čtyrúhelníku byly měřeny na každém vrcholu směry vždy ke všem třem zbývajícím vrcholům. Vyrovnati tuto síť! (Viz obr. 11.)



obr. 11

Označíme naměřené hodnoty S_i, $i = 1, 2, \ldots, 12$. Vypočteme-li na př. úhly v trojúhelníku ABC ($S_2 — S_1$, $S_6 — S_4$, $S_9 — S_8$), uvidíme, že jejich součet není přesně roven 180° + + excess ε_1 trojúhelníka ABC (počítáme jako na kouli). Je

tedy patrno, že musíme naměřené hodnoty S_i opraviti o hledané opravy s_i. Pak podmínka, že součet vyrovnaných úhlů v trojúhelníku ABC má býti $180° + \varepsilon_1$, bude

$$\begin{gathered} -s_1 + s_2 - s_4 + s_6 - s_8 + s_9 = a_1, \\ a_1 = 180° + \varepsilon_1 + S_1 - S_2 + S_4 - S_6 + S_8 - S_9. \end{gathered} \tag{23_1}$$

Podobně z trojúhelníků ACD a ABD:

$$\begin{gathered} -s_2 + s_3 - s_7 + s_8 - s_{10} + s_{12} = a_2, \\ a_2 = 180° + \varepsilon_2 + S_2 - S_3 + S_7 - S_8 + S_{10} - S_{12}, \end{gathered} \tag{23_2}$$

$$\begin{gathered} -s_1 + s_3 - s_5 + s_6 - s_{10} + s_{11} = a_3, \\ a_3 = 180° + \varepsilon_3 + S_1 - S_3 + S_5 - S_6 + S_{10} - S_{11}. \end{gathered} \tag{23_3}$$

Podmínka, která by plynula z trojúhelníka DBC, se dá odvoditi již z těchto tří podmínek, nepodala by tedy nic nového.

Podle sinové věty sférické trigonometrie vypočteme $\sin AC$ ze $\sin AB$ v trojúhelníku ABC, dále $\sin AD$ ze $\sin AC$ v trojúhelníku ADC a konečně $\sin AB$ ze $\sin AD$ v trojúhelníku ABD. Tak se dá odvoditi další podmínka

$$\frac{\sin(S_6 - S_4 + s_6 - s_4)\sin(S_8 - S_7 + s_8 - s_7)}{\sin(S_6 - S_5 + s_6 - s_5)\sin(S_9 - S_8 + s_9 - s_8)} \cdot \frac{\sin(S_{11} - S_{10} + s_{11} - s_{10})}{\sin(S_{12} - S_{10} + s_{12} - s_{10})} = 1.$$

Tuto podmínku převedeme na lineární tvar tím, že ji logaritmujeme a jednotlivé sčítance $\log\sin(S_6 - S_4 + s_6 - s_4)$, $\log\sin(S_8 - S_7 + s_8 - s_7)$ atd. nahradíme přibližně stejnými výrazy $\log\sin(S_6 - S_4) + a'(s_6 - s_4)$, $\log\sin(S_8 - S_7) + b'(s_8 - s_7)$ atd., kde a', b' jsou logaritmické diference pro log sin a 1″ v místě úhlu $S_6 - S_4$, $S_8 - S_7$ atd. Dá se tedy poslední podmínka psáti ve tvaru

$$\begin{gathered} a_{4,4}s_4 + a_{4,5}s_5 + a_{4,6}s_6 + a_{4,7}s_7 + a_{4,8}s_8 + \\ + a_{4,9}s_9 + a_{4,10}s_{10} + a_{4,11}s_{11} + a_{4,12}s_{12} = a_4. \end{gathered} \tag{23_4}$$

V uvažovaném případě máme 4 podmínky a 12 neznámých. Ale přistupuje ještě podmínka, aby součet čtverců oprav $s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_{12}^2$ byl minimální (viz IV, odst. 1).

Funkce F v tomto případě bude

$$F = s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_{12}^2 - 2k_1 (-s_1 + s_2 - \ldots - a_1) - \\ - 2k_2 (-s_2 + s_3 - \ldots - a_2) - 2k_3 (-s_1 + s_3 - \ldots - a_3) - \\ - 2k_4 (a_{4,4}s_4 + a_{4,5}s_5 + \ldots - a_4).$$

Anulujeme-li derivace podle $s_1, s_2, \ldots, s_{12}$, dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} s_1 &= -k_1 - k_3, & s_7 &= -k_2 + k_4 a_{4,7}, \\ s_2 &= k_1 - k_2, & s_8 &= -k_1 + k_2 + k_4 a_{4,8}, \\ s_3 &= k_2 + k_3, & s_9 &= k_1 + k_4 a_{4,9}, \\ s_4 &= -k_1 + k_4 a_{4,4}, & s_{10} &= -k_2 - k_3 + k_4 a_{4,10}, \\ s_5 &= -k_3 + k_4 a_{4,5}, & s_{11} &= k_3 + k_4 a_{4,11}, \\ s_6 &= k_1 + k_3 + k_4 a_{4,6}, & s_{12} &= k_2 + k_4 a_{4,12}. \end{aligned} \qquad (24)$$

Dosadíme-li odtud do podmínek, budeme míti čtyři normální rovnice pro koreláty:

$$6k_1 - 2k_2 + 2k_3 + k_4 (-a_{4,4} + a_{4,6} - a_{4,8} + a_{4,9}) = a_1$$

atd.

Můžeme je zase kontrolovati přímo z rovnic (9).

Normální rovnice řešíme na př. způsobem Gaussovým. Tak vypočteme koreláty k_1, k_2, k_3, k_4. Pak z rovnic (24) plynou opravy $s_1, s_2, \ldots, s_{12}$. Výpočet kontrolujeme dosazením do podmínek (23).

Střední chyba pro jednotku váhy bude podle vzorce (4) rovna

$$m_0 = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} [s^2]}.$$

Střední chybu jednotlivých vyrovnaných směrů, nebo jakékoli lineární funkce vyrovnaných směrů, počítáme zase jako v př. 9 podle vzorce (13′), při čemž koeficienty h plynou z rovnic (12).

V.

POSTUP PO PROVEDENÉM VYROVNÁNÍ.

Po vyrovnání se často tážeme, mají-li odchylky vlastnosti nahodilých chyb. Uvedeme nejprve podle Helmerta*) několik kriterií pro nahodilost chyb a způsob, jak odhadnouti přesnost těch kriterií.

1. Zkoušky znamének. a) Součet znamének v dané řadě chyb nebo odchylek.

Označíme řadu uvažovaných chyb (nebo odchylek) ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Jejich znaménka označíme $V_1, V_2, \ldots, V_n$, t. j. klademe $V_i = \pm 1$, má-li chyba (nebo odchylka) znaménko $\pm$. Při tom nutno všechny chyby počítati ve stejném smyslu a ne tedy na př. některá ε považovati za chyby měřených úhlů a jiná jako chyby rozdílu (360° — měřený úhel). Pak je součet znamének v dané řadě $s = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$. Mysleme si měření, z nichž vzešla každá chyba nebo odchylka ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, opakována nekonečněkrát. Mají-li ε_i vlastnosti chyb nahodilých a necháme-li chybu ε_1 nabýti všech jejích nekonečně mnoho hodnot, a nezávisle na ní chybu ε_2 nabýti zase všech nekonečně mnoho jejích hodnot atd., a utvoříme-li vždy příslušné s pro všechny možné kombinace hodnot chyb, bude aritmetický průměr všech těchto součtů s roven 0, protože k určitému počtu případů ε_i se znaménkem + musíme počítati stejný počet případů ε_i se znaménkem —.

Můžeme tedy říci: Průměrně je součet znamének v řadě nahodilých chyb nebo odchylek roven 0.

Aby odhadl přesnost tohoto kriteria, to znamená, aby nějak odhadl meze, v nichž můžeme ve skutečném případě čekati součet s, uvažuje Helmert podobně, jako když se hledá

*) F. R. Helmert: Über die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreihen. Sitzb. der k. preuss. Ak. der Wiss., Phys.-math. Classe, 1905, str. 594—612.

průměrná hodnota chyb (srovn. I, odst. 3 a 4). Jenže zde jde o průměrné hodnoty odchylek od průměrné hodnoty. Jako tam se uvažují všechny možné hodnoty chyb, uvažují se zde všechny rozdíly mezi hodnotami, jichž může nabýti součet $s = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ a jeho aritmetickým průměrem rovným 0. A jako tam se počítají čtverce všech možných hodnot chyb a jejich aritmetický průměr je (přibližně) roven čtverci střední chyby, počítají se zde všechny možné hodnoty čtverce

$$(V_1 + V_2 + \ldots + V_n - 0)^2 = V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_n^2 + \\ + \sum_{i,k=1}^{n} V_i V_k = s^2. \qquad (1)$$

Odmocnina aritmetického průměru hodnot (1) je pak střední odchylka součtu s od jeho průměru 0.

Protože aritmetický průměr součtu $\Sigma V_i V_k$ se rovná 0 (plyne jako v I, odst. 4) a aritmetické průměry hodnot V_i^2 jsou rovny 1, bude aritmetický průměr výrazů $(V_1 + V_2 + \ldots + V_n - 0)^2$ roven n. Je tedy $\sqrt{n}$ střední odchylka součtu s od jeho průměru 0.

Je-li absolutní hodnota součtu s větší než $\sqrt{n}$, předpokládá se, že působí nějaké systematické vlivy a že tedy chyby nebo odchylky nejsou nahodilé.

b) Změny znamének v řadě chyb nebo odchylek.

Jestliže uspořádáme vyšetřované chyby nebo odchylky podle nějaké proměnné t (na př. podle času, teploty atd.), jež nabývala při různých měřeních různých hodnot, a o níž tušíme, že měla systematický vliv na výsledky měření, a ukáže-li se, že pro první polovinu všech měření takto uspořádaných mají odchylky znaménka kladná a pro druhou záporná, soudíme, že odchylky nemají vlastnosti nahodilých chyb.

K obecnému kriteriu pro změny znamének v řadách nahodilých chyb nebo odchylek se dojde takto:

Označme počet sledů v řadě znamének $V_1, V_2, \ldots, V_n$ písmenem f a počet změn písmenem w. Pak jest $f - w =$

$= V_1 V_2 + V_2 V_3 + V_3 V_4 + \ldots + V_{n-1} V_n$, neboť $V_i V_{i+1}$ je $+1$ pro sled a -1 pro změnu.

Pro nekonečně mnoho případů, uvažovaných v odst. 1a, je průměrná hodnota všech $f - w$ rovna 0, protože pro každý součin $V_i V_{i+1}$ na každé dvě kladné hodnoty $(+1) . (+1)$, $(-1) . (-1)$ připadají dvě záporné hodnoty $(+1) . (-1)$, $(-1) . (+1)$.

Tedy: Průměrně je rozdíl sledů a změn v řadě nahodilých chyb nebo odchylek roven 0.

Aby vypočetl, jaká je střední odchylka rozdílu $f - w$ od jeho průměru 0, uvažuje Helmert zase o čtverci rozdílů

$$(V_1 V_2 + V_2 V_3 + \ldots + V_{n-1} V_n - 0)^2 =$$

$$= V_1^2 V_2^2 + V_2^2 V_3^2 + \ldots + V_{n-1}^2 V_n^2 + \sum_{i=1}^{n} V_{i-1} V_i^2 V_{i+1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} V_{i-1} V_i V_{h-1} V_h,$$

kde $h > i + 1$.

Aritmetický průměr těchto čtverců je $n - 1$ (viz 1a), tedy $\sqrt{n-1}$ lze považovati za střední odchylku rozdílu $f - w$ od jeho průměru 0.

Je-li některá chyba nebo odchylka rovna 0, možno při výpočtu součtu s a rozdílu $f - w$ klásti příslušné znaménko jednou jako kladné, po druhé pak záporné a vzíti střed. Ke stejnému výsledku však dojdeme, když ve vzorcích

$$s = V_1 + V_2 + \ldots + V_n,$$
$$f - w = V_1 V_2 + V_2 V_3 + \ldots + V_{n-1} V_n$$

klademe příslušné V_i rovné 0.

Na střední odchylky $\sqrt{n}$ resp. $\sqrt{n-1}$ nemá existence nulových chyb nebo odchylek žádného vlivu, protože pravděpodobnost jejich existence je nekonečně malá a průměrné hodnoty čtverců V_i^2, $V_i^2 V_{i+1}^2$ jsou stejně rovné 1, jako kdyby se nulové chyby nevyskytovaly.

2. Zkouška součtem skutečných chyb nebo aritmetickým průměrem skutečných chyb. Nechť je funkce četnosti pro chyby ε_i sudou funkcí, a jako v odst. 1a mysleme si opakována nekonečněkrát měření, z nichž vzešla každá chyba ε_i. Necháme-li každou chybu ε_i nabýti všech jejích nekonečně mnoho hodnot nezávisle na ostatních ε, utvoříme-li součet $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$ pro všechny možné kombinace hodnot chyb a pak aritmetický průměr všech těchto součtů, bude průměr roven 0, neboť aritmetický průměr pro každé ε_i je roven 0.

Tedy průměrná hodnota součtu $[\varepsilon]$ je rovna 0, nebo průměrná hodnota aritmetického průměru $[\varepsilon] : n$ je rovna 0. Značíme-li písmenem m střední hodnotu chyby ε, t. j. veličinu danou přibližně rovnicí $m^2 = [\varepsilon^2] : n$ (srovn. I, (10′)), je čtverec střední odchylky součtu $[\varepsilon]$ od jeho průměru 0 roven $n \,.\, m^2$. Ukážeme to, určíme-li čtverec rozdílu $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n - 0)^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 + \Sigma\varepsilon_i\varepsilon_k$ pro nekonečně mnoho hodnot $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ jako v odst. 1a, a hledáme-li aritmetický průměr všech čtverců takto vytvořených. Je roven nm^2, předpokládáme-li, že všechna měření byla stejné váhy.

Střední odchylka součtu $[\varepsilon]$ od jeho průměru 0 je tedy rovna $\pm m\sqrt{n} = \pm \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}$ a střední odchylka výrazu $[\varepsilon] : n$ od jeho průměru 0 je podobně $\pm m : \sqrt{n} = \pm \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]} : n$. Je-li hodnota $[\varepsilon]$, $([\varepsilon] : n)$ vně mezí $\mp \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}$, $(\mp \sqrt{[\varepsilon\varepsilon]} : n)$, předpokládá se, že v chybách ε jsou skryty nějaké systematické vlivy.

Pro odchylky musí býti vždy splněno $[v] = 0$, v případě odchylek tedy nemá smyslu zkouška vyložená v tomto odstavci.

3. Zkouška srovnáním součtu čtverců kladných chyb a součtu čtverců záporných chyb. Uvažujme o výrazu

$$V_1\varepsilon_1^2 + V_2\varepsilon_2^2 + \ldots + V_n\varepsilon_n^2. \qquad (2)$$

Je-li funkce četnosti pro chyby ε_i sudá funkce, probíhá-li ε_i

všech nekonečně mnoho hodnot uvažovaných v předcházejících odstavcích, je-li $V_i = \pm 1$ a je-li $\pm$ znaménko chyby ε_i, bude součet všech hodnot $V_i \varepsilon_i^2$ při stálém i roven 0. Tedy průměrná hodnota výrazu (2), vypočtená ve stejném smyslu jako v předcházejících případech, bude rovna 0.

Čtverec střední odchylky součtu (2) od jeho průměru 0 bude roven nm'^4, kde m' plyne přibližně ze vzorce

$$m'^4 = [\varepsilon^4] : n.$$

Tento výsledek se odvodí stejně jako v odstavci 2, uvažujeme-li o všech možných čtvercích

$$(V_1 \varepsilon_1^2 + V_2 \varepsilon_2^2 + \ldots + V_n \varepsilon_n^2 - 0)^2 =$$

$$= V_1^2 \varepsilon_1^4 + V_2^2 \varepsilon_2^4 + \ldots + V_n^2 \varepsilon_n^4 + \sum_{i,k=1}^{n} V_i V_k \varepsilon_i^2 \varepsilon_k^2.$$

Tedy: Průměrná hodnota výrazu $V_1 \varepsilon_1^2 + V_2 \varepsilon_2^2 + \ldots + V_n \varepsilon_n^2$ je rovna 0, nebo průměrná hodnota součtu čtverců kladných chyb se rovná průměrné hodnotě součtu čtverců záporných chyb. Střední odchylka výrazu (2) nebo rozdílu čtverců kladných a záporných chyb od průměru 0 je rovna $\pm m'^2 \sqrt{n} = \pm \sqrt{[\varepsilon^4]}$. Je-li rozdíl součtu čtverců kladných a záporných chyb vně mezí $\mp \sqrt{[\varepsilon^4]}$, předpokládá se, že v chybách ε_i lze očekávati systematické vlivy.

4. Zkoušky E. Abbeho. a) Vlastní zkouška E. Abbeho. Jestliže systematické vlivy zatěžují kladné i záporné chyby přibližně stejně, bude výsledek vyšetřování podle odst. 2 a 3 negativní. Proto se doporučuje srovnávati dvě funkce chyb, z nichž v jedné jsou tušené systematické vlivy co možná potlačeny, kdežto ve druhé působí v plné míře.

E. Abbe doporučuje uspořádati chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ podle proměnné, jejíž systematický vliv tušíme, a utvořiti součty

$$A = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2,$$

$$B = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \ldots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)^2 + (\varepsilon_n - \varepsilon_1)^2.$$

V součtu A se tušené systematické vlivy plně uplatňují, v B se uplatní obyčejně jen v posledním členu. Utvoříme ještě

výraz

$$C = A - \tfrac{1}{2}B = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n\varepsilon_1.$$

Jsou-li chyby ε nahodilé, bude průměrná hodnota výrazu C, vypočtená jako v předcházejících odstavcích, rovna 0. A čtverec střední odchylky výrazu $A - \frac{1}{2}B = C$ od jeho průměru 0 se vypočte zase s pomocí čtverce

$$(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n\varepsilon_1 - 0)^2 =$$
$$= \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^2\varepsilon_3^2 + \ldots + \varepsilon_n^2\varepsilon_1^2 + 2\,(\varepsilon_1\varepsilon_2^2\varepsilon_3 + \ldots).$$

Průměrná hodnota, vypočtená jako v dřívějších odstavcích, bude nm^4, čili střední odchylka výrazu $A - \frac{1}{2}B = C$ od jeho průměru 0 jest $\pm m^2\sqrt{n}$.

b) Upravená zkouška E. Abbeho.

Na místě výrazů A, B, C, uvažuje Helmert výrazy A^*, B^*, C^*, kde

$$A^* = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2) - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_n^2),$$
$$B^* = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + \ldots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)^2,$$
$$C^* = A^* - \tfrac{1}{2}B^* = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n.$$

Zase se dá ukázati, že průměrná hodnota výrazu C^*, vypočtená jako v předcházejících odstavcích, je rovna 0 a odchylka výrazu $A^* - \frac{1}{2}B^* = C^*$ od jeho průměru 0 jest $\pm m^2\sqrt{n-1}$.

Vybočují-li čísla $A - \frac{1}{2}B$ a $A^* - \frac{1}{2}B^*$ z mezí $\mp m^2\sqrt{n}$ a $\mp m^2\sqrt{n-1}$, předpokládá se zase, že existují systematické vlivy, zatěžující chyby ε_i.

5. Jak zjistíme, že se odchylky od aritmetického průměru řídí normálním zákonem četnosti? Z odstavce (VII, 2b, α) plyne, že se odchylky naměřených hodnot od jejich aritmetického průměru řídí normálním zákonem četnosti, jestliže se jím řídí skutečné chyby jednotlivých měření.

Zkoušku, že se odchylky řídí normálním zákonem četnosti, provádíme takto: Nejprve se přesvědčíme, že počet každého druhu znamének je přibližně stejný (v mezích uvedených

v odstavci 1). Pak zjistíme, kolik odchylek má absolutní hodnotu v mezích

	0—0,1;	0,1—0,2;	...;	0,9—1,0,
nebo	0—0,2;	0,2—0,4;	...;	1,8—2,0,
nebo	0—0,4;	0,4—0,8;	...;	3,6—4,0,

podle toho, jsou-li odchylky přibližně v mezích od —1,0 do + 1,0, nebo od —2,0 do + 2,0, nebo od —4,0 do + 4,0.

Čísla, která takto zjistíme z pozorování, srovnáme s příslušnými čísly teoretickými, vypočtenými za předpokladu, že se odchylky řídí normálním zákonem a že při tom $h = 1 : m_0\sqrt{2}$, kde m_0 je střední chyba pro jednotku váhy při uvažované řadě měření [viz II, (15′)]. V odst. VII, 2b, α) je dokázáno: Je-li normální zákon, kterým se řídí skutečné chyby $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$, je normální zákon, kterým se řídí odchylky v od aritmetického průměru

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, e^{-h^2 \frac{n}{n-1} v^2},$$

kde n je počet měření. Pak pravděpodobnost, že odchylka je mezi $-x$ a $+x$, je rovna

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{n}{n-1}} \int_0^x e^{-h^2 \frac{n}{n-1} v^2}\, dv.$$

Zavedeme-li proměnnou

$$y = h \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, v,$$

přejde předcházející výraz v tento tvar:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\sqrt{\frac{n}{n-1}}\, x} e^{-y^2}\, dy,$$

což podle definice funkce Φ [viz I, (8)] je rovno

$$\Phi\left(xh\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right).$$

Theoretický počet odchylek, které mají absolutní hodnotu v mezích od 0 do 0,1 (0,2, 0,4), jest tedy

$$\Phi\left(0{,}1\,.h\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) = n\Phi\left(\frac{0{,}1}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right),$$

$$\left[n\Phi\left(\frac{0{,}2}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right),\quad n\Phi\left(\frac{0{,}4}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\right].$$

Dále theoretický počet odchylek, které mají absolutní hodnotu v mezích od 0,1 do 0,2 od 0,2 do 0,4 nebo od 0,4 do 0,8 jest

$$n\left\{\Phi\left(\frac{0{,}2}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}1}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\right\},$$

resp.

$$n\left\{\Phi\left(\frac{0{,}4}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}2}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\right\},$$

resp.

$$n\left\{\Phi\left(\frac{0{,}8}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}4}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\right\}.$$

A podobně dále.

Protože n i m_0 známe, vypočteme snadno potřebné hodnoty argumentu funkce Φ, příslušné hodnoty funkce Φ interpolujeme z tabulky v odstavci I, (8) a hledaný teoretický počet odchylek plyne již podle předchozího snadno.

(Srovn. př. 3 v odst. 7.)

6. Jak zjistíme, že se chyby v uzávěru trojúhelníků řídí normálním zákonem četnosti? V odstavci (VII, 2b, β) je dokázáno: Chyby v uzávěru trojúhelníků se řídí normálním zákonem četnosti, jestliže se jím řídí skutečné chyby jednotlivých úhlů.

Zkoušku, že se chyby v uzávěru řídí normálním zákonem četnosti provádíme podobně jako v odstavci 5. Jen musíme nyní uvážiti, že podle odstavce (VII, 2b, β) je normální zákon četnosti, kterým se řídí chyby v uzávěru,

$$\frac{h}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{1}{3}h^2\varepsilon^2}.$$

Pak pravděpodobnost, že chyba v uzávěru je mezi $-x$ a $+x$, je rovna

$$\frac{2h}{\sqrt{3\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{3}h^2\varepsilon^2} \, d\varepsilon.$$

Zavedeme-li proměnnou $y = \frac{h}{\sqrt{3}}\varepsilon$, je předcházející výraz roven

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{h}{\sqrt{3}}x} e^{-y^2} \, dy = \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{3}}x\right) = \Phi\left(\frac{x}{m_0\sqrt{6}}\right).$$

Známe-li tedy na př., kolik chyb v uzávěru má absolutní hodnotu v mezích 0—0,2; 0,2—0,4; atd., vypočteme hodnoty argumentu $\frac{0{,}2}{m_0\sqrt{6}}$ a její dvojnásobek, trojnásobek atd., pak příslušné hodnoty Φ a z nich teoretický počet chyb v uzávěru, jejichž absolutní hodnota je v uvedených mezích

$$\left[n\Phi\left(\frac{0{,}2}{m_0\sqrt{6}}\right), \quad n\left\{\Phi\left(\frac{0{,}4}{m_0\sqrt{6}}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}2}{m_0\sqrt{6}}\right)\right\}, \text{ atd.}\right].$$

7. Příklady. 1. Vyšetřiti, mají-li odchylky od aritmetického středu v příkladě 1 z (II, 6) vlastnosti nahodilých chyb.

Odchylky, v jednotkách 10^{-8} sec, jsou rovny po řadě

$$+24, +7, +64, +35, -53, -26, +5, -76, +41,$$
$$+93, -64, -55.$$

Odtud plyne $s = + 2$, $\sqrt{n} = \pm 3{,}5$. Součet znamének se rovná $+2$, střední odchylka součtu s od jeho průměru 0 je $\pm$ 3,5 (srovn. odst. 1a).

Dále je $f - w = + 1$, $\sqrt{n-1} = \pm 3{,}3$. Rozdíl sledů a změn je roven $+1$ a střední odchylka rozdílu $f - w$ od jeho průměru 0 je $\pm$ 3,3 (srovn. odst. 1b).

Součet čtverců kladných odchylek je $+ 16\,301 . 10^{-16}$, součet čtverců záporných odchylek $16\,382 . 10^{-16}$. Rozdíl je $- 81 . 10^{-16}$. Součet čtvrtých mocnin odchylek je pak $1{,}64 . 10^{-24}$, tedy střední odchylka rozdílu mezi součtem čtverců kladných a součtem záporných odchylek od průměru 0 bude (podle odst. 3)

$$\pm \sqrt{1{,}64} . 10^{-12} = \pm 1{,}3 . 10^{-12}.$$

Zkouška E. Abbeho: Uvažujeme uspořádání odchylek podle času ($\varepsilon_1 = + 24 . 10^{-8}$, ..., $\varepsilon_{12} = - 55 . 10^{-8}$). Pak $A = 32\,683 . 10^{-16}$, $B = 67\,738 . 10^{-16}$, tedy $A - \frac{1}{2}B = - 1\,186 . 10^{-16}$. Čtverec

$$m^2 = \frac{32\,683}{12} . 10^{-16} \quad \text{a} \quad \pm m^2\sqrt{n} = \pm 9\,436 . 10^{-16}.$$

Všechny tyto zkoušky ukazují tedy, že uvažovaná řada odchylek má vlastnosti nahodilých chyb.

2. Vyšetřiti, mají-li odchylky od aritmetického středu v příkladě 3 z (II, 6) vlastnosti nahodilých chyb. (Mají.)

3. Z Besselových měření rektascense Polárky byla střední chyba pro jednotku váhy $m_0 = \pm 1{,}3093$ sec a počet odchylek od aritmetického průměru, jejichž absolutní hodnota byla v mezích 0—0,4 sec; 0,4—0,8 sec atd. až 3,6 sec a výše, byl po řadě 25, 22, 19, 11, 9, 8, 2, 3, 1, 0. Srovnati tato čísla s příslušnými theoretickými čísly, vypočtenými za předpokladu, že se odchylky řídí normálním zákonem.*)

Podle odst. 5 nutno počítati hodnotu argumentu

*) E. Czuber: l. c. str. 192—193.

$$\frac{0{,}4}{m_0\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \frac{4}{1{,}3093\sqrt{198}} = 0{,}21711$$

a její dvojnásobek až desateronásobek. Pro tyto hodnoty argumentu se vypočtou příslušné hodnoty funkce Φ: 0,2410; 0,4607; 0,6429; 0,7806; 0,8753; 0,9346; 0,9683; 0,9859; 0,9942; 0,9978. Odtud plynou hledaná theoretická čísla: 24,1; 22,0; 18,2; 13,8; 9,5; 5,9; 3,3; 1,8; 0,8; 0,4. Rozdíly theoretických čísel a čísel plynoucích z měření jsou: —0,9; —0,0; —0,8; +2,8; —0,5; —2,1; +1,3; —1,2; —0,2; +0,4.

4. V 61 trojúhelnících jihofinské základní triangulace bylo v uzávěrech 31 kladných chyb, 29 záporných a 1 chyba rovna 0. Střední hodnota chyby v uzávěru byla $\pm 0{,}611''$. Počet chyb s absolutní hodnotou v mezích 0—0,2″; 0,2″—0,4″; 0,4″ až 0,6″; 0,6″—0,8″; 0,8″—1,0″; 1,0″—1,2″; 1,2″—1,4″, byl po řadě: 17; 10; 8; 12,5; 8,5; 4; 1. (Při tom byla na př. chyba 0,80″ čítána jednou polovinou do skupiny v mezích 0,6″ až 0,8″ a jednou polovinou do skupiny v mezích 0,8″—1,0″.) Srovnati tato čísla s příslušnými theoretickými čísly, vypočtenými za předpokladu, že se chyby v uzávěru řídí normálním zákonem četnosti.*)

V (VII, 2b, β) je ukázáno, že vztah mezi střední hodnotou M chyby v uzávěru a střední chybou m_0 v jednom měřeném úhlu je

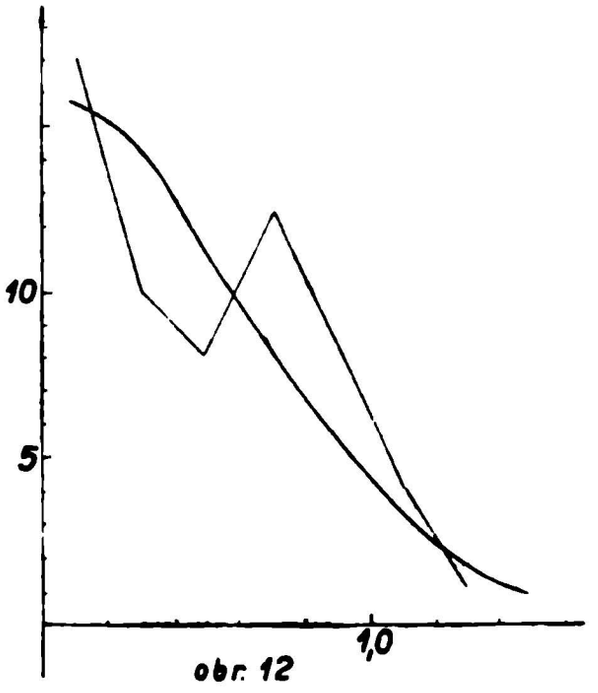
$$m_0 = \frac{M}{\sqrt{3}}, \text{ tedy } m_0 = \pm\frac{0{,}611''}{\sqrt{3}}. \text{ Pak (viz. odst. 6)}$$

$$\frac{x}{m_0\sqrt{6}} = \frac{x}{0{,}611''\sqrt{2}}. \text{ Pro } x = 0{,}2'' \text{ je } \frac{x}{m_0\sqrt{6}} = 0{,}2315.$$

Pro tuto hodnotu a její dvojnásobek, trojnásobek atd. byly z tabulky funkce Φ vyhledány příslušné funkční hodnoty (0,2567, 0,4904 atd.). Z nich pak plyne, že theoretický počet

*) T. J. Kukkamäki: Verbesserung der horizontalen Winkelmessungen wegen der Seitenrefraktion. Veröff. des fin. Geod. Inst. No. 28, Helsinki 1939, str. 14.

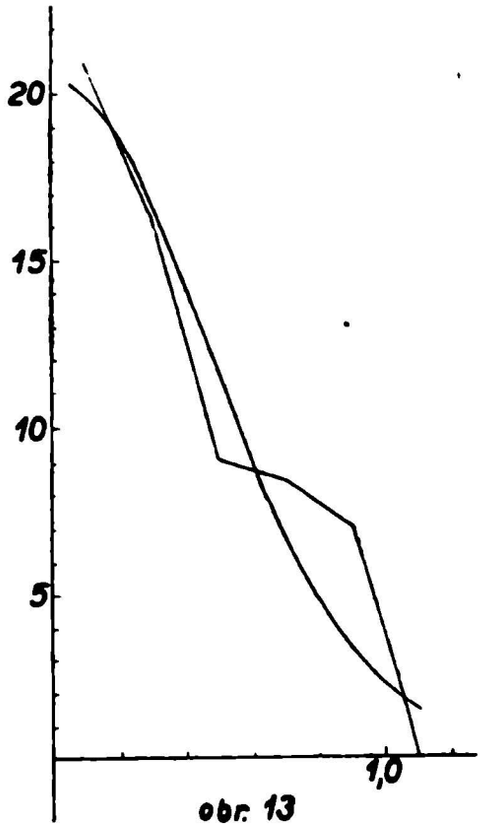
odchylek, jejichž absolutní hodnota je v mezích od 0 do 0,2″, je roven 61 . 0,2567 = 15,7. Počet odchylek, jejichž absolutní hodnota je v mezích od 0,2″ do 0,4″ jest 61 (0,4904 — — 0,2567) = 14,3. Dále plynou čísla 11,2; 8,3; 5,4; 3,2; 1,7. Rozdíly theoretických čísel a čísel plynoucích z měření jsou: —1,3; +4,3; +3,2; —4,2; —3,1; —0,8; +0,7 (viz obr. 12).



obr. 12

Na obr. 12 jsou theoretická čísla i čísla plynoucí z měření vyobrazena tak, že chyby v uzávěru jsou naneseny na osu úseček (0,2″ ≙ 5 mm) a počet chyb v uzávěru na osu pořadnic (10 chyb v uzávěru ≙ 25 mm).

5. V téže síti byly směry opraveny vzhledem na příčnou refrakci. Kladných chyb v uzávěrech bylo zase 31, záporných 29 a 1 byla rovna 0. Střední hodnota chyby v uzávěru klesla na ±0,470″. Počet chyb s absolutní hodnotou v mezích 0 —0,2″ až 1,0″—1,2″ byl 21; 16,5; 9; 8,5; 7; 0. Srovnati tato čísla s příslušnými theoretickými čísly.*) (Rozdíly theoretických čísel a čísel plynoucích z měření jsou: —0,9; +0,3; +2,8; —1,6; —3,6; +1,4; viz obr. 13.)



obr. 13

8. Systematické vlivy zatěžující měření. Neřídí-li se odchylky nebo chyby normálním zákonem četnosti,

*) T. J. Kukkamäki, l. c. str. 14.

nebo ukazují-li kriteria uvedená v odst. 1—4 na nějaký systematický vliv, hledá se, jaký by to mohl býti vliv.

Na příklad: Při určování, jak závisí doba kyvu kyvadel na tlaku vzduchu (p) a na teplotě kyvadel (t), pokud se závislost na tlaku a teplotě vyjadřovala vzorcem $a_1 p + a_2 t$, nebo $\bar{a}_1 d + a_2 t$, kde d je hustota vzduchu, ukazovala kriteria pro nahodilost chyb na existenci systematických vlivů. Teprve když se závislost na p a na t vyjádřila vzorcem

$$a_1 p + a_2 \sqrt{p} + a_3 t + a_4 pt + a_5 t^2,$$

byla zbývající systematická chyba odstraněna.*)

Jiný příklad: Rozdíly patrné v př. 4, obr. 12, mezi theoretickým počtem chyb v uzávěru a počtem, který plynul z měření, ukazovaly rovněž na existenci nějakých systematických vlivů. Když byly jednotlivé směry opraveny vzhledem k příčné refrakci, zlepšil se souhlas mezi theoretickým počtem chyb v uzávěru a počtem plynoucím z měření (př. 5, obr. 13). Jak patrno z těchto dvou příkladů, vyšetřování odchylek nebo chyb vede k hledání systematických vlivů, zatěžujících měření. Pokud odchylky nebo chyby ukazují nějaký systematický vliv, nesmíme býti s výsledky měření a vyrovnání spokojeni.

Uvedu ještě podle Hayforda**) tři pokyny, jak objeviti systematické chyby.

α) Rozdělíme měření na několik skupin (na př. večerní a ranní měření azimutu) a určíme výsledky (A_k) a střední chyby (m_k) výsledků z každé skupiny měření zvlášť. Ukáže-li se, že rozdíly mezi výsledky jednotlivých skupin ($a_k - a_l$) jsou větší, než by měly býti podle příslušných středních chyb ($\sqrt{m_k^2 + m_l^2}$), soudíme, že měření v jednotlivých skupinách jsou zatížena nějakou systematickou chybou.

β) Užíváme-li při měření nějakého přístroje, jehož práce se může v jistých mezích za měření měniti, je nutno přímo vy-

*) Jahresbericht des Direktors des Geod. Inst. Potsdam 1939, str. 16.

**) Wright-Hayford, l. c. str. 277—278.

šetřiti, jaký vliv mají tyto změny na výsledek, po případě docíliti, aby přístroj pracoval po celé měření za podmínek pokud možno stejných. (Tak je na př. nutno kontrolovati opoždění, zaviněné elektromagnetickým relais při měření tíže.)

γ) Systematické chyby mohou býti konečně zjištěny, užijeme-li k měření různých přístrojů a různých method. (Na př. určíme zeměpisnou šířku některým způsobem užívajícím universálního stroje a pak Nušl-Fričovým cirkumzenitálem.)

VI.

MĚŘENÍ S PŘEDEPSANOU PŘESNOSTÍ. HOSPODÁRNOST MĚŘENÍ.

V měřických vědách, na př. v geodesii, astronomii a částečně i ve fysice, nejde jen o to, určiti z měření nějakou veličinu, nýbrž určiti ji s určitou předepsanou přesností. V ojedinělých případech pak bylo dokonce uvažováno, jak určiti hledanou veličinu co nejhospodárněji, t. j. jak při daném množství měřické práce získati výsledek co nejpřesnější, a měření byla podle této úvahy provedena.

1. Měření s předepsanou přesností. Vyložím nejprve na několika příkladech, jak přesně nutno provésti měření, má-li býti dosaženo výsledků určité přesnosti. Při tom umožňují odhadovati přesnost měření a výsledků buď největší možné chyby nebo střední chyby.

a) Při tak zv. relativním měření tíže se určuje doba kyvu neproměnného kyvadla jednak na místě B, kde zrychlení tíže (g_B) známe, jednak na místě x, kde chceme zrychlení (g_x) určiti. Označíme-li měřené doby kyvu T_B a T_x, bude přibližně

$$T_B = \pi\sqrt{\frac{l}{g_B}}, \qquad T_x = \pi\sqrt{\frac{l}{g_x}},$$

kde l je t. zv. redukovaná délka kyvadla. Odtud plyne $g_B T_B^2 = g_x T_x^2$ čili

$$g_x = g_B\left(\frac{T_B}{T_x}\right)^2. \tag{1}$$

Z tohoto vzorce vyplývá

$$g_x = g_B\left(\frac{T_B}{T_B + T_x - T_B}\right)^2 = g_B\left(1 + \frac{T_x - T_B}{T_B}\right)^{-2} = \\ = g_B - 2g_B\frac{T_x - T_B}{T_B} + 3g_B\left(\frac{T_x - T_B}{T_B}\right)^2 - \ldots . \tag{1'}$$

S jakou přesností musíme při tom měřiti dobu kyvu T_B a T_x, abychom určili g_x na 1 miligal? (1 mgal $= 10^{-3}$ cm/sec^2). Vliv chyb ΔT_B a ΔT_x na g_x je roven přibližně

$$\Delta g_x \doteq \frac{\partial g_x}{\partial T_B}\Delta T_B + \frac{\partial g_x}{\partial T_x}\Delta T_x,$$

a protože ze vzorce (1′) pro $T_x \doteq T_B$ vyplývá

$$\frac{\partial g_x}{\partial T_B} \doteq +\frac{2g_B}{T_B}, \qquad \frac{\partial g_x}{\partial T_x} = -\frac{2g_B}{T_B},$$

bude

$$\Delta g_x \doteq -\frac{2g_B}{T_B}(\Delta T_B - \Delta T_x). \qquad (1'')$$

Aby

$$|\Delta g_x| \leqq \frac{1}{10^3}\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2},$$

musí býti

$$\frac{1}{T_B}|\Delta T_B - \Delta T_x| \leqq \frac{1}{2 \cdot 10^6},$$

poněvadž $g_B \doteq 10^3$ cm/sec^2. Největší možný vliv chyb ΔT_B a ΔT_x nastane, budou-li obě chyby míti opačná znaménka. V tomto nejnepříznivějším případě musí tedy býti

$$2\frac{|\Delta T|}{T} \leqq \frac{1}{2 \cdot 10^6}, \qquad |\Delta T| \leqq \frac{T}{4 \cdot 10^6}.$$

K relativním měřením tíže se užívá kyvadel půlsekundových, při nichž $T \doteq \frac{1}{2}$ sec. Pro ně tedy má býti

$$|\Delta T| \leqq \frac{1}{8 \cdot 10^6}\text{ sec} \doteq \frac{1{,}3}{10^7}\text{ sec}.$$

Výsledek lze shrnouti takto: Abychom ze vzorce (1) vypočetli zrychlení tíže v místě x s chybou nejvýš rovnou 1 mgal, musíme změřiti doby kyvu půlsekundových kyvadel asi na jednu desetimiliontinu vteřiny přesně. Musíme tedy k tomu

užíti takové methody, která zajišťuje tuto přesnost (na př. registrace na filmu).

b) S jakou střední chybou musíme určovati dobu kyvu kyvadel, chceme-li na každé stanici (x) i na stanici připojovací (B) určiti vždy čtyři řady měření a má-li střední chyba ve výsledné hodnotě tíže býti menší než $\pm$ 0,5 mgal? (Řadou měření jmenujeme určení doby kyvu všech čtyř kyvadel pokud možno rychle za sebou a při podmínkách pokud možno stejných.)

Vztah mezi středními chybami m_1 (pro g_x), m_2 (pro T_B), m_3 (pro T_x) podle vzorce (1″) je

$$m_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial g_x}{\partial T_B}\right)^2 m_2^2 + \left(\frac{\partial g_x}{\partial T_x}\right)^2 m_3^2} \doteq \doteq \pm \frac{2 g_B}{T_B} \sqrt{m_2^2 + m_3^2}. \tag{2}$$

Klademe-li

$$m_2 = m_3, \quad T_B \doteq \tfrac{1}{2} \text{ sec},$$

$$g_x \doteq 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2} \quad \text{a} \quad m_1 = \pm \frac{1}{2 \,.\, 10^3} \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2},$$

plyne ze vzorce (2), že má býti

$$m_3 = \pm \frac{1}{1{,}13} \,.\, 10^{-7} \text{ sec}.$$

A protože T_x je odvozeno ze čtyř řad po čtyřech měřeních doby kyvu, musí jedno měření doby kyvu míti střední chybu asi

$$\pm \frac{\sqrt{16}}{1{,}13} \,.\, 10^{-7} \text{ sec} = \pm 3{,}5 \,.\, 10^{-7} \text{ sec}.$$

Přesnost jednotlivých měřených elementů má býti tedy taková, aby střední chyba ve výsledné době kyvu byla nejvýš asi $\pm$ 3,5 . 10^{-7} sec (viz př. c) a d)).

c) Při relativním měření tíže máme vypočísti t. zv. redukci na nekonečně malý výkyv $r_\alpha = \frac{1}{16} T \alpha^2$, kde T je doba kyvu

kyvadla a α výkyv v obloukové míře. Chceme ji určiti s chybou menší nebo nejvýš rovnou 10^{-8} sec. Amplituda α se určuje z rozkyvu d_{mm} na filmu, na němž jsou kyvy kyvadla registrovány, a z konstanty D podle vzorce $\alpha \doteq \frac{1}{2}\frac{d}{D}$. S jakou přesností musíme určiti měřené veličiny?

Určíme-li rozkyv d s chybou $\Delta d = \pm 2.10^{-2}$ mm, bude její vliv na vypočtené r_α roven $\frac{T}{16}\alpha\frac{\Delta d}{D}$. Klademe-li $T = \frac{1}{2}$ sec, $\alpha = \frac{14{,}6'}{\varrho'}$ (průměrná hodnota) a $D = 1{,}72 \cdot 10^3$ mm (přibližná hodnota konstanty D), bude vliv chyby Δd roven $\pm 1{,}54.10^{-9}$ sec.

S jakou přesností musíme pak určiti konstantu D, aby celková chyba v r_α nestoupla nad žádanou mez?

Protože z celkové chyby $\pm 10^{-8}$ sec zbývá po odečtení $1{,}54.10^{-9}$ sec jen $8{,}46.10^{-9}$ sec, musí

$$|T \cdot \frac{2\alpha}{16}\frac{\partial\alpha}{\partial D}\Delta D| \leqq \frac{8{,}46}{10^9}\text{ sec, t. j. } T\frac{\alpha}{16}\frac{d}{D^2}|\Delta D| \leqq \frac{8{,}46}{10^9}\text{ sec.}$$

Klademe-li zase $T = \frac{1}{2}$ sec, $\alpha = \frac{14{,}6'}{\varrho'}$, $D = 1{,}72 \cdot 10^3$ mm a za rozkyv na filmu $d = 60$ mm, musí

$$|\Delta D| \leqq \frac{8{,}46}{10^9} \cdot \frac{16 \cdot 2}{14{,}6'}\varrho'\frac{1{,}72^2 \cdot 10^6}{60}\text{ mm} \doteq 3\text{ mm.}$$

Je tedy patrno, že musíme konstantu D určiti s chybou rovnou nejvýš asi 3 mm.

Podobně nutno uvážiti vliv měřických chyb na ostatní redukce dob kyvu (redukci na teplotu a hustotu vzduchu, na chod hodin a na soukyv stativu).*) A střední hodnota součtu všech těchto uvažovaných chyb na dobu kyvu musí býti podle př. b) menší než $\pm 3{,}5 \cdot 10^{-7}$ sec. Ukáží-li se při mě-

*) B. Kladivo: K měření zrychlení tíže, Sborník české vys. školy techn. v Brně, sv. XII, spis 46.

ření větší rozdíly redukovaných dob kyvů na téže stanici, než by plynulo ze střední chyby $\pm$ 3,5 . 10^{-7} sec, musíme hledati další chyby (na př. změny v délce kyvadel, otřesy a j.) a jejich vliv na výsledek pokud možno snížiti.

2. Hospodárnost měření. Nyní ukážeme na příkladu trojúhelníkových sítí, jak se klade a řeší otázka nejhospodárněji provedeného měření.

Označíme hledané chyby úhlů x_j značkou δx_j, $j = 1, 2, 3, \ldots, \varrho$, příslušné váhy p_j značí, kolikrát má býti každý úhel měřen; půjde právě o určení čísel p_j.

Podle (IV, 1) jde zde o případ rovnic [IV, (2)]

$$\delta x_j - l_j = 0,$$

a podmínek [IV, (3)]:

$$a_{g1}\,\delta x_1 + a_{g2}\,\delta x_2 + \ldots + a_{g\varrho}\,\delta x_\varrho = a_{g0}, \quad g = 1, 2, \ldots, \sigma. \tag{3}$$

Při tom máme určiti při daném množství měřické práce co nejlépe (t. j. s největší vahou) nějakou příčku v trojúhelníkové síti, jejíž délka se dá vyjádřiti jako funkce měřených úhlů $f(x_1, x_2, \ldots, x_\varrho)$. Protože vyrovnané hodnoty úhlů x_j jsou $x_j + \delta x_j$, bude vyrovnaná hodnota hledané příčky

$$\Phi = f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \ldots, x_\varrho + \delta x_\varrho) \doteq$$
$$\doteq f_0 + f_1\,\delta x_1 + f_2\,\delta x_2 + \ldots + f_\varrho\,\delta x_\varrho.$$

Tato funkce má býti určena co nejpřesněji, t. j. má býti její váha p_Φ maximální nebo má býti minimální výraz

$$\frac{1}{p_\Phi} = \frac{m_\Phi^2}{m_0^2} = \sum_{j=1}^{\varrho} q_j F_j^2. \tag{4}$$

[srovn. IV, (13)]. Při tom značí

$$F_j = f_j - h_1 a_{1j} - h_2 a_{2j} - \ldots - h_\sigma a_{\sigma j}, \tag{5}$$

a $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$ plynou z rovnic [IV, (12)]

$$\begin{aligned} h_1\,[qa_1a_1] + h_2\,[qa_1a_2] + \ldots + h_\sigma\,[qa_1a_\sigma] &= [qa_1f],\\ h_1\,[qa_2a_1] + h_2\,[qa_2a_2] + \ldots + h_\sigma\,[qa_2a_\sigma] &= [qa_2f],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ h_1\,[qa_\sigma a_1] + h_2\,[qa_\sigma a_2] + \ldots + h_\sigma\,[qa_\sigma a_\sigma] &= [qa_\sigma f]. \end{aligned} \tag{6}$$

Protože pak množství měřické práce jest dané, musí býti

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_\varrho = c;$$

(c je konstanta).

Váhy p_j jsou kladné nebo rovné nule; proto je píšeme ve tvaru $p_j = y_j^2$. Máme tedy vhodnou volbou veličin y_j, $j = 1, 2, \ldots, \varrho$, učiniti minimem výraz

$$\frac{1}{p_\Phi} = \frac{F_1^2}{y_1^2} + \frac{F_2^2}{y_2^2} + \ldots + \frac{F_\varrho^2}{y_\varrho^2}$$

při podmínce $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_\varrho^2 = c$. Abychom nalezli podmínky minima, anulujeme parciální derivace funkce

$$\frac{1}{p_\Phi} + k\,(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_\varrho^2 - c)$$

podle jednotlivých proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_\varrho$ (srovn. kap. IV, odst. 2). První podmínka bude na př.

$$\frac{-2F_1^2}{y_1^3} + \frac{2F_1}{y_1^2}\sum_{l=1}^{\sigma}\frac{\partial F_1}{\partial h_l}\frac{\partial h_l}{\partial y_1} + \frac{2F_2}{y_2^2}\sum_{l=1}^{\sigma}\frac{\partial F_2}{\partial h_l}\frac{\partial h_l}{\partial y_1} + \ldots +$$

$$+ \frac{2F_\varrho}{y_\varrho^2}\sum_{l=1}^{\sigma}\frac{\partial F_\varrho}{\partial h_l}\frac{\partial h_l}{\partial y_1} + 2ky_1 = 0.$$

Koeficient při $\dfrac{\partial h_l}{\partial y_1}$ jest

$$2\left\{\frac{F_1}{p_1}\frac{\partial F_1}{\partial h_l} + \frac{F_2}{p_2}\frac{\partial F_2}{\partial h_l} + \ldots + \frac{F_\varrho}{p_\varrho}\frac{\partial F_\varrho}{\partial h_l}\right\} =$$

$$= -2\left\{\frac{F_1}{p_1}a_{l1} + \frac{F_2}{p_2}a_{l2} + \ldots + \frac{F_\varrho}{p_\varrho}a_{l\varrho}\right\}.$$

Protože rovnice (6) lze psáti ve tvaru

$$\sum_{j=1}^{\varrho}\frac{1}{p_j}a_{1j}F_j = 0,\quad \sum_{j=1}^{\varrho}\frac{1}{p_j}a_{2j}F_j = 0,\quad \ldots,\quad \sum_{j=1}^{\varrho}\frac{1}{p_j}a_{\sigma j}F_j = 0, \qquad (6')$$

bude koeficient při $\frac{\partial h_l}{\partial y_1}$ roven nule, a to pro $l = 1, 2, \ldots, \sigma$.

Bude tedy první podmínka pro minimum

$$y_1 \left(k - \frac{F_1^2}{p_1^2} \right) = 0.$$

A stejně plynou ostatní podmínky

$$y_2 \left(k - \frac{F_2^2}{p_2^2} \right) = 0, \ \ldots, \quad y_\varrho \left(k - \frac{F_\varrho^2}{p_\varrho^2} \right) = 0. \tag{7}$$

K určení veličiny Φ je třeba znáti ϱ hodnot $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_\varrho$, z nich však σ je určeno podmínkami (3), je tedy nutno určiti $\varrho - \sigma$ neznámých.

Protože hodnoty $\frac{F_j}{p_j}$, $j = 1, 2, \ldots, \varrho$, splňují σ podmínek (6′), je z nich jen $\varrho - \sigma$ nezávislých. Zvolme za ně hodnoty s indexem $1, 2, \ldots, \varrho - \sigma$. Ostatní závislé hodnoty

$$\frac{F_{\varrho-\sigma+1}}{p_{\varrho-\sigma+1}}, \ \ldots, \ \frac{F_\varrho}{p_\varrho}$$

jsou pak určeny rovnicemi (6′). Až na zvláštní případy, které z úvahy vylučujeme, nebudou rovny konstantě k; musí tedy [viz (7)] — až na vyloučené zvláštní případy — býti příslušné veličiny y rovny nule. Bude tedy za uvedeného předpokladu

$$y_{\varrho-\sigma+1} = y_{\varrho-\sigma+2} = \ldots = y_\varrho = 0$$

a tedy i

$$p_{\varrho-\sigma+1} = p_{\varrho-\sigma+2} = \ldots = p_\varrho = 0. \tag{8}$$

Pokud pak z rovnic (6′) plynou pro

$$\frac{F_{\varrho-\sigma+1}}{p_{\varrho-\sigma+1}}, \ \ldots, \ \frac{F_\varrho}{p_\varrho}$$

hodnoty konečné, což předpokládáme, musí býti

$$F_{\varrho-\sigma+1} = F_{\varrho-\sigma+2} = \ldots = F_\varrho = 0.$$

Jak patrno z podmínek (8), nemá býti σ neznámých $x_{\varrho-\sigma+1}$, $x_{\varrho-\sigma+2}, \ldots, x_\varrho$ vůbec měřeno. Protože pak k určení funkce Φ je nezbytně nutno měřiti $\varrho - \sigma$ neznámých, musí býti měřeny všecky zbývající úhly $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-\sigma}$. To zase značí, že $p_1, p_2, \ldots, p_{\varrho-\sigma}$ musí býti kladná čísla, a z podmínek (7) plyne, že musí

$$\frac{F_1^2}{p_1^2} = \frac{F_2^2}{p_2^2} = \ldots = \frac{F_{\varrho-\sigma}^2}{p_{\varrho-\sigma}^2} = k. \tag{9}$$

Absolutní hodnoty veličin

$$\frac{F_1}{p_1}, \frac{F_2}{p_2}, \ldots, \frac{F_{\varrho-\sigma}}{p_{\varrho-\sigma}}$$

mají podle toho býti si rovny.

Tedy máme-li docíliti co největší váhy výsledku Φ, musíme měřiti jen právě tolik veličin, kolik je jich k určení hledané funkce Φ nezbytně potřeba. Všechny ostatní veličiny nemají býti měřeny (věta Schreiberova).*)

Ze vzorce (4) plyne

$$\left(\frac{1}{p_\Phi}\right)_{\min} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{F_{\varrho-\sigma}^2}{p_{\varrho-\sigma}^2} = k\,(p_1 + p_2 + \ldots \tag{10}$$
$$\ldots + p_{\varrho-\sigma}) = |\sqrt{k}\,|\,(|F_1| + |F_2| + \ldots + |F_{\varrho-\sigma}|).$$

Jsme tedy vedeni k tomuto postupu: Vhodnou volbou čísel $h_1, h_2, \ldots, h_\sigma$ docílíme, aby σ z veličin $F_1, F_2, \ldots, F_\varrho$ bylo rovno nule a aby při tom součet absolutních hodnot zbývajících veličin F byl minimální.

Určíme-li takto hodnoty F_j, budou podle rovnic (9) hledané váhy p_j rovny

$$p_j = |F_j| \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

*) C. Runge: Der Schreibersche Satz. Z. f. Vermessungswesen, 1890, str. 21—24.

Konstanta k plyne pak z rovnice $p_1 + p_2 + \ldots + p_\varrho = c$. Bude

$$\frac{1}{\sqrt{k}}(|F_1| + |F_2| + \ldots + |F_{\varrho-\sigma}|) = c.$$

Jde-li o více podmínek (3), poskytuje skutečné řešení obtíže.

Uvedu jednoduchý příklad s jednou podmínkou (3).

Předpokládáme, že v trojúhelníku ABC je dána strana $\overline{AB}$ a že byly měřeny vnitřní úhly A, B, C s vahami p_1, p_2, p_3. Jak zvoliti p_1, p_2, p_3, aby $p_1 + p_2 + p_3 = c$ a aby při tom byla co nejlépe určena výška

$$v_c = \frac{\overline{AB}}{\sin C} \sin B \sin A ?^*) \qquad (11)$$

Podmínka (3) [viz str. 144] je zde

$$\Delta A + \Delta B + \Delta C - (180° - A - B - C) = 0.$$

Ze vzorce (11) plyne

$$\Phi = v_c + f_1 \Delta A + f_2 \Delta B + f_3 \Delta C,$$

kde

$$f_1 = v_c \operatorname{cotg} A, \quad f_2 = v_c \operatorname{cotg} B, \quad f_3 = -v_c \operatorname{cotg} C.$$

Pak ze vzorce [IV, (13)] plyne

$$\frac{1}{p_\Phi} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \frac{F_3^2}{p_3},$$

při čemž

$$F_1 = f_1 - h_1, \quad F_2 = f_2 - h_1, \quad F_3 = f_3 - h_1$$

a podle vzorců [IV, (12)] jest

$$h_1 = \frac{q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

Máme tedy určiti minimum výrazu

$$\frac{1}{p_\Phi} = \frac{F_1^2}{y_1^2} + \frac{F_2^2}{y_2^2} + \frac{F_3^2}{y_3^2} \text{ při podmínce } y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = c.$$

*) Jordan: I, l. c. str. 139—141.

Podmínky minima jsou

$$y_1\left(k-\frac{F_1^2}{p_1^2}\right)=0,\quad y_2\left(k-\frac{F_2^2}{p_2^2}\right)=0,\quad y_3\left(k-\frac{F_3^2}{p_3^2}\right)=0.$$

Protože

$$\frac{F_1}{p_1}+\frac{F_2}{p_2}+\frac{F_3}{p_3}=0,$$

jsou dvě z hodnot $F_j : p_j$ nezávislé a jedna je závislá. Pro nezávislé musí býti $F : p = \pm\sqrt{k}$; není-li závislá hodnota ve zvláštním případě rovna k, bude příslušné $y = 0$ a tedy i příslušné $F = 0$.

Předpokládejme, že $A > B > C$ a že jsou v 1. kvadrantě. Klademe-li $F_1 = 0$, je $h_1 = v_c \operatorname{cotg} A$ a

$$|F_2| + |F_3| = v_c\{|\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A| + |-\operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg} A|\} = v_c(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C).$$

Při $F_2 = 0$, je $h_1 = v_c \operatorname{cotg} B$ a

$$|F_1| + |F_3| = v_c(2\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} C).$$

Při $F_3 = 0$, je $h_1 = -v_c \operatorname{cotg} C$ a

$$|F_1| + |F_2| = v_c(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + 2\operatorname{cotg} C).$$

Protože

$$2\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} C - \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} C = \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A > 0$$

a

$$\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + 2\operatorname{cotg} C - 2\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} C = 2\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C > 0,$$

je v uvažovaném případě $|F_2| + |F_3|$ nejmenší. Nejlepší rozdělení vah by tedy bylo v poměru čísel

$$|F_1| = 0,\quad |F_2| = v_c|\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A|,$$
$$|F_3| = v_c|\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A|.$$

Je-li

$$A = 78°,\ \operatorname{cotg} A = 0{,}213,$$
$$B = 68°,\ \operatorname{cotg} B = 0{,}404,$$
$$C = 34°,\ \operatorname{cotg} C = 1{,}483,$$

je nejlepší rozdělení vah v poměru čísel

$$|\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A| = 0{,}191,\ |\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A| = 1{,}696.$$

Má-li býti na př. $p_1 + p_2 + p_3 = 30$, musí býti konstanta úměrnosti $30 : 1{,}887$ a tedy $p_1 = 0$, $p_2 \doteq 3{,}0$, $p_3 \doteq 27{,}0$, t. j. úhel A nemá býti měřen, úhel B má býti měřen třikrát a úhel C má býti měřen 27krát.

VII.

VÝZNAM VYROVNÁNÍ METHODOU NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ.

1. Význam výsledků vypočtených podle methody nejmenších čtverců, řídí-li se měřické chyby normálním zákonem četnosti. Ve II. kapitole jsme vyložili první Gaussovo zdůvodnění methody nejmenších čtverců. Viděli jsme (II, 2), že jsme oprávněni užíti k vyrovnání měřických výsledků methody nejmenších čtverců vždy, kdykoli je platný postulát aritmetického průměru, t. j. je-li aritmetický průměr z výsledků přímých a stejně přesných měření v každém případě nejpravděpodobnější hodnotou a má-li mimo to funkce četnosti pro chybu ε_i tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$.

Protože z postulátu aritmetického průměru a z okolnosti, že funkce četnosti pro chybu ε_i má tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$ plyne, že se chyby zatěžující měření řídí normálním zákonem chyb, předpokládají výklady v kapitole II až IV, že se chyby zatěžující měření řídí tímto zákonem chyb.

V tom případě je mezi střední a pravděpodobnou chybou vztah

$$r = m \,.\, 0{,}67449 \doteq \tfrac{2}{3} m$$

(srovn. I, (31)). K odhadu přesnosti měření a vyrovnaných výsledků lze v tomto případě užívati buď střední nebo pravděpodobné chyby. Při deseti měřeních (při 200, 8000 měřeních) lze pak považovati za extrémní možnou chybu přibližně $\pm 2m$ ($\pm 3m$, $\pm 4m$) (srovn. I, 8).

Řídí-li se chyby zatěžující měření normálním zákonem chyb, jsou hodnoty neznámých, vypočtené podle methody nejmenších čtverců, nejpravděpodobnější hodnoty, jež plynou z výsledků měření $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (srovn. na př. (III, 1)). Současně mají takto vypočtené hodnoty nejmenší střední chyby nebo největší váhy ze všech lineárních celistvých funkcí výsledků měření $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (srovn. VII, 3).

Extrémní možné chyby vymezují pak obory, uvnitř nichž jsou pravděpodobně skutečné hodnoty neznámých výsledných hodnot.

2. Kdy se řídí měřické chyby normálním zákonem četnosti? Nyní budeme uvažovati o otázce, kdy se měřické chyby řídí normálním zákonem četnosti. Uvedeme některé okolnosti, jež přispívají k jejímu objasnění.

a) Tážeme se, kdy je platný postulát aritmetického průměru. [V takovém případě se budou měřické chyby říditi normálním zákonem chyb, má-li ovšem mimo to funkce četnosti pro chybu ε_i tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$.]

Postulát aritmetického průměru je na př. platný, jsou-li splněny tyto jednodušší předpoklady:

I. Zvětší-li se naměřené hodnoty k-násobně (vyjádří-li se v jednotce k-krát menší), zvětší se k-násobně i nejpravděpodobnější hodnota z nich odvozená. Jsou-li naměřené hodnoty $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ a označíme-li nejpravděpodobnější hodnotu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, má býti

$$f(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) = k\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

což znamená, že f jest homogenní funkce prvního stupně*).

II. Zvětší-li se všechny naměřené hodnoty o totéž číslo, zvětší se o totéž číslo i nejpravděpodobnější hodnota z nich odvozená, t. j. volba počátku měřítka posouvá nejpravděpodobnější hodnotu stejně jako naměřené hodnoty:

$$f(x_1 + h, x_2 + h, \ldots, x_n + h) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + h.$$

III. Všechna měření, protože jsou stejně přesná, přispívají stejně k vytváření výsledku, takže chyba ε má stejný vliv na nejpravděpodobnější hodnotu, ať zatěžuje kteroukoli z naměřených hodnot.

Zatěžuje-li chyba ε naměřenou hodnotu x_i, je její vliv na výsledek roven

*) J. Vojtěch, l. c. str. 389. — K. Petr, l. c. str. 324.

$$\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \ldots,$$

jak plyne z rozvoje

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \varepsilon, \ldots, x_n) - f(x, x_2, \ldots, x_n)$$

podle věty Taylorovy.

Z II. předpokladu plyne, rozvineme-li podle h v řadu Taylorovu $f(x_1 + h, \ldots, x_n + h)$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + h\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) + \ldots =$$

$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + h,$$

a srovnáme-li koeficienty u h, tento vztah:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 1. \tag{1}$$

Podle III. předpokladu, podle něhož má býti

$$\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \ldots$$

stejné pro jakékoli i, musí býti

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

a tedy podle (1)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Z I. předpokladu plyne podle Eulerovy věty

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

a podle (2) plyne odtud

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Tato úvaha Schiaparelliho*) předpokládá mlčky spojitost funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a jejích prvních derivací.

Jestliže tedy jsou splněny uvedené jednodušší předpoklady o vlastnostech nejpravděpodobnější hodnoty, odvozené z naměřených hodnot, platí postulát aritmetického průměru. To v sobě zahrnuje, že se měřické chyby řídí normálním zákonem chyb a že jsme oprávněni vyrovnávati podle methody nejmenších čtverců, zase ovšem za předpokladu, že funkce četnosti pro chybu ε_i má tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$.

*

Závisí-li funkce četnosti pro chybu $\varepsilon_i = x - x_i$ nejen na rozdílu $\varepsilon_i = x - x_i$, nýbrž má-li obecnější tvar $\varphi(x_i, x)$, dá se ukázati, že postulát aritmetického průměru vede k obecnější funkci četnosti. Podle Poincarého**) lze to dokázati takto:

Je-li skutečná hodnota měřené veličiny x, nechť je pravděpodobnost, že výsledek pozorování byl mezi x_1 a $x_1 + \mathrm{d}x_1$, rovna $\varphi(x_1, x)\,\mathrm{d}x_1$. Dále nechť pravděpodobnost a priori, že veličina x je mezi x a $x + \mathrm{d}x$, je rovna $\psi(x)\,\mathrm{d}x$. V nejjednodušším případě, máme-li důvod předpokládati, že všechny hodnoty x v určitých mezích jsou a priori stejně pravděpodobné, přešla by funkce $\psi(x)$ v konstantu C.

Podle pravidla o násobení pravděpodobností je pravděpodobnost, že výsledky nezávislých pozorování jsou v mezích od x_1 do $x_1 + \mathrm{d}x_1$, od x_2 do $x_2 + \mathrm{d}x_2$, ... a od x_n do $x_n + \mathrm{d}x_n$, a je-li měřená veličina x, rovna

$$\varphi(x_1, x)\,\varphi(x_2, x) \ldots \varphi(x_n, x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Pravděpodobnost, že měřená veličina je v mezích od x do $x + \mathrm{d}x$ a při tom že výsledky měření jsou v uvedených mezích, bude podle pravidla o násobení pravděpodobností rovna

---

*) P. Pizzetti, l. c. str. 88—89. — E. Czuber, l. c. str. 31 až 33.

**) H. Poincaré: Calcul des probabilités, 2. éd., Paris 1912, str. 169—176.

$$p = \psi(x)\,\mathrm{d}x \,.\, \varphi(x_1, x)\,\varphi(x_2, x) \ldots \varphi(x_n, x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Podle pravidla o součtu pravděpodobností bude pravděpodobnost, že výsledky měření jsou v uvedených mezích a že měřená veličina může míti jakoukoli hodnotu v mezích od $-\infty$ do $+\infty$, rovna integrálu

$$\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,\varphi(x_1, x)\,\varphi(x_2, x) \ldots \varphi(x_n, x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže nastal případ, že výsledky měření jsou v uvedených mezích, a označíme-li pravděpodobnost (a posteriori), že měřená veličina je při tom v mezích od x do $x + \mathrm{d}x$, písmenem P, můžeme podle pravidla o násobení pravděpodobností psáti

$$p = P\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\varphi(x_1, x)\,\varphi(x_2, x) \ldots \varphi(x_n, x)\,\mathrm{d}x,$$

tedy

$$P = \frac{\psi(x)\,\mathrm{d}x \,.\, \varphi(x_1, x)\,\varphi(x_2, x) \ldots \varphi(x_n, x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,\varphi(x_1, x)\,\varphi(x_2, x) \ldots \varphi(x_n, x)\,\mathrm{d}x}.$$

Podle Gausse zavádí se k určení veličiny x podmínka, aby pravděpodobnost P byla maximální pro

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

to značí, aby pro toto x byl maximální výraz $\psi(x)\,\varphi(x_1, x) \,.\, \varphi(x_2, x) \ldots \varphi(x_n, x)$, nebo, což vede k stejnému výsledku, výraz

$$\lg \psi(x)\,\varphi(x_1, x)\,\varphi(x_2, x) \ldots \varphi(x_n, x).$$

Podmínka pro extrém je

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\varphi'(x_1, x)}{\varphi(x_1, x)} + \frac{\varphi'(x_2, x)}{\varphi(x_2, x)} + \ldots + \frac{\varphi'(x_n, x)}{\varphi(x_n, x)} = 0.$$

Píšeme-li

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \chi(x), \quad \frac{\varphi'(x_i, x)}{\varphi(x_i, x)} = F(x_i, x),$$

je předcházející podmínka

$$F(x_1, x) + F(x_2, x) + \ldots + F(x_n, x) + \chi(x) = 0. \quad (3)$$

Tato podmínka má býti identická s podmínkou

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nx. \quad (3')$$

Zavedeme místo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ po řadě $x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2 + \mathrm{d}x_2, \ldots, x_n + \mathrm{d}x_n$, kde přírůstky $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$ jsou takové, že x zůstane nezměněné. To znamená, že z podmínky (2) plyne

$$\frac{\partial F(x_1, x)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial F(x_2, x)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \ldots + \frac{\partial F(x_n, x)}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n = 0,$$

a z podmínky (3')

$$\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2 + \ldots + \mathrm{d}x_n = 0.$$

Protože tyto rovnice mají býti identické, musí býti

$$\frac{\partial F(x_1, x)}{\partial x_1} = \frac{\partial F(x_2, x)}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial F(x_n, x)}{\partial x_n} = A'(x),$$

funkce jen proměnné x, a odtud

$$F(x_i, x) = A'(x)\, x_i + B'(x).$$

Podmínka (2) pro extrém je tedy

$$\sum_{i=1}^{n} \{A'(x)\, x_i + B'(x)\} + \chi(x) = 0,$$

čili

$$A'(x) \sum_{i=1}^{n} x_i + n\, B'(x) + \chi(x) = 0.$$

Zavedeme-li sem $\sum_{i=1}^{n} x_i = nx$, bude

$$n\,\{x\, A'(x) + B'(x)\} + \chi(x) = 0. \quad (4)$$

Protože tato podmínka má býti splněna pro každé n a pro každé x, musí

$$\chi(x) = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = 0,$$

tedy $\psi(x)$ musí býti rovno konstantě a mezi funkcemi A' a B' musí býti vztah

$$x\,A'(x) + B'(x) = 0. \tag{5}$$

Pak z rovnice

$$\frac{\varphi'(x_i, x)}{\varphi(x_i, x)} = \frac{\partial}{\partial x} \lg \varphi(x_i, x) = A'(x)\,x_i + B'(x)$$

plyne (je-li $\mathrm{d}A : \mathrm{d}x = A'$, $\mathrm{d}B : \mathrm{d}x = B'$) integrací

$$\lg \varphi(x_i, x) = A(x)\,x_i + B(x) + \lg \Theta(x_i),$$

čili

$$\varphi(x_i, x) = \Theta(x_i)\, e^{A(x)x_i + B(x)}. \tag{6}$$

Zde jsou dvě funkce $\Theta(x_i)$ a $A(x)$ libovolné, funkce B vychází pak z podmínky (5).

To tedy vyplývá z Gaussovy podmínky, aby — jsou-li výsledky měření $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — byla nejpravděpodobnější hodnota rovna aritmetickému průměru. Jak je viděti, jest normální funkce četnosti

$$\varphi(x - x_i) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2(x - x_i)^2}$$

jen zvláštním případem obecného vzorce (6).

b) Je-li skutečná chyba nějaké veličiny rovna lineární funkci částečných chyb, z nichž každá se řídí normálním zákonem chyb, řídí se normálním zákonem i chyba uvažované veličiny.

Budeme předpokládati, že částečné chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ se řídí normálním zákonem, t. j. pravděpodobnost, že ε_i je v intervalu $< \Delta, \Delta + \mathrm{d}\Delta >$, jest

$$\frac{h_i}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h_i^2 \Delta^2}\, \mathrm{d}\Delta.$$

Tážeme se, jaká je pravděpodobnost, že chyba $\varepsilon = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ je v mezích od ε do $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$?

Pravděpodobnost, že chyby $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ nabudou současně hodnot $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, jest

$$\frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h_1^2\varepsilon_1^2 + h_2^2\varepsilon_2^2 + \ldots + h_n^2\varepsilon_n^2)} \mathrm{d}\varepsilon_1 \mathrm{d}\varepsilon_2 \ldots \mathrm{d}\varepsilon_n. \qquad (7)$$

A pravděpodobnost, že $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ nabude hodnoty v mezích od E_1 do E_2, bude rovna integrálu výrazu (7), při čemž integrační obor je takový, že

$$E_1 < \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n < E_2.$$

Abychom provedli tuto integraci, násobíme nejprve výraz (7) integrálem

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\Theta \int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}\tau\, e^{i\Theta(\tau - \lambda_1\varepsilon_1 - \lambda_2\varepsilon_2 - \ldots - \lambda_n\varepsilon_n)}, \qquad (8)$$

o němž víme, že je rovný 1, pokud $E_1 < \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n < E_2$, a je roven 0, když $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ neleží uvnitř těchto mezí. Pak můžeme integrovati výsledný výraz v celém oboru všech proměnných, neboť omezení oboru nerovninou

$$E_1 < \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n < E_2$$

je provedeno tím, že jsme násobili integrálem (8).

Hledaná pravděpodobnost tedy bude

$$P = \frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\Theta \int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon_1 \mathrm{d}\varepsilon_2 \ldots$$

$$\ldots \mathrm{d}\varepsilon_n\, e^{i\Theta(\tau - \lambda_1\varepsilon_1 - \lambda_2\varepsilon_2 - \ldots - \lambda_n\varepsilon_n) - h_1^2\varepsilon_1^2 - h_2^2\varepsilon_2^2 - \ldots - h_n^2\varepsilon_n^2}.$$

Integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon_i e^{i\Theta(-\lambda_i\varepsilon_i) - h_i^2\varepsilon_i^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos\Theta\lambda_i\varepsilon_i - i \sin\Theta\lambda_i\varepsilon_i)\, e^{-h_i^2\varepsilon_i^2} \mathrm{d}\varepsilon_i =$$

$$= 2 \int_0^\infty \cos \Theta \lambda_i \varepsilon_i e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2} \, \mathrm{d}\varepsilon_i,$$

a protože

$$\int_0^\infty e^{-Ax^2} \cos hx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{A} e^{-\frac{1}{4} h^2 : A},$$

bude předcházející integrál roven

$$\frac{\sqrt{\pi}}{h_i} e^{-\Theta^2 \lambda_i^2 : 4 h_i^2},$$

tedy

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\Theta \int_{E_1}^{E_2} e^{i\Theta\tau - \frac{\Theta^2}{4}\left(\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{h_2^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}\right)} \mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}\tau \; 2 \int_0^\infty e^{-\frac{\Theta^2}{4}\left(\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{h_2^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}\right)} \cos \Theta\tau \, \mathrm{d}\Theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{E_1}^{E_2} \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}}} \cdot e^{-\tau^2 : \left(\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}\right)} \mathrm{d}\tau.$$

Pravděpodobnost, že chyba $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ je v mezích od ε do $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$, jest tedy

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}}} e^{-\varepsilon^2 : \left(\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}\right)}.$$

Srovnáme-li tento výraz s výrazem pro normální zákon, vidíme, že chyba $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ se řídí rovněž nor-

málním zákonem, jenže míra přesnosti je nyní

$$H = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}}},$$

čili

$$\frac{1}{H^2} = \frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{h_2^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}. \qquad (9)$$

A protože mezi mírou přesnosti h_i a střední chybou m_i je vztah

$$m_i h_i = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

plyne pro čtverec M^2 střední hodnoty chyby ε vzorec

$$M^2 = \lambda_1^2 m_1^2 + \lambda_2^2 m_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 m_n^2 \qquad (10)$$

[viz I, (12″)].

Užití.

α) V odstavci II, 4 byl dokázán vztah (15) mezi odchylkami v_i a skutečnými chybami ε_i. V případě stejných vah přejde onen vztah ve vzorec

$$v_i = \frac{1}{n}\{-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \ldots + (n-1)\,\varepsilon_i - \ldots - \varepsilon_n\}.$$

Protože tedy odchylky v_i se dají vyjádřiti jako lineární funkce skutečných chyb ε, je podle právě dokázaného patrno:

Řídí-li se skutečné chyby normálním zákonem četnosti, řídí se odchylky od aritmetického průměru rovněž normálním zákonem a naopak, neřídí-li se odchylky od aritmetického průměru normálním zákonem, neřídí se jím aspoň některá ze skutečných chyb (kdyby se jím řídily všecky skutečné chyby, musely by se jím říditi i odchylky od aritmetického průměru).

Označíme-li $\begin{cases} h \\ h' \end{cases}$ míru přesnosti pro $\begin{cases} \text{skutečné chyby} \\ \text{odchylky} \end{cases}$, bude

podle vzorce (9)

$$\frac{1}{h'^2} = \frac{n-1}{n^2h^2} + \frac{(n-1)^2}{n^2h^2} = \frac{n-1}{nh^2},$$

čili

$$h' = h\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Tedy pravděpodobnost, že odchylka v je v mezích od v do $v + dv$, bude

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2v^2} dv = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\, e^{-\frac{h^2nv^2}{n-1}} dv.$$

β) Všimněme si trojúhelníkové sítě. Měřené úhly trojúhelníka označíme A, B, C. Součet úhlů podle měření je $A + B + C$. Protože známe, jaký tento součet má býti ($180 + \varepsilon'$, kde ε' je nadbytek uvažovaného trojúhelníka), známe skutečnou chybu ε v uzávěru trojúhelníka, t. j.

$$\varepsilon = 180 + \varepsilon' - (A + B + C).$$

Označíme-li skutečné chyby v jednotlivých úhlech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, jest

$$\varepsilon = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Z předcházejícího výsledku je patrno: Řídí-li se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ normálním zákonem četnosti, řídí se jím i chyba v uzávěru a naopak, neřídí-li se chyba v uzávěru normálním zákonem, neřídí se jím aspoň některá z chyb v měřených úhlech.

Je-li

$\left\{\begin{matrix} h \\ h' \end{matrix}\right.$ míra přesnosti pro $\left\{\begin{matrix} \text{skutečné chyby úhlů } A, B, C, \\ \text{chybu v uzávěru trojúhelníka } ABC, \end{matrix}\right.$

bude podle vzorce (9)

$$\frac{1}{h'^2} = \frac{3}{h^2} \quad \text{čili} \quad h' = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Tedy pravděpodobnost, že chyba ε je v mezích od ε do $\varepsilon + d\varepsilon$, bude

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\varepsilon^2}\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{1}{3}h^2\varepsilon^2}\,\mathrm{d}\varepsilon.$$

Označíme-li střední chybu měřeného úhlu písmenem m a střední hodnotu chyby v uzávěru písmenem M, plyne ze vzorce (10)

$$M^2 = 3m^2 \qquad \text{čili} \qquad m = \frac{M}{\sqrt{3}}. \tag{11}$$

A vypočteme-li podle vzorce I, (10′)

$$M^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n},$$

kde n je počet chyb v uzávěrech, bude

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{3n}}. \tag{11′}$$

c) Podobně jako v odstavci b) uvažujeme o obecnějším případu,*) kdy skutečná chyba nějaké veličiny je rovna lineární funkci $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ částečných chyb ε_1, ε_2, …, ε_n, při čemž ε_i se řídí zákonem četnosti $\varphi_i(\varepsilon_i)$. (Pro různá i mohou býti funkce φ_i různé.)

Pravděpodobnost, že chyby ε_1, ε_2, …, ε_n nabudou současně hodnot ε_1, ε_2, …, ε_n, jest

$$\varphi_1(\varepsilon_1)\,\varphi_2(\varepsilon_2)\ldots\varphi_n(\varepsilon_n)\,\mathrm{d}\varepsilon_1\,\mathrm{d}\varepsilon_2\ldots\mathrm{d}\varepsilon_n. \tag{12}$$

A pravděpodobnost, že $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ má hodnotu mezi w_1 a w_2, bude rovna integrálu výrazu (12), při čemž obor je takový, že

$$w_1 < \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n < w_2.$$

Stejně jako v odstavci b) bude tedy pravděpodobnost P, že celková chyba $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ je v mezích od w_1 do w_2, rovna

*) Whittaker-Robinson, l. c. str. 168—173.

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\Theta \int_{w_1}^{w_2} \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Theta(\tau-\lambda_1\varepsilon_1-\lambda_2\varepsilon_2\dots-\lambda_n\varepsilon_n)}.$$

$$\cdot\, \varphi_1(\varepsilon_1)\, \varphi_2(\varepsilon_2) \dots \varphi_n(\varepsilon_n)\, \mathrm{d}\varepsilon_1\, \mathrm{d}\varepsilon_2 \dots \mathrm{d}\varepsilon_n.$$

Píšeme-li

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Theta x}\, \varphi_r(x)\, \mathrm{d}x = \Omega_r(\Theta),$$

bude

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\Theta \int_{w_1}^{w_2} e^{i\Theta\tau}\, \Omega_1(\lambda_1\Theta)\, \Omega_2(\lambda_2\Theta) \dots \Omega_n(\lambda_n\Theta)\, \mathrm{d}\tau.$$

Uvážíme-li, že

$$\int_{w_1}^{w_2} e^{i\Theta\tau}\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{i\Theta}\,(e^{i\Theta w_2} - e^{i\Theta w_1}),$$

a zavedeme-li označení $\Omega(\Theta) = \Omega_1(\lambda_1\Theta)\, \Omega_2(\lambda_2\Theta) \dots \Omega_n(\lambda_n\Theta)$, jest

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(\Theta)}{i\Theta}\,(e^{i\Theta w_2} - e^{i\Theta w_1})\, \mathrm{d}\Theta.$$

Pravděpodobnost P', že $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n$ je mezi ε a $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$, budě

[protože $\frac{1}{i\Theta}\,(e^{i\Theta(\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon)} - e^{i\Theta\varepsilon}) = \frac{1}{i\Theta}\, e^{i\Theta\varepsilon}\,(e^{i\Theta\mathrm{d}\varepsilon} - 1) \doteq e^{i\Theta\varepsilon}\, \mathrm{d}\varepsilon$]

$$P' = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\Theta)\, e^{i\Theta\varepsilon}\, \mathrm{d}\Theta,$$

tedy rovna $\varphi(\varepsilon)\, \mathrm{d}\varepsilon$, kde

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\Theta)\, e^{i\Theta\varepsilon}\, \mathrm{d}\Theta. \qquad (13)$$

Zavedeme označení

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi_r(x)\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

Pak podle definice $\Omega_r(\Theta)$ bude

$$\Omega_r(\Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Theta x}\,\varphi_r(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{i\Theta x}{1!} - \frac{(\Theta x)^2}{2!} + \frac{i(\Theta x)^3}{3!} + \frac{(\Theta x)^4}{4!} - \dots\right) \varphi_r(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 1 - i\Theta s_1 - \frac{\Theta^2}{2!}\,s_2 + \frac{i\Theta^3}{3!}\,s_3 + \frac{\Theta^4}{4!}\,s_4 + \dots$$

Odtud

$$\lg \Omega_r(\Theta) = \lg\left(1 - i\Theta s_1 - \frac{\Theta^2}{2!}\,s_2 + \frac{i\Theta^3}{3!}\,s_3 + \frac{\Theta^4}{4!}\,s_4 + \dots\right) =$$

$$= -i\Theta s_1 - \frac{\Theta^2}{2}\left(-s_1^2 + s_2\right) + \frac{i\Theta^3}{3!}\left(s_3 - 3s_1 s_2 + 2s_1^3\right) +$$

$$+ \frac{\Theta^4}{4!}\left(s_4 - 4s_1 s_3 - 3s_2^2 + 12 s_1^2 s_2 - 6 s_1^4\right) + \dots =$$

$$= -i\Theta p_1 - \frac{\Theta^2}{2!}\,p_2 + \frac{i\Theta^3}{3!}\,p_3 + \frac{\Theta^4}{4!}\,p_4 + \dots,$$

kde

$$p_1 = s_1, \quad p_2 = -\begin{vmatrix} s_1, & 1 \\ s_2, & s_1 \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} s_1, & 1, & 0 \\ s_2, & s_1, & 1 \\ s_3, & s_2, & 2s_1 \end{vmatrix},$$

$$p_4 = -\begin{vmatrix} s_1, & 1, & 0, & 0 \\ s_2, & s_1, & 1, & 0 \\ s_3, & s_2, & 2s_1, & 1 \\ s_4, & s_3, & 3s_2, & 3s_1 \end{vmatrix}.$$

Veličině p_k se říká seminvariant řádu k nebo k-tý seminvariant. Uvážíme-li, že

$$\lg \Omega(\Theta) = \sum_{h=1}^{n} \lg \Omega_h(\lambda_h \Theta),$$

vidíme, že na př. pro součet odchylek $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$ bude

$$\lg \Omega(\Theta) = \sum_{h=1}^{n} \lg \Omega_h(\Theta) =$$

$$= -i\Theta \sum p_1 - \frac{\Theta^2}{2!} \sum p_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} \sum p_3 + \ldots,$$

čili, že lze psáti

$$\lg \Omega(\Theta) = -i\Theta P_1 - \frac{\Theta^2}{2!} P_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} P_3 + \ldots,$$

kde P_k je rovno součtu k-tých seminvariantů jednotlivých odchylek. Uvažujeme-li celkovou chybu $\varepsilon = \lambda_1 \varepsilon_1$, jest

$$\lg \Omega(\Theta) = \lg \Omega_1(\lambda_1 \Theta) = -i\Theta P_1 - \frac{\Theta^2}{2!} P_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} P_3 + \ldots =$$

$$= -i\lambda_1 \Theta p_1 - \frac{\lambda_1^2 \Theta^2}{2!} p_2 + \frac{i\lambda_1^3 \Theta^3}{3!} p_3 + \ldots$$

V tomto případě je tedy P_k rovno k-tému seminvariantu chyby ε_1, násobenému λ_1^k.

Obecně, je-li $\varepsilon = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n \varepsilon_n$, plyne, že

$$\lg \Omega(\Theta) = \sum_{h=1}^{n} \lg \Omega_h(\lambda_h \Theta) =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \{-i\lambda_h \Theta p_{1h} - \frac{\lambda_h^2 \Theta^2}{2!} p_{2h} + i \frac{\lambda_h^3 \Theta^3}{3} p_{3h} + \ldots\},$$

čili, že lze $\lg \Omega(\Theta)$ psáti zase ve tvaru

$$\lg \Omega(\Theta) = -i\Theta P_1 - \frac{\Theta^2}{2!} P_2 + \frac{i\Theta^3}{3!} P_3 + \ldots,$$

kde

$$P_1 = \lambda_1 p_{11} + \lambda_2 p_{12} + \ldots + \lambda_n p_{1n},$$
$$P_2 = \lambda_1^2 p_{21} + \lambda_2^2 p_{22} + \ldots + \lambda_n^2 p_{2n},$$
$$P_3 = \lambda_1^3 p_{31} + \lambda_2^3 p_{32} + \ldots + \lambda_n^3 p_{3n} \text{ atd.}$$

Nyní budeme předpokládati, že jednotlivé chyby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ jsou velmi četné a velmi malé. Protože první seminvariant je podle definice roven

$$p_{1h} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_h \varphi_h(\varepsilon_h)\, \mathrm{d}\varepsilon_h,$$

tedy vlastně roven aritmetickému průměru všech hodnot chyby ε_h, můžeme docíliti vhodnou volbou středu, od něhož čítáme chyby, že první seminvariant vymizí.

Předpokládáme, že jsme to učinili pro všechny chyby ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, a označíme

$$\left.\begin{matrix} 0, p_{21}, p_{31}, p_{41}, \cdots \\ 0, p_{22}, p_{32}, p_{42}, \cdots \end{matrix}\right\} \text{seminvarianty chyby} \left\{\begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{matrix}\right. \text{atd.}$$

Pak podle předcházejícího pro výslednou chybu

$$\varepsilon = \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n \varepsilon_n$$

bude

$$P_1 = 0,$$
$$P_2 = \lambda_1^2 p_{21} + \lambda_2^2 p_{22} + \ldots + \lambda_n^2 p_{2n},$$
$$P_3 = \lambda_1^3 p_{31} + \lambda_2^3 p_{32} + \ldots + \lambda_n^3 p_{3n}.$$

Při tom ze vzorců pro p_2, p_3, p_4 plyne, že pro $p_1 = s_1 = 0$ bude $p_2 = s_2$, $p_3 = s_3$, $p_4 = s_4 - 3s_2^2$, podle vzorce (14) značí tedy p_2 a p_3 střední hodnoty druhých a třetích mocnin chyb.

Budeme předpokládati, že P_2 je konečné; dále, že počet chyb ε_i jest velmi značný a že střední hodnoty čtverců chyb $p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2n}$ jsou přibližně stejného řádu. Pak podmínka, že P_2 je konečné, předpokládá, že každá z hodnot $\lambda_h^2 p_{2h}$ je konečná hodnota, násobená $1 : n$, takže $\lambda_h \sqrt{p_{2h}}$ je řádu $1 : \sqrt{n}$.

Potom $\lambda^3{}_h p_{3h}$ je řádu $\frac{p_{3h}}{p_{2h}^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}}$, tedy P_3 bude řádu $\frac{p_{3h}}{p_{2h}^{\frac{3}{2}} n^{\frac{1}{2}}}$.

Pokud veličina $\frac{p_{3h}}{p_{2h}^{\frac{3}{2}}}$ bude konečná, bude P_3 — vzhledem k faktoru $n^{-\frac{1}{2}}$ — malé proti P_2.

Podobně plyne, že P_4 je malé proti P_3. Pro výslednou chybu tedy bude

$$\lg \Omega(\Theta) = -\frac{\Theta^2}{2} P_2 + i \frac{\Theta^3}{3!} P_3 + \frac{\Theta^4}{4!} P_4 + \ldots,$$

kde P_i klesá s rostoucím i.

Pravděpodobnost, že výsledná chyba je mezi ε a $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$, bude podle vzorce (13) rovna

$$\varphi(\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\Theta)\, e^{i\Theta\varepsilon}\, \mathrm{d}\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Theta\varepsilon - \frac{\Theta^2}{2} P_2 + i\frac{\Theta^3}{3!} P_3 + \frac{\Theta^4}{4!} P_4 + \cdots}\, \mathrm{d}\Theta. \tag{15}$$

Dají-li se zanedbati členy s P_3 a P_4 proti členu s P_2, jest

$$\varphi(\varepsilon) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Theta\varepsilon - \frac{1}{2}\Theta^2 P_2}\, \mathrm{d}\Theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\Theta^2 P_2} (\cos\Theta\varepsilon + i \sin\Theta\varepsilon)\, \mathrm{d}\Theta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\Theta^2 P_2} \cos\Theta\varepsilon\, \mathrm{d}\Theta,$$

a protože

$$\int_0^{\infty} e^{-A\varepsilon^2} \cos b\varepsilon\, \mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{-\frac{b^2}{4A}}, \quad *)$$

*) K. Petr: Počet integrální, Praha 1915, str. 225.

bude

$$\varphi(\varepsilon) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi P_2}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2P_2}}, \qquad (15')$$

kde

$$P_2 = \lambda_1^2 p_{21} + \lambda_2^2 p_{22} + \ldots + \lambda_n^2 p_{2n}.$$

Ve 2. odstavci jsme uvedli některé podmínky, jejichž splnění zajišťuje, že měřické chyby se řídí normálním zákonem četnosti. Byly to:

a) Podmínky Schiaparelliho o vlastnostech nejpravděpodobnější hodnoty odvozené z měření, doplněné další podmínkou, že funkce četnosti pro uvažované chyby mají tvar $\varphi_i(\varepsilon_i)$.

b) Podmínka, že skutečná měřická chyba je rovna lineární celistvé funkci částečných chyb, z nichž každá se řídí normálním zákonem četnosti.

c) Podmínka, že skutečná měřická chyba je rovna lineární celistvé funkci částečných chyb, z nichž každá se řídí zákonem četnosti $\varphi_i(\varepsilon_i)$, jestliže počet částečných chyb je dostatečně velký a jsou-li splněny jisté podmínky o středních hodnotách druhých a vyšších mocnin částečných chyb.

Je-li některý z předpokladů a), b) nebo c) splněn, můžeme býti jisti, že měřické chyby se řídí normálním zákonem četnosti, a z toho plyne, že je nutno v těchto případech vyrovnávati podle metody nejmenších čtverců; dále, že hodnoty neznámých takto vypočtené jsou nejpravděpodobnější hodnoty, jež plynou z výsledků měření; že mají nejmenší střední chyby a největší váhy ze všech lineárních celistvých funkcí výsledků měření $l_1, l_2, \ldots, l_n$; a konečně, že extrémní možné chyby, jež jsou podle počtu měření rovné dvojnásobným, trojnásobným nebo čtyrnásobným středním chybám, vymezují obory, uvnitř nichž jsou pravděpodobně skutečné hodnoty neznámých výsledných hodnot.

3. Druhé zdůvodnění methody nejmenších čtverců. Nechť hledané veličiny x, y, z mají býti zase určeny z rovnic

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{16}$$

kde l_i jsou prosté členy odvozené z výsledků měření. Předpokládáme, že l_i nemají stejnou váhu.

Laplace uvažuje o této úloze asi takto: Rovnice (16) nutno nějak kombinovati, abychom dostali konečné rovnice pro výpočet neznámých. Ale jak to udělati nejvýhodněji?

Nechceme užívati jiných konečných rovnic než lineárních. To je podmínka nutná, jde-li o velký počet pozorování, jinak by vylučování neznámých a jejich výpočet byl nepraktický.

Všechny způsoby kombinací rovnic (16), má-li z nich býti vytvořena konečná rovnice lineární, vedou k násobení rovnic (16) jistými faktory a k utvoření součtu těchto součinů. Označíme-li faktory k výpočtu neznámé x písmeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, budeme míti pro x konečnou rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i x + b_i y + c_i z - l_i) = 0,$$

při čemž

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i = 0, \tag{17}$$

takže

$$x = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \ldots + \lambda_n l_n. \tag{17'}$$

Kdyby $n = 3$, stačily by rovnice (17) k výpočtu faktorů $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i k výpočtu neznámé $x = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3$. Pokud však $n > 3$, nestačí rovnice (17) k určení faktorů λ. Nutno tedy připojiti další podmínku. Chceme-li dostati postup nejvýhodnější, musíme hledati takovou soustavu faktorů $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$, aby čtverec střední chyby v každé vypočtené neznámé byl nejmenší, nebo její váha největší.

Podle této úvahy Laplaceovy*) postupujeme takto: Jak jsme viděli (I, 3) a ještě uvidíme (VII, 3b), je za jistých předpokladů převrácená hodnota váhy p_x pro neznámou x,

*) Théorie analytique des probabilités, II, § 24.

plynoucí ze vzorce (17′), rovna

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{p_n}, \tag{18}$$

jsou-li $p_1, p_2, \ldots, p_n$ váhy jednotlivých rovnic (16).

Má tedy býti výraz (18) minimem při podmínkách (17). Funkce F (viz IV, 2) je zde rovna

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2}{p_i} - 2k_1 \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i a_i - 1) - 2k_2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i - 2k_3 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i.$$

Podmínky minima jsou

$$\frac{\lambda_i}{p_i} = k_1 a_i + k_2 b_i + k_3 c_i. \tag{19}$$

Dosadíme-li odtud za λ_i do podmínek (17), bude

$$\begin{aligned} k_1 [paa] + k_2 [pab] + k_3 [pac] &= 1, \\ k_1 [pab] + k_2 [pbb] + k_3 [pbc] &= 0, \\ k_1 [pac] + k_2 [pbc] + k_3 [pcc] &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

a při tom

$$\begin{aligned} x = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \ldots + \lambda_n l_n = \\ = k_1 [pal] + k_2 [pbl] + k_3 [pcl]. \end{aligned} \tag{20′}$$

Označíme-li písmenem Δ determinant soustavy rovnic (20), bude

$$k_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pbb], [pbc] \\ [pbc], [pcc] \end{vmatrix}, \quad k_2 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pab], [pbc] \\ [pac], [pcc] \end{vmatrix},$$

$$k_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pab], [pbb] \\ [pac], [pbc] \end{vmatrix},$$

a tedy podle vzorce (20′) bude

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pal], [pab], [pac] \\ [pbl], [pbb], [pbc] \\ [pcl], [pcb], [pcc] \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Kdybychom k určení neznámých x, y, z položili podmínku,

aby byl minimální součet čtverců odchylek $v_i = a_i x + b_i y + c_i z - l_i$, při čemž každý sčítanec v_i^2 vchází do součtu násobený příslušnou vahou p_i, t. j. má-li býti minimální součet

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (a_i x + b_i y + c_i z - l_i)^2,$$

musí býti (srovn. III, 1)

$$\begin{aligned} [paa]\, x + [pab]\, y + [pac]\, z &= [pal], \\ [pab]\, x + [pbb]\, y + [pbc]\, z &= [pbl], \\ [pac]\, x + [pbc]\, y + [pcc]\, z &= [pcl], \end{aligned}$$

a odtud zase

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [pal], [pab], [pac] \\ [pbl], [pbb], [pbc] \\ [pcl], [pcb], [pcc] \end{vmatrix}.$$

[viz (21)]. Podobně pro y a z.

Je tedy patrno: Podmínky, aby konečné rovnice pro neznámé x, y, z byly lineární a aby váhy p_x, p_y, p_z neznámých x, y, z byly maximální, vedou ke stejným hodnotám neznámých jako methoda nejmenších čtverců.

A naopak: Methoda nejmenších čtverců vede k takovým hodnotám neznámých x, y, z, které mají největší váhy (nejmenší střední chyby) ze všech lineárních celistvých funkcí hodnot $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Podle tohoto druhého zdůvodnění methody nejmenších čtverců nejsou vyrovnané hodnoty neznámých nejpravděpodobnějšími hodnotami, jako byly v případě, kdy jsme mohli předpokládati, že měřické chyby se řídí normálním zákonem četnosti. Střední a extrémní možná chyba nemá v tomto případě významu pro vymezení oboru, v němž jsou pravděpodobně skutečné hodnoty neznámých.

K tomuto druhému zdůvodnění methody nejmenších čtverců připojíme několik doplňků.

a) Podmínku, aby konečné rovnice pro výpočet neznámých byly lineární, autoři po Laplaceovi skoro vesměs pře-

cházejí bez povšimnutí. Ch. A. Vogler*) odůvodňuje lineárnost konečných rovnic pro výpočet neznámých asi takto:

Vyrovnané hodnoty neznámých x, y, z jsou jakési funkce prostých členů, a to takové funkce, že

1. hodnoty neznámých, které vyhovují všem odchylkovým rovnicím, musí zůstati nezměněny a

2. přesné hodnoty prostých členů vedou k přesným hodnotám neznámých, které zase splňují všechny přesné odchylkové rovnice.

Píšeme vyrovnané hodnoty

$$x = f_x(l_1, l_2, \ldots, l_n), \quad y = f_y(l_1, l_2, \ldots, l_n), \quad z = f_z(l_1, l_2, \ldots, l_n).$$

Dosadíme-li tyto hodnoty za x, y, z do rovnic (16), bude

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i + \bar{l}_i, \tag{16'}$$

takže $l_i + \bar{l}_i$ můžeme považovati za takové prosté členy, že všechny odchylkové rovnice (16') se dají splniti neznámými

$$\begin{aligned} x &= f_x(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \ldots, l_n + \bar{l}_n), \\ y &= f_y(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \ldots, l_n + \bar{l}_n), \\ z &= f_z(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \ldots, l_n + \bar{l}_n), \end{aligned}$$

při čemž podle předpokladu 1:

$$\begin{aligned} f_x(l_1, l_2, \ldots, l_n) &= f_x(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \ldots, l_n + \bar{l}_n), \\ f_y(l_1, l_2, \ldots, l_n) &= f_y(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \ldots, l_n + \bar{l}_n), \\ f_z(l_1, l_2, \ldots, l_n) &= f_z(l_1 + \bar{l}_1, l_2 + \bar{l}_2, \ldots, l_n + \bar{l}_n). \end{aligned} \tag{22}$$

Označíme-li $l_i + \varepsilon_i$ přesné hodnoty prostých členů a $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ přesné hodnoty neznámých, musí býti podle předpokladu 2:

$$\begin{aligned} x + \xi &= f_x(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, \ldots, l_n + \varepsilon_n), \\ y + \eta &= f_y(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, \ldots, l_n + \varepsilon_n), \\ z + \zeta &= f_z(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, \ldots, l_n + \varepsilon_n). \end{aligned} \tag{23}$$

*) Didaktisches zur Ausgleichungsrechnung. Z. f. Vermessungswesen, Bd. 33 (1904), str. 394—402 a 609—613.

Jde-li o druhé zdůvodnění methody nejmenších čtverců, založené na vzorci pro váhu výsledné hodnoty, jejíž chyba je lineární funkcí částečných chyb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, musíme předpokládati, že ε_i jsou tak malé veličiny, že v Taylorových rozvojích funkcí f_x, f_y, f_z můžeme zanedbati členy od druhého řádu, že tedy místo (23) stačí psáti

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n, \\ \eta &= \lambda'_1\varepsilon_1 + \lambda'_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda'_n\varepsilon_n, \\ \zeta &= \lambda''_1\varepsilon_1 + \lambda''_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda''_n\varepsilon_n, \end{aligned} \tag{23'}$$

kde

$$\lambda_i = \frac{\partial f_x}{\partial l_i}, \quad \lambda'_i = \frac{\partial f_y}{\partial l_i}, \quad \lambda_i'' = \frac{\partial f_z}{\partial l_i}.$$

Tyto derivace se mohou vypočísti na př. pro střední hodnoty $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$ v uvažovaném oboru.

Je zřejmé, že v téže úvaze nemůžeme jednou klásti za funkce f lineární výrazy a po druhé přesné výrazy, pokud proměnné jsou v přibližně stejných mezích. Předpokládáme-li tedy, že odchylky $\bar{l}_i$ jsou přibližně ve stejných mezích jako skutečné chyby ε_i, musíme místo rovnic (22) psáti

$$\begin{aligned} \lambda_1\bar{l}_1 + \lambda_2\bar{l}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{l}_n &= 0, \\ \lambda'_1\bar{l}_1 + \lambda'_2\bar{l}_2 + \ldots + \lambda'_n\bar{l}_n &= 0, \\ \lambda''_1\bar{l}_1 + \lambda''_2\bar{l}_2 + \ldots + \lambda''_n\bar{l}_n &= 0. \end{aligned} \tag{22'}$$

Protože podle předpokladu 2 musí býti odchylkové rovnice (16) splněny, klademe-li místo l_i všude $l_i + \varepsilon_i$ a místo x, y, z po řadě $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$, bude

$$a_i(x + \xi) + b_i(y + \eta) + c_i(z + \zeta) = l_i + \varepsilon_i,$$

a odečteme-li od této rovnice

$$a_i x + b_i y + c_i z = l_i + \bar{l}_i, \tag{16'}$$

bude

$$a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta = \varepsilon_i - \bar{l}_i.$$

Násobíme-li po řadě λ_i a sečteme, bude — vzhledem k (22')

a k (23′)

$$[a\lambda]\,\xi + [b\lambda]\,\eta + [c\lambda]\,\zeta = [\varepsilon\lambda] = \xi,$$

podobně

$$\begin{aligned}[a\lambda']\,\xi + [b\lambda']\,\eta + [c\lambda']\,\zeta &= [\varepsilon\lambda'] = \eta, \\ [a\lambda'']\,\xi + [b\lambda'']\,\eta + [c\lambda'']\,\zeta &= [\varepsilon\lambda''] = \zeta.\end{aligned} \tag{24}$$

Mysleme si několik řad měření a nechť hodnoty $l_1, l_2, \ldots, l_n$ jsou vždy v uvažovaném oboru. Pak pro každou řadu dojdeme k rovnicím (24) se stejnými koeficienty, ale nestejnými ξ, η, ζ. Z toho je patrno, že rovnice (24) musí býti splněny identicky pro jakékoli ξ, η, ζ, t. j. musí býti

$$\begin{aligned}[a\lambda] &= 1, \ [b\lambda] = 0, \ [c\lambda] = 0, \\ [a\lambda'] &= 0, \ [b\lambda'] = 1, \ [c\lambda'] = 0, \\ [a\lambda''] &= 0, \ [b\lambda''] = 0, \ [c\lambda''] = 1.\end{aligned} \tag{25}$$

Rovnice (22′), dosadíme-li do nich z rovnic (16′) za $\bar{l}_i$, nabudou tvaru

$$[a\lambda]\,x + [b\lambda]\,y + [c\lambda]\,z - [l\lambda] = 0,$$

z nich podle (25) dostaneme $x = [l\lambda]$, $y = [l\lambda']$ a $z = [l\lambda'']$ [viz (17′)].

b) Zbývá ukázati, jak byl odvozen vzorec

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{p_n} \tag{18}$$

pro váhu lineární funkce částečných chyb.

α) V odstavci VII, 1b) bylo dokázáno: Řídí-li se chyby ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, normálním zákonem četnosti

$$\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2},$$

bude pravděpodobnost, že výsledná chyba $\varepsilon = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ je v mezích od ε do $\varepsilon + d\varepsilon$, rovna

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon,$$

kde míra přesnosti

$$H = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{h_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{h_2^2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{h_n^2}}}.$$

Pravděpodobnost, že výsledná chyba jest v mezích od $-\varepsilon$ do $+\varepsilon$ bude tedy $\Phi(H\varepsilon)$ (srovn. I, 8). Ať je ε jakékoli, bude tato pravděpodobnost větší, je-li větší míra přesnosti H. Podobnou úvahou došel Laplace k požadavku, že míra přesnosti H má býti co možná největší.

A zavedeme-li místo míry přesnosti h_i a H váhy p_i a p_x, při čemž

$$h_i m_i = h_i \frac{m_0}{\sqrt{p_i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

[viz I, (24′) a (16′)], čili

$$\frac{1}{h_i^2} = \frac{2m_0^2}{p_i} \text{ a podobně } \frac{1}{H^2} = \frac{2m_0^2}{p_x},$$

bude

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{p_n}. \qquad (18)$$

Tento výsledek je tedy založen na předpokladu, že chyb ε_i je konečný počet (rovný zde počtu měření) a že se všechny řídí normálním zákonem četnosti.

β) Gauss vyšel od pojmu střední chyby a ze vzorce [I, (12″)] pro lineární funkci částečných chyb, který byl dokázán za předpokladu, že měřené veličiny jsou na sobě nezávislé a že funkce četnosti částečných chyb jsou sudé funkce.

Zavedeme-li zase váhy jako veličiny nepřímo úměrné čtvercům středních chyb (srovn. I, 6), dostaneme zase vzorec (18).

γ) Vzorec (18) byl konečně odvozen*) z těchto jednodušších předpokladů o vlastnostech váhy:

*) F. Bernstein und W. S. Baer: Ein Axiomensystem der Methode der kleinsten Quadrate, Math. Annalen, 1915, str. 284—294. — Whittaker-Robinson, l. c. str. 228—231.

1. Je-li x_i naměřená hodnota pro veličinu x, označíme-li váhu veličiny x_i písmenem p_i a je-li λ nějaké číslo, pak hodnotě λx_i veličiny λx přísluší váha $p_i f(\lambda)$, kde $f(\lambda)$ je nějaká funkce λ.

2. Přísluší-li hodnotě x_i veličiny x váha p_i a nezávisle naměřené hodnotě y_i veličiny y váha q_i, přísluší hodnotě $x_i + y_i$ pro součet $x + y$ váha r_i, při čemž

$$\psi(r_i) = \psi(p_i) + \psi(q_i). \tag{26}$$

3. Přísluší-li dvěma nezávisle naměřeným hodnotám téže veličiny stejná váha rovná 1, přísluší aritmetickému průměru obou naměřených hodnot váha 2.

4. Přísluší-li naměřeným hodnotám $x_1, \ldots, x_n$ stejná váha rovná 1, přísluší součtu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ váha řádu $1 : n$, t. j. násobíme-li váhu součtu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ počtem n, je součin konečný, roste-li n nad každé číslo.

Z axiomu 1 plyne: Je-li u nějaké číslo, přísluší hodnotě $u\lambda x_i$ veličiny $u\lambda x$ váha rovná $p_i f(u\lambda)$, ale také rovná $p_i f(u) \,.\, f(\lambda)$. Funkce f musí tedy splňovati podmínku (t. zv. funkcionální rovnici)

$$f(u\lambda) = f(u) \,.\, f(\lambda). \tag{27}$$

Jediná funkce $f(\lambda)$ proměnné $\lambda > 0$, která je konečná v intervalu $\varepsilon, \varepsilon'$, při čemž $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, a která hoví funkcionální rovnici (27) pro všechny kladné hodnoty proměnných λ, u, jest funkce λ^k, kde k je reálná konstanta.*) Tedy: váha příslušná hodnotě λx_i veličiny λx je

$$p_i \lambda^k. \tag{27'}$$

Podobně váha příslušná hodnotě λy_i veličiny λy je $q_i \lambda^k$ a váha příslušná hodnotě $\lambda (x_i + y_i)$ je $r_i \lambda^k$, při čemž podle předpokladu 2 musí býti

$$\psi (r_i \lambda^k) = \psi (p_i \lambda^k) + \psi (q_i \lambda^k). \tag{28}$$

Veličina r_i je podle vzorce (26) funkcí proměnných p_i a q_i. Derivujeme-li rovnici (26) podle p_i, jest

*) K. Petr: Počet diferenciální, str. 117.

$$\psi'(r_i)\frac{\partial r_i}{\partial p_i} = \psi'(p_i)$$

a podobně z rovnice (28):

$$\psi'(r_i\lambda^k)\frac{\partial r_i}{\partial p_i}\lambda^k = \psi'(p_i\lambda^k)\,\lambda^k,$$

tedy dělením

$$\frac{\psi'(p_i\lambda^k)}{\psi'(p_i)} = \frac{\psi'(r_i\lambda^k)}{\psi'(r_i)} = \frac{\psi'(q_i\lambda^k)}{\psi'(q_i)}.$$

Odtud je patrno, že podíl $\frac{\psi'(z\lambda^k)}{\psi'(z)}$ je nezávislý na z. A protože $z\lambda^k$ je souměrná funkce vzhledem k z a λ^k, nezávisí funkce $\frac{\psi'(z\lambda^k)}{\psi'(z)\psi'(\lambda^k)}$ ani na z, ani na λ^k a je rovna konstantě c. Píšeme-li u místo λ^k, musí funkce ψ' splňovati funkcionální rovnici $\psi'(zu) = c\,\psi'(z)\,\psi'(u)$. Podle dřívějšího musí býti funkce $\psi'(z)$ rovna $\frac{1}{c}\,.\,z^{k'}$ a tedy $\psi(z) = \frac{1}{c(k'+1)}z^{k'+1}$.

Konstantou $\frac{1}{c(k'+1)}$ můžeme ve vzorci (26) krátiti, takže můžeme psáti

$$\psi(z) = z^{k''}, \tag{29}$$

kde $k'' = k' + 1$.

Nechť jsou x_1, x_2 dvě nezávislé hodnoty veličiny x, každá o váze 1. Pak $\frac{1}{2}x_1$, $\frac{1}{2}x_2$ jsou dvě nezávislé hodnoty veličiny $\frac{1}{2}x$, každá o váze $\frac{1}{2}k$ [srovn. vzorec (27′)]. A $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ jest hodnota veličiny x, jíž přísluší podle vzorce (26) a (29) váha r, a jest

$$(r)^{k'+1} = \frac{1}{2^{kk''}} + \frac{1}{2^{kk''}} = \frac{1}{2^{kk''-1}}.$$

Podle předpokladu 3 musí býti $r = 2$, tedy $2^{k''} = \frac{1}{2^{kk''-1}}$,

čili

$$k''(k+1) = 1. \tag{30}$$

Je-li x'_1 hodnota veličiny x_1 o váze p_1 a x'_2 nezávisle určená hodnota veličiny x_2 o váze p_2, pak $\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2$ je hodnota veličiny $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ o váze r, při čemž

$$r^{k''} = (p_1 \lambda_1^{\,k})^{k''} + (p_2 \lambda_2^{\,k})^{k''} = p_1^{\,k''} \lambda_1^{\,1-k''} + p_2^{\,k''} \lambda_2^{\,1-k''}. \quad (31)$$

Je-li dále x'_3 nezávisle určená hodnota veličiny x_3 o váze p_3, pak $\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3$ je hodnota veličiny $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ o váze r', při čemž

$$r'^{k''} = r^{k''} + (p_3 \lambda_3^{\,k})^{k''} = p_1^{\,k''} \lambda_1^{\,1-k''} + p_2^{\,k''} \lambda_2^{\,1-k''} + p_3^{\,k''} \lambda_3^{\,1-k''}$$

atd. (31′)

Jsou-li $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ hodnoty pro veličiny $x_1, x_2, \ldots, x_n$, každá o váze rovné 1, pak $x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n$ je hodnota pro součet $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ a příslušná váha r plyne podle vzorce (31′) z rovnice $r^{k''} = n$, tedy $r = n^{\frac{1}{k''}}$. Podle předpokladu 4 musí býti $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{k''}+1}$ konečná, tedy

$$\frac{1}{k''} + 1 = 0, \qquad k'' = -1.$$

Jsou-li tedy $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ hodnoty pro veličiny $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o vahách rovných $p_1, p_2, \ldots, p_n$, je $\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \ldots + \lambda_n x'_n$ hodnota veličiny $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, jejíž váha p_x je dána podle vzorce (31′) vzorcem

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^{\,2}}{p_1} + \frac{\lambda_2^{\,2}}{p_2} + \ldots + \frac{\lambda_n^{\,2}}{p_n}. \quad (18)$$

*

Ve 3. odstavci jsme uvedli některé podmínky, za nichž je platné druhé zdůvodnění methody nejmenších čtverců. Kromě případu, kdy se chyby měřických výsledků řídí normálním zákonem četnosti (srovn. odst. 2), uvedli jsme tyto podmínky:

a) Výsledné hodnoty mají býti lineární celistvé funkce hodnot $l_1, l_2, \ldots, l_n$ plynoucích z měření.

b) Je-li váha chyby ε_i rovna p_i, je váha p_x funkce $\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n$ dána vzorcem

$$\frac{1}{p_x} = \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{\lambda_n^2}{p_n}.$$

Tato druhá podmínka byla odvozena jednak (podle Gausse) pro případ, že měřené veličiny jsou na sobě nezávislé a že funkce četnosti jednotlivých chyb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ jsou sudé funkce, jednak z některých jednodušších předpokladů o vlastnostech váhy. [Viz β) resp. γ).]

Je-li splněn předpoklad β) nebo γ), a uznáme-li jako nutný předpoklad a), pak nutno zase vyrovnávati podle methody nejmenších čtverců. Hodnoty neznámých, takto vypočtené, mají nejmenší střední chyby a největší váhy. Nejsou to však nejpravděpodobnější hodnoty, plynoucí z výsledků měření, a střední a extrémní možné chyby nemají v tomto případě významu pro vymezení oboru, v němž jsou pravděpodobně skutečné hodnoty neznámých.

4. Měřické chyby se neřídí ani normálním zákonem četnosti, ani nejsou splněny předpoklady druhého zdůvodnění methody nejmenších čtverců. (Viz odst. 3. Na př. funkce četnosti není sudá funkce, nebo měřické chyby nejsou nahodilé atd.) V tomto případě vyrovnání podle methody nejmenších čtverců nepodává ani hodnoty nejpravděpodobnější, ani hodnoty o největší váze a nemá také smyslu odhadovati přesnost měření a výsledků pomocí středních nebo průměrných chyb, protože (podle odst. I, 3) to předpokládá, že funkce četnosti jsou sudé funkce.

Ale i v tom případě podává methoda nejmenších čtverců snadno vypočítatelné a určité vyrovnané hodnoty; má ty výhody, na něž upozornil již Legendre.

SEZNAM OBRAZCŮ.

OBSAH.

Spisovatel	*Prof. Dr. Boh. Kladivo:*
Název díla	***MĚŘICKÉ CHYBY A JEJICH VYROVNÁNÍ*** *(podle methody nejmenších čtverců)*
Vydala	*Jednota českých matematiků a fysiků*
roku	*1943*
Vytiskla	*knihtiskárna Prometheus v Praze*
Komisionář	*nakladatelství Prometheus v Praze*
Vydání	*I.*
Cena	*K 37,—*

je tedy úkolem vyrovnávacího počtu.

Jednou z jeho nejjednodušších cest je methoda nejmenších čtverců, kterou vám předkládá autor této knihy. Knížka Kladivova nespokojuje se však jen s *theoretickým výkladem* o podstatě tohoto způsobu vyrovnávacího počtu, ale ukazuje vám na řadě příkladů, jak se skutečně v praxi mohou výsledky měření methodou nejmenších čtverců vyrovnávat, *jak se vyšetřuje povaha chyb* a konečně *jak se posuzuje přesnost měření a výpočtů.*

Tím vším obohatí vaše poznání a bude vám mostem mezi theorií a denním životem.

Dostanete ji všude u knihkupců nebo přímo v nakladatelství

PROMETHEUS,
Praha II, Žitná 25.

K 37,—